SEÑALES Y SISTEMAS

SEGUNDA EDICIÓN

ALAN V. OPPENHEIM
ALAN S. WILLSKY
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

S. HAMID NAWAB
BOSTON UNIVERSITY

TRADUCCIÓN: ING. GLORIA MATA HERNÁNDEZ
PROFESORA DE TIEMPO COMPLETO
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

REVISIÓN TÉCNICA: M. EN C. AGUSTÍN SUÁREZ FERNÁNDEZ
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
IZTAPALAPA

PRENTICE
HALL

MÉXICO • NUEVA YORK • BOGOTÁ • LONDRES • MADRID
MUNICH • NUEVA DELHI • PARÍS • RÍO DE JANEIRO
SINGAPUR • SYDNEY • TOKIO • TORONTO • ZURICH

Edición en español:
Editor: Pablo Eduardo Roig Vázquez
Supervisora de traducción: Rocío Cabañas Chávez
Supervisor de producción: Alejandro A. Gómez Ruiz
Corrector de estilo: Carlos Roberto Ramírez Fuentes

Edición en inglés:
Acquisitions editor: Tom Robbins
Production service: TKM Productions
Editorial/production supervision: Sharyn Vitrano
Interior and cover design: Patrice Van Acker
Art director: Amy Rosen
Managing editor: Bayani Mendoza DeLeon
Editor-in-chief: Marcia Horton
Director of production and manufacturing: David W. Riccardi
Manufacturing buyer: Donna Sullivan
Editorial assistant: Phyllis Morgan

OPPENHEIM: SEÑALES Y SISTEMAS, 2a. Ed.

Traducido del inglés de la obra: **SIGNALS AND SYSTEMS, SECOND EDITION.**

ISBN 970-17-0116-X

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1524.

Original English Language Edition Published by Prentice-Hall, Inc.
A Simon & Schuster Company.

ISBN 0-13-814757-4

IMPRESO EN MÉXICO/PRINTED IN MEXICO

MAY

PROGRAMAS EDUCATIVOS, S. A. DE C.V.
CALZ. CHABACANO No. 65, LOCAL A
COL. ASTURIAS,DELEG. CUAUHTEMOC,
C.P. 06850, MÉXICO, D.F.

EMPRESA CERTIFICADA POR EL
INSTITUTO MEXICANO DE NORMALIZACIÓN
Y CERTIFICACIÓN A.C., BAJO LA NORMA
ISO-9002: 1994/NMX-CC-004: 1995
CON EL No. DE REGISTRO RSC-048

199

A Phyllis, Jason y Justine

A Susanna, Lydia y Kate

CONTENIDO

PREFACIO XVII

RECONOCIMIENTOS XXV

PRÓLOGO XXVII

1 SEÑALES Y SISTEMAS 1

1.0 Introducción 1

1.1 Señales continuas y discretas 1
1.1.1 Ejemplos y representación matemática 1
1.1.2 Señales de energía y de potencia 5

1.2 Transformaciones de la variable independiente 7
1.2.1 Ejemplos de transformaciones de la variable independiente 8
1.2.2 Señales periódicas 11
1.2.3 Señales par e impar 13

1.3 Señales exponenciales y senoidales 14
1.3.1 Señales continuas exponencial compleja y senoidal 15
1.3.2 Señales discretas exponencial compleja y senoidal 21
1.3.3 Propiedades de periodicidad de exponenciales discretas 25

1.4 Las funciones impulso unitario y escalón unitario 30
1.4.1 Las secuencias discretas impulso unitario y escalón unitario 30
1.4.2 Las funciones continuas escalón unitario e impulso unitario 32

1.5 Sistemas continuos y discretos 38
1.5.1 Ejemplos sencillos de sistemas 39
1.5.2 Interconexiones de sistemas 41

1.6 Propiedades básicas de los sistemas 44
1.6.1 Sistemas con y sin memoria 44
1.6.2 Invertibilidad y sistemas inversos 45
1.6.3 Causalidad 46
1.6.4 Estabilidad 48
1.6.5 Invariancia en el tiempo 50
1.6.6 Linealidad 53

1.7 Resumen 56

Problemas 57

2 SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO 74

2.0 Introducción 74

2.1 Sistemas LTI discretos: La suma de convolución 75

2.1.1 La representación de señales discretas en términos de los impulsos 75
2.1.2 La respuesta al impulso unitario discreto y la representación de la suma de convolución de sistemas LTI 77

2.2 Sistemas LTI continuos: La integral de convolución 90
2.2.1 La representación de señales continuas en términos de los impulsos 90
2.2.2 La respuesta al impulso unitario continuo y la representación de la integral de convolución de sistemas LTI 94

2.3 Propiedades de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo 103
2.3.1 Propiedad conmutativa 104
2.3.2 Propiedad distributiva 104
2.3.3 Propiedad asociativa 107
2.3.4 Sistemas LTI con y sin memoria 108
2.3.5 Invertibilidad de sistemas LTI 109
2.3.6 Causalidad para los sistemas LTI 112
2.3.7 Estabilidad para los sistemas LTI 113
2.3.8 Respuesta al escalón unitario de un sistema LTI 115

2.4 Sistemas LTI causales descritos por ecuaciones diferenciales y de diferencias 116
2.4.1 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes 117
2.4.2 Ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes 121
2.4.3 Representación en diagrama de bloque de sistemas de primer orden descritos mediante ecuaciones diferenciales y de diferencias 124

2.5 Funciones singulares 127
2.5.1 El impulso unitario como un pulso corto idealizado 128
2.5.2 Definición del impulso unitario mediante la convolución 131
2.5.3 Dobletes unitarios y otras funciones singulares 132

2.6 Resumen 137

Problemas 137

3 REPRESENTACIÓN DE SEÑALES PERIÓDICAS EN SERIES DE FOURIER 177

3.0 Introducción 177

3.1 Una perspectiva histórica 178

3.2 La respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas 182

3.3 Representación en series de Fourier de señales periódicas continuas 186
3.3.1 Combinaciones lineales de exponenciales complejas relacionadas armónicamente 186
3.3.2 Determinación de la representación en series de Fourier de una señal periódica continua 190

3.4 Convergencia de las series de Fourier 195

3.5 Propiedades de la serie continua de Fourier 202
3.5.1 Linealidad 202
3.5.2 Desplazamiento de tiempo 202
3.5.3 Inversión de tiempo 203
3.5.4 Escalamiento de tiempo 204

3.5.5 Multiplicación 204
3.5.6 Conjugación y simetría conjugada 204
3.5.7 Relación de Parseval para señales periódicas continuas 205
3.5.8 Resumen de las propiedades de la serie continua de Fourier 205
3.5.9 Ejemplos 205

3.6 Representación en series de Fourier de señales periódicas discretas 211
3.6.1 Combinaciones lineales de exponenciales complejas relacionadas armónicamente 211
3.6.2 Determinación de la representación en series de Fourier de una señal periódica 212

3.7 Propiedades de la serie discreta de Fourier 221
3.7.1 Multiplicación 222
3.7.2 Primera diferencia 222
3.7.3 Relación de Parseval para señales periódicas discretas 223
3.7.4 Ejemplos 223

3.8 Serie de Fourier y sistemas LTI 226

3.9 Filtrado 231
3.9.1 Filtros conformadores de frecuencia 232
3.9.2 Filtros selectivos en frecuencia 236

3.10 Ejemplos de filtros continuos descritos mediante ecuaciones diferenciales 239
3.10.1 Un filtro paso bajas RC sencillo 239
3.10.2 Un filtro paso altas RC sencillo 241

3.11 Ejemplos de filtros discretos descritos mediante ecuaciones de diferencias 244
3.11.1 Filtros recursivos discretos de primer orden 244
3.11.2 Filtros no recursivos discretos 245

3.12 Resumen 249

Problemas 250

4 LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER 284

4.0 Introducción 284

4.1 Representación de señales aperiódicas: La transformada continua de Fourier 285
4.1.1 Desarrollo de la representación de la transformada de Fourier de una señal aperiódica 285
4.1.2 Convergencia de las transformadas de Fourier 289
4.1.3 Ejemplos de transformadas continuas de Fourier 290

4.2 La transformada de Fourier para señales periódicas 296

4.3 Propiedades de la transformada continua de Fourier 300
4.3.1 Linealidad 301
4.3.2 Desplazamiento de tiempo 301
4.3.3 Conjugación y simetría conjugada 303
4.3.4 Diferenciación e integración 306

4.3.5 Escalamiento de tiempo y de frecuencia 308
4.3.6 Dualidad 309
4.3.7 Relación de Parseval 312

4.4 La propiedad de convolución 314
4.4.1 Ejemplos 317

4.5 La propiedad de multiplicación 322
4.5.1 Filtrado selectivo en frecuencia con frecuencia central variable 325

4.6 Tablas de las propiedades de Fourier y de los pares básicos de transformadas de Fourier 328

4.7 Sistemas caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes 330

4.8 Resumen 333

Problemas 334

5 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO 358

5.0 Introducción 358

5.1 Representación de señales aperiódicas: La transformada de Fourier de tiempo discreto 359
5.1.1 Desarrollo de la transformada de Fourier de tiempo discreto 359
5.1.2 Ejemplos de transformadas de Fourier de tiempo discreto 362
5.1.3 Problemas de la convergencia asociados con la transformada de Fourier de tiempo discreto 366

5.2 La transformada de Fourier para señales periódicas 367

5.3 Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo discreto 372
5.3.1 Periodicidad de la transformada de Fourier de tiempo discreto 373
5.3.2 Linealidad de la transformada de Fourier 373
5.3.3 Desplazamiento de tiempo y desplazamiento de frecuencia 373
5.3.4 Conjugación y simetría conjugada 375
5.3.5 Diferenciación y acumulación 375
5.3.6 Inversión en tiempo 376
5.3.7 Expansión en tiempo 377
5.3.8 Diferenciación en frecuencia 380
5.3.9 La relación de Parseval 380

5.4 La propiedad de convolución 382
5.4.1 Ejemplos 383

5.5 La propiedad de multiplicación 388

5.6 Tablas de las propiedades de la transformada de Fourier y pares básicos de la transformada de Fourier 390

5.7 Dualidad 390
5.7.1 Dualidad en la serie discreta de Fourier 391
5.7.2 Dualidad entre la transformada de Fourier de tiempo discreto y la serie continua de Fourier 395

5.8 Sistemas caracterizados por ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes 396

5.9 Resumen 399

Problemas 400

6 Caracterización en tiempo y frecuencia de señales y sistemas 423

6.0 Introducción 423

6.1 Representación de la magnitud-fase de la transformada de Fourier 423

6.2 Representación de la magnitud-fase de la respuesta en frecuencia de sistemas LTI 427

6.2.1 Fases lineal y no lineal 428
6.2.2 Retardo de grupo 430
6.2.3 Magnitud logarítmica y diagramas de Bode 436

6.3 Propiedades en el dominio del tiempo de filtros ideales selectivos en frecuencia 439

6.4 Aspectos en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia de los filtros no ideales 444

6.5 Sistemas continuos de primer y segundo órdenes 448

6.5.1 Sistemas continuos de primer orden 448
6.5.2 Sistemas continuos de segundo orden 451
6.5.3 Diagramas de Bode para respuestas en frecuencia racionales 456

6.6 Sistemas discretos de primer y segundo órdenes 461

6.6.1 Sistemas discretos de primer orden 461
6.6.2 Sistemas discretos de segundo orden 465

6.7 Ejemplos de análisis de sistemas en el dominio del tiempo y de la frecuencia 472

6.7.1 Análisis de un sistema de suspensión para automóvil 473
6.7.2 Ejemplos de filtros discretos no recursivos 476

6.8 Resumen 482

Problemas 483

7 Muestreo 514

7.0 Introducción 514

7.1 Representación de una señal continua mediante sus muestras: El teorema de muestreo 515

7.1.1 Muestreo con tren de impulsos 516
7.1.2 Muestreo con un retenedor de orden cero 520

7.2 Reconstrucción de una señal a partir de sus muestras usando la interpolación 522

7.3 El efecto del submuestreo: Traslape 527

7.4 Procesamiento discreto de señales continuas 534

7.4.1 Diferenciador digital 541
7.4.2 Retardo de media muestra 543

7.5 Muestreo de señales discretas 545

7.5.1 Muestreo con tren de impulsos 545

7.5.2 Decimación en tiempo discreto e interpolación 549

7.6 Resumen 555

Problemas 556

8 SISTEMAS DE COMUNICACIÓN 582

8.0 Introducción 582

8.1 Modulación de amplitud con exponencial compleja y senoidal 583

8.1.1 Modulación de amplitud con una portadora exponencial compleja 583

8.1.2 Modulación de amplitud con una portadora senoidal 585

8.2 Demodulación para AM senoidal 587

8.2.1 Demodulación síncrona 587

8.2.2 Demodulación asíncrona 590

8.3 Multiplexaje por división de frecuencia 594

8.4 Modulación de amplitud senoidal de banda lateral única 597

8.5 Modulación de amplitud con una portadora de tren de pulsos 601

8.5.1 Modulación de una portadora de tren de pulsos 601

8.5.2 Multiplexaje por división de tiempo 604

8.6 Modulación de amplitud de pulsos 604

8.6.1 Señales moduladas por amplitud de pulsos 604

8.6.2 Interferencia intersímbolo en sistemas PAM 607

8.6.3 Modulación digital por amplitud de pulsos y por codificación de pulsos 610

8.7 Modulación de frecuencia senoidal 611

8.7.1 Modulación de frecuencia de banda angosta 613

8.7.2 Modulación de frecuencia de banda ancha 615

8.7.3 Señal moduladora de onda cuadrada periódica 617

8.8 Modulación discreta 619

8.8.1 Modulación de amplitud senoidal discreta 619

8.8.2 Transmodulación de tiempo discreto 623

8.9 Resumen 623

Problemas 625

9 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE 654

9.0 Introducción 654

9.1 La transformada de Laplace 655

9.2 La región de convergencia para las transformadas de Laplace 662

9.3 La transformada inversa de Laplace 670

9.4 Evaluación geométrica de la transformada de Fourier a partir del diagrama de polos y ceros 674

9.4.1 Sistemas de primer orden 676

9.4.2 Sistemas de segundo orden 677

9.4.3 Sistemas pasa todo 681

9.5 Propiedades de la transformada de Laplace 682

9.5.1 Linealidad de la transformada de Laplace 683
9.5.2 Desplazamiento en el tiempo 684
9.5.3 Desplazamiento en el dominio de s 685
9.5.4 Escalamiento en tiempo 685
9.5.5 Conjugación 687
9.5.6 Propiedad de convolución 687
9.5.7 Diferenciación en el dominio del tiempo 688
9.5.8 Diferenciación en el dominio de s 688
9.5.9 Integración en el dominio del tiempo 690
9.5.10 Los teoremas de valor inicial y de valor final 690
9.5.11 Tabla de propiedades 691

9.6 Algunos pares de transformadas de Laplace 692

9.7 Análisis y caracterización de los sistemas LTI usando la transformada de Laplace 693
9.7.1 Causalidad 693
9.7.2 Estabilidad 695
9.7.3 Sistemas LTI caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes 698
9.7.4 Ejemplos que relacionan el comportamiento del sistema con la función del sistema 701
9.7.5 Filtros Butterworth 703

9.8 Álgebra de la función del sistema y representación en diagrama de bloques 706
9.8.1 Funciones del sistema para interconexiones de sistemas LTI 707
9.8.2 Representaciones en diagrama de bloques para los sistemas LTI causales descritos por ecuaciones diferenciales y funciones racionales del sistema 708

9.9 La transformada unilateral de Laplace 714
9.9.1 Ejemplo de transformadas unilaterales de Laplace 714
9.9.2 Propiedades de la transformada unilateral de Laplace 716
9.9.3 Solución de ecuaciones diferenciales usando la unilateral transformada de Laplace 719

9.10 Resumen 720

Problemas 721

10 LA TRANSFORMADA z 741

10.0 Introducción 741

10.1 La transformada z 741

10.2 La región de convergencia de la transformada z 748

10.3 La transformada z inversa 757

10.4 Evaluación geométrica de la transformada de Fourier a partir del diagrama de polos y ceros 763
10.4.1 Sistemas de primer orden 763
10.4.2 Sistemas de segundo orden 765

10.5 Propiedades de la transformada z 767
10.5.1 Linealidad 767

10.5.2 Desplazamiento en tiempo 767
10.5.3 Escalamiento en el dominio de z 768
10.5.4 Inversión de tiempo 769
10.5.5 Expansión en el tiempo 769
10.5.6 Conjugación 770
10.5.7 Propiedad de convolución 770
10.5.8 Diferenciación en el dominio de z 772
10.5.9 Teorema del valor inicial 773
10.5.10 Resumen de propiedades 774

10.6 Algunos pares comunes de transformada z 774

10.7 Análisis y caracterización de los sistemas LTI usando las transformadas z 774
10.7.1 Causalidad 776
10.7.2 Estabilidad 777
10.7.3 Sistemas LTI caracterizados por ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes 779
10.7.4 Ejemplos que relacionan el comportamiento del sistema con la función del sistema 781

10.8 Álgebra de función del sistema y representaciones en diagramas de bloques 783
10.8.1 Funciones de sistema de interconexiones de sistemas LTI 784
10.8.2 Representaciones en diagramas de bloques para los sistemas LTI causales descritos por ecuaciones de diferencias y funciones de sistema racionales 784

10.9 La transformada z unilateral 789
10.9.1 Ejemplos de transformadas z unilaterales y transformadas inversas 790
10.9.2 Propiedades de la transformada z unilateral 792
10.9.3 Solución de ecuaciones de diferencias usando la transformada z unilateral 795

10.10 Resumen 796

Problemas 797

11 SISTEMAS LINEALES RETROALIMENTADOS 816

11.0 Introducción 816

11.1 Sistemas lineales retroalimentados 819

11.2 Algunas aplicaciones y consecuencias de la retroalimentación 820
11.2.1 Diseño de un sistema inverso 820
11.2.2 Compensación de elementos no ideales 821
11.2.3 Estabilización de sistemas inestables 823
11.2.4 Sistemas retroalimentados para datos muestreados 826
11.2.5 Sistemas de rastreo 828
11.2.6 Desestabilización causada por la retroalimentación 830

11.3 Análisis del lugar geométrico de las raíces de los sistemas lineales retroalimentados 832
11.3.1 Un ejemplo introductorio 833

11.3.2 Ecuación para los polos de lazo cerrado 834
11.3.3 Los puntos extremos del lugar geométrico de las raíces: los polos de lazo cerrado para $K = 0$ y $|K| = +\infty$ 836
11.3.4 El criterio del ángulo 836
11.3.5 Propiedades del lugar geométrico de las raíces 841

11.4 El criterio de estabilidad de Nyquist 846
11.4.1 La propiedad de circunvalación 847
11.4.2 El criterio de Nyquist para sistemas LTI retroalimentados continuos 850
11.4.3 El criterio de Nyquist para sistemas LTI retroalimentados discretos 856

11.5 Márgenes de ganancia y fase 858

11.6 Resumen 866

Problemas 867

APÉNDICE EXPANSIÓN EN FRACCIONES PARCIALES 909

BIBLIOGRAFÍA 921

RESPUESTAS 931

ÍNDICE 941

PREFACIO

Este libro es la segunda edición de un texto diseñado para cursos de señales y sistemas a nivel licenciatura. Si bien tales cursos se encuentran con frecuencia en los programas de Ingeniería Eléctrica, los conceptos y las técnicas que conforman el núcleo de este tema son de fundamental importancia para todas las disciplinas de la ingeniería. De hecho, el alcance de las aplicaciones actuales y potenciales de los métodos de análisis de señales y sistemas continúa expandiéndose a medida que los ingenieros se enfrentan a nuevos retos que involucran la síntesis o el análisis de procesos complejos. Por estas razones sentimos que un curso de señales y sistemas no sólo constituye un elemento esencial de los programas de ingeniería, sino que también puede llegar a ser uno de los cursos más gratificantes, estimulantes y útiles que los estudiantes de ingeniería pueden tomar durante su educación a nivel licenciatura.

Nuestro tratamiento del tema de señales y sistemas en esta segunda edición conserva la misma filosofía general de la primera edición, pero con cambios significativos en la redacción y la estructuración, además de contar con algunas adiciones. Estos cambios se han diseñado tanto para auxiliar al instructor en la presentación de material como para ayudar al estudiante a dominarlo. En el prefacio de la primera edición establecimos que nuestro enfoque general de las señales y los sistemas había sido guiado por el continuo desarrollo de tecnologías para el diseño y puesta en práctica de señales y sistemas, razón por la cual resulta cada vez más importante para un estudiante estar familiarizado con técnicas adecuadas para analizar y sintetizar sistemas tanto continuos como discretos. Al momento de escribir el prefacio de esta segunda edición, esa observación y nuestro principio guía resultan más válidos que nunca. En consecuencia, si bien los alumnos que estudian señales y sistemas deberían tener una sólida formación en las disciplinas cuya base son las leyes de la física, también deben poseer sólidos antecedentes sobre el uso de las computadoras para el análisis de fenómenos y para la puesta en práctica de sistemas y algoritmos. En consecuencia, los programas de ingeniería reflejan ahora una combinación de temas, algunos sobre modelos continuos y otros orientados al uso de computadoras y a las representaciones discretas. Por estas razones, los cursos de señales y sistemas que presentan de manera conjunta los conceptos de tiempo discreto y tiempo continuo adoptan un papel cada vez más importante en la educación de los estudiantes de ingeniería y en su preparación para desarrollos actuales y futuros en sus campos específicos de actividad.

Es con estos objetivos en mente que hemos estructurado el presente libro para desarrollar en paralelo los métodos de análisis de señales y sistemas continuos y discretos. Este enfoque ofrece una ventaja pedagógica clara y extremadamente importante. Es decir, seremos capaces de recurrir a las similitudes que existen entre los métodos continuos y los discretos para compartir el conocimiento y la intuición desarrolladas en cada dominio. Igualmente, podemos explotar sus diferencias para acrecentar la comprensión de las propiedades específicas de cada uno de ellos.

Al organizar el material, tanto en la primera como en esta segunda edición, hemos considerado esencial también iniciar al estudiante en algunos de los usos más importantes de los métodos básicos que son desarrollados en el libro. Esto no sólo le proporciona una apreciación del alcance de las aplicaciones de las técnicas que se están aprendiendo y de las recomendaciones para un estudio más profundo, sino que le ayuda a profundizar en la com-

prensión del tema. Para alcanzar este objetivo hemos incluido un tratamiento introductorio de los temas de filtrado, comunicaciones, muestreo, procesamiento discreto de señales continuas y retroalimentación. De hecho, en lo que representa uno de los mayores cambios de esta segunda edición, hemos introducido el concepto de filtrado en el dominio de la frecuencia muy al principio de nuestro tratamiento del análisis de Fourier, esto con el doble propósito de proporcionar motivación y conocimiento sobre este tema tan importante. Además, nuevamente hemos incluido al final del libro una bibliografía actualizada para auxiliar al estudiante interesado en proseguir con estudios adicionales y más avanzados sobre los métodos y aplicaciones del análisis de señales y sistemas.

La organización del libro refleja nuestra convicción de que el dominio completo de una materia de esta naturaleza no puede lograrse sin una cantidad significativa de práctica en el uso y la aplicación de las herramientas que se están desarrollando. En consecuencia, en esta segunda edición hemos incrementado significativamente el número de ejemplos dentro de cada capítulo. También hemos enriquecido uno de los beneficios clave de la primera edición, es decir, los problemas de tarea al final de cada capítulo. Como en la primera edición, hemos incluido un número importante de problemas, ¡más de 600! La mayoría de los problemas incluidos en esta edición son nuevos y por lo tanto proporcionan al instructor mayor flexibilidad en la preparación de las tareas. Además, con el objeto de acrecentar la utilidad de los problemas tanto para el estudiante como para el instructor, hemos hecho algunos cambios en la organización y la presentación de los mismos. En particular, en cada capítulo los hemos organizado bajo diferentes encabezados específicos cada uno de los cuales abarca el material de todo el capítulo pero tiene diferente objetivo. Las primeras dos secciones de problemas de cada capítulo hacen énfasis en la mecánica de aplicación de los conceptos y métodos básicos que se presentan en el capítulo. Para la primera de estas dos secciones, cuyo encabezado de Problemas básicos con respuestas, al final del libro proporcionamos sus respuestas pero no así las soluciones. Dichas respuestas constituyen una forma sencilla e inmediata para que el estudiante corrobore su comprensión del material. Los problemas de esta primera sección son por lo general apropiados para incluirse en las series de problemas de tarea. Además, para dar al instructor flexibilidad adicional en la asignación de problemas de tarea incluimos una segunda sección de Problemas básicos para los cuales no se dan las respuestas.

Una tercera sección de problemas en cada capítulo, agrupados bajo el encabezado de Problemas avanzados, está orientada a explorar y a propiciar desarrollos adicionales con base en los fundamentos e implicaciones prácticas del material del texto. Con frecuencia estos problemas requieren deducciones matemáticas y un uso más elaborado de los conceptos y métodos presentados en el capítulo correspondiente. Algunos capítulos también incluyen una sección de Problemas de extensión, los cuales involucran extensiones del material presentado en el capítulo y/o del uso de conocimientos sobre aplicaciones que se encuentran fuera del alcance del texto principal, como circuitos avanzados o sistemas mecánicos. Esperamos que la variedad y la cantidad de problemas incluidos en cada capítulo proporcione a los estudiantes los medios para alcanzar un mejor entendimiento del material y a los instructores una considerable flexibilidad para integrar series de tarea adecuadas a las necesidades específicas de sus estudiantes.

Hemos supuesto que los estudiantes que utilicen este libro tienen antecedentes básicos sobre cálculo, así como alguna experiencia en la manipulación de números complejos y se han visto expuestos a las ecuaciones diferenciales. Con estos antecedentes, el libro es autosuficiente. En particular, no se requiere experiencia previa sobre análisis de sistemas, convolución, análisis de Fourier o transformadas de Laplace o z. Antes de iniciar el aprendizaje de la materia de señales y sistemas la mayoría de los estudiantes habrá tenido cursos como teoría básica de circuitos para los ingenieros electricistas o de fundamentos de dinámica para los ingenieros mecánicos. Dichas materias abordan algunas de las ideas básicas que son

desarrolladas con mayor detalle en este texto. Sin duda estos antecedentes pueden ser de gran valor para los estudiantes, ya que les proporcionan una perspectiva adicional al momento de estudiar el libro.

El prólogo, que sigue a este prefacio, ha sido escrito para motivar y proporcionar al lector una perspectiva sobre el tema de señales y sistemas en general y sobre nuestro tratamiento del mismo en particular. Iniciamos el capítulo 1 presentando algunas ideas elementales relacionadas con la representación matemática de las señales y los sistemas. Analizamos en particular transformaciones (como desplazamientos y escalamiento en tiempo) de la variable independiente de una señal. Presentamos también algunas de las señales continuas y discretas más importantes, tales como las exponenciales real y compleja y el escalón e impulso unitarios, tanto continuos como discretos. El capítulo 1 también ofrece una introducción a las representaciones mediante diagramas de bloques de las interconexiones de sistemas, y en él se analizan varias propiedades básicas de los sistemas, tales como la causalidad, la linealidad y la invariancia en el tiempo. En el capítulo 2 nos basamos en estas dos últimas propiedades y, junto con la propiedad de *sifting* (selección) de los impulsos unitarios, desarrollamos la representación mediante la suma de convolución de sistemas lineales discretos invariantes en el tiempo y la representación mediante la integral de convolución de sistemas LTI continuos. En esta parte hacemos uso del conocimiento obtenido al desarrollar el caso discreto para ayudarnos en la deducción y comprensión de su contraparte continua. Después abordamos el análisis de sistemas LTI causales caracterizados por ecuaciones lineales con coeficientes constantes diferenciales y de diferencias. En este análisis introductorio repasamos las ideas básicas involucradas en la solución de ecuaciones diferenciales lineales (con las cuales la mayoría de los estudiantes ya están familiarizados) y también proporcionamos un análisis sobre métodos análogos para ecuaciones de diferencias lineales. Sin embargo, el enfoque principal de nuestro desarrollo en el capítulo 2 no se centra en métodos de solución, ya que posteriormente se desarrollan procedimientos más convenientes haciendo uso de métodos de transformadas. En su lugar, en este primer vistazo nuestra intención es proporcionar al estudiante una apreciación de estas clases de sistemas de extrema importancia, las cuales se encontrarán con frecuencia en los capítulos subsecuentes. Finalmente, el capítulo 2 concluye con un breve análisis de las funciones singulares —escalones, impulsos, dobletes y otras— en el contexto del papel que juegan en la descripción y análisis de sistemas LTI continuos. En particular, hacemos énfasis en la interpretación de estas señales en términos de la forma en que son definidas bajo la convolución; esto es, en términos de las respuestas de sistemas LTI a estas señales idealizadas.

Los capítulos 3 al 6 presentan un desarrollo minucioso y completo de los métodos del análisis de Fourier tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, y en conjunto representan la más significativa reorganización y revisión de esta segunda edición. En particular, como señalamos previamente, hemos introducido el concepto de filtrado en el dominio de la frecuencia mucho más temprano en el desarrollo para motivar al estudiante y proporcionar al mismo tiempo el ejemplo de una aplicación concreta de los métodos de Fourier que ahí se desarrollan. Al igual que en la primera edición, iniciamos las exposiciones del capítulo 3 enfatizando e ilustrando las dos razones fundamentales de la importancia que juega el papel del análisis de Fourier en el estudio de las señales y sistemas tanto continuas como discretas: 1) clases extremadamente amplias de señales que pueden ser representadas como sumas ponderadas o integrales de exponenciales complejas; y 2) la respuesta de un sistema LTI a una entrada exponencial compleja es la misma exponencial multiplicada por un número complejo característico del sistema. Sin embargo, en contraste con la primera edición, el foco de atención del capítulo 3 son las representaciones en series de Fourier de señales periódicas continuas y discretas. De esta manera, no sólo introducimos y examinamos muchas de las propiedades de las representaciones de Fourier sin recurrir a la generalización matemática

adicional requerida para obtener la transformada de Fourier para señales aperiódicas, sino que también podemos presentar su aplicación al caso del filtrado en una etapa muy temprana de su desarrollo. En particular, aprovechando el hecho de que las exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas LTI, introducimos la respuesta a la frecuencia de un sistema LTI y la usamos para discutir el concepto de filtrado selectivo en frecuencia, para incorporar los filtros ideales, y para dar varios ejemplos de filtros no ideales descritos por ecuaciones diferenciales y de diferencias. De esta manera, con un mínimo de matemáticas preliminares, proporcionamos al estudiante una apreciación más profunda de lo que significa la representación de Fourier y por qué es una herramienta tan útil.

Posteriormente, en los capítulos 4 y 5 y con base en los cimientos establecidos en el capítulo 3, desarrollamos primero la transformada continua de Fourier en el capítulo 4 y, de forma paralela, la transformada de Fourier de tiempo discreto en el capítulo 5. En ambos capítulos deducimos la representación mediante la transformada de Fourier de una señal aperiódica como el límite de la serie de Fourier de una señal cuyo periodo se hace arbitrariamente grande. Esta perspectiva enfatiza la estrecha relación que existe entre la serie y la transformada de Fourier, relación que desarrollamos aún más en secciones subsecuentes y la cual nos permite transferir el conocimiento alcanzado sobre la serie de Fourier en el capítulo 3 al contexto más general de la transformada de Fourier. En ambos capítulos hemos incluido un análisis de las muchas propiedades importantes de la transformada de Fourier, haciendo especial énfasis en las propiedades de convolución y multiplicación. En particular, la propiedad de convolución nos permite explorar por segunda ocasión el tema del filtrado selectivo en frecuencia, mientras que la propiedad de multiplicación sirve como punto de partida para el tratamiento del muestreo y de la modulación que hacemos en capítulos posteriores. Finalmente, en las últimas secciones de los capítulos 4 y 5 usamos métodos de transformada para determinar las respuestas en frecuencia de sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales y de diferencias, así como para proporcionar varios ejemplos que ilustran cómo la transformada de Fourier puede ser utilizada para calcular las respuestas de tales sistemas. Para complementar dichos análisis (así como tratamientos posteriores de las transformadas de Laplace y z) hemos incluido de nuevo un apéndice al final del libro, el cual contiene una descripción del método de expansión en fracciones parciales.

Nuestro estudio del análisis de Fourier en estos dos capítulos es característico del tratamiento paralelo que hemos desarrollado. Específicamente, en nuestro análisis en el capítulo 5 seremos capaces de usar como base gran parte del conocimiento obtenido en el capítulo 4 para el caso continuo, y hacia el final del capítulo 5 enfatizamos la dualidad completa entre las representaciones de Fourier continua y discreta. Además, hacemos evidente la naturaleza especial de cada dominio contrastando las diferencias entre los análisis de Fourier continuo y discreto.

Como podrán notar aquellos que estén familiarizados con la primera edición, las extensiones y alcances de los capítulos 4 y 5 en esta segunda edición son considerablemente más reducidos que en sus contrapartes de la primera. Esto se debe no sólo al hecho de que la serie de Fourier se trata ahora en un capítulo aparte, sino también a que movimos varios temas al capítulo 6. El resultado, creemos, proporciona varios beneficios significativos. Primero, la presentación en tres capítulos más cortos de los conceptos y los resultados básicos del análisis de Fourier, junto con la introducción del concepto de filtrado selectivo en frecuencia, deberán ayudar al estudiante a organizar su comprensión de este material y a lograr algún conocimiento acerca del dominio de la frecuencia, además de que le permitirá apreciar sus aplicaciones potenciales. Así, teniendo los capítulos 3 al 5 como cimiento, nos podemos adentrar en un análisis más detallado de algunos temas y aplicaciones importantes. En el capítulo 6 profundizamos en las características de los sistemas LTI tanto continuos como discretos. Por ejemplo, introducimos las representaciones de magnitud-fase y en diagramas de Bode

para las respuestas en frecuencia, y analizamos el efecto que tiene la fase de la respuesta en frecuencia sobre las características en el dominio del tiempo de la salida de un sistema LTI. Además, examinamos el comportamiento en los dominios del tiempo y de la frecuencia de los filtros ideales y no ideales y los compromisos entre éstos que deben ser considerados en la práctica. Estudiamos también con cuidado los sistemas de primer y segundo órdenes y su papel como bloques básicos en el análisis y la síntesis de sistemas más complejos tanto continuos como discretos. Por último, analizamos otros ejemplos más complejos de filtros continuos y discretos. Estos ejemplos, junto con numerosos aspectos de filtrado que son explorados en los problemas al final del capítulo, le proporcionan al estudiante alguna apreciación de la riqueza y sabor de esta importante materia. Si bien todos los temas tratados en el capítulo 6 estaban presentes en la primera edición, creemos que, al reorganizarlos y juntarlos en un capítulo separado inmediatamente después del desarrollo básico del análisis de Fourier, hemos simplificado la introducción de este importante tema en los capítulos 3 al 5 y presentado en el 6 una visión considerablemente más coherente de los temas de los dominios del tiempo y de la frecuencia.

En respuesta a las sugerencias y preferencias expresadas por muchos de los usuarios de la primera edición, hemos modificado la notación al tratar la transformada de Fourier para hacerla más consistente con la notación utilizada típicamente para las transformadas continua de Fourier y de tiempo discreto. Específicamente, desde el capítulo 3 señalamos la transformada continua de Fourier con $X(j\omega)$ y la transformada de Fourier de tiempo discreto con $X(e^{j\omega})$. Como sucede con todas las notaciones opcionales, no hay una selección única que sea mejor para la notación de la transformada de Fourier. Sin embargo, es nuestra impresión, y la de muchos de nuestros colegas, que la notación empleada en esta edición representa la mejor selección.

Nuestro tratamiento del muestreo en el capítulo 7 descansa principalmente en el teorema de muestreo y sus aplicaciones. Sin embargo, para colocar este tema en perspectiva, empezamos analizando los conceptos generales de la representación de una señal continua en términos de sus muestras y la reconstrucción de señales usando la interpolación. Después de usar los métodos del dominio de la frecuencia para deducir el teorema del muestreo, consideramos tanto el dominio del tiempo como el de la frecuencia para lograr entender el fenómeno de traslape que resulta del submuestreo. Uno de los usos más importantes del muestreo es el procesamiento discreto de señales continuas, un tema que exploramos con cierta extensión en este capítulo. En seguida, nos enfocamos al muestreo de señales discretas. El resultado básico bajo el muestreo discreto se desarrolla de manera paralela a como se usó para el caso continuo, y se describen las aplicaciones de este resultado a los problemas de decimación e interpolación. Una vez más, una gran variedad de aplicaciones, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, son consideradas en los problemas.

Nuevamente el lector familiarizado con nuestra primera edición notará otro cambio, que en este caso consiste en la inversión en el orden en que se presentan el muestreo y las comunicaciones. Hemos decidido colocar el muestreo antes que las comunicaciones en esta segunda edición porque así podemos basarnos en la simple intuición para motivar y describir el proceso de muestreo y de la reconstrucción a partir de las muestras, y también porque este orden de presentación nos permite hablar con mayor facilidad, en el capítulo 8, de algunas formas de sistemas de comunicación que se relacionan con el muestreo o dependen fundamentalmente del uso de una versión muestreada de la señal que será transmitida.

Nuestro tratamiento de las comunicaciones en el capítulo 8 incluye un profundo análisis de la modulación senoidal de amplitud en el tiempo continuo (AM), el cual comienza con la aplicación directa de la propiedad de multiplicación para describir el efecto de la AM senoidal en el dominio de la frecuencia y para sugerir cómo se puede recuperar la señal moduladora original. Después desarrollamos varios temas y aplicaciones adicionales relacionados

con la modulación senoidal, incluyendo el multiplexaje por división de frecuencia y la modulación de banda lateral única. En los problemas de ese capítulo se describen muchos otros ejemplos y aplicaciones. Varios temas adicionales son cubiertos en el capítulo 8, el primero de los cuales es de la modulación de la amplitud de un tren de pulsos y el multiplexaje por división de tiempo, el cual muestra una estrecha relación con el tema del muestreo tratado en el capítulo 7. De hecho, hacemos esta relación aún más explícita y proporcionamos una vista del importante campo de las comunicaciones digitales mediante la introducción y breve descripción de los temas de modulación de amplitud de pulsos (PAM) y de interferencia intersímbolos. Por último, nuestro análisis de la modulación en frecuencia (FM) proporciona al lector una introducción al problema de la modulación no lineal. Aunque el análisis de los sistemas de FM no es tan directo como el caso de AM, nuestro tratamiento introductorio indica cómo los métodos del dominio de la frecuencia pueden ser usados para alcanzar un conocimiento significativo sobre las características de las señales y sistemas de FM. Creemos que a través de estos análisis y de los muchos otros aspectos de la modulación y de las comunicaciones que se exploran en los problemas de este capítulo el estudiante podrá apreciar tanto la riqueza del campo de las comunicaciones y el papel central que las herramientas de señales y sistemas juegan dentro de él.

Los capítulos 9 y 10 tratan sobre las transformadas de Laplace y z, respectivamente. En su mayor parte dirigimos nuestra atención a las versiones bilaterales de estas transformadas, aunque en la última sección de cada capítulo analizamos las transformadas unilaterales y su uso para resolver ecuaciones diferenciales y de diferencias con condiciones iniciales diferentes de cero. Ambos capítulos incluyen discusiones sobre la cercana relación entre estas transformadas y la transformada de Fourier, la clase de transformadas racionales y su representación en términos de polos y ceros, la región de convergencia de la transformada de Laplace o z y su relación con las propiedades de la señal con la que está asociada, transformaciones inversas haciendo uso de la expansión en fracciones parciales, la evaluación geométrica de las funciones de los sistemas y de las respuestas en frecuencia a partir de diagramas de polos y ceros y las propiedades básicas de la transformada. Además, en cada capítulo examinamos las propiedades y los usos de las funciones del sistema para sistemas LTI. En estos análisis incluimos la determinación de las funciones del sistema para los sistemas caracterizados por ecuaciones diferenciales y de diferencias, el uso del álgebra de funciones del sistema para las interconexiones de sistemas LTI y la construcción de representaciones mediante diagramas de bloques en cascada, en paralelo y de forma directa de sistemas con funciones racionales del sistema.

Las herramientas de las transformadas de Laplace y z constituyen la base de nuestro examen de sistemas lineales retroalimentados en el capítulo 11. Empezamos este capítulo describiendo varios usos y propiedades importantes de los sistemas retroalimentados, incluyendo la estabilización de sistemas inestables, el diseño de sistemas de rastreo y la reducción de la sensibilidad del sistema. En secciones subsecuentes usamos las herramientas que hemos desarrollado en los capítulos previos para examinar tres temas que son de importancia para los sistemas retroalimentados, tanto continuos como discretos. Éstas son el análisis del lugar geométrico de las raíces, los diagramas de Nyquist y el criterio de Nyquist, así como los diagramas logarítmicos de magnitud/fase y los conceptos de márgenes de fase y de ganancia para sistemas retroalimentados estables.

La materia de señales y sistemas es extraordinariamente rica y se pueden adoptar diversos enfoques para diseñar un curso introductorio. Fue nuestra intención con la primera edición, y nuevamente con esta segunda, el proporcionar a los instructores una gran flexibilidad para estructurar sus presentaciones de la materia. Para lograr dicha flexibilidad y para maximizar la utilidad de este libro para los instructores hemos decidido presentar tratamientos cabales y a profundidad de un conjunto coherente de temas que forma el núcleo de la

mayoría de los cursos introductorios de señales y sistemas. Profundizar en dichos temas significa omitir por necesidad la introducción a temas tales como la descripción de señales aleatorias y los modelos de espacio estado que algunas veces se incluyen en los primeros cursos sobre señales y sistemas. Tradicionalmente, en muchas escuelas, tales temas no son incluidos en cursos introductorios sino que se desarrollan con mayor profundidad en cursos de licenciatura subsecuentes o en cursos dedicados explícitamente a su investigación. Aunque no hemos incluido en este libro una introducción al espacio estado, los instructores de cursos introductorios lo pueden incorporar con facilidad dentro del tratamiento de las ecuaciones diferenciales y de diferencias que pueden encontrarse a lo largo de todo el libro. En los capítulos 9 y 10, en particular, el estudio de las representaciones mediante diagramas de bloques para sistemas con funciones racionales del sistema y de transformadas unilaterales, así como su uso para resolver ecuaciones diferenciales y de diferencias con condiciones iniciales forman puntos naturales para apartarse hacia la discusión de las representaciones de espacio estado.

Un curso semestral típico usando este libro cubriría los capítulos del 1 al 5 con profundidad razonable (aunque varios temas de cada capítulo pueden ser omitidos a criterio del instructor) incluyendo además temas seleccionados de los demás capítulos. Por ejemplo, una posibilidad sería la de presentar varios de los temas básicos de los capítulos 6, 7 y 8 junto con un tratamiento de las transformadas de Laplace y z y quizás una breve introducción al uso de los conceptos de la función del sistema para analizar sistemas retroalimentados. Una variedad de formatos alternos es posible, incluyendo uno que incorpore una introducción al espacio estado o uno en el cual se insista más en los sistemas continuos reduciendo el énfasis sobre los capítulos 5 y 10, así como sobre los temas de tiempo discreto en los capítulos 3, 7, 8 y 11.

Además de estos ejemplos sobre cómo estructurar un curso, este libro puede ser utilizado como texto básico para un curso completo de dos semestres sobre sistemas lineales. Alternativamente, las porciones del libro no utilizadas en un primer curso sobre señales y sistemas pueden, junto con otras fuentes, formar la base para un curso subsecuente. Por ejemplo, gran parte del material del libro constituye un puente directo hacia materias tales como análisis de espacio estado, sistemas de control, procesamiento digital de señales, comunicaciones y procesamiento estadístico de señales. En consecuencia, un curso subsecuente puede construirse de tal manera que use algunos de los temas del libro, junto con algún material suplementario, para proporcionar una introducción a una o más de estas materias avanzadas. De hecho, un nuevo curso que sigue este modelo ha sido desarrollado en el MIT y ha demostrado ser no sólo popular entre nuestros estudiantes, sino un componente crucial de nuestro currículum sobre señales y sistemas.

Como ocurrió con la primera edición, durante el proceso de creación de este libro hemos tenido la fortuna de recibir ayuda, sugerencias y apoyo de numerosos colegas, estudiantes y amigos. Las ideas y perspectivas que forman el corazón de este libro han continuado evolucionando como resultado de nuestras propias experiencias en la enseñanza de señales y sistemas y de las influencias de muchos colegas y estudiantes con quienes hemos trabajado. Quisiéramos agradecer al profesor Ian T. Young, por sus contribuciones a la primera edición del libro, y agradecer y dar la bienvenida al profesor Hamid Nawab, por el significativo papel que tuvo en el desarrollo y en la completa restructuración de los ejemplos y problemas de esta segunda edición. También expresamos nuestro aprecio a John Buck, Michael Daniel y Andrew Singer por haber escrito el compañero de MATLAB para este texto, disponible sólo en Estados Unidos. Además, queremos agradecer a Jason Oppenheim por el uso de una de sus fotografías originales y a Vivian Berman por sus ideas y ayuda en el diseño de la cubierta del libro. Asimismo, como se indica en la página de reconocimientos que sigue, estamos profundamente agradecidos con los muchos estudiantes y colegas que dedicaron un signi-

ficativo número de horas a una gran diversidad de aspectos de la preparación de esta segunda edición.

También queremos expresar nuestras sinceras gracias al señor Ray Stata y a la empresa Analog Devices, Inc., por su generoso y continuo apoyo al procesamiento de señales y a este texto a través del financiamiento del puesto de Profesor Distinguido de Ingeniería Eléctrica. También agradecemos al M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology) por proporcionar apoyo y un estimulante ambiente dentro del cual desarrollamos nuestras ideas.

El ánimo, la paciencia, el apoyo técnico y el entusiasmo proporcionados por Prentice-Hall y en particular por Marcia Horton, Tom Robbins, Don Fowley y sus predecesores y por Ralph Pescatore de TKM Productions y el grupo de producción de Prentice Hall, han sido cruciales para hacer realidad esta segunda edición.

Alan V. Oppenheim
Alan S. Willsky

Cambridge, Massachusetts

Reconocimientos

En la preparación de esta segunda edición tuvimos la fortuna de recibir la ayuda de muchos colegas, estudiantes y amigos que fueron generosos en extremo con su tiempo. Expresamos nuestro profundo agradecimiento a:

Jon Maira y **Ashok Papot** por su ayuda en la creación de muchas de la figuras e imágenes.
Babak Ayazifar y **Austin Frakt** por su ayuda para actualizar y armar la bibliografía.
Ramamurthy Mani por preparar el manual de soluciones para la edición en inglés y por su ayuda en la creación de muchas de las figuras.
Michael Daniel por coordinar y administrar los archivos LaTeX mientras se produjeron y se modificaron los diversos borradores de la segunda edición.
John Buck por su cuidadosa lectura de todo el borrador de esta segunda edición.
Robert Becker, **Sally Bemus**, **Maggie Beucler**, **Ben Halpern**, **Jon Maira**, **Chirag Patel** y **Jerry Weinstein** por sus esfuerzos en la producción de los diversos borradores LaTeX del libro.

Y a todos aquellos que ayudaron en la cuidadosa revisión de los originales de prueba:

Babak Ayazifar
Richard Barron
Rebecca Bates
George Bevis
Sarit Birzon
Nabil Bitar
Anne Findlay
Austin Frakt
Siddhartha Gupta
Christoforos Hadjicostis
Terrence Ho
Mark Ibanez
Seema Jaggi
Patrick Kreidl
Christina Lamarre
Nicholas Laneman
Li Lee
Sean Lindsay
Jeffrey T. Ludwig
Seth Pappas
Adrienne Prahler
Ryan Riddols
Sekhar Tatikonda
Shawn Verbout
Kathleen Wage
Alex Wang
Joseph Winograd

Prólogo

Los conceptos de señales y sistemas surgen en una gran variedad de campos, las ideas y las técnicas asociadas con estos conceptos juegan un importante papel en áreas tan diversas de la ciencia y la tecnología como las comunicaciones, la aeronáutica y la astronáutica, el diseño de circuitos, la acústica, la sismología, la ingeniería biomédica, los sistemas de generación y distribución de energía, el control de procesos químicos y el procesamiento de voz. Aun cuando la naturaleza física de las señales y los sistemas que surgen en todas estas disciplinas puede ser bastante diferente, todas ellas tienen dos características básicas en común. Las señales, las cuales son funciones de una o más variables independientes, contienen información acerca del comportamiento o la naturaleza de algún fenómeno, mientras que los sistemas responden a señales particulares produciendo otras señales o algún comportamiento deseado. Los voltajes y corrientes como una función del tiempo en un circuito eléctrico son ejemplos de señales, y un circuito es él mismo un ejemplo de un sistema, el cual en este caso responde a la aplicación de voltajes y corrientes. Como otro ejemplo, cuando el conductor de un automóvil oprime el pedal del acelerador, el automóvil responde aumentando la velocidad del vehículo. En este caso, el automóvil es el sistema, la presión sobre el pedal del acelerador es la entrada del sistema y la velocidad del automóvil es la respuesta. Un programa de computadora para el diagnóstico automatizado de electrocardiogramas puede ser visto como un sistema cuya entrada es un electrocardiograma digitalizado que produce estimaciones de parámetros tales como la frecuencia de las pulsaciones del corazón como salida. Una cámara es un sistema que recibe luz desde diferentes fuentes, así como la luz reflejada por los objetos, para producir una fotografía. Un brazo robot es un sistema cuyos movimientos son la respuesta a entradas de control.

En los muchos contextos en los cuales surgen las señales y los sistemas, hay una diversidad de problemas y cuestiones que son muy importantes. En algunos casos se nos presenta un sistema específico que nos interesa caracterizar con detalle para entender cómo responderá a diversas entradas. Algunos ejemplos podrían ser el análisis de circuitos para cuantificar su respuesta a diferentes fuentes de voltaje y de corriente, así como determinar las características de la respuesta de un avión tanto a los comandos del piloto como a las rachas de viento.

En otros problemas de análisis de señales y sistemas, en lugar de analizar sistemas existentes, nuestro interés puede estar enfocado al diseño de sistemas para procesar señales en formas particulares. Un contexto muy común en el cual se presentan tales problemas es en el diseño de sistemas para mejorar o restaurar señales que han sido degradadas de alguna forma. Por ejemplo, cuando un piloto se está comunicando con una torre de control de tráfico aéreo, la comunicación puede verse degradada por el nivel de ruido dentro de la cabina del avión. En éste y en muchos casos similares es posible diseñar sistemas que retendrán la señal deseada, en este ejemplo la voz del piloto, y rechazarán (cuando menos con buena aproximación) la señal no deseada, es decir, el ruido. Un conjunto similar de objetivos puede encontrarse en el área general de la restauración y mejoramiento de imágenes. Por ejemplo, las imágenes del espacio enviadas por sondas o por los satélites de observación de la Tierra por lo general representan versiones degradadas de las escenas reales debido a las limitaciones del equipo, a los efectos de la atmósfera y a errores en la transmisión de la señal que

envía las imágenes hacia la Tierra. En consecuencia, las imágenes recibidas del espacio son rutinariamente procesadas por sistemas para compensar algunas de estas degradaciones. Además, dichas imágenes a menudo son procesadas para resaltar ciertas características, como líneas (que corresponden por ejemplo a cauces de ríos o a fallas geológicas) o fronteras regionales en las cuales se presentan agudos contrastes en color o tono.

Además del realce y la restauración, en muchas aplicaciones existe la necesidad de diseñar sistemas para extraer de las señales piezas específicas de información. Estimar la frecuencia de los latidos del corazón a partir de un electrocardiograma sería un ejemplo. Otro ejemplo se presenta en el pronóstico económico. Podemos desear, por ejemplo, analizar la historia de una serie de tiempo económica, tal vez un conjunto de promedios de la bolsa de valores, para poder estimar tendencias y otras características como variaciones estacionales que pueden ser usadas en la predicción del comportamiento futuro de la bolsa. En otras aplicaciones, el interés puede orientarse al diseño de señales con propiedades particulares. En especial, al usar sistemas de comunicación se presta una considerable atención al diseño de señales que cumplan con los requerimientos y limitaciones para una transmisión exitosa. Por ejemplo, la comunicación de larga distancia a través de la atmósfera requiere el uso de señales con frecuencias dentro de una parte especial del espectro electromagnético. El diseño de señales de comunicaciones debe tomar en cuenta también la necesidad de una recepción confiable ante la presencia tanto de distorsión debida a la transmisión a través de la atmósfera como de interferencia de otras señales que están siendo transmitidas simultáneamente por otros usuarios.

Otra clase de aplicaciones muy importantes en las cuales surgen los conceptos y técnicas de señales y sistemas son aquellas en las cuales deseamos modificar o controlar las características de un sistema dado, quizás a través de la selección de señales de entradas específicas o mediante la combinación del sistema con otros sistemas. Un ejemplo de esta clase de aplicaciones es el diseño de sistemas de control para regular plantas de procesamiento químico. Las plantas de este tipo están equipadas con una gran variedad de sensores que miden señales físicas como la temperatura, la humedad y la composición química. El sistema de control en la planta debe responder a estas señales de los sensores ajustando cantidades tales como velocidades de flujo y temperatura para poder regular el proceso químico en curso. El diseño de pilotos automáticos de aviones y sistemas de control por computadora representa otro ejemplo. En este caso, el sistema de control del avión hace uso de señales que miden la velocidad del avión, su altitud y dirección para ajustar variables como la entrada de combustible y la posición del timón y de los alerones. Estos ajustes se hacen para asegurar que el avión siga un curso especificado, para suavizar el viaje del avión y para mejorar su respuesta a los comandos del piloto. Tanto en este caso como en el anterior, un concepto importante, conocido como retroalimentación, tiene un papel primordial, ya que las señales medidas son alimentadas de nuevo y usadas para ajustar las características de respuesta de los sistemas.

Los ejemplos de los párrafos precedentes representan sólo una parte de la extraordinariamente amplia variedad de aplicaciones para los conceptos de las señales y sistemas. La importancia de estos conceptos deriva no sólo de la diversidad de fenómenos y procesos dentro de los cuales se presentan, sino también de la colección de ideas, técnicas analíticas y metodologías que han sido y están siendo desarrolladas y usadas para resolver los problemas que involucran las señales y sistemas. La historia de este desarrollo se extiende a lo largo de muchos siglos y aunque la mayor parte de este trabajo fue motivado por aplicaciones específicas, muchas de estas ideas han demostrado tener una importancia central en problemas dentro de una variedad mucho más grande de contextos que aquellos para los cuales se desarrollaron originalmente. Por ejemplo, las herramientas del análisis de Fourier, las cuales constituyen la base del análisis en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas, y las cuales desarrollaremos con bastante detalle en este libro, se pueden encontrar desde los

problemas de astronomía estudiados por los antiguos babilonios hasta el desarrollo de la física matemática en los siglos XVIII y XIX.

En algunos de los ejemplos que hemos mencionado las señales varían continuamente en el tiempo, mientras que en otros su evolución es descrita sólo en puntos discretos del tiempo. Por ejemplo, en el análisis de circuitos eléctricos y de sistemas mecánicos las señales varían de manera continua. Por otro lado, el promedio diario de la bolsa de valores es por su propia naturaleza una señal que evoluciona en puntos discretos del tiempo (es decir, al cierre de cada día). En lugar de una curva en función de una variable continua, el promedio diario de la bolsa de valores es, por lo tanto, una secuencia de valores asociados con los instantes de tiempo discretos en los cuales es especificada. Esta distinción en la descripción básica de la evolución de las señales y de los sistemas que responden o que procesan estas señales conduce naturalmente a dos marcos de referencia paralelos para el análisis de señales y sistemas, uno para fenómenos y procesos que son descritos en el tiempo continuo y otro para aquellos que son descritos en el tiempo discreto.

Los conceptos y las técnicas asociados tanto con las señales y los sistemas continuos como con las señales y sistemas discretos tienen una historia muy rica y están conceptualmente muy relacionados. Históricamente, sin embargo, debido a que en el pasado sus aplicaciones han sido suficientemente diferentes, se han estudiado y desarrollado en su mayor parte de manera un tanto separada. Las señales y los sistemas continuos tienen raíces muy fuertes en problemas asociados con la física, y en el pasado reciente, con los circuitos eléctricos y las comunicaciones. Las técnicas de señales y sistemas discretos tienen fuertes raíces en el análisis numérico, la estadística y el análisis de las series de tiempo asociadas con aplicaciones como el análisis de datos económicos y demográficos. En las últimas décadas, sin embargo, las disciplinas de señales y sistemas continuos y discretos se han entrelazado cada vez más y sus aplicaciones se han interrelacionado en gran medida. El ímpetu principal para esto proviene de los grandes avances en la tecnología para la construcción de sistemas y para la generación de señales. En especial, el continuo desarrollo de las computadoras digitales de alta velocidad, de circuitos integrados y complejas técnicas para la fabricación de dispositivos de alta densidad ha hecho cada vez más ventajoso el considerar el procesamiento de señales continuas representándolas mediante muestras en el tiempo (es decir, convirtiéndolas a señales discretas). Como un ejemplo, el sistema de control por computadora para un avión moderno de alto desempeño digitaliza las salidas de los sensores como la velocidad del vehículo para estar en posibilidad de producir una secuencia de mediciones muestreadas que son después procesadas por el sistema de control.

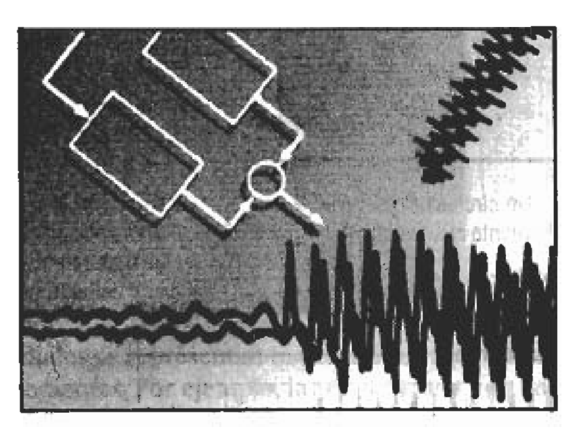
Debido a la creciente interrelación entre señales y sistemas continuos y señales y sistemas discretos, y debido también a la estrecha relación entre los conceptos y técnicas asociados con cada uno, hemos decidido desarrollar en este texto los conceptos de señales y sistemas continuos y discretos en forma paralela. Dado que muchos de los conceptos son similares (pero no idénticos), al tratarlos en esta forma se puede combinar la intuición y el conocimiento, y por consiguiente tanto las similitudes como las diferencias entre ellos se comprenden mejor. Además, como se hará evidente conforme se avance a lo largo del libro, hay algunos conceptos que son intrínsecamente más fáciles de entender dentro de un marco de referencia que dentro del otro pero, una vez entendidos, el conocimiento es transferido con facilidad. Aún más, este tratamiento paralelo facilita grandemente nuestra comprensión del importante contexto práctico en el cual se reúnen el tiempo continuo y el tiempo discreto, es decir, el muestreo de las señales continuas y su procesamiento usando sistemas discretos.

Como las hemos descrito hasta ahora, las nociones de señales y sistemas son conceptos en extremo generales. A este nivel de generalidad, sin embargo, sólo pueden hacerse las afirmaciones más vastas acerca de la naturaleza de las señales y los sistemas y sus propiedades

pueden discutirse sólo en los términos más elementales. Por otro lado, una noción fundamental y de gran importancia al tratar con señales y sistemas consiste en que, mediante la cuidadosa selección de subclases, cada una con propiedades particulares que después pueden ser explotadas, podemos analizar y caracterizar estas señales y estos sistemas con gran profundidad. El principal enfoque de este libro se centra en la clase particular de sistemas lineales invariantes en el tiempo. Las propiedades de linealidad e invariancia en el tiempo que define a esta clase de sistemas conduce a un conjunto sobresaliente de conceptos y técnicas que no sólo son de gran importancia práctica sino también manejables analíticamente y satisfactorios desde el punto de vista intelectual.

Como hemos enfatizado en este prólogo, el análisis de señales y sistemas tiene una larga historia de la cual han surgido algunas técnicas básicas y principios fundamentales que ofrecen áreas de aplicación amplísimas. En efecto, el análisis de señales y sistemas evoluciona y se desarrolla constantemente en respuesta a nuevos problemas, técnicas y oportunidades. Esperamos que este desarrollo acelere su ritmo, ya que las tecnologías mejoradas hacen posible la construcción de sistemas y de técnicas de procesamiento de señales cada vez más complejos. En el futuro veremos cómo las herramientas y los conceptos de señales y sistemas son usados en un número cada vez mayor de aplicaciones. Por estas razones sentimos que el tema del análisis de señales y sistemas representa un conjunto de conocimientos que es de importancia esencial para el científico y el ingeniero. Hemos seleccionado el conjunto de temas presentados en este libro, la organización de su presentación y los problemas de cada capítulo de una manera que, consideramos, será de gran ayuda para que el lector obtenga una sólida base sobre los fundamentos del análisis de señales y sistemas; para lograr entender algunas de las muy importantes aplicaciones básicas de estos fundamentos en problemas de filtrado, muestreo, comunicaciones y análisis de sistemas retroalimentados, y para dominar un enfoque poderoso y ampliamente aplicable en la formulación y solución deproblemas complejos.

1
SEÑALES Y SISTEMAS



1.0 INTRODUCCIÓN

Como se describió en el prólogo, las nociones intuitivas de señales y sistemas surgen de una rica variedad de contextos. Además, como veremos en este libro, hay un marco de referencia analítico —esto es, un lenguaje para describir señales y sistemas y un conjunto de herramientas extremadamente poderoso para analizarlos— que se aplica de manera similar a problemas en muchos campos. En este capítulo iniciamos el desarrollo del marco de referencia analítico para señales y sistemas introduciendo la descripción y representación matemática de éstos. En los capítulos subsecuentes nos valemos de estas bases para desarrollar y describir conceptos y métodos adicionales que incrementan de manera considerable tanto la comprensión como la habilidad para analizar y resolver los problemas que involucran señales y sistemas, los cuales surgen de una amplia gama de aplicaciones.

1.1 SEÑALES CONTINUAS Y DISCRETAS

1.1.1 Ejemplos y representación matemática

Las señales pueden describir una amplia variedad de fenómenos físicos. Aunque las señales pueden representarse de muchas formas, en todos los casos la información en una señal está contenida en un patrón de variaciones que presenta alguna forma determinada. Por ejemplo, considere el circuito sencillo de la figura 1.1. En este caso, los patrones que adopta la variación en el tiempo de los voltajes de la fuente y del capacitor, v_s y v_c, son ejemplos de señales. De manera similar, como se ilustra en la figura 1.2, las variaciones en el tiempo de la fuerza aplicada (f) y la velocidad (v) resultante del automóvil son señales. Otro ejemplo podría ser el mecanismo vocal humano, el cual produce el

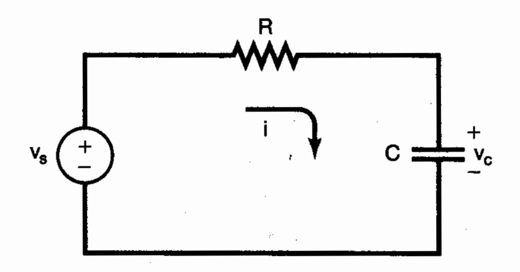


Figura 1.1 Un circuito *RC* sencillo con voltaje de la fuente v_s y voltaje del capacitor v_c.

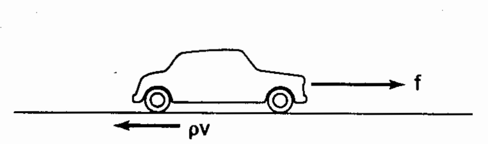


Figura 1.2 Un automóvil responde a una fuerza aplicada f del motor y a una fuerza friccional de retardo ρv proporcional a la velocidad v del automóvil.

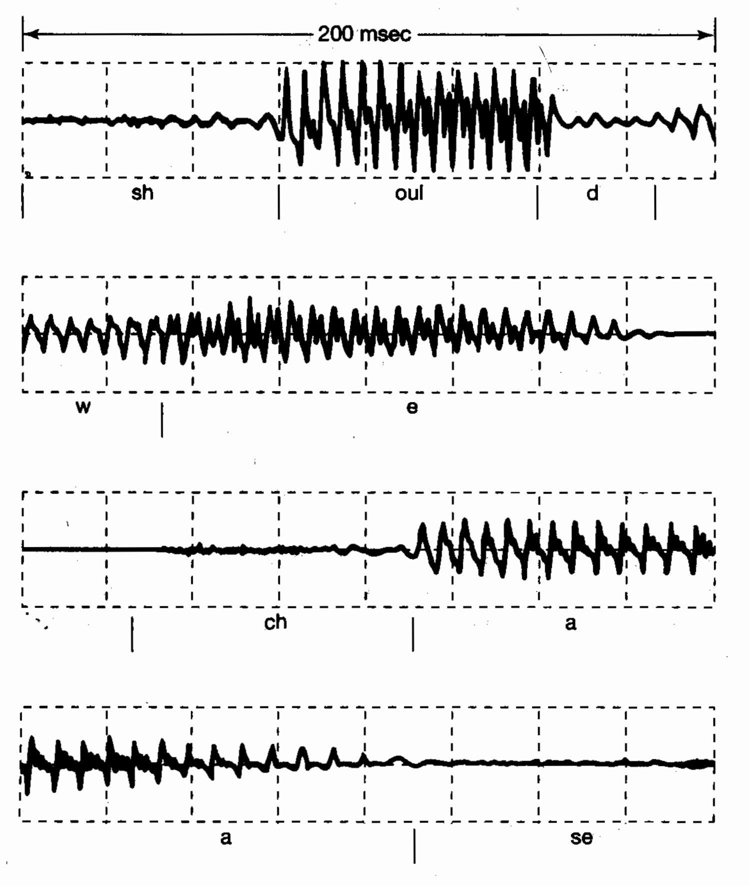


Figura 1.3 Ejemplo de un registro de voz. [Adaptado de *Applications of Digital Signal Processing*, A.V. Oppenheim, comp. (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1978), p. 121.] La señal representa las variaciones de presión acústica como función del tiempo para las palabras habladas "should we chase". La línea superior de la figura corresponde a la palabra "should", la segunda línea a la palabra "we" y las dos últimas líneas a la palabra "chase". (Hemos indicado el inicio y terminación aproximados de cada sonido sucesivo en cada palabra.)

habla mediante la creación de fluctuaciones en la presión acústica. La figura 1.3 ilustra el registro de una señal de voz obtenido mediante un micrófono que detecta las variaciones de la presión acústica, las cuales son convertidas de este modo en una señal eléctrica. Como se puede observar en la figura, los diferentes sonidos corresponden a diferentes patrones en las variaciones de la presión acústica, y el sistema vocal humano produce un discurso inteligible al generar secuencias particulares de esos patrones. Por otro lado, para la foto monocromática que se muestra en la figura 1.4, lo que es importante es el patrón de variaciones en la brillantez de la imagen.

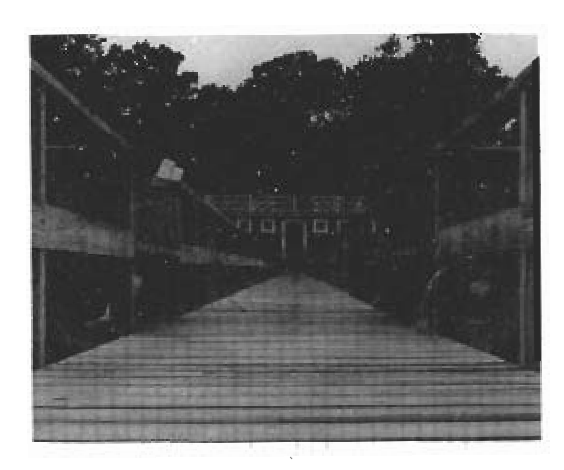


Figura 1.4 Una fotografía monocromática.

Las señales se representan matemáticamente como funciones con una o más variables independientes. Por ejemplo, la señal de una voz puede ser representada matemáticamente por la presión acústica como una función del tiempo, y una imagen puede ser representada por la brillantez como una función con dos variables espaciales. En este libro enfocaremos nuestra atención en señales que involucran una sola variable independiente. Por conveniencia nos referiremos por lo general a la variable independiente como el tiempo, aunque de hecho puede no representar al tiempo en ciertas aplicaciones específicas. Por ejemplo, las señales que representan variaciones de cantidades físicas con respecto a la profundidad, como densidad, porosidad y resistividad eléctrica, son usadas en geofísica para estudiar la estructura de la Tierra. Asimismo, el conocimiento sobre las variaciones que existen entre la altitud y la presión del aire, la temperatura y la velocidad del viento es extremadamente importante en las investigaciones meteorológicas. La figura 1.5 muestra un ejemplo típico del perfil vertical promedio anual del viento como una función de la altura. Las variaciones de la velocidad del viento medidas con respecto a la altura se usan para examinar los patrones meteorológicos, así como las condiciones del viento que puedan afectar a un avión durante la aproximación final y el aterrizaje.

A todo lo largo del libro consideraremos dos tipos básicos de señales: continuas y discretas. En el caso de las señales continuas la variable independiente es continua, por lo que estas señales se definen para una sucesión continua de valores de la variable inde-

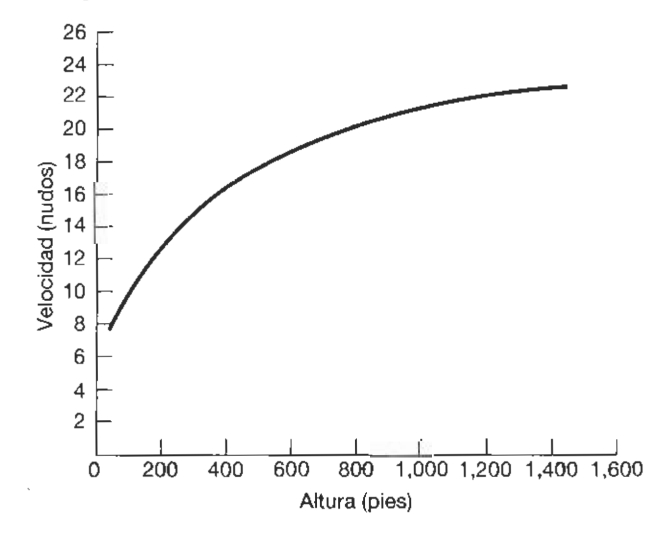


Figura 1.5 Un perfil típico vertical anual del viento. (Adaptado de Crawford y Hudson, National Severe Storms Laboratory Report, ESSA ERLTM-NSSL 48, agosto de 1970.)

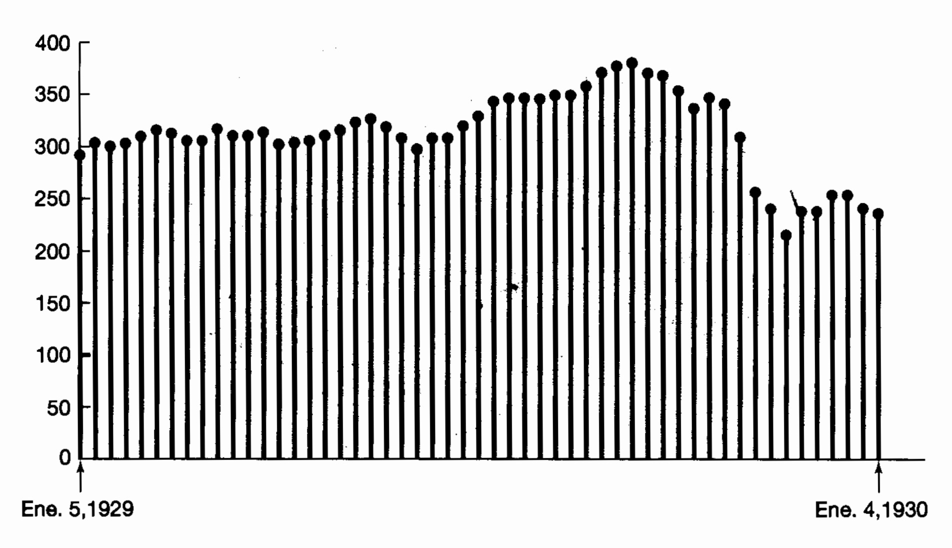


Figura 1.6 Ejemplo de una señal discreta: el índice semanal Dow-Jones del mercado de valores, del 5 de enero de 1929 al 4 de enero de 1930.

pendiente. Por otra parte, las señales discretas sólo están definidas en tiempos discretos y, en consecuencia, para estas señales la variable independiente toma solamente un conjunto discreto de valores. La señal de una voz como una función del tiempo y la presión atmosférica como una función de la altitud son ejemplos de señales continuas. El índice Dow Jones semanal del mercado de valores es un ejemplo de una señal discreta, lo cual se ilustra en la figura 1.6. Se pueden encontrar otros ejemplos de señales discretas en estudios demográficos en los cuales diversos atributos, como ingreso promedio, índice de criminalidad o kilogramos de pescado capturado, son tabulados contra variables discretas como tamaño de la familia, población total o tipos de barcos pesqueros, respectivamente.

Para distinguir entre las señales continuas y las discretas usaremos el símbolo t para denotar la variable independiente continua y n para indicar la variable independiente discreta. Además, para señales continuas encerraremos la variable independiente entre paréntesis $(\cdot)$, mientras que para señales discretas la encerraremos entre corchetes $[\cdot]$. Con frecuencia también habrá ocasiones en que será útil representar las señales gráficamente. En la figura 1.7 se muestran ejemplos de una señal continua $x(t)$ y de una señal discreta $x[n]$. Es importante notar que la señal discreta $x[n]$ está definida *sólo* para valores enteros de la variable independiente. Nuestra selección de la representación gráfica de $x[n]$ enfatiza este hecho, y para hacerlo aún más notorio, en ocasiones nos referiremos a $x[n]$ como una *secuencia* discreta.

Una señal discreta $x[n]$ puede representar un fenómeno para el cual la variable independiente es intrínsecamente discreta. Señales como los datos demográficos son un ejemplo de esto. Por otro lado, una clase muy importante de señales discretas surge del *muestreo* de señales continuas. En este caso, la señal discreta $x[n]$ representa muestras sucesivas de un fenómeno subyacente para el cual la variable independiente es continua. Debido a su velocidad, capacidad de cómputo y flexibilidad, los procesadores digitales modernos se usan para construir muchos sistemas prácticos que comprenden desde pilotos automáticos digitales hasta sistemas digitales de audio. Estos sistemas requieren del uso de secuencias discreto que representan las versiones obtenidas como muestra de las señales continuas —por ejemplo, posición del avión, velocidad y rumbo para un piloto automático, o voz y música para un sistema de audio—. También las imágenes en periódicos, o en este libro para no ir más lejos, consisten en realidad en una malla muy fina de

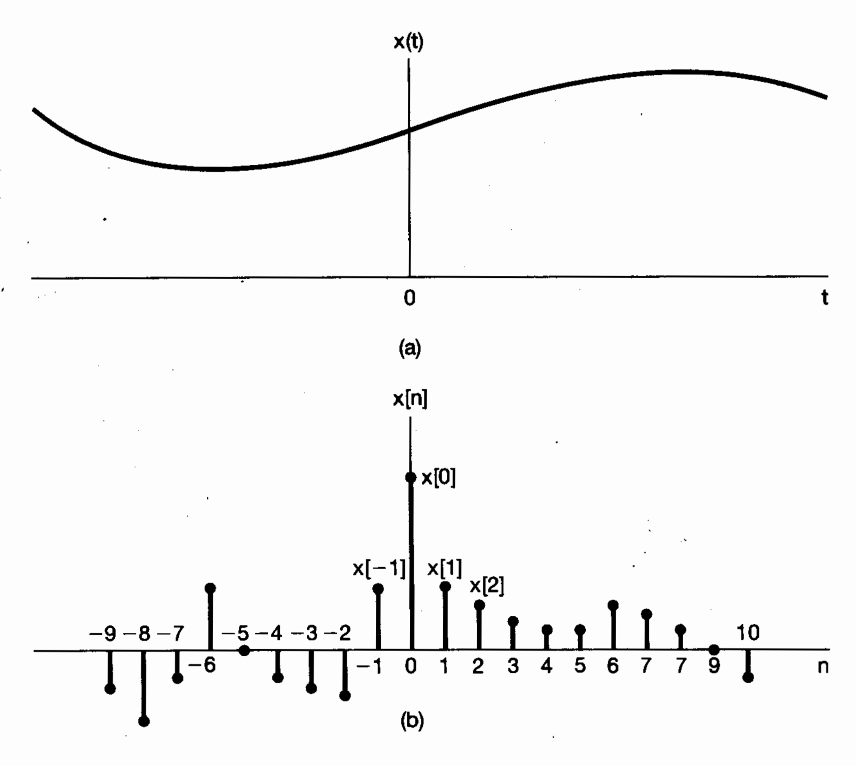


Figura 1.7 Representaciones gráficas de (a) una señal continua y (b) una señal discreta.

puntos, y cada uno de estos puntos representa una muestra de la brillantez del punto correspondiente en la imagen original. Sin embargo, no importa cuál sea el origen de los datos, la señal $x[n]$ está definida solamente para valores enteros de n. No tiene sentido referirse a la $3\frac{1}{2}$ muestra de una señal digital de voz, así como tampoco lo tiene el referirse al ingreso promedio de una familia que tiene $2\frac{1}{2}$ miembros.

A lo largo de la mayor parte de este libro trataremos las señales discretas y continuas por separado, pero en paralelo, de manera que podamos recurrir al conocimiento obtenido en un ámbito para ayudar a entender el otro. En el capítulo 7 retomaremos el tema del muestreo, y en ese contexto presentaremos de manera conjunta los conceptos de tiempo continuo y tiempo discreto para examinar la relación entre una señal continua y una discreta obtenida por muestreo a partir de la primera.

1.1.2 Señales de energía y de potencia

A partir de los ejemplos proporcionados hasta ahora, vemos que las señales pueden representar una amplia variedad de fenómenos. En muchas aplicaciones, aunque no en todas, las señales que examinamos están directamente relacionadas con cantidades físicas que capturan potencia y energía de un sistema físico. Por ejemplo, si $v(t)$ e $i(t)$ son, respectivamente, el voltaje y la corriente a través de un resistor con resistencia R, entonces la potencia instantánea es

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}\, v^2(t). \tag{1.1}$$

La *energía* total gastada durante el intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$ es

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t)dt. \quad (1.2)$$

y la *potencia promedio* durante este intervalo de tiempo es

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t)dt. \quad (1.3)$$

De manera similar, para el automóvil ilustrado en la figura 1.2, la potencia instantánea disipada a través de la fricción es $p(t) = bv^2(t)$, por lo que podemos definir entonces la energía total y la potencia promedio en un intervalo de tiempo de la misma manera que en las ecuaciones (1.2) y (1.3).

Con ejemplos físicos sencillos como éstos a manera de motivación, resulta común y útil usar como convención una terminología similar para potencia y energía para *cualquier* señal continua $x(t)$ o para *cualquier* señal discreta $x[n]$. Más aún, como veremos pronto, con frecuencia encontraremos conveniente considerar señales que adoptan valores complejos. En este caso, la energía total en el intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$ en una señal continua $x(t)$ se define como

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt, \quad (1.4)$$

donde $|x|$ denota la magnitud del número x (posiblemente complejo). La potencia promediada en tiempo se obtiene dividiendo la ecuación (1.4) entre la longitud, $t_2 - t_1$, del intervalo de tiempo. De manera similar, la energía total en una señal discreta $x[n]$ en el intervalo de tiempo $n_1 \leq n \leq n_2$ se define como

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2, \quad (1.5)$$

y dividiéndola entre el número de puntos en el intervalo, $n_2 - n_1 + 1$, se obtiene la potencia promedio durante el intervalo. Es importante recordar que los términos "potencia" y "energía" se usan aquí independientemente de si las cantidades de las ecuaciones (1.4) y (1.5) están en verdad relacionadas con la energía física.[1] No obstante, encontraremos conveniente usar estos términos de una manera general.

Además, en muchos sistemas estaremos interesados en examinar la potencia y la energía en señales sobre un intervalo de tiempo infinito, es decir, para $-\infty < t < +\infty$ o para $-\infty < n < +\infty$. En estos casos, definimos la energía total como los límites de las ecuaciones (1.4) y (1.5) conforme el intervalo de tiempo se incrementa sin límite. Esto es, en tiempo continuo,

$$E_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \quad (1.6)$$

y en tiempo discreto,

$$E_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2. \quad (1.7)$$

[1] Aun si existiera esta relación, las ecuaciones (1.4) y (1.5) pueden tener las dimensiones y escalamientos equivocados. Por ejemplo, comparando las ecuaciones (1.2) y (1.4), vemos que si $x(t)$ representa el voltaje a través de un resistor, entonces la ecuación (1.4) debe dividirse entre la resistencia (medida, por ejemplo, en ohms) para obtener unidades de energía física.

Obsérvese que para algunas señales, la integral de la ecuación (1.6) o la suma en la ecuación (1.7) pueden no converger —es decir, si $x(t)$ o $x[n]$ son iguales todo el tiempo a un valor constante diferente de cero—. Estas señales tienen una energía infinita, mientras que las señales con $E_\infty < \infty$ tienen energía finita.

De una manera análoga, la potencia promedio en el tiempo en un intervalo infinito se define como

$$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \tag{1.8}$$

y

$$P_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 \tag{1.9}$$

en tiempo continuo y tiempo discreto, respectivamente. Con estas definiciones, podemos identificar tres clases importantes de señales. La primera es la clase de señales con energía total finita, es decir, aquellas señales para las cuales $E_\infty < \infty$. Estas señales deben tener potencia promedio cero, ya que en el caso continuo, por ejemplo, vemos de la ecuación (1.8) que

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T} = 0. \tag{1.10}$$

Un ejemplo de una señal de energía finita es la que tiene valor 1 para $0 \leq t \leq 1$ y 0 en cualquier otro caso. En este ejemplo $E_\infty = 1$ y $P_\infty = 0$.

Una segunda clase de señales son aquellas con potencia promedio finita P_∞. A partir de lo que acabamos de observar, si $P_\infty > 0$, entonces, forzosamente, $E_\infty = \infty$. Esto, por supuesto, tiene sentido, ya que si hay una energía promedio diferente de cero por unidad de tiempo (es decir, potencia diferente de cero), entonces integrando o sumando ésta sobre un intervalo de tiempo infinito se obtiene una cantidad infinita de energía. Por ejemplo, la señal constante $x[n] = 4$ tiene energía infinita, pero la potencia promedio es $P_\infty = 16$. También hay señales para las cuales ni P_∞ ni E_∞ son finitas. Un simple ejemplo es la señal $x(t) = t$. Encontraremos otros ejemplos de señales en cada una de estas clases en el resto de este y los siguientes capítulos.

1.2 TRANSFORMACIONES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

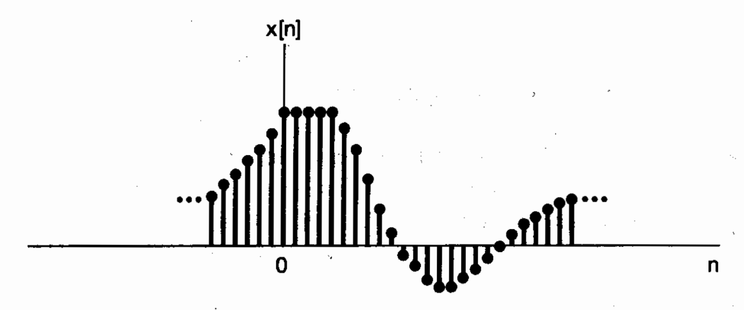
Un concepto central en el análisis de señales y sistemas es el de la transformación de una señal. Por ejemplo, en el sistema de control de un avión, las señales correspondientes a las acciones del piloto son transformadas mediante sistemas eléctricos y mecánicos en cambios en el empuje del avión o en las posiciones de sus superficies de control, como el timón o los alerones, los cuales a su vez son transformados a través de la dinámica y cinemática del vehículo en cambios de velocidad y dirección del avión. De la misma forma, en un sistema de audio de alta fidelidad, una señal de entrada que representa la música grabada en una cinta o en un disco compacto se modifica para enriquecer las características deseables, eliminar el ruido de la grabación o balancear los diversos componentes de la señal (es decir, agudos y graves). En esta sección nos enfocaremos en una clase muy limitada, pero importante, de transformaciones de señales elementales que involucran modificaciones sencillas de la variable independiente, es decir, el eje del tiempo. Como veremos en esta sección y en las subsecuentes de este capítulo, dichas transformaciones elementales nos permiten introducir varias propiedades básicas de las señales y los sistemas. En los capítulos posteriores encontraremos que también juegan un importante papel en la definición y caracterización de clases de sistemas mucho más ricas e importantes.

1.2.1 Ejemplos de transformaciones de la variable independiente

Un ejemplo simple y muy importante de transformación de la variable independiente de una señal es un *corrimiento de tiempo*. En la figura 1.8 se ilustra un corrimiento discreto en el cual tenemos dos señales $x[n]$ y $x[n - n_0]$ que son idénticas en forma pero están desplazadas una con respecto a la otra. También encontraremos corrimientos continuos, como se ilustra en la figura 1.9, en la cual $x(t - t_0)$ representa una versión de $x(t)$ retardada (si t_0 es positivo) o adelantada (si t_0 es negativo). Las señales que están relacionadas de esta forma se presentan en aplicaciones como el radar, el sonar y el procesamiento de señales sísmicas, en las cuales varios receptores situados en diferentes localizaciones detectan una señal que está siendo transmitida a través de un cierto medio (agua, roca, aire, etc.). En este caso, la diferencia en el tiempo de propagación desde el punto de origen de la señal transmitida a cualquier par de receptores tiene como resultado un corrimiento de tiempo entre las señales obtenidas por los dos receptores.

Una segunda transformación básica del eje del tiempo es la *inversión de tiempo*. Por ejemplo, como se ilustra en la figura 1.10, la señal $x[-n]$ se obtiene a partir de la señal $x[n]$ mediante un reflejo respecto a $n = 0$ (es decir, invirtiendo la señal). De manera similar, como se ilustra en la figura 1.11, $x(-t)$ se obtiene a partir de la señal $x(t)$ mediante el reflejo de $t = 0$. Esto es, si $x(t)$ representa una señal de audio grabada en una cinta, entonces $x(-t)$ es la misma grabación pero tocada en sentido contrario. Otra transformación es la de *escalamiento de tiempo*. En la figura 1.12 hemos ilustrado tres señales, $x(t)$, $x(2t)$ y $x(t/2)$, que están relacionadas por cambios lineales de escala en la variable independiente. Si pensamos nuevamente en el ejemplo de $x(t)$ como una grabación en cinta, entonces $x(2t)$ es la grabación tocada al doble de la velocidad y $x(t/2)$ es la grabación tocada a media velocidad.

Con frecuencia resulta interesante determinar el efecto de transformar la variable independiente de una señal $x(t)$ determinada para obtener una señal de la forma $x(\alpha t + \beta)$, donde α y β son números dados. Esta transformación de la variable independiente conserva la forma de $x(t)$, excepto que la señal resultante puede ser alargada linealmente si $|\alpha| < 1$, comprimida linealmente si $|\alpha| > 1$, invertida en tiempo si $\alpha < 0$, y desplazada en tiempo si β es diferente de cero. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.



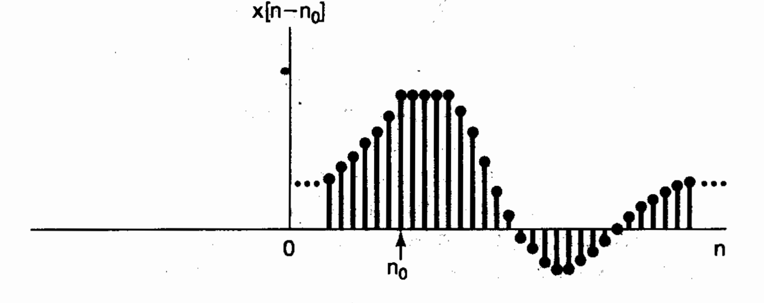
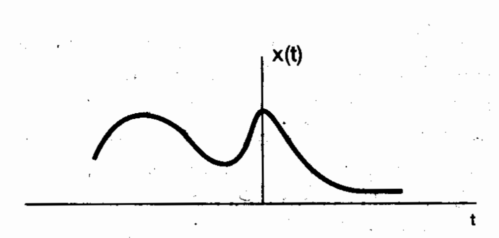


Figura 1.8 Señales discretas relacionadas por un corrimiento de tiempo. En esta figura $n_0 > 0$, de manera que $x[n - n_0]$ es una versión atrasada de $x[n]$ (es decir, cada punto en $x[n]$ ocurre más tarde en $x[n - n_0]$).



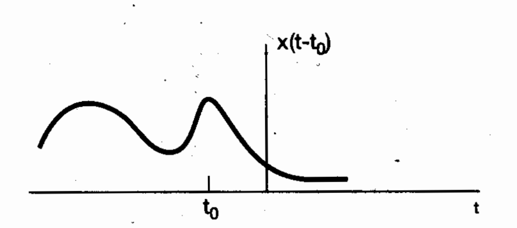
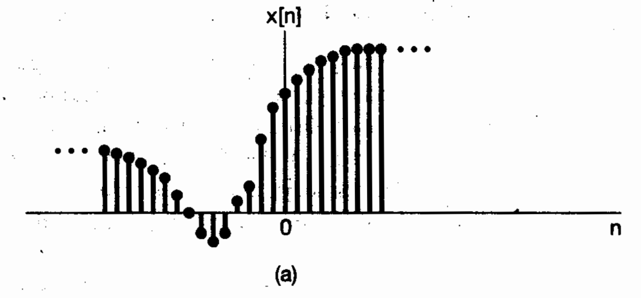


Figura 1.9 Señales continuas relacionadas mediante un corrimiento de tiempo. En esta figura, $t_0 < 0$, de manera que $x(t - t_0)$ es una versión adelantada de $x(t)$ (es decir, cada punto en $x(t)$ ocurre con anticipación en $x(t - t_0)$).



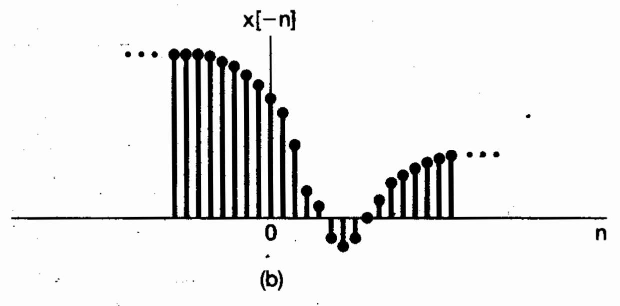
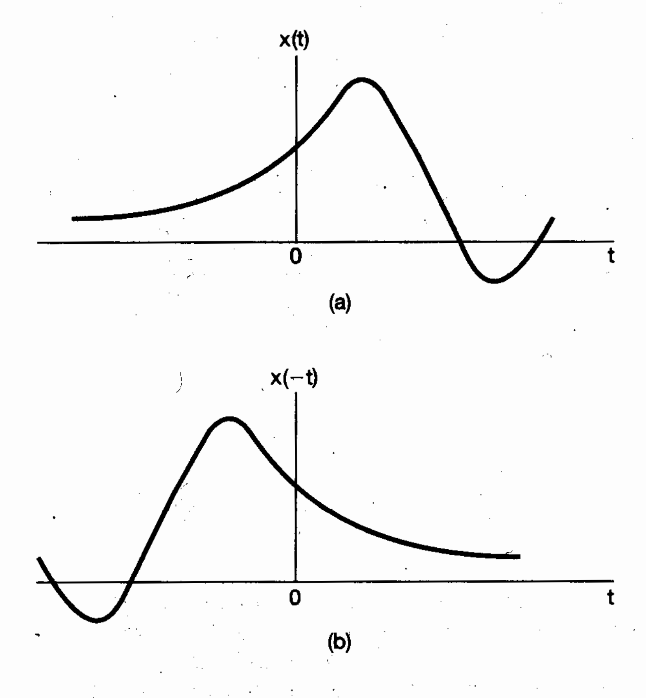


Figura 1.10 (a) Una señal discreta $x[n]$; (b) su reflejo $x[-n]$ alrededor de $n = 0$.



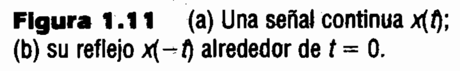


Figura 1.11 (a) Una señal continua $x(t)$; (b) su reflejo $x(-t)$ alrededor de $t = 0$.

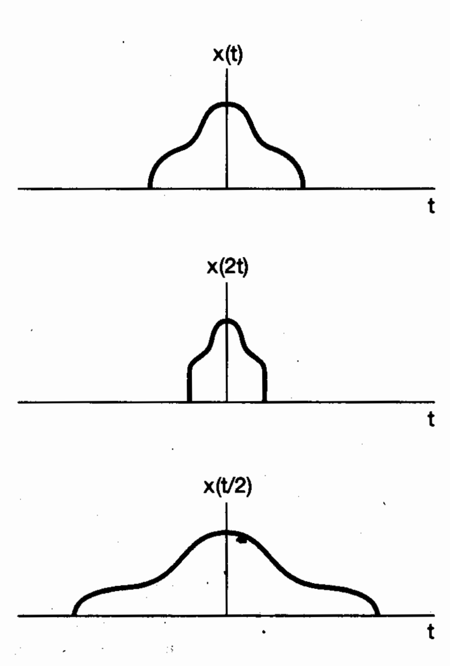


Figura 1.12 Señales continuas relacionadas mediante escalamiento de tiempo.

Ejemplo 1.1

Dada la señal $x(t)$ mostrada en la figura 1.13(a), la señal $x(t + 1)$ corresponde a un adelanto (corrimiento a la izquierda) por una unidad a lo largo del eje t como se ilustra en la figura 1.13(b). Específicamente, observamos que el valor de $x(t)$ en $t = t_0$ ocurre en $x(t + 1)$ en $t = t_0 - 1$. Por ejemplo, el valor de $x(t)$ en $t = 1$ se encuentra en $x(t + 1)$ en $t = 1 - 1 = 0$. Asimismo, ya que $x(t)$ es cero para $t < 0$, tenemos que $x(t + 1)$ es cero para $t < -1$. De igual manera, ya que $x(t)$ es cero para $t > 2$, $x(t + 1)$ es cero para $t > 1$.

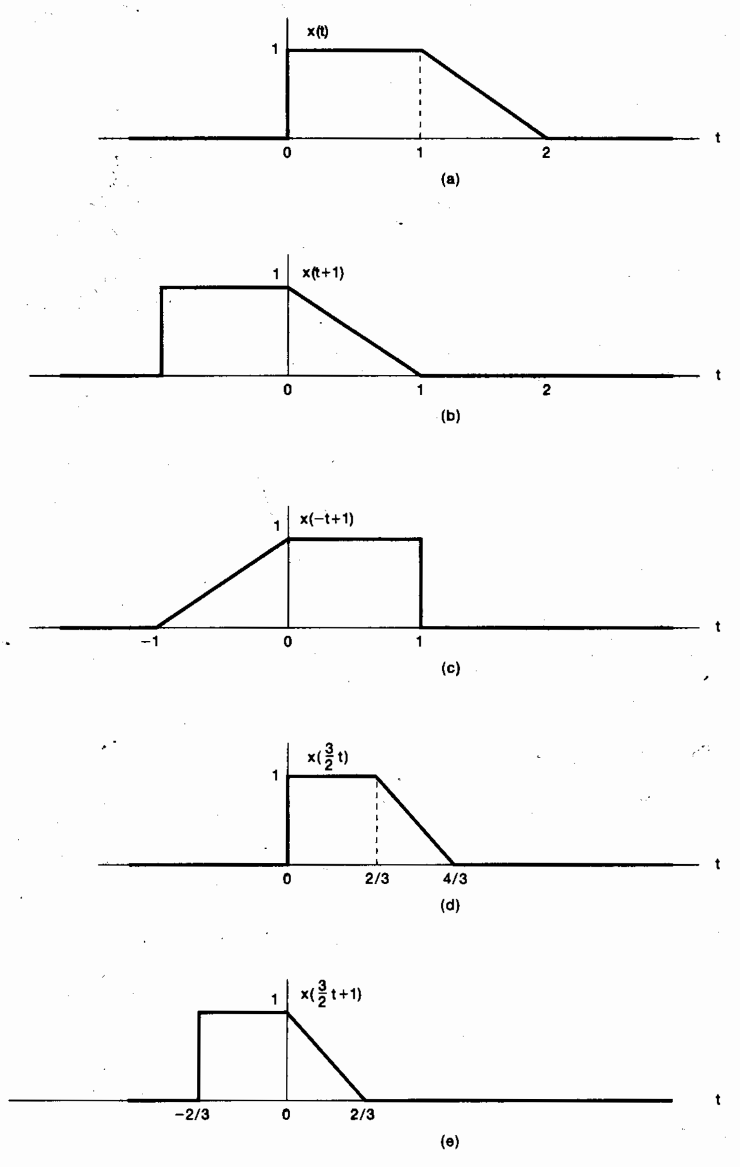


Figura 1.13 (a) La señal continua $x(t)$ que se usó en los ejemplos 1.1-1.3 para ilustrar las transformaciones de la variable independiente; (b) la señal desplazada en tiempo $x(t + 1)$; (c) la señal $x(-t + 1)$ obtenida mediante un corrimiento de tiempo y una inversión de tiempo; (d) la señal $x(\frac{3}{2}t)$ escalada en tiempo y (e) la señal $x(\frac{3}{2}t + 1)$ obtenida mediante un corrimiento de tiempo y un escalamiento.

Consideremos también la señal $x(-t+1)$, la cual se puede obtener remplazando t con $-t$ en $x(t+1)$. Esto es, $x(-t+1)$ es la versión invertida en tiempo de $x(t+1)$. Entonces, $x(-t+1)$ se obtiene gráficamente al reflejar $x(t+1)$ alrededor del eje t como se muestra en la figura 1.13(c).

Ejemplo 1.2

Dada la señal $x(t)$ mostrada en la figura 1.13(a), la señal $x(\frac{3}{2}t)$ corresponde a una compresión lineal de $x(t)$ por un factor de $\frac{2}{3}$ como se ilustra en la figura 1.13(d). Específicamente, notamos que el valor de $x(t)$ en $t = t_0$ ocurre en $x(\frac{3}{2}t)$ en $t = \frac{2}{3}t_0$. Por ejemplo, el valor de $x(t)$ en $t = 1$ se encuentra en $x(\frac{3}{2}t)$ en $t = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$. Además, ya que $x(t)$ es cero para $t < 0$, tenemos que $x(\frac{3}{2}t)$ es cero para $t < 0$. De manera semejante, ya que $x(t)$ es cero para $t > 2$, $x(\frac{3}{2}t)$ también es cero para $t > \frac{4}{3}$.

Ejemplo 1.3

Suponga que deseamos determinar el efecto que tendría transformar la variable independiente de una señal determinada, $x(t)$, para obtener una señal de la forma $x(\alpha t + \beta)$, donde α y β son números dados. Una aproximación sistemática para hacerlo consiste en retardar o adelantar $x(t)$ de acuerdo con el valor de β y después realizar el escalamiento de tiempo y/o la inversión de tiempo en la señal resultante de acuerdo con el valor de α. La señal retardada o adelantada se alarga linealmente si $|\alpha| < 1$, se comprime linealmente si $|\alpha| > 1$ y se invierte en tiempo si $\alpha < 0$.

Para ilustrar esta aproximación, mostraremos cómo se determina $x(\frac{3}{2}t + 1)$ para la señal $x(t)$ mostrada en la figura 1.13(a). Ya que $\beta = 1$, primero adelantamos (corrimiento a la izquierda) $x(t)$ una unidad como se muestra en la figura 1.13(b). Puesto que $|\alpha| = \frac{3}{2}$, podemos comprimir en forma lineal la señal desplazada de la figura 1.13(b) mediante un factor de $\frac{2}{3}$ para obtener la señal mostrada en la figura 1.13(e).

Además de su uso en la representación de fenómenos físicos como el corrimiento de tiempo en una señal de sonar y el adelanto o retroceso de una cinta de audio, las transformaciones de la variable independiente son extremadamente útiles en el análisis de señales y sistemas. En la sección 1.6 y en el capítulo 2 usaremos transformaciones de la variable independiente para introducir y analizar las propiedades de los sistemas. Estas transformaciones también son importantes para definir y examinar algunas propiedades importantes de las señales.

1.2.2 Señales periódicas

Un tipo importante de señales que encontraremos con frecuencia en todo el libro es la clase de señales *periódicas*. Una señal periódica continua $x(t)$ tiene la característica de que hay un valor positivo T para el cual

$$x(t) = x(t+T) \tag{1.11}$$

para todos los valores de t. En otras palabras, una señal periódica tiene la propiedad de que no cambia para un corrimiento de tiempo T. En este caso decimos que $x(t)$ es *periódica con periodo T*. Las señales periódicas continuas surgen en una gran variedad de contextos. Por ejemplo, como se ilustra en el problema 2.61, la respuesta natural de sistemas en los cuales se conserva la energía, como los circuitos LC ideales sin disipación de energía resistiva y los sistemas mecánicos ideales sin pérdidas por fricción, son señales periódicas y de hecho, están compuestas de algunas de las señales periódicas básicas que presentaremos en la sección 1.3.

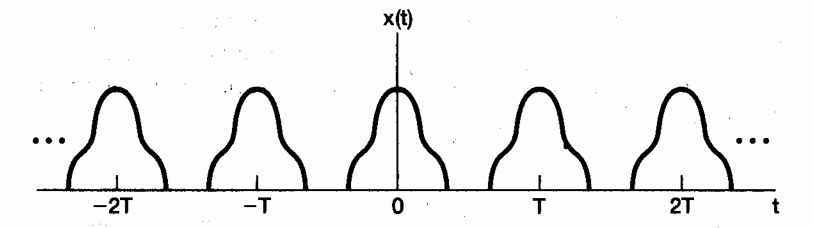


Figura 1.14 Una señal periódica continua.

En la figura 1.14 se muestra un ejemplo de una señal periódica continua. A partir de la figura o de la ecuación (1.11) podemos deducir fácilmente que si $x(t)$ es periódica con periodo T, entonces $x(t) = x(t + mT)$ para toda t y para cualquier entero m. Por tanto, $x(t)$ también es periódica con periodos $2T, 3T, 4T, \ldots$ El *periodo fundamental* T_0 de $x(t)$ es el valor positivo más pequeño de T para el cual la ecuación (1.11) se satisface. Esta definición del periodo fundamental es válida excepto cuando $x(t)$ es una constante. En este caso el periodo fundamental es indefinido ya que $x(t)$ es periódica para *cualquier* valor de T (de manera que no hay un valor positivo más pequeño). Una señal $x(t)$ que es no periódica se conoce como una señal *aperiódica*.

Las señales periódicas discretas son definidas de manera analógica. Específicamente, una señal discreta $x[n]$ es periódica con periodo N, donde N es un entero positivo, si no cambia con un corrimiento de tiempo de N, es decir, si

$$x[n] = x[n + N] \tag{1.12}$$

para todos los valores de n. Si la ecuación (1.12) se satisface, entonces $x[n]$ es también periódica con periodos $2N, 3N, \ldots$ El *periodo fundamental* N_0 es el valor positivo más pequeño de N para el cual la ecuación (1.12) se satisface. En la figura 1.15 se muestra un ejemplo de una señal periódica discreta con periodo fundamental $N_0 = 3$.

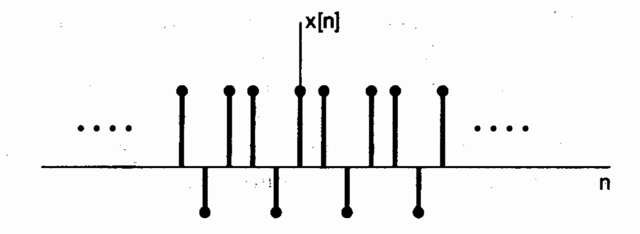


Figura 1.15 Una señal periódica discreta con periodo fundamental $N_0 = 3$.

Ejemplo 1.4

Permítasenos mostrar el tipo de resolución de problemas que se requiere para determinar si una señal dada es o no es periódica. La señal cuya periodicidad se desea verificar está dada por

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si } t < 0 \\ \text{sen}(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}. \tag{1.13}$$

De la trigonometría sabemos que $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$ y $\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen}(t)$. Así, considerando a $t > 0$ y a $t < 0$ por separado, vemos que $x(t)$ se repite sobre cada intervalo de longitud 2π. Sin embargo, como se ilustra en la figura 1.16, $x(t)$ también tiene una discontinuidad en el origen del tiempo que no repite en ningún otro momento. Puesto que cada característica en la forma de una señal periódica *debe* repetirse periódicamente, concluimos que la señal $x(t)$ no es periódica.



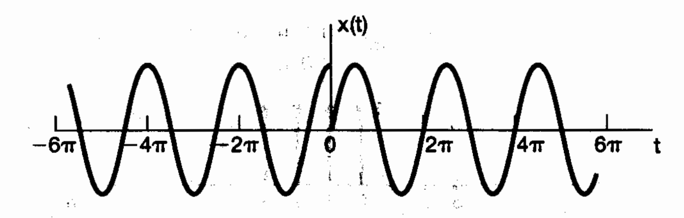


Figura 1.16 La señal $x(t)$ considerada en el ejemplo 1.4.

1.2.3 Señales par e impar

Otro conjunto de propiedades útiles de las señales está relacionado con la simetría que presentan con la inversión de tiempo. Una señal $x(t)$ o $x[n]$ es conocida como una señal *par* si es idéntica a su contraparte invertida en el tiempo, es decir, con su reflejo respecto del origen. En tiempo continuo una señal es par si

$$x(-t) = x(t), \tag{1.14}$$

mientras que una señal en tiempo discreto es par si

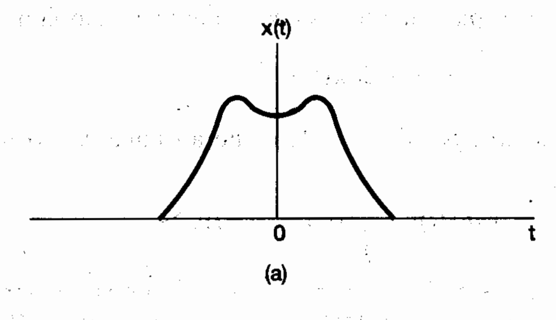
$$x[-n] = x[n]. \tag{1.15}$$

A una señal se le considera *impar* si

$$x(-t) = -x(t), \tag{1.16}$$

$$x[-n] = -x[n]. \tag{1.17}$$

Una señal impar debe ser necesariamente 0 en $t = 0$ o $n = 0$, ya que las ecuaciones (1.16) y (1.17) requieren que $x(0) = -x(0)$ y $x[0] = -x[0]$. En la figura 1.17 se muestran ejemplos de señales par e impar continua.



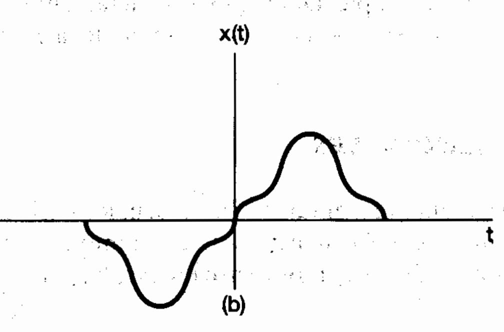
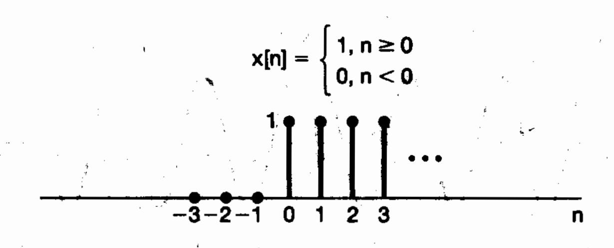
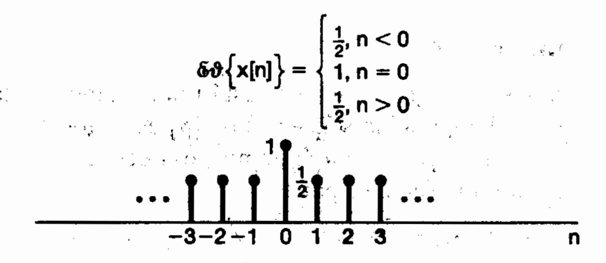


Figura 1.17 (a) Una señal par continua; (b) una señal impar continua.





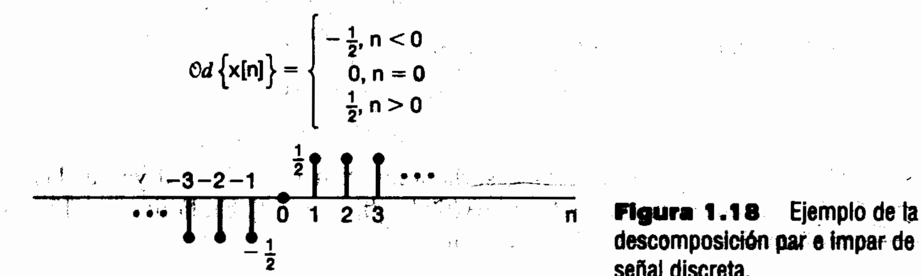


Figura 1.18 Ejemplo de la descomposición par e impar de una señal discreta.

Un hecho importante es que cualquier señal se puede separar en la suma de dos señales, una de las cuales es par y la otra es impar. Para ver esto, considere la señal

$$\mathcal{E}v\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)], \tag{1.18}$$

la cual corresponde a la *parte par* de $x(t)$. De manera similar, la *parte impar* de $x(t)$ está dada por

$$\mathcal{O}d\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]. \tag{1.19}$$

Verificar que la parte par es de hecho par, que la parte impar es impar y que $x(t)$ es la suma de las dos es un ejercicio simple. Definiciones exactamente análogas son válidas en el caso de discreto. La figura 1.18 proporciona un ejemplo de la descomposición par-impar de una señal discreta.

1.3 SEÑALES EXPONENCIALES Y SENOIDALES

En esta sección y en la siguiente presentamos varias señales básicas continuas y discretas. Estas señales no sólo ocurren con frecuencia, sino que también sirven como bloques fundamentales a partir de los cuales podemos construir muchas otras señales.

1.3.1 Señales continuas exponencial compleja y senoidal

La *señal* continua *exponencial compleja* es de la forma

$$x(t) = Ce^{at}, \tag{1.20}$$

donde C y a son, en general, números complejos. Dependiendo de los valores de estos parámetros, la exponencial compleja puede adoptar varias características diferentes.

Señales exponenciales reales

Como se ilustra en la figura 1.19, si C y a son reales [en cuyo caso $x(t)$ se llama *exponencial real*], básicamente hay dos tipos de comportamiento. Si a es positiva, entonces conforme t se incrementa $x(t)$ es una exponencial creciente, una forma que se usa para describir muchos procesos físicos diferentes, incluyendo reacciones en cadena en explosiones atómicas y reacciones químicas complejas. Si a es negativa, entonces $x(t)$ es una exponencial decreciente, una señal que también se utiliza para describir una amplia variedad de fenómenos, entre los que se incluyen los procesos de desintegración radiactiva y las respuestas de circuitos RC y de sistemas mecánicos amortiguados. En particular, como se muestra en los problemas 2.61 y 2.62, la respuesta natural del circuito de la figura 1.1 y del automóvil en la figura 1.2 son exponenciales decrecientes. También notamos que para $a = 0$, $x(t)$ es constante.

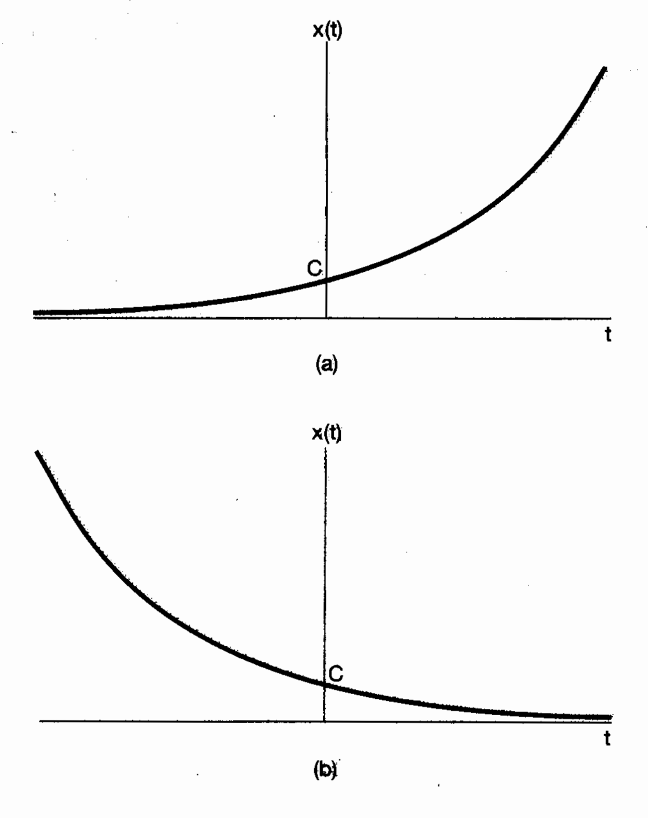


Figura 1.19 Exponencial real continua $x(t) = Ce^{at}$. (a) $a > 0$; (b) $a < 0$.

Señales periódicas exponencial compleja y senoidal

Una segunda clase de exponenciales complejas de importancia se obtiene *considerando el* campo puramente imaginario. Específicamente considere que

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}. \tag{1.21}$$

Una propiedad importante de esta señal consiste en que es periódica. Para verificar lo anterior, recordamos de la ecuación (1.11) que $x(t)$ será periódica con periodo T si

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)}. \tag{1.22}$$

O, puesto que

$$e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T},$$

se desprende que, para que sea periódica, debemos tener

$$e^{j\omega_0 T} = 1. \tag{1.23}$$

Si $\omega_0 = 0$, entonces $x(t) = 1$, la cual es periódica para cualquier valor de T. Si $\omega_0 \neq 0$, entonces el periodo fundamental T_0 de $x(t)$ [es decir, el valor positivo más pequeño de T para el cual la ecuación (1.23) se cumple] es

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}. \tag{1.24}$$

De esta forma, las señales $e^{j\omega_0 t}$ y $e^{-j\omega_0 t}$ tienen el mismo periodo fundamental.

Una señal relacionada en forma muy estrecha con la exponencial periódica compleja es la *señal senoidal*

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \tag{1.25}$$

como se ilustra en la figura 1.20. Puesto que las unidades de t son los segundos, las de ϕ y ω_0 son radianes y radianes por segundo, respectivamente. También es común escribir $\omega_0 = 2\pi f_0$ donde f_0 tiene como unidades los ciclos por segundo, o hertz (Hz). Al igual que la señal exponencial compleja, la señal senoidal también es periódica con periodo fundamental T_0 dado por la ecuación (1.24). Las señales senoidal y exponencial compleja tam-

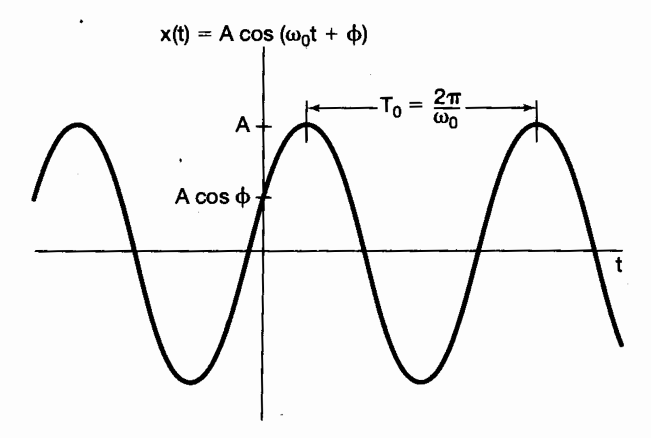


Figura 1.20 Señal senoidal continua.

bién se usan para describir las características de muchos procesos físicos.—en particular los sistemas físicos en los cuales se conserva la energía—. Por ejemplo, como se muestra en el problema 2.61, la respuesta natural de un circuito LC es senoidal, como lo es el movimiento armónico simple de un sistema mecánico que consiste en una masa conectada mediante un resorte a un soporte estacionario. Las variaciones de presión acústica que corresponden a una sola nota musical son también senoidales.

Usando la relación de Euler,[2] la exponencial compleja en la ecuación (1.21) se puede escribir en términos de señales senoidales con el mismo periodo fundamental:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \operatorname{sen} \omega_0 t. \tag{1.26}$$

De manera similar, la señal senoidal de la ecuación (1.25) puede escribirse en términos de exponenciales complejas periódicas, una vez más con el mismo periodo fundamental:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t}. \tag{1.27}$$

Observe que las dos exponenciales en la ecuación (1.27) tienen amplitudes complejas. De manera alternativa, podemos expresar una senoide en términos de la señal exponencial compleja como

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A\,\mathcal{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}, \tag{1.28}$$

en donde, si c es un número complejo, $\mathcal{Re}\{c\}$ denota su parte real. También usaremos la notación $\mathcal{Im}\{c\}$ para la parte imaginaria de c, de manera que, por ejemplo,

$$A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) = A\,\mathcal{Im}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}, \tag{1.29}$$

De la ecuación (1.24) vemos que el periodo fundamental T_0 de una señal senoidal continua o una exponencial compleja periódica es inversamente proporcional a $|\omega_0|$, a la cual nos referiremos como la *frecuencia fundamental*. En la figura 1.21 vemos gráficamente lo que esto significa. Si disminuimos la magnitud de ω_0, se reduce la velocidad de oscilación y por tanto se incrementa el periodo. Exactamente los efectos contrarios ocurren si incrementamos la magnitud de ω_0. Considere ahora $\omega_0 = 0$. En este caso, como mencionamos anteriormente, $x(t)$ es constante y por tanto es periódica con periodo T para cualquier valor positivo de T. Entonces, el periodo fundamental de una señal constante es indefinido. Por otra parte, no hay ambigüedad al determinar que la frecuencia fundamental de una señal constante sea cero. Esto es, una señal constante tiene una velocidad de oscilación igual a cero.

Las señales periódicas —y, en particular, la señal periódica exponencial compleja de la ecuación (1.21) y la señal senoidal de la ecuación (1.25)— proporcionan ejemplos importantes de señales con energía total infinita pero potencia promedio finita. Por ejemplo, considere la señal periódica exponencial de la ecuación (1.21) y suponga que calculamos la energía total y la potencia promedio en esta señal en un periodo:

$$\begin{aligned} E_{\text{periodo}} &= \int_0^{T_0} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt \\ &= \int_0^{T_0} 1 \cdot dt = T_0, \end{aligned} \tag{1.30}$$

[2] Tanto la relación de Euler como otras ideas básicas relacionadas con la manipulación de números complejos y exponenciales son examinadas en la sección de revisión matemática de los problemas al final del capítulo.

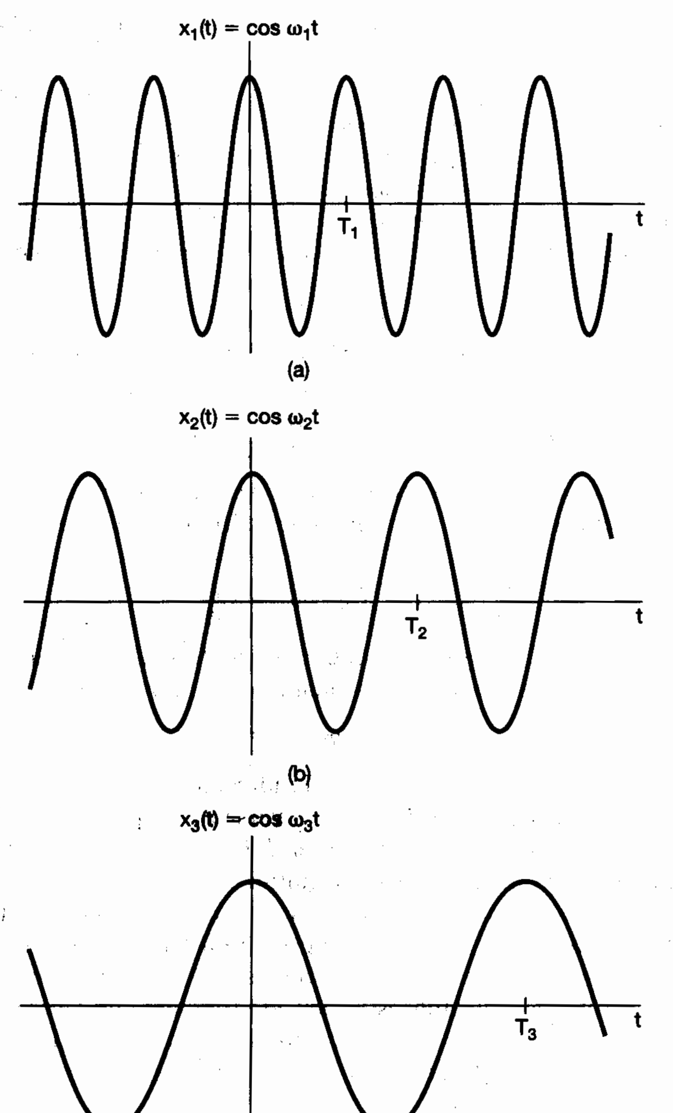


Figura 1.21 Relación entre la frecuencia fundamental y el periodo para señales senoidales continuas; aquí $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$, lo cual implica que $T_1 < T_2 < T_3$.

$$P_{\text{periodo}} = \frac{1}{T_0} E_{\text{periodo}} = 1. \tag{1.31}$$

Ya que hay un número infinito de periodos conforme t varía de $-\infty$ a $+\infty$, la energía total integrada en todo tiempo es infinita. Sin embargo, cada periodo de la señal parece exactamente el mismo. Puesto que la potencia promedio de la señal es igual a 1 en cada periodo, al hacer el promedio en los múltiples periodos siempre conduce a una potencia promedio de 1. Es decir, la señal periódica exponencial compleja tiene una potencia promedio

finita igual a

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = 1. \tag{1.32}$$

El problema 1.3 proporciona ejemplos adicionales de cálculos de energía y potencia para señales periódicas y aperiódicas.

Las exponenciales periódicas complejas juegan un papel fundamental en gran parte del análisis de señales y sistemas, en parte debido a que sirven como una base extremadamente útil para muchas otras señales. Con frecuencia encontraremos provechoso considerar conjuntos de exponenciales complejas *relacionadas armónicamente* —esto es, conjuntos de exponenciales periódicas, las cuales son periódicas con un periodo común T_0. Específicamente, una condición necesaria para que una exponencial compleja $e^{j\omega t}$ sea periódica con periodo T_0 es que

$$e^{j\omega T_0} = 1, \tag{1.33}$$

lo cual implica que ωT_0 sea un múltiplo de 2π, es decir,

$$\omega T_0 = 2\pi k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{1.34}$$

Por tanto, si definimos

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \tag{1.35}$$

veremos que, para satisfacer la ecuación (1.34), ω debe ser un múltiplo entero de ω_0. En otras palabras, un conjunto de exponenciales complejas relacionadas armónicamente es un conjunto de exponenciales periódicas con frecuencias fundamentales que son todas múltiplos de una sola frecuencia positiva ω_0:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{1.36}$$

Para $k = 0$, $\phi_k(t)$ es una constante, mientras que para cualquier otro valor de k, $\phi_k(t)$ es periódica con frecuencia fundamental $|k|\omega_0$ y periodo fundamental

$$\frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|}. \tag{1.37}$$

La $k$ésima armónica $\phi_k(t)$ es también periódica con periodo T_0, ya que atraviesa exactamente $|k|$ de sus periodos fundamentales durante cualquier intervalo de tiempo de longitud T_0.

Nuestro uso del término "armónica" es congruente con su uso en música, donde se refiere a tonos que resultan de variaciones en la presión acústica a frecuencias que son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental. Por ejemplo, el patrón de vibraciones de una cuerda en un instrumento como el violín se describe como una superposición —es decir, una suma ponderada— de exponenciales periódicas relacionadas armónicamente. En el capítulo 3 veremos que se puede construir una clase muy rica de señales periódicas usando las señales relacionadas armónicamente de la ecuación (1.36) como bloques fundamentales.

Ejemplo 1.5



Algunas veces resulta conveniente expresar la suma de dos exponenciales complejas como el producto de una sola exponencial compleja y una sola senoide. Por ejemplo,

suponga que deseamos dibujar la magnitud de la señal

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}. \tag{1.38}$$

Para lograrlo, primero factorizamos una exponencial compleja a partir del miembro derecho de la ecuación (1.38), donde la frecuencia de este factor exponencial es el promedio de las frecuencias de las dos exponenciales en la suma. Haciendo esto obtenemos

$$x(t) = e^{j2.5t}(e^{-j0.5} + e^{j0.5t}), \tag{1.39}$$

lo cual, mediante la relación de Euler, podemos rescribir como

$$x(t) = 2e^{j2.5t}\cos(0.5t). \tag{1.40}$$

A partir de esta ecuación se puede obtener directamente una expresión para la magnitud de $x(t)$:

$$|x(t)| = 2|\cos(0.5t)|. \tag{1.41}$$

Aquí hemos aprovechado el hecho de que la magnitud de la exponencial compleja $e^{j2.5t}$ es siempre unitaria. Entonces, $|x(t)|$ se conoce comúnmente como una senoide rectificada de onda completa, como se muestra en la figura 1.22.

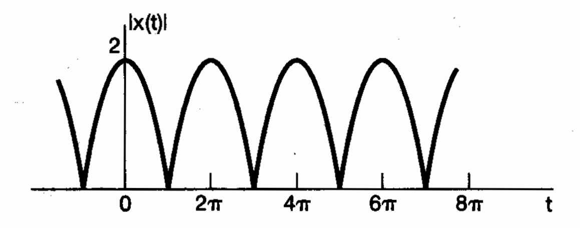


Figura 1.22 La senoidal rectificada en onda completa del ejemplo 1.5.

Señales exponenciales complejas generales

El caso más general de una exponencial compleja se puede expresar e interpretar en términos de los dos casos que hemos examinado hasta ahora: la exponencial real y la exponencial periódica compleja. Específicamente, considere una exponencial compleja Ce^{at}, donde C se expresa en forma polar y a en forma rectangular. Esto es,

$$C = |C|e^{j\theta}$$

y

$$a = r + j\omega_0.$$

Entonces

$$Ce^{at} = |C|e^{j\theta}e^{(r+j\omega_0)t} = |C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t+\theta)}. \tag{1.42}$$

Usando la relación de Euler podemos expandir ésta aún más de la siguiente forma:

$$Ce^{at} = |C|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt}\operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta). \tag{1.43}$$

Así, para $r = 0$ las partes real e imaginaria de una exponencial compleja son senoidales. Para $r > 0$ estas señales corresponden a senoidales multiplicadas por una exponencial creciente, y para $r < 0$ corresponden a señales senoidales multiplicadas por una exponencial decreciente. Ambos casos se muestran en la figura 1.23. Las líneas punteadas en la figura corresponden a las funciones $\pm|C|e^{rt}$. Gracias a la ecuación (1.42) podemos ver que $|C|e^{rt}$ es la magnitud de la exponencial compleja. De este modo, las curvas punteadas actúan como una envolvente de la curva oscilatoria de la figura en la que los picos de las oscilaciones apenas tocan estas curvas, y de esta manera la envolvente nos proporciona una manera conveniente de visualizar la tendencia general de la amplitud de las oscilaciones.

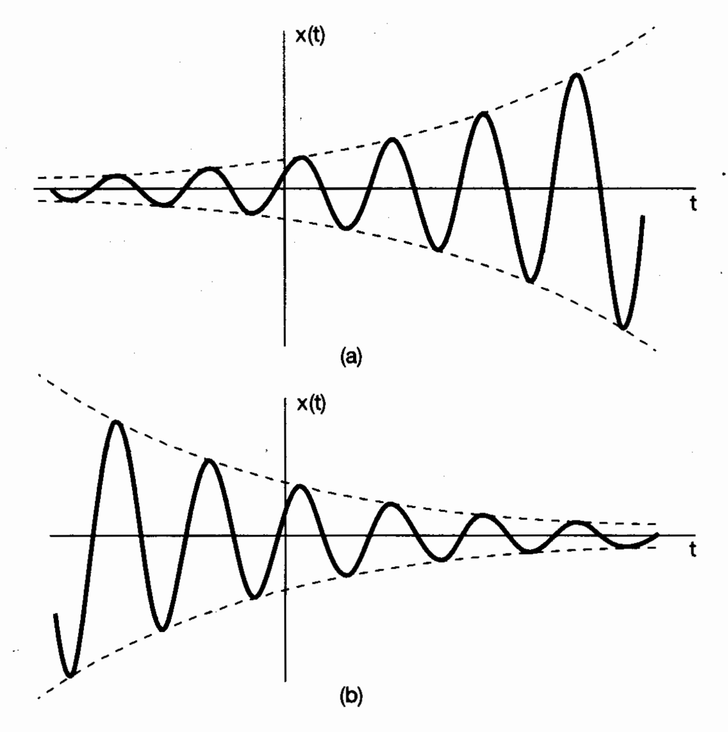


Figura 1.23 (a) Señal senoidal creciente $x(t) = Ce^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta)$, $r > 0$; (b) senoidal decreciente $x(t) = Ce^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta)$, $r < 0$.

Las señales senoidales multiplicadas por las exponenciales decrecientes se conocen comúnmente como *senoides amortiguadas*. Ejemplos de tales señales surgen en la respuesta de circuitos *RLC* y en sistemas mecánicos que contienen tanto fuerzas de amortiguamiento como de restauración, un ejemplo de lo cual se encuentra en los sistemas de suspensión automotriz. Estas clases de sistemas tienen mecanismos que disipan energía (resistores, fuerzas de amortiguamiento como es la fricción) con oscilaciones que decaen con el tiempo. En los problemas 2.61 y 2.62 se encuentran ejemplos que ilustran estos sistemas y su respuesta natural senoidal amortiguada.

1.3.2 Señales discretas exponencial compleja y senoidal

Al igual que en tiempo continuo, una señal muy importante en tiempo discreto es la *señal* o *secuencia exponencial compleja*, definida por

$$x[n] = C\alpha^n, \tag{1.44}$$

donde C y α son, en general, números complejos. Esto puede expresarse de forma alterna como

$$x[n] = Ce^{\beta n}, \tag{1.45}$$

donde

$$\alpha = e^{\beta}.$$

Aunque la forma de la secuencia exponencial compleja discreta mostrada en la ecuación (1.45) es más análoga a la forma continua de la exponencial, con frecuencia conviene más expresar la secuencia exponencial compleja de discreta en la forma de la ecuación (1.44).

Señales exponenciales reales

Si C y α son reales, podemos tener uno de varios tipos de comportamiento, como se ilustra en la figura 1.24. Si $|\alpha| > 1$, la magnitud de la señal crece exponencialmente con n, mientras que si $|\alpha| < 1$, tenemos una exponencial decreciente. Más aún, si α es positiva, todos los valores de $C\alpha^n$ son del mismo signo, pero si α es negativa, entonces el signo de $x[n]$ se alterna. Observe también que si $\alpha = 1$, entonces $x[n]$ es una constante, mientras que si $\alpha = -1$, el valor de $x[n]$ se alterna entre $+C$ y $-C$. Las exponenciales discretas reales son usadas a menudo para describir el crecimiento poblacional como una función de la generación, y el rendimiento total de las inversiones como una función del día, del mes o del trimestre.

Señales senoidales

Otra exponencial compleja importante se obtiene usando la expresión dada en la ecuación (1.45) y forzando a que β sea puramente imaginaria (de manera que $|\alpha| = 1$). Específicamente, considere

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}. \tag{1.46}$$

Como en el caso continuo, esta señal está relacionada en forma muy estrecha con la señal senoidal

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi). \tag{1.47}$$

Si tomamos a n como adimensional, entonces las unidades de ω_0 y ϕ son radianes. Tres ejemplos de secuencias senoidales se muestran en la figura 1.25.

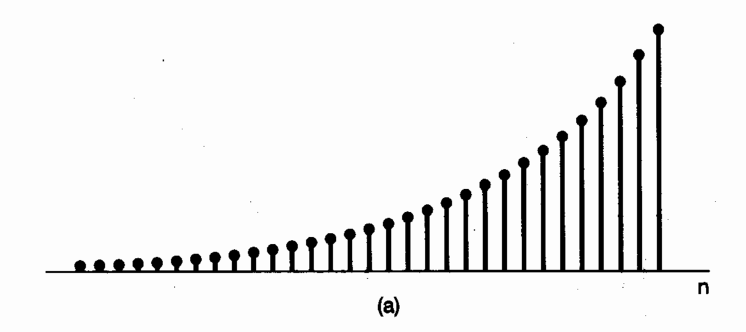
Como antes, la relación de Euler nos permite relacionar las exponenciales complejas y las senoidales:

$$e^{j\omega_0 n} = \cos\omega_0 n + j\,\text{sen}\,\omega_0 n \tag{1.48}$$

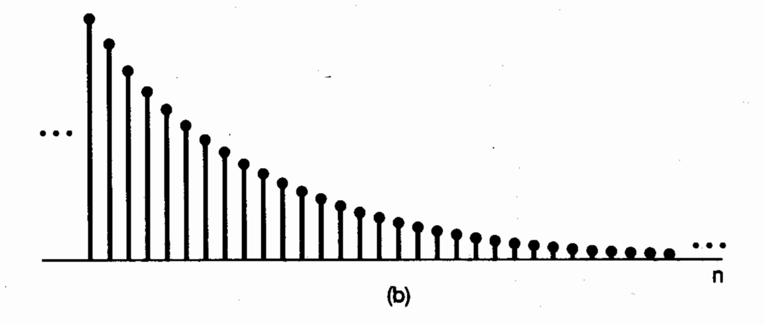
y

$$A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}. \tag{1.49}$$

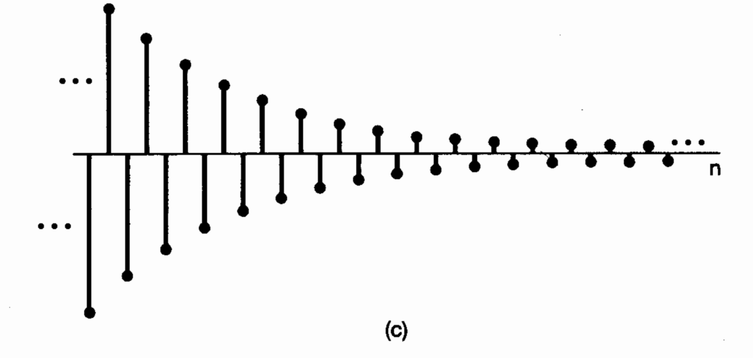
Las señales de las ecuaciones (1.46) y (1.47) son ejemplos de señales discretas con energía total infinita pero potencia promedio finita. Por ejemplo, ya que $|e^{j\omega_0 n}| = 1$, cada muestra de la señal en la ecuación (1.46) contribuye con 1 a la energía de la señal. Entonces, la energía total para $-\infty < n < \infty$ es infinita, en tanto que la potencia promedio por punto de tiempo es obviamente igual a 1. En el problema 1.3 se presentan otros ejemplos de cálculos de energía y potencia para señales discretas.



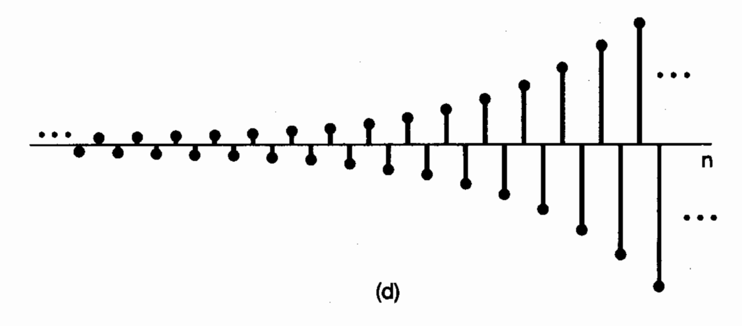
(a)



(b)

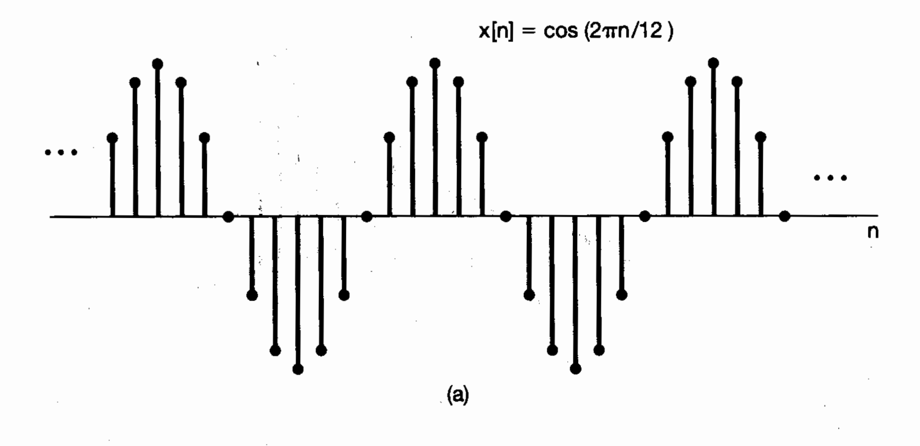


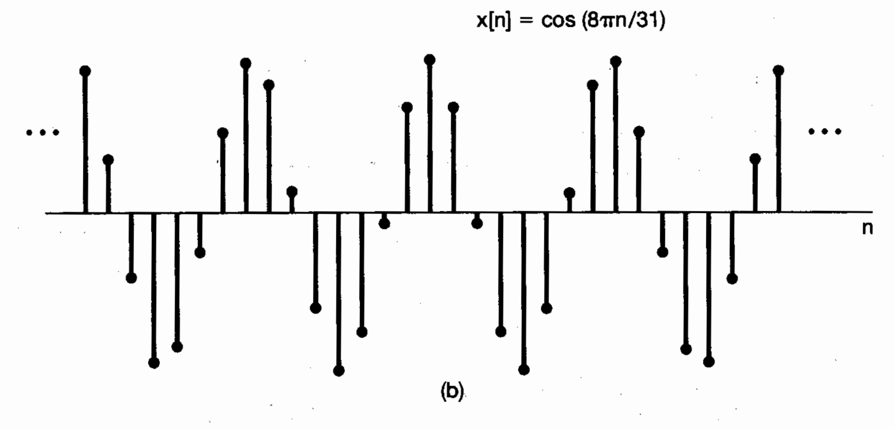
(c)



(d)

Figura 1.24 Señal exponencial real $x[n] = C\alpha^n$: (a) $\alpha > 1$; (b) $0 < \alpha < 1$; (c) $-1 < \alpha < 0$; (d) $\alpha < -1$.





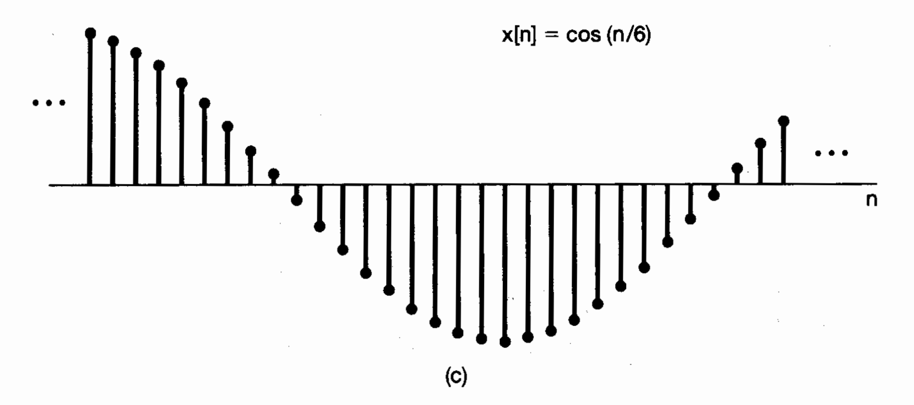


Figura 1.25 Señales senoidales discretas.

Señales exponenciales complejas generales

La exponencial compleja general discreta se puede escribir e interpretar en términos de señales exponenciales reales y senoidales. Específicamente, si escribimos C y α en forma

polar, a saber,

$$C = |C|e^{j\theta}$$

y

$$\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0},$$

entonces

$$C\alpha^n = |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j|C||\alpha|^n \operatorname{sen}(\omega_0 n + \theta). \tag{1.50}$$

Por tanto, para $|\alpha| = 1$, las partes real e imaginaria de una secuencia exponencial compleja son senoidales. Para $|\alpha| < 1$ ellas corresponden a secuencias senoidales multiplicadas por una exponencial decreciente, y para $|\alpha| > 1$ corresponden a secuencias senoidales multiplicadas por una exponencial creciente. Ejemplos de estas señales se muestran en la figura 1.26.

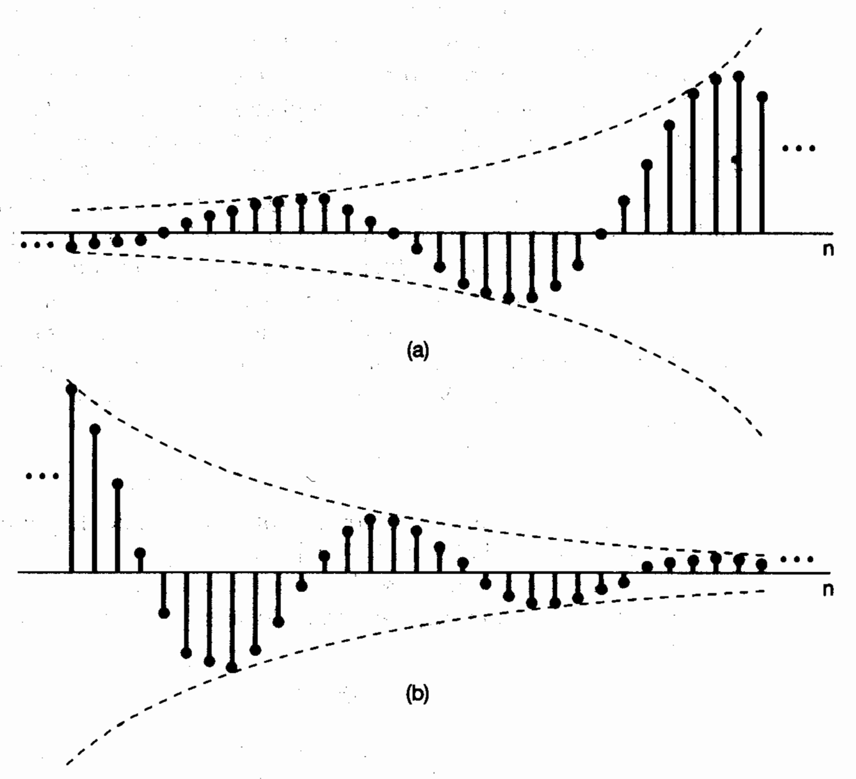


Figura 1.26 (a) Señales senoidales crecientes discretas; (b) senoidal decreciente discreta.

1.3.3 Propiedades de periodicidad de exponenciales discretas

Así como existen muchas similitudes entre las señales continuas y las discretas, también hay importantes diferencias. Una de éstas concierne a la señal exponencial discreta $e^{j\omega_0 n}$. En la sección 1.3.1 identificamos las siguientes dos propiedades de su contraparte continua $e^{j\omega_0 t}$: (1) mientras más grande sea la magnitud de ω_0, mayor será la velocidad de oscilación de la señal, y (2) $e^{j\omega_0 t}$ es periódica para cualquier valor de ω_0. En esta sección

describiremos las versiones discretas de ambas propiedades y, como veremos más adelante, hay diferencias precisas entre cada una de éstas y su contraparte continua.

El hecho de que la versión discreta de la primera propiedad sea diferente de la propiedad continua es una consecuencia directa de otra distinción extremadamente importante entre las exponenciales complejas discretas y las continuas. Específicamente, considere la exponencial compleja discreta con frecuencia $\omega_0 + 2\pi$:

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}. \tag{1.51}$$

De la ecuación (1.51) vemos que la exponencial con frecuencia $\omega_0 + 2\pi$ es la *misma* que aquella con frecuencia ω_0. De esta manera tenemos una situación muy diferente al caso continuo, en el cual las señales $e^{j\omega_0 t}$ son todas distintas para distintos valores de ω_0. En el caso discreto, estas señales no son distintas, ya que la señal con frecuencia ω_0 es idéntica a las señales con frecuencias $\omega_0 \pm 2\pi$, $\omega_0 \pm 4\pi$ y las que les siguen. Por tanto, al considerar las exponenciales complejas, necesitamos tomar en cuenta solamente un intervalo de frecuencia de longitud 2π dentro del cual se escoge ω_0. Aunque de acuerdo con la ecuación (1.51), cualquier intervalo de longitud 2π será adecuado, en la mayoría de las ocasiones usaremos el intervalo $0 \leq \omega_0 < 2\pi$ o el intervalo $-\pi \leq \omega_0 < \pi$.

Debido a la periodicidad que implica la ecuación (1.51), la señal $e^{j\omega_0 n}$ *no* tiene un incremento continuo en la velocidad de oscilación conforme ω_0 se incrementa en magnitud. Por el contrario, como se ilustra en la figura 1.27, conforme incrementamos ω_0 a partir de 0, obtenemos señales que oscilan cada vez más rápido hasta que alcanzamos $\omega_0 = \pi$. Conforme continuamos incrementando ω_0 *disminuimos* la velocidad de oscilación hasta alcanzar $\omega_0 = 2\pi$, la cual produce la misma secuencia constante que $\omega_0 = 0$. Por tanto, las exponenciales discretas de baja frecuencia (esto es, que varía lentamente) tienen valores de ω_0 cerca de 0, 2π o cualquier otro múltiplo par de π, mientras que las de alta frecuencia (correspondientes a variaciones rápidas) se localizan cerca de $\omega_0 = \pm\pi$ y otros múltiplos impares de π. Observe en particular que para $\omega_0 = \pi$ o cualquier otro múltiplo impar de π,

$$e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n, \tag{1.52}$$

de manera que esta señal oscila rápidamente, cambiando de signo en cada punto de tiempo [como se ilustra en la figura 1.27(e)].

La segunda propiedad que deseamos considerar concierne a la periodicidad de la exponencial discreta compleja. Para que la señal $e^{j\omega_0 n}$ sea periódica con periodo $N > 0$, debemos tener

$$e^{j\omega_0(n + N)} = e^{j\omega_0 n}, \tag{1.53}$$

o, de manera equivalente,

$$e^{j\omega_0 N} = 1. \tag{1.54}$$

Para que la ecuación (1.54) se cumpla, $\omega_0 N$ debe ser un múltiplo de 2π. Esto es, debe haber un entero m tal que

$$\omega_0 N = 2\pi m, \tag{1.55}$$

o equivalentemente

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}. \tag{1.56}$$

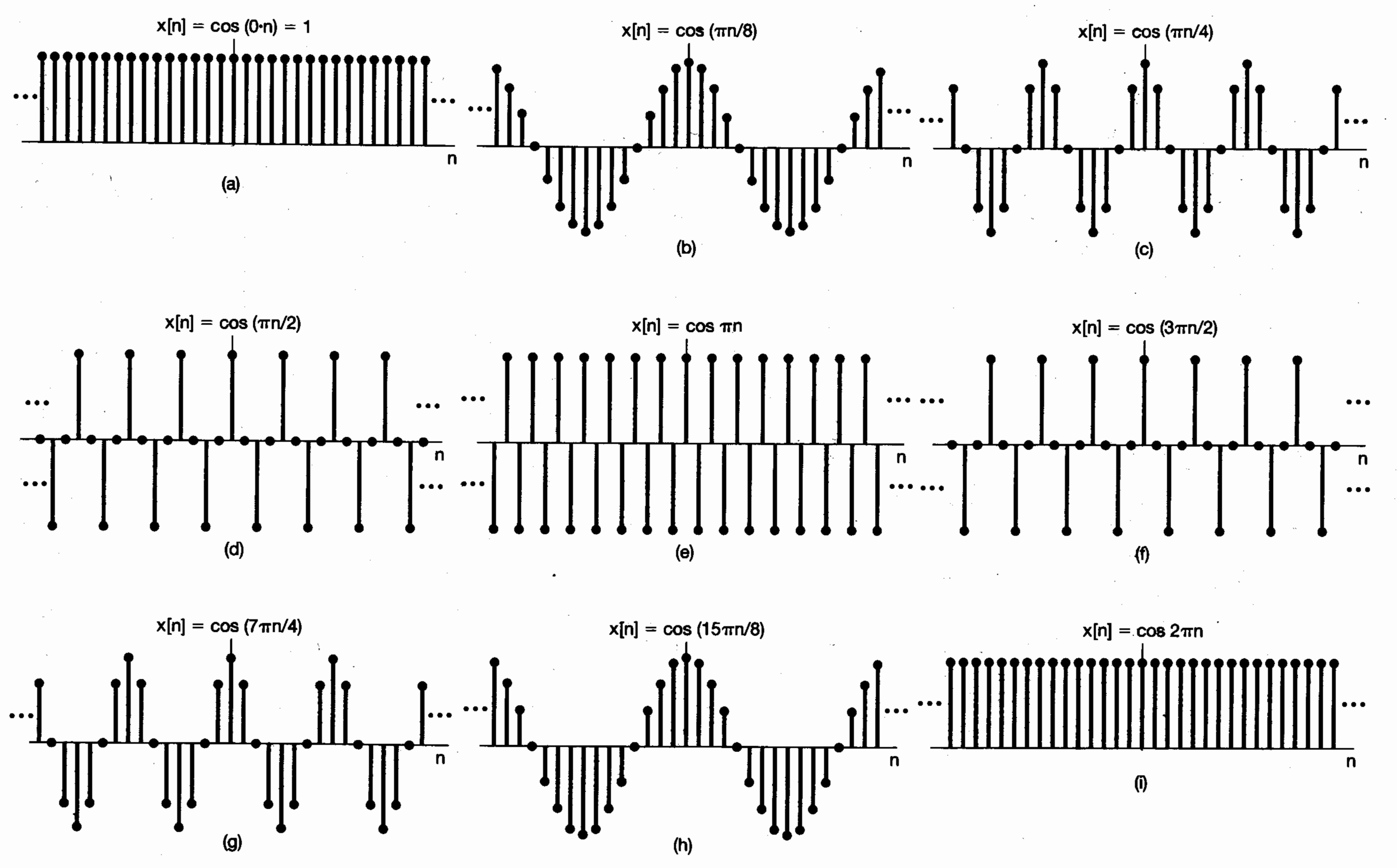


Figura 1.27 Secuencias senoidales discretas para diferentes frecuencias.

De acuerdo con la ecuación (1.56), la señal $e^{j\omega_0 n}$ es periódica si $\omega_0/2\pi$ es un número racional y es no periódica en otras circunstancias. Estas mismas observaciones también son válidas para señales senoidales discretas. Por ejemplo, las señales representadas en la figura 1.25(a) y (b) son periódicas, mientras que la señal en la figura 1.25(c) no lo es.

Usando los cálculos que acabamos de hacer, podemos determinar también el periodo y la frecuencia fundamentales de las exponenciales complejas discretas, donde definimos la frecuencia fundamental de una señal periódica discreta en la misma forma en que lo hicimos para una continua. Esto es, si $x[n]$ es periódica con periodo fundamental N, su frecuencia fundamental es $2\pi/N$. Considere entonces una exponencial compleja periódica $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ con $\omega_0 \neq 0$. Como acabamos de ver, ω_0 debe satisfacer la ecuación (1.56) para algún par de enteros m y N, con $N > 0$. En el problema 1.35 se muestra que si $\omega_0 \neq 0$ y si N y m no tienen factores en común, entonces el periodo fundamental de $x[n]$ es N. Valiéndonos de este hecho junto con la ecuación (1.56), encontramos que la frecuencia fundamental de la señal periódica $e^{j\omega_0 n}$ es

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}. \tag{1.57}$$

Observe que el periodo fundamental también se puede escribir como

$$N = m\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right). \tag{1.58}$$

Estas dos últimas expresiones de nuevo difieren de su contraparte continua. En la tabla 1.1 hemos resumido algunas de las diferencias entre la señal continua $e^{j\omega_0 t}$ y la señal discreta $e^{j\omega_0 n}$. Observe que, al igual que en el caso continuo, la señal discreta que resulta de hacer $\omega_0 = 0$ tiene una frecuencia fundamental de cero y su periodo fundamental es indefinido.

TABLA 1.1 Comparación de señales $e^{j\omega_0 t}$ y $e^{j\omega_0 n}$.

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
Señales distintas para distintos valores de ω_0	Señales idénticas para valores de ω_0 separados por múltiplo de 2π
Periódica para cualquier elección de ω_0	Periódica sólo si $\omega_0 = 2\pi m/N$ para algunos enteros $N > 0$ y m.
Frecuencia fundamental ω_0	Frecuencia fundamental* ω_0/m
Periodo fundamental $\omega_0 = 0$: indefinido $\omega_0 \neq 0$: $\frac{2\pi}{\omega_0}$	Periodo fundamental* $\omega_0 = 0$: indefinido $\omega_0 \neq 0$: $m\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$

* Supone que m y N no tienen ningún factor en común.

Para obtener un conocimiento adicional sobre estas propiedades, consideremos de nuevo las señales ilustradas en la figura 1.25. Primero, considere la secuencia $x[n] = \cos(2\pi n/12)$, mostrada en la figura 1.25(a), la cual puede tomarse como un conjunto de muestras de la senoidal continua $x(t) = \cos(2\pi t/12)$ en puntos enteros de tiempo. En este caso, $x(t)$ es periódica con periodo fundamental 12 y $x[n]$ también es periódica con periodo fundamental 12. Es decir, los valores de $x[n]$ se repiten cada 12 puntos, exactamente en múltiplos con el periodo fundamental de $x(t)$.

En contraste con lo anterior, considere la señal $x[n] = \cos(8\pi/31)$ mostrada en la figura 1.25(b), la cual se ve como el conjunto de muestras de $x(t) = \cos(8\pi t/31)$ en puntos enteros de tiempo. En este caso, $x(t)$ es periódica con periodo fundamental 31/4. Por otro lado, $x[n]$ es periódica con periodo fundamental de 31. La razón de esta diferencia es que la señal discreta está definida sólo para valores enteros de la variable independiente. Entonces, no hay muestras en el tiempo $t = 31/4$, cuando $x(t)$ completa un periodo (empezando en $t = 0$). De manera similar, no hay muestra en $t = 2 \cdot 31/4$ o en $t = 3 \cdot 31/4$, cuando $x(t)$ ha completado dos o tres periodos, pero hay una muestra en $t = 4 \cdot 31/4 = 31$, cuando $x(t)$ ha completado *cuatro* periodos. Esto se puede observar en la figura 1.25(b), donde el patrón de valores de $x[n]$ *no* se repite con cada ciclo individual de valores positivos o negativos. Por el contrario, el patrón se repite después de cuatro ciclos, es decir, cada 31 puntos.

De manera semejante, la señal $x[n] = \cos(n/6)$ puede verse como el conjunto de muestras de la señal $x(t) = \cos(t/6)$ en puntos enteros de tiempo. En este caso, los valores de $x(t)$ en puntos enteros de muestras nunca se repiten, ya que estos puntos muestra nunca corresponden a un intervalo que sea exactamente un múltiplo del periodo, 12π, de $x(t)$. Entonces, $x[n]$ nunca es periódica, aunque el ojo, al interpolar visualmente entre los puntos muestra, sugiera una envolvente de $x(t)$, la cual *es* periódica. El uso de los conceptos de muestreo para reforzar el concepto de periodicidad de secuencias senoidales discretas se explora con mayor profundidad en el problema 1.36.

Ejemplo 1.6

Suponga que deseamos determinar el periodo fundamental de la señal discreta

$$x[n] = e^{j(2\pi/3)n} + e^{j(3\pi/4)n}. \tag{1.59}$$

La primera exponencial del lado derecho de la ecuación (1.59) tiene un periodo fundamental de 3. Mientras que esto se puede verificar con la ecuación (1.58), hay una forma más simple de obtener esa respuesta. De manera particular, observe que el ángulo $(2\pi/3)n$ del primer término se debe incrementar por un múltiplo de 2π para que los valores de esta exponencial se repitan. Vemos entonces que si n se incrementa por 3, el ángulo se incrementará por un solo múltiplo de 2π. Con respecto al segundo término, vemos que al incrementar el ángulo $(3\pi/4)n$ por 2π requeriríamos que n se incrementara en 8/3, lo cual es imposible, ya que n está limitado a ser entero. De manera similar, al incrementar el ángulo en 4π requeriríamos un incremento no entero de 16/3 para n. Sin embargo, al incrementar el ángulo en 6π se requiere que n se incremente a 8, y entonces el periodo fundamental del segundo término es 8.

Ahora, para que la señal completa $x[n]$ se repita, cada término de la ecuación (1.59) debe pasar por un número entero de su propio periodo fundamental. El incremento más pequeño de n para llevar esto a cabo es 24. Es decir, en un intervalo de 24 puntos, el primer término del lado derecho de la ecuación (1.59) habrá pasado a través de ocho de sus periodos fundamentales, el segundo término a través de tres de sus periodos fundamentales y la señal completa $x[n]$ habrá pasado exactamente a través de uno de sus periodos fundamentales.

Al igual que en el caso continuo, en el análisis de señales y sistemas discretos también es importante considerar conjuntos de exponenciales periódicas relacionadas armónicamente (esto es, exponenciales periódicas con periodo común N). De la ecuación (1.56) sabemos que éstas son precisamente las señales cuyas frecuencias son múltiplos de $2\pi/N$. Esto es,

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots . \tag{1.60}$$

En el caso continuo todas las exponenciales complejas relacionadas armónicamente $e^{jk(2\pi/T)t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$, etc., son distintas. Sin embargo, debido a la ecuación (1.51), éste *no* es el caso en tiempo discreto. Específicamente,

$$\begin{aligned} \phi_{k+N}[n] &= e^{j(k+N)(2\pi/N)n} \\ &= e^{jk(2\pi/N)n}e^{j2\pi n} = \phi_k[n]. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Esto implica que solamente hay N exponenciales periódicas distintas en el conjunto dado en la ecuación (1.60). Por ejemplo,

$$\phi_0[n] = 1, \phi_1[n] = e^{j2\pi n/N}, \phi_2[n] = e^{j4\pi n/N}, \ldots, \phi_{N-1}[n] = e^{j2\pi(N-1)n/N} \tag{1.62}$$

son todas distintas, y cualquier otra $\phi_k[n]$ es idéntica a una de éstas (por ejemplo, $\phi_N[n] = \phi_0[n]$ y $\phi_{-1}[n] = \phi_{N-1}[n]$).

1.4 LAS FUNCIONES IMPULSO UNITARIO Y ESCALÓN UNITARIO

En esta sección presentamos otras señales básicas —específicamente, las funciones impulso unitario y escalón unitario continuas y discretas— que son de importancia considerable en el análisis de señales y sistemas. En el capítulo 2 veremos cómo se pueden usar las señales impulso unitario como bloques fundamentales básicos para la construcción y representación de otras señales. Empezaremos con el caso discreto.

1.4.1 Las secuencias discretas impulso unitario y escalón unitario

Una de las señales discretas más simples es el *impulso unitario* (o *muestra unitaria*), la cual se define como

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \tag{1.63}$$

y está representada en la figura 1.28. En adelante, a todo lo largo del libro nos referiremos a $\delta[n]$ indistintamente como impulso unitario o muestra unitaria.

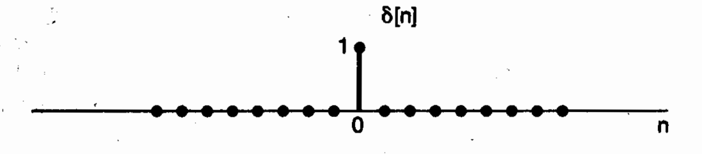


Figura 1.28 Impulso unitario discreto (muestra).

Una segunda señal discreta básica es el *escalón unitario* discreto, señalada como $u[n]$ y definida por

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}. \tag{1.64}$$

La secuencia escalón unitario se muestra en la figura 1.29.

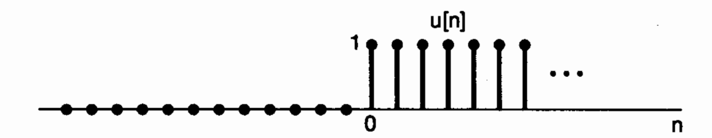
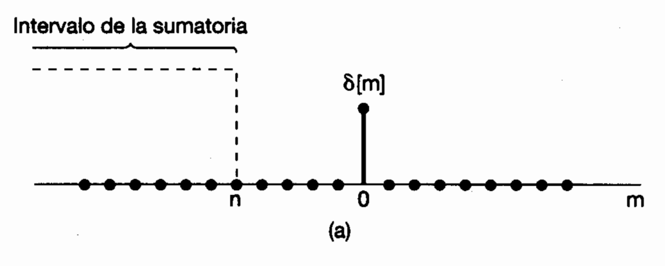


Figura 1.29 Secuencia escalón unitario discreto.



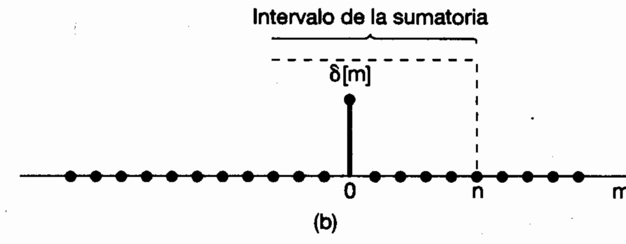


Figura 1.30 Suma consecutiva de la ecuación (1.66): (a) $n < 0$; (b) $n > 0$.

Existe una relación muy cercana entre el impulso unitario y el escalón unitario discreto. De manera particular, el impulso unitario discreto es la *primera diferencia* del escalón discreto

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]. \tag{1.65}$$

Y a la inversa, el escalón unitario discreto es la *sumatoria* de la muestra unitaria. Esto es,

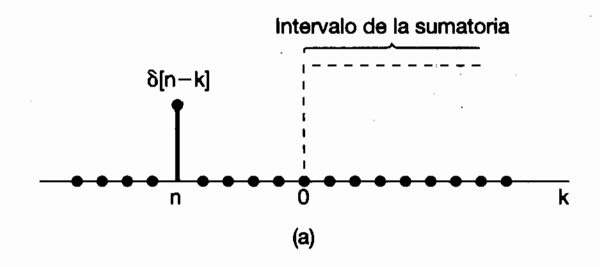
$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m], \tag{1.66}$$

lo cual se ilustra en la figura 1.30. Ya que el único valor diferente de cero de la muestra unitaria está en el punto en el cual su argumento es cero, vemos, a partir de la figura, que la sumatoria en la ecuación (1.66) es 0 para $n < 0$ y 1 para $n \geq 0$. Además, cambiando la variable de la sumatoria de m a $k = n - m$ en la ecuación (1.66), encontramos que el escalón unitario discreto también se puede escribir en términos de la muestra unitaria como

$$u[n] = \sum_{k=\infty}^{0} \delta[n-k],$$

o de manera equivalente,

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]. \tag{1.67}$$



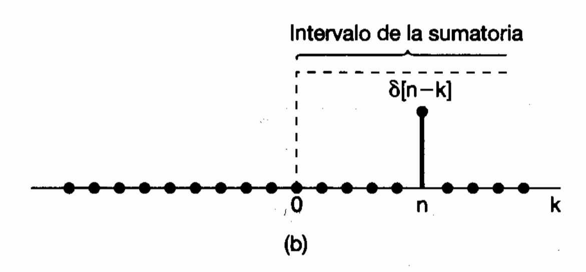


Figura 1.31 Relación dada en la ecuación (1.67): (a) $n < 0$; (b) $n > 0$.

La ecuación (1.67) se ilustra en la figura 1.31. En este caso el valor diferente de cero de $\delta[n-k]$ se encuentra en el valor de k igual a n, por lo cual nuevamente vemos que la sumatoria en la ecuación (1.67) es 0 para $n < 0$ y 1 para $n \geq 0$.

Una interpretación de la ecuación (1.67) es semejante a la superposición de impulsos retrasados; es decir, la ecuación se puede ver como la suma de un impulso unitario $\delta[n]$ en $n = 0$, un impulso unitario $\delta[n-1]$ en $n = 1$, y otro, $\delta[n-2]$, en $n = 2$, etc. En el capítulo 2 haremos un uso explícito de esta interpretación.

La secuencia impulso unitario se puede utilizar para obtener muestras del valor de una señal en $n = 0$. En particular, ya que $\delta[n]$ es diferente de cero (e igual a 1) sólo para $n = 0$, se desprende que

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]. \tag{1.68}$$

De manera más general, si consideramos un impulso unitario $\delta[n - n_0]$ en $n = n_0$, entonces

$$x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0]. \tag{1.69}$$

Esta propiedad de muestreo del impulso unitario juega un papel central en los capítulos 2 y 7.

1.4.2 Las funciones continuas escalón unitario e impulso unitario

La *función escalón unitario* $u(t)$ continua se define de manera similar a su contraparte discreta. Específicamente

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}, \tag{1.70}$$

como se muestra en la figura 1.32. Observe que el escalón unitario es discontinuo en $t = 0$. La *función impulso unitario* $\delta(t)$ continua está relacionada con el escalón unitario de manera análoga a la relación que existe entre las funciones discretas impulso unitario y

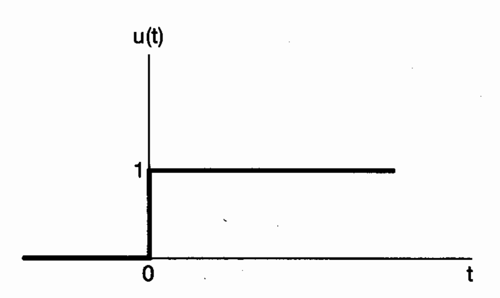


Figura 1.32 Función escalón unitario continuo.

escalón unitario. En particular, el escalón unitario continuo es la *integral continua* del impulso unitario

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau. \tag{1.71}$$

Lo anterior también sugiere una relación entre $\delta(t)$ y $u(t)$ análoga a la expresión para $\delta[n]$ en la ecuación (1.65). En particular, a partir de la ecuación (1.71) vemos que el impulso unitario continuo puede obtenerse de la *primera derivada* del escalón unitario continuo:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}. \tag{1.72}$$

En contraste con el caso discreto, esta ecuación presenta cierta dificultad formal como representación de la función impulso unitario, ya que $u(t)$ es discontinua en $t = 0$ y, en consecuencia, formalmente no es diferenciable. Sin embargo, podemos interpretar la ecuación (1.72) al considerar una aproximación del escalón unitario $u_\Delta(t)$, como se muestra en la figura 1.33, la cual se eleva del valor 0 al valor 1 en un corto intervalo de tiempo de longitud Δ. Por supuesto, el escalón unitario cambia de valor instantáneamente y entonces puede considerarse como una idealización tan corta de $u_\Delta(t)$ para Δ que su duración no es significativa para propósitos prácticos. De manera formal, $u(t)$ es el límite de $u_\Delta(t)$ conforme $\Delta \to 0$. Consideremos ahora la derivada

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}, \tag{1.73}$$

como se muestra en la figura 1.34.

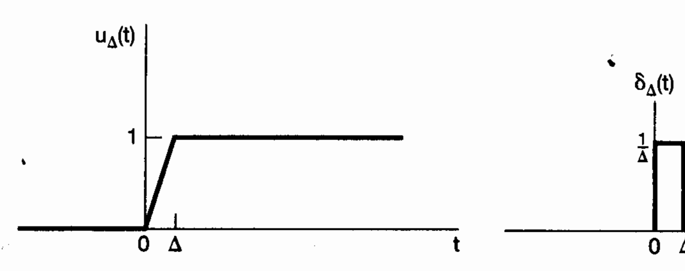


Figura 1.33 Aproximación continua al escalón unitario $u_\Delta(t)$.

Figura 1.34 Derivada de $u_\Delta(t)$.



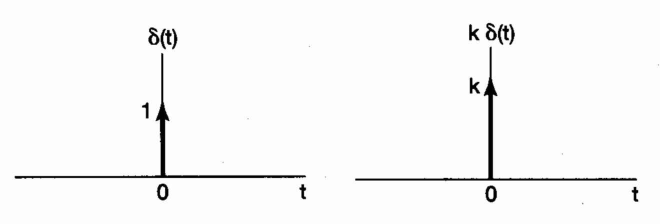


Figura 1.35 Impulso unitario continuo.

Figura 1.36 Impulso escalado.

Observe que $\delta_\Delta(t)$ es un pulso corto de duración Δ y con un área unitaria para cualquier valor de Δ. A medida que $\Delta \rightarrow 0$, $\delta_\Delta(t)$ se vuelve más angosto y más alto, manteniendo su área unitaria. Su forma límite,

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t), \tag{1.74}$$

puede considerarse como una idealización del pulso corto $\delta_\Delta(t)$ conforme la duración Δ se vuelve insignificante. De hecho, ya que $\delta(t)$ no tiene duración sino área, para mostrarla adoptamos la notación gráfica de la figura 1.35, donde la flecha en $t = 0$ indica que el área del pulso está concentrada en $t = 0$ y la altura de la flecha así como el "1" a un lado de la misma se usan para representar el *área* del impulso. De manera más general, un impulso escalado $k\delta(t)$ tendrá un área k, y entonces

$$\int_{-\infty}^{t} k\delta(\tau)d\tau = ku(t).$$

La figura 1.36 muestra un impulso escalado con área k, donde se buscó que la altura de la flecha utilizada para representar el impulso escalado fuera proporcional al área del impulso.

Al igual que en tiempo discreto, podemos proporcionar una interpretación gráfica sencilla de la integral continua de la ecuación (1.71); esto se muestra en la figura 1.37. Ya que el área del impulso unitario continuo $\delta(\tau)$ está concentrada en $\tau = 0$, vemos que la integral continua es 0 para $t < 0$ y 1 para $t > 0$. También observamos que la relación en la ecuación (1.71) entre el escalón y el impulso unitario continuos puede rescribirse en forma diferente, análoga a la forma discreta de la ecuación (1.67), cambiando la variable de integración de τ a $\sigma = t - \tau$:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \int_{\infty}^{0} \delta(t - \sigma)(-d\sigma),$$

o, en forma equivalente,

$$u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t - \sigma)d\sigma. \tag{1.75}$$

La interpretación gráfica de esta forma de relación entre $u(t)$ y $\delta(t)$ se muestra en la figura 1.38. Puesto que en este caso el área de $\delta(t - \sigma)$ está concentrada en el punto $\sigma = t$, de nuevo vemos que la integral en la ecuación (1.75) es 0 para $t < 0$ y 1 para $t > 0$. Este tipo de interpretación gráfica del comportamiento del impulso unitario dentro de una integración será extremadamente útil en el capítulo 2.

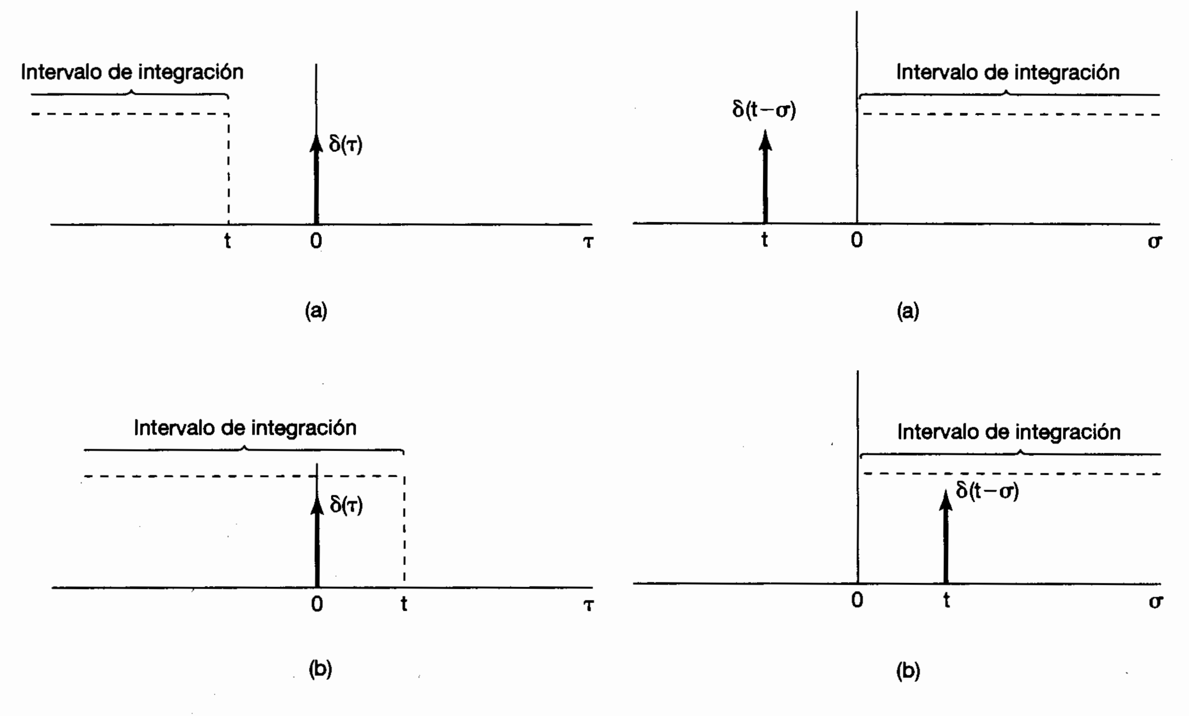


Figura 1.37 Integral continua dada en la ecuación (1.71): (a) $t < 0$; (b) $t > 0$.

Figura 1.38 Relación dada en la ecuación (1.75): (a) $t < 0$; (b) $t > 0$.

Al igual que con el impulso discreto, el impulso continuo tiene una propiedad de muestreo muy importante. En particular, por diversas razones, será importante considerar el producto de un impulso y funciones $x(t)$ continuas bien definidas. La interpretación de esta cantidad se desarrolla con mayor facilidad usando la definición de $\delta(t)$ de acuerdo con la ecuación (1.74). Específicamente, considere

$$x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t).$$

En la figura 1.39(a) hemos dibujado las dos funciones de tiempo $x(t)$ y $\delta_\Delta(t)$, y en la figura 1.39(b) observamos una vista ampliada de la porción diferente de cero del producto de ambas. Por construcción, $x_1(t)$ es cero fuera del intervalo $0 \le t \le \Delta$. Para Δ es suficientemente pequeña de manera que $x(t)$ sea aproximadamente constante sobre este intervalo,

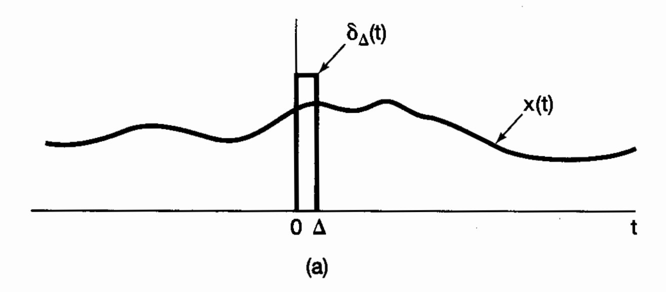
$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t).$$

Ya que $\delta(t)$ es el límite a medida que $\Delta \to 0$ de $\delta_\Delta(t)$, tendremos que

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t). \tag{1.76}$$

Empleando el mismo argumento, tenemos una expresión análoga para un impulso concentrado en un punto arbitrario, digamos t_0. Es decir,

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0).$$



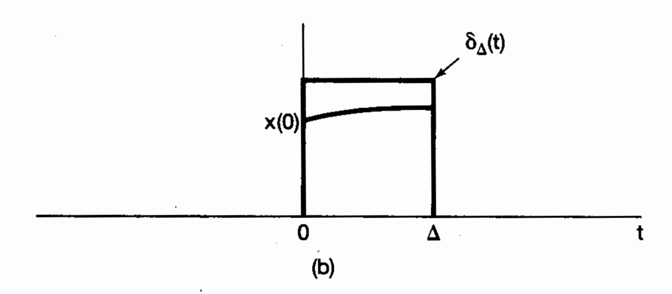


Figura 1.39 El producto $x(t)\delta_\Delta(t)$:(a) gráficas de ambas funciones; (b) vista ampliada de la parte diferente de cero de su producto.

Aunque nuestro análisis del impulso unitario en esta sección ha sido algo informal, nos proporciona un conocimiento intuitivo importante acerca de esta señal que nos será de gran utilidad en todo el libro. El impulso unitario, como hemos expresado, debe verse como una idealización. Como ilustraremos y presentaremos con más detalle en la sección 2.5, cualquier sistema físico real tiene algo de inercia asociada con él y entonces no responde instantáneamente a las entradas. En consecuencia, si un pulso de duración lo suficientemente corta se aplica a esos sistemas, la respuesta del sistema no será influenciada de forma perceptible por la duración del pulso o por los detalles de la forma del pulso. En cambio, la principal característica del pulso que realmente importará es el efecto neto integrado del pulso, es decir, su área. Para sistemas que responden mucho más rápido que otros, el pulso tendrá que ser de duración mucho más corta antes de que los detalles de la forma del pulso o su duración pierdan importancia. No obstante, para cualquier sistema físico, siempre se puede encontrar un pulso que sea "suficientemente corto". Por tanto, el impulso unitario es una idealización de este concepto —el pulso que es bastante corto para *cualquier* sistema—. Como veremos en el capítulo 2, la respuesta de un sistema a este pulso idealizado juega un papel crucial en el análisis de sistemas y señales, y en el proceso de desarrollo y comprensión de este papel, ofreceremos un conocimiento adicional sobre la señal idealizada.[3]

[3]El pulso unitario y otras funciones relacionadas (las cuales a menudo son llamadas *funciones singulares*) han sido ampliamente estudiadas en el campo de las matemáticas bajo los nombres alternativos de *funciones generalizadas* y *teoría de distribuciones*. Para un análisis más profundo de este tema vea *Distribution Theory and Transform Analysis*, de A.H. Zemanian (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1965), *Generalized Functions*, de R.F. Hoskins (Nueva York: Halsted Press, 1979), o un texto más avanzado, *Fourier Analysis and Generalized Functions*, de M.J. Lighthill (Nueva York: Cambridge University Press, 1958). Nuestro análisis de las funciones singulares en la sección 2.5 está estrechamente relacionada en espíritu a la teoría matemática descrita en estos textos, por lo cual proporciona una introducción informal a los conceptos que sustentan estos tópicos en matemáticas así como un análisis de las propiedades básicas de estas funciones que usaremos en nuestro estudio de las señales y los sistemas.

Ejemplo 1.7

Considere la señal discontinua $x(t)$ representada en la figura 1.40(a). Debido a la relación que existe entre el impulso unitario y el escalón unitario continuo, se puede calcular y graficar fácilmente la derivada de esta señal. Específicamente, la derivada de $x(t)$ resulta ser claramente 0, excepto cuando se presentan discontinuidades. En el caso del escalón unitario, hemos visto [ecuación (1.72)] que la diferenciación da lugar a un impulso unitario localizado en el punto de discontinuidad. Además, al multiplicar ambos miembros de la ecuación (1.72) por cualquier número k, vemos que la derivada de un escalón unitario con una discontinuidad de tamaño k origina un impulso de área k en el punto de la discontinuidad. Esta regla también se cumple para cualquier otra señal con un salto discontinuo, como $x(t)$ en la figura 1.40(a). En consecuencia, podemos dibujar su derivada $\dot{x}(t)$, como en la figura 1.40(b), donde un impulso se coloca en cada discontinuidad de $x(t)$, con área igual al tamaño de la discontinuidad. Observe, por ejemplo, que la discontinuidad en $x(t)$ en $t = 2$ tiene un valor de -3, de manera que un impulso escalado por -3 se localiza en $t = 2$ en la señal $\dot{x}(t)$.

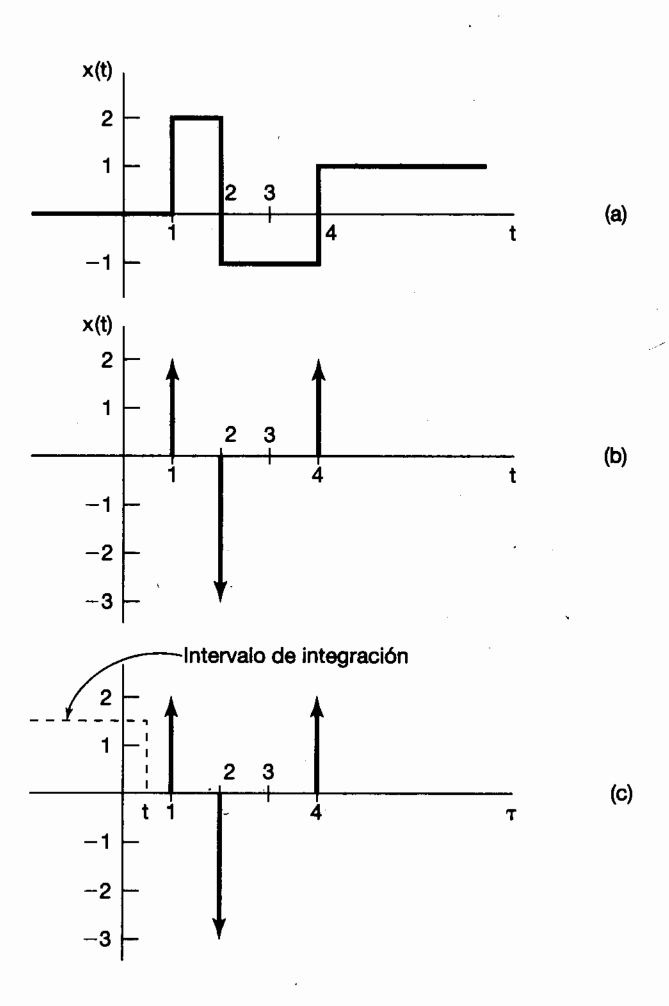


Figura 1.40 (a) La señal discontinua $x(t)$ analizada en el ejemplo 1.7; (b) su derivada $\dot{x}(t)$; (c) dibujo de la recuperación de $x(t)$ como la integral continua de $\dot{x}(t)$, ilustrada para un valor de t entre 0 y 1.

Como una verificación de nuestro resultado, veamos cómo se recupera $x(t)$ a partir de $\dot{x}(t)$. De manera específica, ya que $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ son cero para $t \leq 0$, sólo necesitamos verificar para $t > 0$,

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau)d\tau. \tag{1.77}$$

Como se ilustra en la figura 1.40(c), para $t < 1$ la integral del lado derecho de la ecuación (1.77) es cero, ya que ninguno de los impulsos que constituyen a $\dot{x}(t)$ están dentro del intervalo de integración. Para $1 < t < 2$, el primer impulso (localizado en $t = 1$) es el único dentro del intervalo de integración, y entonces la integral en la ecuación (1.77) es igual a 2, el área de este impulso. Para $2 < t < 4$, los dos impulsos iniciales están dentro del intervalo de integración, y la integral acumula la suma de las dos áreas, esto es, $2 - 3 = -1$. Finalmente, para $t > 4$, los tres impulsos están dentro del intervalo de integración, de manera que la integral es igual a la suma de las tres áreas, es decir, $2 - 3 + 2 = +1$. El resultado es exactamente la señal $x(t)$ representada en la figura 1.40(a).

1.5 SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS

Los sistemas físicos, en su sentido más amplio, son una interconexión de componentes, dispositivos o subsistemas. En contextos que van del procesamiento de señales y comunicaciones a motores electromecánicos, vehículos automotores y plantas de procesos químicos, un *sistema* puede considerarse como un proceso en el cual las señales de entrada son transformadas por el sistema o provocan que éste responda de alguna forma, lo que da como resultado otras señales como salidas. Por ejemplo, un sistema de alta fidelidad toma una señal de audio grabada y genera una reproducción de dicha señal. Si el sistema de alta fidelidad tiene controles de tono, podemos cambiar la calidad en el matiz de la señal reproducida. De manera similar, el circuito de la figura 1.1 puede verse como un sistema con voltaje de entrada $v_s(t)$ y voltaje de salida $v_c(t)$, mientras que el automóvil de la figura 1.2 puede considerarse como un sistema cuya entrada es igual a la fuerza $f(t)$ y cuya salida es igual a la velocidad $v(t)$ del vehículo. Un sistema de mejoramiento de imagen transforma una imagen de entrada en una imagen de salida que posee algunas propiedades deseadas, como es un mejor contraste.

Un *sistema continuo* es aquel en el cual las señales continuas de entrada son transformadas en señales continuas de salida. Tales sistemas serán representados gráficamente como en la figura 1.41(a), donde $x(t)$ es la entrada y $y(t)$ es la salida. En forma alterna, con frecuencia representaremos la relación entrada-salida de un sistema continuo mediante la notación

$$x(t) \rightarrow y(t). \tag{1.78}$$

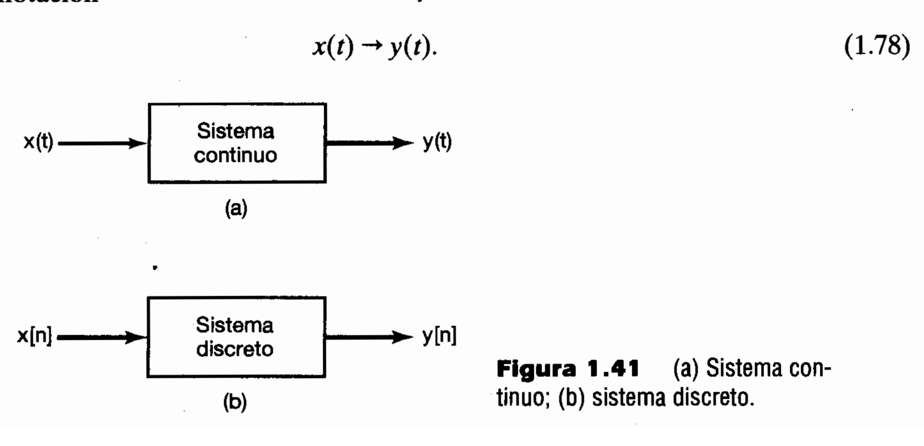


Figura 1.41 (a) Sistema continuo; (b) sistema discreto.

De manera semejante, un *sistema discreto*, esto es, uno que transforma entradas de tiempo discreto en salidas de tiempo discreto, se ilustrará como se muestra en la figura 1.41(b) y será representado simbólicamente como

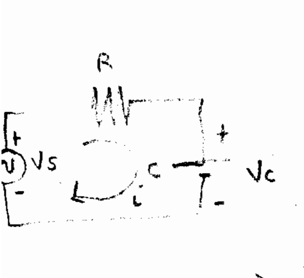
$$x[n] \rightarrow y[n]. \tag{1.79}$$

En casi todo este libro trataremos por separado, pero en paralelo, los sistemas discreto y los sistemas continuo. En el capítulo 7 presentaremos conjuntamente los sistemas continuos y los discreto a través del concepto de muestreo, además de que desarrollaremos algunas ideas referentes al uso de sistemas discreto para procesar señales continuas que han sido tomadas como muestra.

1.5.1 Ejemplos sencillos de sistemas

Una de las motivaciones más importantes para el desarrollo de herramientas generales para el análisis y diseño de sistemas es que los sistemas que provienen de aplicaciones muy diferentes tienen descripciones matemáticas muy similares. Para ilustrar esto, empecemos con unos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1.8



Considere el circuito RC descrito mediante la figura 1.1. Si consideramos a $v_s(t)$ como la señal de entrada y a $v_c(t)$ como la señal de salida, entonces podemos valernos del análisis básico de circuitos para deducir una ecuación que describa la relación entre la entrada y la salida. Específicamente, a partir de la ley de Ohm, la corriente $i(t)$ a través del resistor es proporcional (con constante de proporcionalidad $1/R$) a la caída de voltaje a través del resistor, esto es

$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}. \tag{1.80}$$

De manera similar, usando la definición de la relación básica para un capacitor, podemos relacionar $i(t)$ con la razón de cambio con el tiempo del voltaje a través del capacitor:

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}. \tag{1.81}$$

Igualando los miembros derechos de las ecuaciones (1.80) y (1.81), obtenemos una ecuación diferencial que describe la relación entre la entrada $v_s(t)$ y la salida $v_c(t)$:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t). \tag{1.82}$$

Ejemplo 1.9

Examine la figura 1.2, en la cual consideramos la fuerza $f(t)$ como la entrada y la velocidad $v(t)$ como la salida. Si establecemos que m es la masa del automóvil y $m\rho v$ la resistencia debida a la fricción, entonces la ecuación de la aceleración —es decir, la derivada de la velocidad con respecto al tiempo— con la fuerza neta dividida entre la masa, obtenemos

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m}\left[f(t) - \rho v(t)\right], \tag{1.83}$$

es decir,

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m} v(t) = \frac{1}{m} f(t). \tag{1.84}$$

Al examinar y comparar las ecuaciones (1.82) y (1.84) en los ejemplos anteriores, vemos que las relaciones entrada-salida "capturadas" en estas dos ecuaciones, para estos dos sistemas físicos muy diferentes, son básicamente las mismas. En particular, ambos ejemplos corresponden a ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, de la forma

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t), \tag{1.85}$$

donde $x(t)$ es la entrada, $y(t)$ es la salida y a y b son constantes. Éste es un ejemplo muy sencillo del hecho de que, si desarrollamos métodos para analizar clases generales de sistemas como las representadas mediante la ecuación (1.85), seremos capaces de usarlos en una amplia variedad de aplicaciones.

Ejemplo 1.10

Como un ejemplo simple de un sistema discreto, considere un modelo sencillo para el balance de una cuenta de banco de un mes a otro. Específicamente, si $y[n]$ denota el balance al final del mes n, y suponemos que $y[n]$ varía de un mes a otro de acuerdo con la ecuación

$$y[n] = 1.01y[n-1] + x[n], \tag{1.86}$$

o, de manera equivalente,

$$y[n] - 1.01y[n-1] = x[n], \tag{1.87}$$

donde $x[n]$ representa el depósito neto (es decir, el depósito menos los retiros) durante el mes n y el término $1.01y[n-1]$ representa el hecho de que acumulamos 1% de interés de cada mes.

Ejemplo 1.11

Como un segundo ejemplo, considere una simulación digital de la ecuación diferencial en la ecuación (1.84) en la cual despejamos el tiempo en intervalos discretos de longitud Δ y aproximamos la derivada $dv(t)/dt$ a $t = n\Delta$ mediante la primera diferencia, es decir,

$$\frac{v(n\Delta) - v((n-1)\Delta)}{\Delta}.$$

En este caso, si hacemos $v[n] = v(n\Delta)$ y $f[n] = f(n\Delta)$, obtenemos el siguiente modelo discreto que relaciona las señales $f[n]$ y $v[n]$ obtenidas mediante muestreo:

$$v[n] - \frac{m}{(m+\rho\Delta)} v[n-1] = \frac{\Delta}{(m+\rho\Delta)} f[n]. \tag{1.88}$$

Comparando las ecuaciones (1.87) y (1.88) vemos que son ejemplos de la misma ecuación general lineal de diferencias de primer orden:

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]. \tag{1.89}$$

Como muestran los ejemplos anteriores, las descripciones matemáticas de sistemas a partir de una amplia variedad de aplicaciones a menudo tienen muchas características en común, y es este hecho el que proporciona una gran motivación para el desarrollo de herramientas ampliamente aplicables al análisis de señales y sistemas. La clave para llevarlo a cabo en forma exitosa es identificar las clases de sistemas que tienen dos importantes características: (1) los sistemas de esta clase tienen propiedades y estructuras que podemos explotar para obtener conocimientos sobre su comportamiento y desarrollar herramientas efectivas para su análisis, y (2) muchos sistemas de importancia práctica pueden modelarse en forma exacta usando sistemas de esta clase. Es en la primera de estas características en la que se enfoca la mayor parte de este libro, pues desarrollamos herramientas para una clase particular de sistemas conocida como sistemas lineales e invariantes en el tiempo. En la siguiente sección comenzaremos a hablar sobre las propiedades que caracterizan a esta clase, así como otras propiedades muy importantes de los sistemas básicos.

La segunda característica mencionada en el párrafo anterior resulta de importancia obvia para que cualquier técnica de análisis de sistemas tenga valor en la práctica. Es un hecho bien fundamentado que una amplia variedad de sistemas físicos (incluyendo los de los ejemplos 1.8-1.10) pueden modelarse dentro de la clase de sistemas en que nos enfocamos en este libro. Sin embargo, un punto crítico es que *cualquier* modelo usado para describir o analizar un sistema físico representa una idealización de dicho sistema, y por ello cualquier análisis que resulte será sólo tan bueno como el modelo mismo. Por ejemplo, el modelo lineal simple de un resistor en la ecuación (1.80) y el de un capacitor en la ecuación (1.81) son idealizaciones. No obstante, estas idealizaciones son bastante precisas para resistores y capacitores reales en muchas aplicaciones, y así, el análisis que hace uso de dichas idealizaciones proporciona resultados y conclusiones útiles, siempre y cuando los voltajes y corrientes se mantengan dentro de las condiciones de operación bajo las cuales estos modelos lineales simples sean válidos. De manera similar, el uso de una fuerza retardante lineal para representar los efectos de la fricción en la ecuación (1.83) es una aproximación dentro de una escala de validez. En consecuencia, aunque no estudiaremos este tema en el libro, es importante recordar que un componente esencial de la práctica de la ingeniería en el uso de los métodos que desarrollamos aquí, consiste en identificar el alcance que pueda tener la validez de las suposiciones que se han convertido en un modelo y asegurarse de que cualquier análisis o diseño basado en ese modelo no contradiga dichas suposiciones.

1.5.2 Interconexiones de sistemas

Una idea importante que usaremos en todo el libro es el concepto de interconexión de sistemas. Muchos sistemas reales están construidos como interconexiones de varios subsistemas. Un ejemplo de ello es un sistema de audio, el cual involucra la interconexión de un receptor de radio, un reproductor de discos compactos o de cintas de audio con un amplificador y una o más bocinas. Otro ejemplo consiste en una aeronave controlada digitalmente, la cual es una interconexión de la aeronave, descrita por sus ecuaciones de movimiento y las fuerzas aerodinámicas que la afectan; los sensores, los cuales miden las diversas variables de la aeronave como las aceleraciones, los porcentajes de rotación y el rumbo; un piloto automático digital, que responde a las variables medidas y a entradas comandadas por el piloto (es decir, curso deseado, altitud y velocidad); y los actuadores de la aeronave, los cuales responden a entradas proporcionadas por el piloto automático para usar las superficies bajo control de la aeronave (timón, estabilizadores y alerones) para cambiar las fuerzas aerodinámicas sobre la nave. Viendo estos sistemas como una inter-

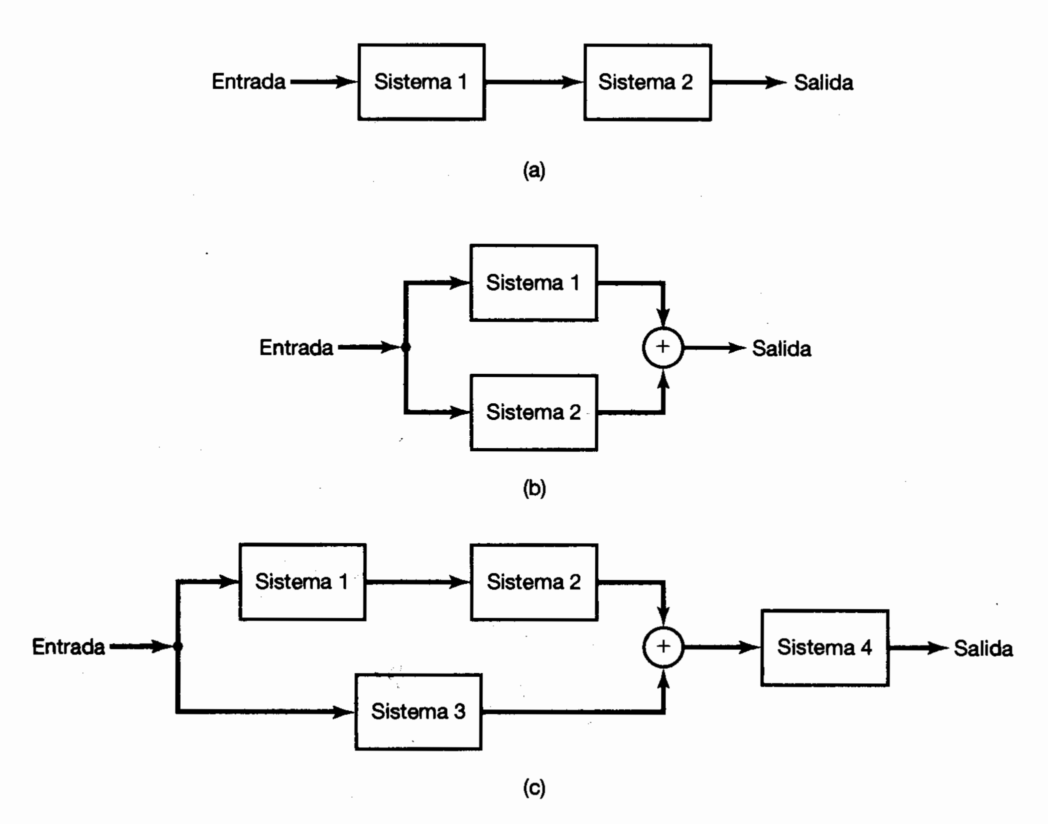


Figura 1.42 Interconexión de dos sistemas: (a) interconexión en serie (cascada); (b) interconexión en paralelo; (c) interconexión en serie-paralelo.

conexión de sus componentes, podemos usar nuestro conocimiento de los sistemas de componentes y la forma en que están interconectados con el fin de analizar la operación y comportamiento del sistema completo. Además, al describir un sistema en términos de una interconexión de subsistemas más simples, podremos, de hecho, ser capaces de definir métodos útiles para sintetizar sistemas complejos a partir de bloques fundamentales básicos más simples.

Así como una persona puede construir toda una variedad de interconexiones de sistemas, con frecuencia nos encontraremos con algunas que son básicas. Una *interconexión en serie* o *en cascada* de dos sistemas se ilustra en la figura 1.42(a). Los diagramas como éste se conocen como *diagramas de bloque*. Aquí la salida del sistema 1 es la entrada del sistema 2, y el sistema completo transforma una entrada al procesarla primero por el sistema 1 y posteriormente por el sistema 2. Un ejemplo de una interconexión en serie es un receptor de radio seguido por un amplificador. De manera similar, se puede definir una interconexión en serie de tres o más sistemas.

En la figura 1.42(b) se ilustra una *interconexión en paralelo* de dos sistemas. En éste la misma señal de entrada se aplica a los sistemas 1 y 2. El símbolo "⊕" en la figura denota adición, de manera que la salida de la interconexión en paralelo es la suma de las salidas de los sistemas 1 y 2. Un ejemplo de una interconexión en paralelo es un sistema simple de audio con varios micrófonos que alimentan a un solo sistema de amplificador y bocina. Además de la interconexión en paralelo sencilla de la figura 1.42(b), se pueden definir interconexiones de dos o más sistemas, y podemos combinar ambas interconexiones, cascada y paralelo, para obtener una interconexión más complicada. Un ejemplo

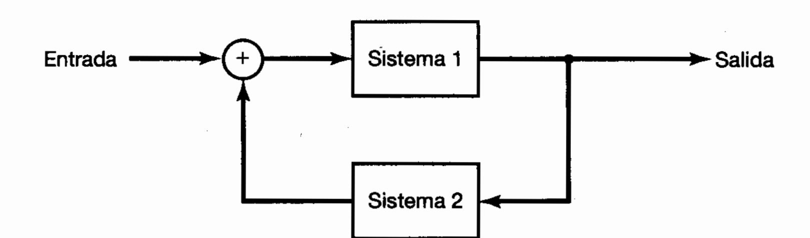
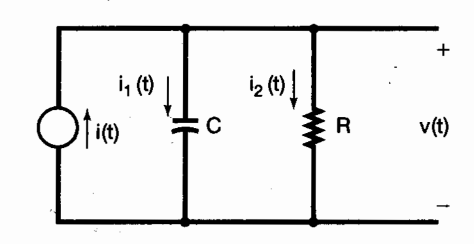


Figura 1.43 Interconexión con retroalimentación.

de este tipo de interconexión se muestra en la figura 1.42(c).[4]

Otro tipo importante de interconexión de sistemas es la *interconexión de retroalimentación*, cuyo ejemplo se ilustra en la figura 1.43. Aquí, la salida del sistema 1 es la entrada del sistema 2, mientras que la salida del sistema 2 se retroalimenta y se suma a la entrada externa para producir una entrada real al sistema 1. Los sistemas retroalimentados aparecen en una amplia variedad de aplicaciones. Por ejemplo, un regulador de velocidad de un automóvil detecta la velocidad del vehículo y ajusta el flujo del combustible para mantener la velocidad al nivel deseado. De manera similar, una aeronave controlada de forma digital se concibe más naturalmente como un sistema retroalimentado en el cual las diferencias entre la velocidad real y la deseada, la dirección o la altitud son retroalimentadas al piloto automático para corregir esas discrepancias. Los circuitos eléctricos con frecuencia también son vistos en forma útil como si tuvieran varias interconexiones retroalimentadas. Como un ejemplo, considere el circuito representado en la figura 1.44(a). Como se indica en la figura 1.44(b), este sistema se puede ver como la interconexión retroalimentada de los dos elementos del circuito.



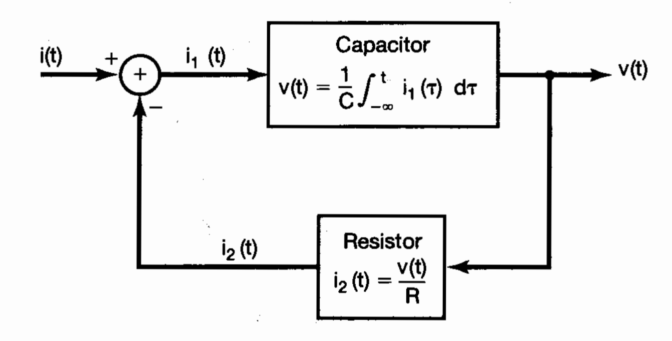


Figura 1.44 (a) Circuito eléctrico sencillo; (b) diagrama de bloque en el cual el circuito se muestra como la interconexión con retroalimentación de dos elementos del circuito.

[4]En ocasiones también usaremos el símbolo ⊗ en nuestra representación gráfica de sistemas para denotar la operación de multiplicación de dos señales (véase, por ejemplo, la figura 4.26).

1.6 PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS SISTEMAS

En esta sección presentamos y analizamos una gran variedad de propiedades básicas de los sistemas continuos y discretos. Estas propiedades tienen tanto interpretaciones físicas importantes como descripciones matemáticas relativamente simples cuando se utiliza el lenguaje de señales y sistemas que hemos empezado a desarrollar.

1.6.1 Sistemas con y sin memoria

Se dice que un sistema es *sin memoria* si su salida para cada valor de la variable independiente en un tiempo dado depende solamente de la entrada en ese mismo tiempo. Por ejemplo, el sistema especificado por la relación

$$y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2 \tag{1.90}$$

es sin memoria, ya que el valor de $y[n]$ en cualquier instante de tiempo n_0 depende tan sólo del valor de $x[n]$ en ese mismo instante. De manera similar, un resistor es un sistema sin memoria; con la entrada $x(t)$ tomada como la corriente y considerando el voltaje como la salida $y(t)$, la relación entrada-salida de un resistor es

$$y(t) = Rx(t), \tag{1.91}$$

donde R es la resistencia. Un sistema sin memoria particularmente simple es el *sistema de identidad*, cuya salida es idéntica a su entrada. Es decir, la relación entrada-salida para el sistema de identidad continuo es

$$y(t) = x(t),$$

y la relación discreta correspondiente es

$$y[n] = x[n].$$

Un ejemplo de un sistema discreto con memoria es un *acumulador* o *sumador*

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k], \tag{1.92}$$

y un segundo ejemplo es un *retraso*

$$y[n] = x[n-1]. \tag{1.93}$$

Un capacitor es otro ejemplo de un sistema continuo con memoria, ya que si la entrada se toma como la corriente y la salida como el voltaje, entonces

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau, \tag{1.94}$$

donde C es la capacitancia.

De forma general, el concepto de memoria en un sistema corresponde a la presencia de un mecanismo en el sistema que mantiene o almacena información sobre los valores de entrada en instantes diferentes del tiempo actual. Por ejemplo, el retraso en la ecuación (1.93) debe mantener o almacenar el valor precedente de la entrada. De manera similar, el acumulador de la ecuación (1.92) debe "recordar" o almacenar información

acerca de las entradas pasadas. El acumulador, en particular, calcula la suma consecutiva de todas las entradas hasta el momento actual, y entonces, en cada instante de tiempo, el acumulador debe agregar el valor de la entrada actual al valor precedente de la suma consecutiva. En otras palabras, la relación entre la entrada y la salida de un acumulador se puede describir como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n], \tag{1.95}$$

o, de manera equivalente,

$$y[n] = y[n-1] + x[n]. \tag{1.96}$$

Representado en esta última forma, para obtener la salida en el tiempo actual n, el acumulador debe recordar la suma consecutiva de los valores de entrada previos, la cual es exactamente el valor precedente de la salida del acumulador.

En muchos sistemas físicos, la memoria está directamente asociada con el almacenamiento de energía. Por ejemplo, el capacitor en la ecuación (1.94) almacena energía mediante la acumulación de la carga eléctrica, representada como la integral de la corriente. Entonces, el circuito *RC* sencillo del ejemplo 1.8 y de la figura 1.1 tiene memoria almacenada físicamente en el capacitor. De manera semejante, el automóvil de la figura 1.2 tiene memoria almacenada en su energía cinética. En los sistemas discretos construidos con computadoras o microprocesadores digitales, la memoria está típicamente asociada de forma directa con el almacenamiento de registros que retienen valores entre pulsos de reloj.

Mientras que el concepto de memoria en un sistema podría sugerir típicamente el almacenamiento de los valores *pasados* de la entrada y la salida, nuestra definición formal también conduce a la referencia de un sistema que tiene memoria si la salida actual depende de valores *futuros* de la entrada y la salida. Si bien los sistemas que muestran esta dependencia en valores futuros pueden, en principio, parecer no naturales, de hecho forman una clase importante de sistemas, según se analizará más adelante en la sección 1.6.3.

1.6.2 Invertibilidad y sistemas inversos

Se dice que un sistema es *invertible* si distintas entradas producen distintas salidas. Como se ilustra en la figura 1.45(a) para el caso discreto, si un sistema es invertible, entonces existe un *sistema inverso* tal que, cuando está en cascada con el sistema original, produce una salida $w[n]$ igual a la entrada $x[n]$ del primer sistema. Entonces, la interconexión en serie de la figura 1.45(a) tiene una relación entrada-salida total que es la misma que la del sistema de identidad.

Un ejemplo de un sistema continuo invertible es

$$y(t) = 2x(t), \tag{1.97}$$

para el cual el sistema inverso es

$$w(t) = \frac{1}{2}y(t). \tag{1.98}$$

Este ejemplo se ilustra en la figura 1.45(b). Otro ejemplo de un sistema invertible es el acumulador de la ecuación (1.92). Para este sistema, la diferencia entre dos valores suce-

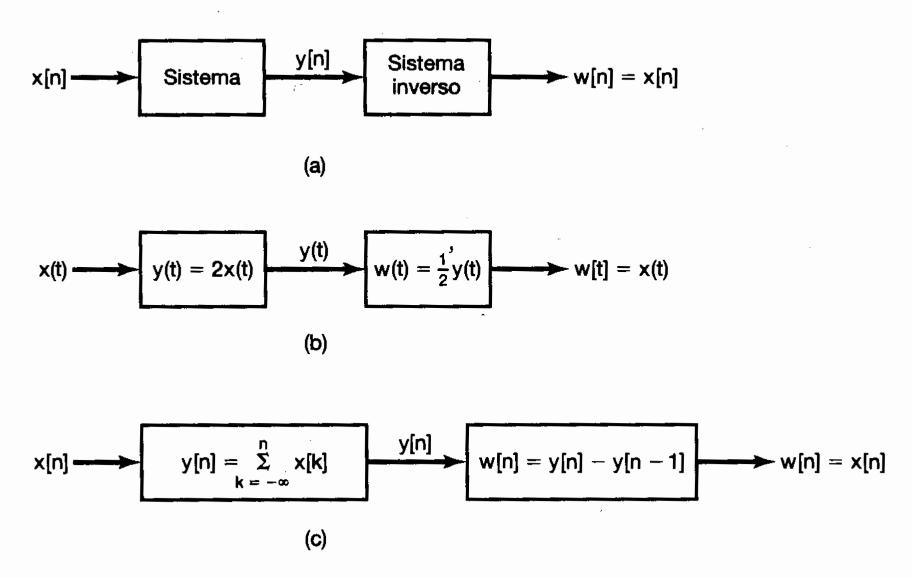


Figura 1.45 Concepto de un sistema inverso para: (a) un sistema general invertible; (b) el sistema invertible descrito por la ecuación (1.97); (c) el sistema invertible definido en la ecuación (1.92).

sivos de la salida es precisamente el último valor de entrada. Por tanto, en este caso, el sistema inverso es

$$w[n] = y[n] - y[n-1], \tag{1.99}$$

como se ilustra en la figura 1.45(c). Ejemplos de sistemas no invertibles son

$$y[n] = 0, \tag{1.100}$$

esto es, el sistema que produce la secuencia de salida cero para cualquier secuencia de entrada, y

$$y(t) = x^2(t), \tag{1.101}$$

ejemplo en el cual no podemos determinar el signo de la entrada a partir de nuestro conocimiento del signo de la salida.

El concepto de invertibilidad es importante en muchos contextos. Un ejemplo surge en los sistemas de codificación utilizados en una amplia variedad de aplicaciones de comunicación. En tales sistemas, una señal que deseamos transmitir primero se aplica como entrada a un sistema conocido como codificador. Hay muchas razones para hacer esto, que van desde el encriptamiento del mensaje original para fines de comunicación segura o privada, hasta proporcionar algo de redundancia en la señal (por ejemplo, agregando lo que es conocido como bits de paridad) de manera que cualquier error que ocurra en la transmisión se puede detectar y, posiblemente, corregir. Para una codificación *sin pérdidas*, la entrada al codificador debe ser recuperable en forma precisa de la salida; es decir, el codificador debe ser invertible.

1.6.3 Causalidad

Un sistema es *causal* si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de los valores de la entrada en el momento presente y en el pasado. A menudo, a dicho sistema se

le llama *no anticipativo*, ya que la salida del sistema no anticipa valores futuros de la entrada. En consecuencia, si dos entradas a un sistema causal son idénticas hasta algún punto en el tiempo t_0 o n_0, las salidas correspondientes deben ser también iguales hasta ese mismo tiempo. El circuito RC de la figura 1.1 es causal, ya que el voltaje del capacitor responde sólo a los valores presentes y pasados de la fuente de voltaje. De manera análoga, el movimiento de un automóvil es causal puesto que no anticipa acciones futuras del conductor. Los sistemas descritos por las ecuaciones (1.92)-(1.94) también son causales, pero los sistemas definidos por

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \tag{1.102}$$

y

$$y(t) = x(t-1) \tag{1.103}$$

no lo son. Todos los sistemas sin memoria son causales, ya que la salida responde sólo a valores presentes de la entrada.

Aunque los sistemas causales son de gran importancia, de ninguna manera constituyen los únicos sistemas que resultan de interés práctico. Por ejemplo, la causalidad no es de importancia fundamental en aplicaciones como el procesamiento de imágenes, en el cual la variable independiente no es el tiempo. Más aún, en el procesamiento de datos que han sido grabados previamente, cómo ocurre con frecuencia con señales de voz, de geofísica o señales meteorológicas, por nombrar algunas, de ninguna manera estamos obligados a procesar esos datos de forma causal. Como otro ejemplo, en muchas aplicaciones, incluyendo el análisis histórico del mercado de valores y los estudios demográficos, podemos estar interesados en determinar una tendencia de variación lenta en datos que también contengan fluctuaciones de alta frecuencia alrededor de esa tendencia. En este caso, una aproximación usada con frecuencia consiste en promediar los datos sobre un intervalo para suavizar las fluctuaciones y mantener solamente la tendencia. Un ejemplo de un sistema no causal para obtener promedios es

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n-k]. \tag{1.104}$$

Ejemplo 1.12

En la verificación de causalidad de un sistema es importante observar cuidadosamente la relación entrada-salida. Para ilustrar algunos de los elementos involucrados en esto, verificaremos la causalidad de dos sistemas particulares.

El primer sistema se define como

$$y[n] = x[-n]. \tag{1.105}$$

Observe que la salida $y[n_0]$ en un tiempo positivo n_0 depende solamente del valor de la señal de entrada $x[-n_0]$ en el tiempo $(-n_0)$, el cual es negativo y por tanto en el pasado de n_0. Podemos sentirnos inclinados a concluir en este punto que el sistema dado es causal. Sin embargo, siempre debemos tener el cuidado de verificar la relación entrada-salida para *todos* los tiempos. En particular, para $n < 0$, es decir, $n = -4$, vemos que $y[-4] = x[4]$, de manera que la salida en este tiempo depende de un valor futuro de la entrada. Por consiguiente, el sistema es no causal.

También es importante distinguir cuidadosamente los efectos de la entrada de aquellos de otras funciones utilizadas en la definición del sistema. Por ejemplo, considere el sistema

$$y(t) = x(t)\cos(t+1). \tag{1.106}$$

En este sistema, la salida en cualquier tiempo t es igual a la entrada en ese mismo tiempo multiplicada por un número que varía con el tiempo. Específicamente, podemos rescribir la ecuación (1.106) como

$$y(t) = x(t)g(t),$$

donde $g(t)$ es una función que varía con el tiempo, esto es, $g(t) = \cos(t + 1)$. De este modo, sólo el valor actual de la entrada $x(t)$ tiene influencia en el valor actual de la salida $y(t)$, por lo que concluimos que este sistema es causal (y por tanto sin memoria).

1.6.4 Estabilidad

La *estabilidad* es otra importante propiedad de los sistemas. Intuitivamente, un sistema estable es aquel en el que entradas pequeñas conducen a respuestas que no divergen. Por ejemplo, considere el péndulo en la figura 1.46(a), en el cual la entrada es la fuerza aplicada $x(t)$ y la salida es la desviación angular $y(t)$ a partir de la vertical. En este caso, la gravedad aplica una fuerza de restauración que tiende a regresar el péndulo a la posición vertical, y las pérdidas por fricción debidas al arrastre tienden a disminuir su velocidad. En consecuencia, si se aplica una pequeña fuerza $x(t)$, la desviación resultante de la vertical también es pequeña. En contraste, para el péndulo invertido de la figura 1.46(b), el efecto de la gravedad es aplicar una fuerza que tiende a *incrementar* la desviación de la vertical. Así, una pequeña fuerza aplicada conduce a una gran desviación vertical, lo cual ocasiona que el péndulo caiga, a pesar de cualquier fuerza retardante debida a la fricción.

El sistema de la figura 1.46(a) es un ejemplo de un sistema estable, mientras que el de la figura 1.46(b) es inestable. Los modelos para reacciones en cadena o para crecimiento de población con suministro de alimentación ilimitado y sin depredadores son ejemplos de sistemas inestables, ya que la respuesta de los sistemas crece sin límite en respuesta a pequeñas entradas. Otro ejemplo de un sistema inestable es el modelo para un balance de cuenta bancaria de la ecuación (1.86), pues si se hace un depósito inicial (es decir, $x[0]$ = una cantidad positiva) y no hay retiros subsecuentes, entonces ese depósito crecerá cada mes sin límite, debido al efecto de los pagos de interés.

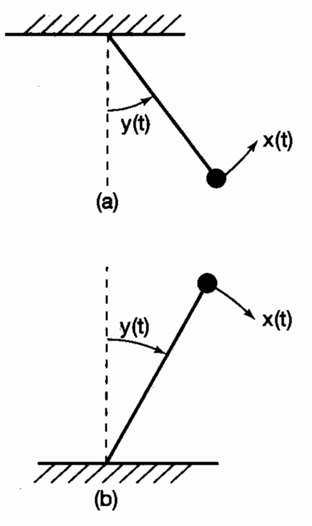


Figura 1.46 (a) Un péndulo estable; (b) un péndulo invertido inestable.

Existen numerosos ejemplos de sistemas estables. La estabilidad de sistemas físicos por lo general resulta de la presencia de mecanismos que disipan energía. Por ejemplo, considerando valores positivos para los componentes del circuito RC simple del ejemplo 1.8, el resistor disipa energía y este circuito es un sistema estable. El sistema en el ejemplo 1.9 también es estable debido a la disipación de energía ocasionada por la fricción.

Los ejemplos anteriores nos proporcionan un conocimiento intuitivo del concepto de estabilidad. De manera más formal, si la entrada a un sistema estable es limitada (es decir, si su magnitud no crece en forma ilimitada), entonces la salida también debe ser limitada y por tanto, no puede divergir. Ésta es la definición de estabilidad que usaremos a lo largo de este libro. Por ejemplo, considere la aplicación de una fuerza constante $f(t) = F$ al automóvil de la figura 1.2 con el vehículo inicialmente en reposo. En este caso la velocidad del auto se incrementa, pero no sin límite, ya que la fuerza de fricción retardante también se incrementa con la velocidad. De hecho, la velocidad continuará incrementándose hasta que la fuerza de fricción esté en balance exacto con la fuerza aplicada; así, según la ecuación (1.84) vemos que este valor de velocidad terminal V debe satisfacer

$$\frac{\rho}{m}V = \frac{1}{m}F, \tag{1.107}$$

es decir,

$$V = \frac{F}{\rho}. \tag{1.108}$$

Como otro ejemplo, considere el sistema discreto definido por la ecuación (1.104) y suponga que la entrada $x[n]$ está limitada en magnitud por algún número, digamos B, para todos los valores de n. Entonces la magnitud más grande posible para $y[n]$ también es B, ya que $y[n]$ es el promedio de un conjunto finito de valores de la entrada. Por tanto, $y[n]$ está limitada y el sistema es estable. Por otro lado, considere el acumulador descrito por la ecuación (1.92). A diferencia del sistema de la ecuación (1.104), este sistema suma *todos* los valores pasados de la entrada, en lugar de sólo un conjunto finito de valores, siendo entonces inestable, debido a que esta suma puede crecer de manera continua incluso si $x[n]$ está limitada. Por ejemplo, si la entrada al acumulador es un escalón unitario $u[n]$, la salida será

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = (n+1)u[n].$$

Esto es, $y[0] = 1, y[1] = 2, y[2] = 3$, y así sucesivamente, y $y[n]$ crece sin límite.

Ejemplo 1.13

Si sospechamos que un sistema es inestable, entonces una estrategia útil para verificarlo es considerar una entrada limitada *específica* que conduzca a una salida ilimitada. Encontrar uno de estos ejemplos nos permite concluir que el sistema dado es inestable. Si tal ejemplo no existe o resulta difícil encontrarlo, debemos verificar la estabilidad usando un método que no haga uso de ejemplos específicos de señales de entrada. Para ilustrar esto, verifiquemos la estabilidad de dos sistemas,

$$S_1: y(t) = tx(t) \tag{1.109}$$

y

$$S_2: y(t) = e^{x(t)}. \tag{1.110}$$

Al buscar un contraejemplo específico para refutar la estabilidad, podemos considerar simples entradas limitadas, como una constante o un escalón unitario. Para el sistema S_1 de la ecuación (1.109), una entrada constante $x(t) = 1$ produce $y(t) = t$, que es ilimitada, ya que no importa qué constante finita apliquemos, $|y(t)|$ excederá esa constante para algún valor de t. Concluimos que el sistema S_1 es inestable.

Para el sistema S_2, el cual resulta ser estable, no podríamos encontrar una entrada limitada que dé como resultado una salida ilimitada. Así que procedemos a verificar que todas las entradas limitadas den como resultado salidas limitadas. Específicamente, sea B un número positivo arbitrario y sea $x(t)$ una señal arbitraria limitada por B; esto es, no estamos haciendo conjeturas acerca de $x(t)$, excepto que

$$|x(t)| < B, \tag{1.111}$$

o

$$-B < x(t) < B, \tag{1.112}$$

para toda t. Usando la definición de S_2 de la ecuación (1.110), vemos que si $x(t)$ satisface la ecuación (1.111), entonces $y(t)$ debe satisfacer

$$e^{-B} < |y(t)| < e^{B}. \tag{1.113}$$

En conclusión, si cualquier entrada a S_2 está limitada por un número positivo arbitrario B, se garantiza que la salida correspondiente está limitada por e^B. Por tanto, S_2 es estable.

Las propiedades y conceptos de los sistemas que hemos examinado hasta el momento en esta sección son de gran importancia, por lo que examinaremos algunos de éstos con mayor detalle más adelante en el libro. Sin embargo, todavía quedan dos propiedades adicionales —invariancia en el tiempo y linealidad— que juegan un papel central en los subsecuentes capítulos de este libro, de manera que en el resto de esta sección introducimos y proporcionamos un análisis inicial de estos dos conceptos tan importantes.

1.6.5 Invariancia en el tiempo

De forma conceptual, un sistema es invariante en el tiempo si el comportamiento y características del mismo están fijos en el tiempo. Por ejemplo, el circuito RC de la figura 1.1 es invariante en el tiempo si los valores de la resistencia y la capacitancia R y C son constantes a través del tiempo: si hiciéramos un experimento con este circuito el día de hoy podríamos esperar obtener los mismos resultados si lo hacemos en forma idéntica mañana. Por otro lado, si los valores de R y C se cambian o varían con el tiempo, entonces podríamos esperar que los resultados de nuestro experimento dependieran del tiempo en que se lleve a cabo. De manera similar, si el coeficiente de fricción b y la masa m del automóvil en la figura 1.2 son constantes, podríamos esperar que el vehículo respondiera de manera idéntica independientemente de cuándo lo manejemos. Por otra parte, si un día cargamos la cajuela del auto con maletas pesadas, incrementando así m, esperaríamos que el auto se comportase de manera diferente que en otras ocasiones cuando no tiene carga pesada.

La propiedad de invariancia en el tiempo se describe de manera muy sencilla en términos del lenguaje de las señales y de los sistemas que hemos introducido. De manera

específica, un sistema es invariante en el tiempo si un corrimiento de tiempo en la señal de entrada ocasiona un corrimiento de tiempo en la señal de salida. Esto es, si $y[n]$ es la salida de un sistema discreto invariante en el tiempo cuando $x[n]$ es la entrada, entonces $y[n - n_0]$ es la salida cuando se aplica $x[n - n_0]$. En tiempo continuo con una salida $y(t)$ correspondiente a una entrada $x(t)$, un sistema invariante en el tiempo tendrá $y(t - t_0)$ como salida cuando $x(t - t_0)$ sea la entrada.

Para ver cómo se puede determinar si un sistema es o no invariante en el tiempo y obtener algún conocimiento sobre esta propiedad, consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.14

Considere el sistema continuo definido por

$$y(t) = \operatorname{sen}\left[x(t)\right]. \tag{1.114}$$

Para verificar que este sistema es invariante en el tiempo, debemos determinar si la propiedad de invariancia en el tiempo se cumple para *cualquier* entrada y *cualquier* corrimiento en el tiempo t_0. Entonces, sea $x_1(t)$ una entrada arbitraria a este sistema y

$$y_1(t) = \operatorname{sen}\left[x_1(t)\right] \tag{1.115}$$

sea la salida correspondiente. Considere entonces una segunda entrada obtenida al desplazar $x_1(t)$ en el tiempo:

$$x_2(t) = x_1(t - t_0). \tag{1.116}$$

La salida correspondiente a esta entrada es

$$y_2(t) = \operatorname{sen}\left[x_2(t)\right] = \operatorname{sen}\left[x_1(t - t_0)\right]. \tag{1.117}$$

De manera similar, de la ecuación (1.115),

$$y_1(t - t_0) = \operatorname{sen}\left[x_1(t - t_0)\right]. \tag{1.118}$$

Comparando las ecuaciones (1.117) y (1.118), vemos que $y_2(t) = y_1(t - t_0)$ y, por tanto, este sistema es invariante en el tiempo.

Ejemplo 1.15

Como un segundo ejemplo, considere el sistema discreto

$$y[n] = nx[n]. \tag{1.119}$$

Éste es un sistema variante en el tiempo, un hecho que se puede verificar usando el mismo procedimiento formal del ejemplo anterior (vea el problema 1.28). Sin embargo, cuando se sospecha que un sistema es variante en el tiempo, un procedimiento para demostrarlo, que con frecuencia es útil, consiste en buscar un contraejemplo, es decir, usar nuestra intuición para encontrar una señal de entrada para la cual la condición de invariancia en el tiempo sea violada. El sistema en este ejemplo en particular representa un sistema con una ganancia variante en el tiempo. Por ejemplo, si sabemos que el valor de entrada actual es 1, no podemos determinar el valor de salida actual sin conocer el tiempo actual.

En consecuencia, considere la señal de entrada $x_1[n] = \delta[n]$, la cual produce una salida $y_1[n]$ que es idéntica a 0 (ya que $n\delta[n] = 0$). Sin embargo, la entrada $x_2[n] = \delta[n-1]$ produce la salida $y_2[n] = n\delta[n-1] = \delta[n-1]$. Por tanto, mientras que $x_2[n]$ es una versión desplazada de $x_1[n]$, $y_2[n]$ *no* es una versión desplazada de $y_1[n]$.

Mientras que el sistema en el ejemplo anterior tiene una ganancia que varía con el tiempo y como resultado es un sistema variante en el tiempo, el sistema de la ecuación (1.97) tiene una ganancia constante y, de hecho, es invariante en el tiempo. Otros ejemplos de sistemas invariantes en el tiempo están dados por las ecuaciones (1.91)-(1.104). El siguiente ejemplo ilustra un sistema variante en el tiempo.

Ejemplo 1.16

Considere el sistema

$$y(t) = x(2t). \tag{1.120}$$

Este sistema representa un escalamiento de tiempo. Esto es, $y(t)$ es una versión comprimida (por un factor de 2) de $x(t)$. Entonces, intuitivamente cualquier corrimiento de tiempo en la entrada también será comprimido por un factor de 2, y es por esta razón que el sistema no es invariante en el tiempo. Para determinar esto mediante su contraejemplo, considere la entrada $x_1(t)$ mostrada en la figura 1.47(a) y la salida resultante $y_1(t)$ descrita por la figura 1.47(b). Si entonces desplazamos la entrada por 2 —es decir, considere $x_2(t) = x_1(t-2)$, como se muestra en la figura 1.47(c)—, obtenemos la salida

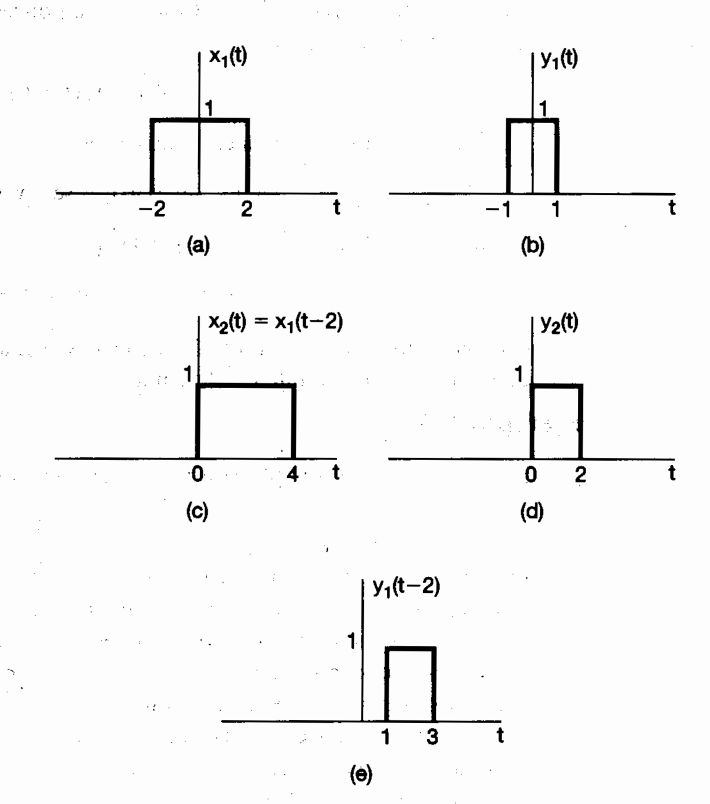


Figura 1.47 (a) La entrada $x_1(t)$ al sistema del ejemplo 1.16; (b) la salida $y_1(t)$ correspondiente a $x_1(t)$; (c) la entrada desplazada $x_2(t) = x_1(t-2)$; (d) la salida $y_2(t)$ correspondiente a $x_2(t)$; (e) la señal desplazada $y_1(t-2)$. Observe que $y_2(t) \neq y_1(t-2)$, lo cual demuestra que el sistema no es invariante en el tiempo.

resultante $y_2(t) = x_2(2t)$ mostrada en la figura 1.47(d). Al comparar las figuras 1.47(d) y (e), vemos que $y_2(t) \neq y_1(t-2)$, de manera que el sistema no es invariante en el tiempo. (De hecho, $y_2(t) = y_1(t-1)$, así que el corrimiento de tiempo de la salida es sólo la mitad de lo que debe ser para la invariancia en el tiempo, debido a la compresión de tiempo impartida por el sistema.)

1.6.6 Linealidad

Un *sistema lineal*, en tiempo continuo o en tiempo discreto, es aquel que posee la importante propiedad de superposición: si una entrada consiste en la suma ponderada de varias señales, entonces la salida es simplemente la superposición (es decir, la suma ponderada) de las respuestas del sistema a cada una de estas señales. Matemáticamente, sea $y_1(t)$ la respuesta del sistema continuo a una entrada $x_1(t)$, y sea $y_2(t)$ la salida correspondiente a la entrada $x_2(t)$. Entonces el sistema es lineal si:

1. La respuesta a $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$.
2. La respuesta a $ax_1(t)$ es $ay_1(t)$, donde a es una constante compleja cualquiera.

La primera de estas dos propiedades se conoce como la propiedad de *aditividad*; la segunda se conoce como la propiedad de *escalamiento* u *homogeneidad*. Aunque hemos escrito esta descripción usando señales continuas, la misma definición se cumple para discretas. Los sistemas especificados por las ecuaciones (1.91)-(1.100), (1.102)-(1.104) y (1.119) son lineales, mientras que los definidos por las ecuaciones (1.101) y (1.114) son no lineales. Observe que un sistema puede ser lineal sin ser invariante en el tiempo, como se muestra en la ecuación (1.119), y que puede ser invariante en el tiempo sin ser lineal, como en las ecuaciones (1.101) y (1.114).

Las dos propiedades que definen un sistema lineal pueden combinarse en un solo enunciado:

$$\text{tiempo continuo: } ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t), \tag{1.121}$$

$$\text{tiempo discreto: } ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]. \tag{1.122}$$

Aquí, a y b son constantes complejas cualesquiera. Más aún, se puede demostrar directamente a partir de la definición de linealidad que si $x_k[n]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, son un conjunto de entradas a un sistema lineal discreto con las correspondientes salidas $y_k[n]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, entonces la respuesta a una combinación lineal de estas entradas dada por

$$y[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n] + a_3x_3[n] + \ldots \tag{1.123}$$

es

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1y_1[n] + a_2y_2[n] + a_3y_3[n] + \ldots. \tag{1.124}$$

A este hecho tan importante se le conoce como la *propiedad de superposición*, la cual se cumple para sistemas lineales tanto en continuos como discretos.

Una consecuencia directa de la propiedad de superposición es que, para sistemas lineales, una entrada que sea cero en todo tiempo da una salida cero en todo tiempo. Por ejemplo, si $x[n] \rightarrow y[n]$, entonces la propiedad de homogeneidad nos dice que

$$0 = 0 \cdot x[n] \rightarrow 0 \cdot y[n] = 0. \tag{1.125}$$

En los siguientes ejemplos mostramos cómo la linealidad de un determinado sistema se puede verificar directamente aplicando la definición de linealidad.

Ejemplo 1.17

Considere un sistema S cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ estén relacionadas mediante

$$y(t) = tx(t)$$

Para determinar si S es o no lineal, consideramos dos entradas arbitrarias $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$$

Sea $x_3(t)$ una combinación lineal de $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Esto es,

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

donde a y b son escalares arbitrarias. Si $x_3(t)$ es la entrada a S, entonces la salida correspondiente se expresa como

$$\begin{aligned} y_3(t) &= tx_3(t) \\ &= t(ax_1(t) + bx_2(t)) \\ &= atx_1(t) + btx_2(t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Concluimos entonces que el sistema S es lineal.

Ejemplo 1.18

Apliquemos el procedimiento para verificar la linealidad utilizado en el ejemplo anterior en otro sistema S cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ están relacionadas mediante

$$y(t) = x^2(t)$$

Definiendo $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ como en el ejemplo anterior, tenemos

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$$

y

$$\begin{aligned} x_3(t) \rightarrow y_3(t) &= x_3^2(t) \\ &= (ax_1(t) + bx_2(t))^2 \\ &= a^2x_1^2(t) + b^2x_2^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \\ &= a^2y_1(t) + b^2y_2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

Claramente, podemos especificar que $x_1(t)$, $x_2(t)$, a y b tales que $y_3(t)$ no son lo mismo que $ay_1(t) + by_2(t)$. Por ejemplo, si $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 0$, $a = 2$ y $b = 0$, entonces $y_3(t) = (2x_1(t))^2 = 4$, pero $2y_1(t) = 2(x_1(t))^2 = 2$. Concluimos que el sistema S es no lineal.

Ejemplo 1.19

Al verificar la linealidad de un sistema, es importante recordar que éste debe satisfacer las dos propiedades, la de aditividad y la de homogeneidad, y que las señales, así como



cualquier constante de escalamiento, pueden ser complejas. Para enfatizar la importancia de estos puntos, considere el sistema especificado por

$$y[n] = \mathcal{R}e\{x[n]\}. \tag{1.126}$$

Como se muestra en el problema 1.29, este sistema es aditivo; sin embargo, no satisface la propiedad de homogeneidad, como demostraremos en seguida. Sea

$$x_1[n] = r[n] + js[n] \tag{1.127}$$

una entrada compleja arbitraria con partes real e imaginaria $r[n]$ y $s[n]$, respectivamente, de modo que la correspondiente salida sea

$$y_1[n] = r[n]. \tag{1.128}$$

Ahora, considere el escalamiento de $x_1[n]$ por un número complejo, por ejemplo, $a = j$; es decir, considere la entrada

$$\begin{aligned} x_2[n] = jx_1[n] &= j(r[n] + js[n]) \\ &= -s[n] + jr[n]. \end{aligned} \tag{1.129}$$

La salida correspondiente a $x_2[n]$ es

$$y_2[n] = \mathcal{R}e\{x_2[n]\} = -s[n], \tag{1.130}$$

la cual no es igual a la versión escalada de $y_1[n]$,

$$ay_1[n] = jr[n]. \tag{1.131}$$

Concluimos que el sistema viola la propiedad de homogeneidad y entonces no es lineal.

Ejemplo 1.20

Considere el sistema

$$y[n] = 2x[n] + 3. \tag{1.132}$$

Este sistema es no lineal, como puede verificarse de varias formas. Por ejemplo, el sistema viola la propiedad de aditividad: si $x_1[n] = 2$ y $x_2[n] = 3$, entonces

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = 2x_1[n] + 3 = 7, \tag{1.133}$$
$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = 2x_2[n] + 3 = 9. \tag{1.134}$$

Sin embargo, la respuesta a $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$ es

$$y_3[n] = 2[x_1[n] + x_2[n]] + 3 = 13, \tag{1.135}$$

la cual no es igual a $y_1[n] + y_2[n] = 16$. De forma alternativa, puesto que $y[n] = 3$ si $x[n] = 0$, vemos que el sistema viola la propiedad de "cero entrada/cero salida" de los sistemas lineales mostrados en la ecuación (1.125).

Puede parecer sorprendente que el sistema en el ejemplo anterior sea no lineal, ya que la ecuación (1.132) es una ecuación lineal. Por otra parte, como se ilustra en la figura 1.48, la salida de este sistema se puede representar como la suma de las salidas de un sistema lineal y otra señal igual a la *respuesta a entrada cero* del sistema. Para el sistema de la ecuación (1.132), el sistema lineal es

$$x[n] \rightarrow 2x[n],$$

y la respuesta a entrada cero es

$$y_0[n] = 3.$$

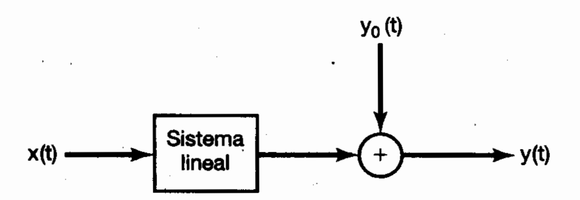


Figura 1.48 Estructura de un sistema incrementalmente lineal. Aquí, $y_0[n]$ es la respuesta a entrada cero del sistema.

Hay, de hecho, muchas clases de sistemas tanto continuos como discretos que se pueden representar como en la figura 1.48, es decir, para los cuales la salida del sistema completo consiste en la superposición de la respuesta de un sistema lineal con una respuesta a entrada cero. Como se muestra en el problema 1.47, tales sistemas corresponden a la clase de *sistemas incrementalmente lineales*, esto es, sistemas continuos o discretos que responden en forma lineal a *cambios* en la entrada. En otras palabras, la *diferencia* entre las respuestas a cualesquiera dos entradas a un sistema incrementalmente lineal es una función lineal (es decir, aditivo y homogéneo) de la *diferencia* entre las dos entradas. Por ejemplo, si $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son dos entradas al sistema especificado por la ecuación (1.132), y si $y_1[n]$ y $y_2[n]$ son las salidas correspondientes, entonces:

$$y_1[n] - y_2[n] = 2x_1[n] + 3 - \{2x_2[n] + 3\} = 2\{x_1[n] - x_2[n]\}. \tag{1.136}$$

1.7 RESUMEN

En este capítulo hemos desarrollado un gran número de conceptos relacionados con las señales y sistemas continuos y discretos. Hemos presentado una noción intuitiva de lo que son las señales y los sistemas mediante varios ejemplos y representación matemática para señales y sistemas que usaremos en todo el libro. En particular hemos introducido una representación gráfica y matemática de las señales y la empleamos para la realización de transformaciones de la variable independiente. También definimos y examinamos varias señales básicas, tanto continuas como discretas. Éstas incluyen señales exponenciales complejas, señales senoidales y funciones impulso y escalón unitario. Además, investigamos el concepto de periodicidad para los dos tipos de señales.

Al desarrollar algunas de las ideas elementales relacionadas con sistemas, introdujimos los diagramas de bloque para facilitar nuestro análisis concerniente a la interconexión de sistemas, y definimos algunas propiedades importantes de los sistemas, incluyendo la causalidad, la estabilidad, la invariancia en el tiempo y la linealidad.

El enfoque principal de este libro se centrará sobre los sistemas que poseen estas dos últimas propiedades, esto es, en la clase de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), tanto continuos como discretos. Dichos sistemas juegan un papel particularmente importante en el análisis y diseño de sistemas, en parte debido al hecho de que muchos sistemas encontrados en la naturaleza se pueden modelar exitosamente como lineales e invariantes en el tiempo. Además, como veremos en los siguientes capítulos, las propiedades de linealidad e invariancia en el tiempo nos permiten analizar en detalle el comportamiento de los sistemas LTI.

Capítulo 1 Problemas

Los **problemas básicos** dan énfasis a los mecanismos del uso de conceptos y métodos de una manera similar a la ilustrada en los ejemplos que se resolvieron en el texto.

Los **problemas avanzados** exploran y desarrollan los fundamentos e implicaciones prácticas del material textual.

La primera sección de problemas corresponde a la categoría básica, y las respuestas se proporcionan al final del libro. Las siguientes dos secciones contienen problemas que comprenden las categorías básica y avanzada, respectivamente. Una sección final, **Revisión matemática,** proporciona problemas que sirven de práctica sobre las ideas fundamentales de la aritmética y el álgebra complejas.

PROBLEMAS BÁSICOS CON RESPUESTAS

1.1. Exprese cada uno de los siguientes números complejos en forma cartesiana $(x + jy)$: $\frac{1}{2}e^{j\pi}$, $\frac{1}{2}e^{-j\pi}$, $e^{j\pi/2}$, $e^{-j\pi/2}$, $e^{j5\pi/2}$, $\sqrt{2}e^{j\pi/4}$, $\sqrt{2}e^{j9\pi/4}$, $\sqrt{2}e^{-j9\pi/4}$, $\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$.

1.2. Exprese cada uno de los siguientes números complejos en forma polar $(re^{j\theta}$, con $-\pi < \theta \leq \pi)$: $5, -2, -3j, \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + j, (1 - j)^2, j(1 - j), (1 + j)/(1 - j), (\sqrt{2} + j\sqrt{2})/(1 + j\sqrt{3})$.

1.3. Determine los valores de P_∞ y E_∞ para cada una de las siguientes señales:
(a) $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$ **(b)** $x_2(t) = e^{j(2t + \pi/4)}$ **(c)** $x_3(t) = \cos(t)$
(d) $x_1[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ **(e)** $x_2[n] = e^{j(\pi/2n + \pi/8)}$ **(f)** $x_3[n] = \cos(\frac{\pi}{4} n)$

1.4. Sea $x[n]$ una señal con $x[n] = 0$ para $n < -2$ y $n > 4$. Para cada señal mostrada abajo, determine los valores de n para los cuales se garantiza que es cero.
(a) $x[n - 3]$ **(b)** $x[n + 4]$ **(c)** $x[-n]$
(d) $x[-n + 2]$ **(e)** $x[-n - 2]$

1.5. Sea $x(t)$ una señal con $x(t) = 0$ para $t < 3$. Para cada señal dada, determine los valores de t para los cuales se garantiza que es cero.
(a) $x(1 - t)$ **(b)** $x(1 - t) + x(2 - t)$ **(c)** $x(1 - t)x(2 - t)$
(d) $x(3t)$ **(e)** $x(t/3)$

1.6. Determine si cada una de las siguientes señales es o no periódica:
(a) $x_1(t) = 2e^{j(t + \pi/4)}u(t)$ **(b)** $x_2[n] = u[n] + u[-n]$
(c) $x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\delta[n - 4k] - \delta[n - 1 - 4k]\}$

1.7. Para cada una de las siguientes señales, determine todos los valores de la variable independiente para los cuales se garantice que la parte par de la señal es cero.
(a) $x_1[n] = u[n] - u[n - 4]$ **(b)** $x_2(t) = \text{sen}(\frac{1}{2}t)$
(c) $x_3[n] = (\frac{1}{2})^n u[n - 3]$ **(d)** $x_4(t) = e^{-5t}u(t + 2)$

1.8. Exprese la parte real de cada señal en la forma $Ae^{-at}\cos(\omega t + \phi)$, donde A, a, ω y ϕ son números reales con $A > 0$ y $-\pi < \phi \leq \pi$:
(a) $x_1(t) = -2$ **(b)** $x_2(t) = \sqrt{2}e^{j\pi/4}\cos(3t + 2\pi)$
(c) $x_3(t) = e^{-t}\,\text{sen}(3t + \pi)$ **(d)** $x_4(t) = je^{(-2 + j100)t}$

1.9. Determine si cada una de las siguientes señales es o no periódica. Si una señal es periódica, especifique su periodo fundamental.
(a) $x_1(t) = je^{j10t}$ **(b)** $x_2(t) = e^{(-1 + j)t}$ **(c)** $x_3[n] = e^{j7\pi n}$
(d) $x_4[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$ **(e)** $x_5[n] = 3e^{j3/5(n+1/2)}$

1.10. Determine el periodo fundamental de la señal $x(t) = 2\cos(10t + 1) - \text{sen}(4t-1)$.

1.11. Determine el periodo fundamental de la señal $x[n] = 1 + e^{j4\pi n/7} - e^{j2\pi n/5}$.

1.12. Considere la señal discreta

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n - 1 - k].$$

Determine los valores de los enteros M y n_0 de manera que $x[n]$ se exprese como

$$x[n] = u[Mn - n_0].$$

1.13. Considere la señal continua

$$x(t) = \delta(t + 2) - \delta(t - 2).$$

Calcule el valor de E_∞ para la señal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau.$$

1.14. Considere una señal periódica

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -2, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

con periodo $T = 2$. La derivada de esta señal está relacionada con el "tren de impulsos"

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k)$$

con periodo $T = 2$. Puede demostrarse que

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t - t_1) + A_2 g(t - t_2).$$

Determine los valores de A_1, t_1, A_2 y t_2.

1.15. Considere un sistema S con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$. Este sistema se obtiene mediante una interconexión en serie de un sistema S_1 seguido por un sistema S_2. Las relaciones entrada-salida para S_1 y S_2 son

$$S_1: \quad y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n - 1],$$

$$S_2: \quad y_2[n] = x_2[n - 2] + \frac{1}{2}x_2[n - 3],$$

donde $x_1[n]$ y $x_2[n]$ denotan señales de entrada.

(a) Determine la relación entrada-salida del sistema S.

(b) ¿Cambia la relación entrada-salida del sistema S si el orden en el que están conectados S_1 y S_2 se invierte (es decir, si S_2 sigue a S_1)?

1.16. Considere un sistema discreto con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$. La relación entrada-salida para este sistema es

$$y[n] = x[n]x[n -2].$$

(a) ¿El sistema es sin memoria?
(b) Determine la salida del sistema cuando la entrada es $A\delta[n]$, donde A es un número real o complejo.
(c) ¿El sistema es invertible?

1.17. Considere un sistema continuo con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ relacionada mediante

$$y(t) = x(\text{sen}(t)).$$

(a) ¿El sistema es causal?
(b) ¿El sistema es lineal?

1.18. Considere un sistema discreto con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ relacionadas mediante

$$y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k],$$

donde n_0 es un entero positivo finito.
(a) ¿El sistema es lineal?
(a) ¿El sistema es invariante en el tiempo?
(c) Si se sabe que $x[n]$ es limitada por un entero finito B (es decir, $|x[n]| < B$ para toda n), se puede demostrar que $y[n]$ está limitada por un número finito C. Concluimos así que el sistema dado es estable. Exprese C en términos de B y n_0.

1.19. Para cada relación entrada-salida, determine si el sistema correspondiente es lineal, invariante en el tiempo o ambos.
(a) $y(t) = t^2 x(t-1)$ **(b)** $y[n] = x^2[n-2]$
(c) $y[n] = x[n+1] - x[n-1]$ **(d)** $y[n] = \mathcal{O}d\{x(t)\}$

1.20. Un sistema lineal continuo S con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ produce el siguiente par de relaciones entrada-salida:

$$x(t) = e^{j2t} \xrightarrow{S} y(t) = e^{j3t},$$
$$x(t) = e^{-j2t} \xrightarrow{S} y(t) = e^{-j3t}.$$

(a) Si $x_1(t) = \cos(2t)$, determine la salida correspondiente $y_1(t)$ para el sistema S.
(b) Si $x_2(t) = \cos(2(t - \frac{1}{2}))$, determine la salida correspondiente $y_2(t)$ para el sistema S. $=\cos(2t-1)$

PROBLEMAS BÁSICOS

1.21. Una señal continua $x(t)$ se muestra en la figura P1.21. Dibuje y marque cuidadosamente cada una de las siguientes señales:
(a) $x(t-1)$ **(b)** $x(2-t)$ **(c)** $x(2t+1)$
(d) $x(4 - \frac{t}{2})$ **(e)** $[x(t) + x(-t)]u(t)$ **(f)** $x(t)[\delta(t + \frac{3}{2}) - \delta(t - \frac{3}{2})]$

1.22. Una señal discreta se muestra en la figura P1.22. Dibuje y marque cuidadosamente cada una de las siguientes señales:
(a) $x[n-4]$ **(b)** $x[3-n]$ **(c)** $x[3n]$
(d) $x[3n+1]$ **(e)** $x[n]u[3-n]$ **(f)** $x[n-2]\delta[n-2]$
(g) $\frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$ **(h)** $x[(n-1)^2]$

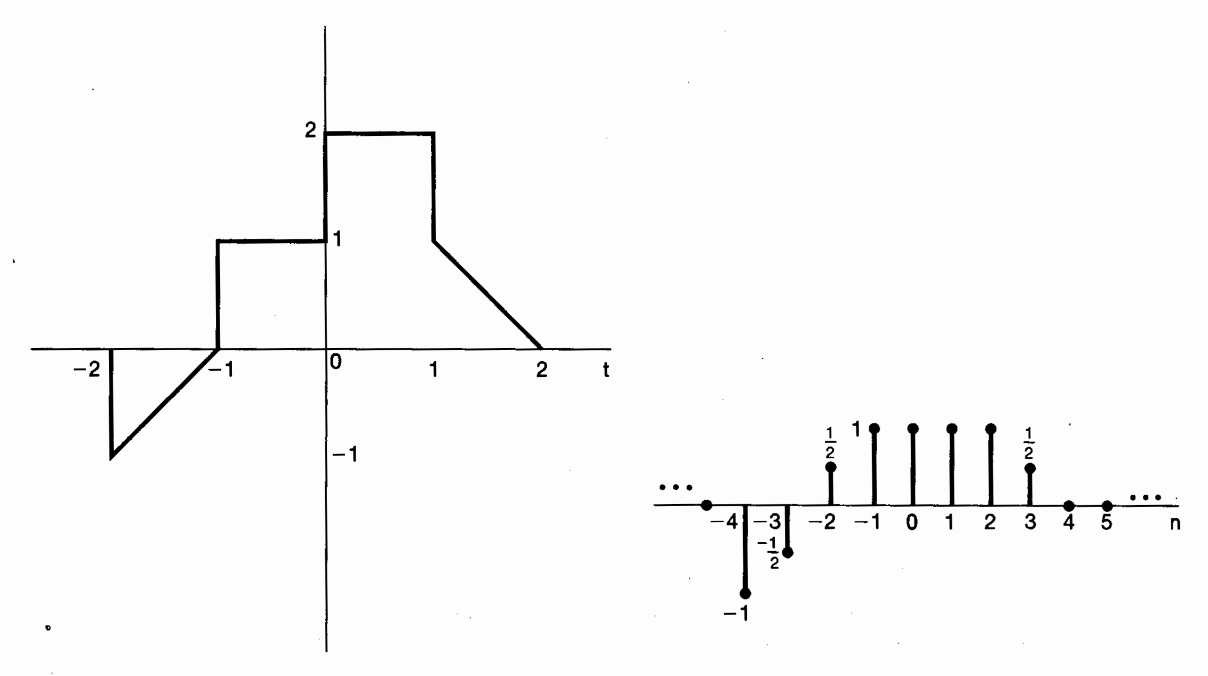


Figura P1.21

Figura P1.22

1.23. Determine y dibuje las partes par e impar de las señales ilustradas en la figura P1.23. Etiquete cuidadosamente los dibujos.

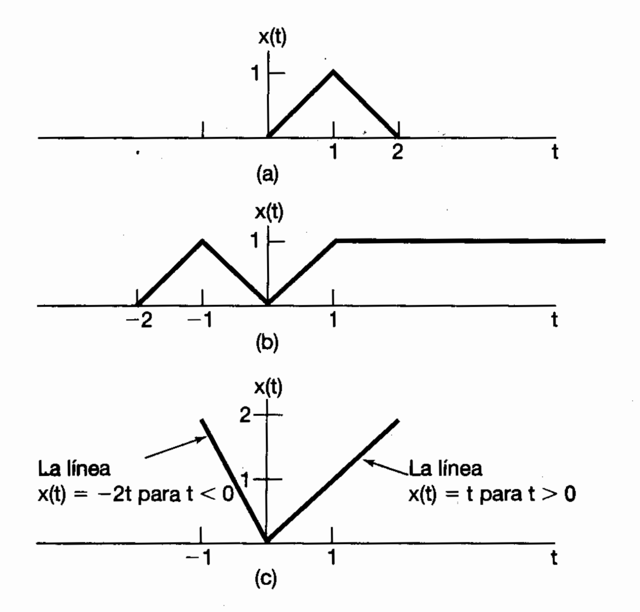
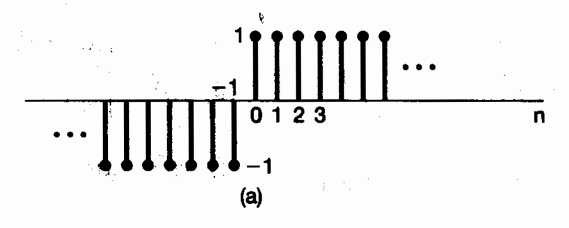
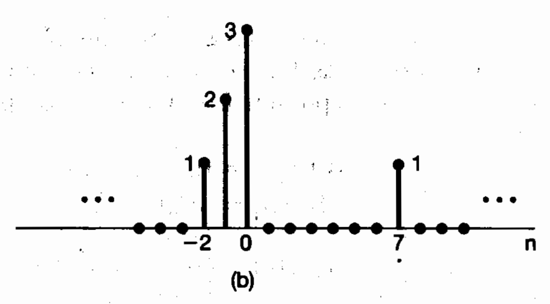


Figura P1.23

1.24. Determine y dibuje las partes par e impar de las señales mostradas en la figura P1.24. Etiquete cuidadosamente los dibujos.





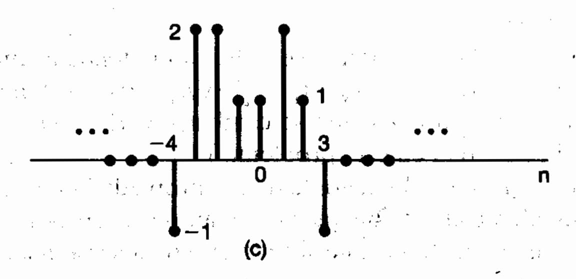


Figura P1.24

1.25. Determine si cada una de las siguientes señales continuas es periódica o no. Si la señal es periódica, determine su periodo fundamental.

(a) $x(t) = 3\cos(4t + \frac{\pi}{3})$ **(b)** $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$

(c) $x(t) = [\cos(2t - \frac{\pi}{3})]^2$ **(d)** $x(t) = \mathcal{E}v\{\cos(4\pi t)u(t)\}$

(e) $x(t) = \mathcal{E}v\{\text{sen}(4\pi t)u(t)\}$ **(f)** $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2t-n)}$

1.26. Determine si cada una de las siguientes señales discretas es periódica o no lo es. Si la señal es periódica, determine su periodo fundamental.

(a) $x[n] = \text{sen}(\frac{6\pi}{7}n + 1)$ **(b)** $x[n] = \cos(\frac{n}{8} - \pi)$ **(c)** $x[3 - n]$

(d) $x[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n)\cos(\frac{\pi}{4}n)$ **(e)** $x[n] = 2\cos(\frac{\pi}{4}n) + \text{sen}(\frac{\pi}{8}n) - 2\cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6})$

1.27. En este capítulo presentamos varias propiedades de los sistemas. En particular, un sistema puede ser o puede no ser

(1) Sin memoria
(2) Invariante en el tiempo
(3) Lineal
(4) Causal
(5) Estable

Determine, para cada uno de los siguientes sistemas continuo, cuál de estas propiedades se cumple y cuál no. Presente argumentos que justifiquen sus respuestas. En cada ejemplo, $y(t)$ denota la salida y $x(t)$ la entrada del sistema.

(a) $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$ **(b)** $y(t) = [\cos(3t)]x(t)$

(c) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$ **(d)** $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t-2), & t \geq 0 \end{cases}$

(e) $y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2), & x(t) \geq 0 \end{cases}$ **(f)** $y(t) = x(t/3)$

(g) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

1.28. Determine, para cada uno de los siguientes sistemas discretos, cuál de las propiedades enumeradas en el problemas 1.27 se cumple y cuál no se cumple. Ofrezca argumentos que justifiquen sus respuestas. En cada ejemplo, $y[n]$ denota la salida y $x[n]$ la entrada del sistema.

(a) $y[n] = x[-n]$ **(b)** $y[n] = x[n-2] - 2x[n-8]$

(c) $y[n] = nx[n]$ **(d)** $y[n] = \mathcal{E}v\{x[n-1]\}$

(e) $y[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n+1], & n \leq -1 \end{cases}$ **(f)** $y[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$

(g) $y[n] = x[4n+1]$

1.29. **(a)** Demuestre que el sistema discreto es aditivo, en donde la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ están relacionadas por $y[n] = \mathcal{R}e\{x[n]\}$. ¿Este sistema sigue siendo aditivo si su relación entrada-salida se cambia a $y[n] = \mathcal{R}e\{e^{j\pi n/4}x[n]\}$? (No considere a $x[n]$ como real en este problema.)

(b) En el texto, analizamos el hecho de que la propiedad de linealidad para un sistema es equivalente al sistema que posee tanto la propiedad de aditividad como la de homogeneidad. Determine si cada uno de los sistemas siguientes es aditivo y/u homogéneo. Justifique sus respuestas proporcionando una prueba para cada propiedad si se cumple, o un contraejemplo si no se cumple.

(i) $y(t) = \frac{1}{x(t)}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2$ (ii) $y(n) = \begin{cases} \frac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]}, & x[n-1] \neq 0 \\ 0, & x[n-1] = 0 \end{cases}$

1.30. Determine si cada uno de los siguientes sistemas es invertible. Si alguno lo es, construya el sistema inverso. Si no, encuentre dos señales de entrada al sistema que den la misma salida.

(a) $y(t) = x(t-4)$ **(b)** $y(t) = \cos[x(t)]$

(c) $y[n] = nx[n]$ **(d)** $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

(e) $y[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$ **(f)** $y[n] = x[n]x[n-1]$

(g) $y[n] = x[1-n]$ **(h)** $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau$

(i) $y[n] \sum_{k=-\infty}^{n}(\frac{1}{2})^{n-k}x[k]$ **(j)** $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

(k) $y(n) = \begin{cases} x[n+1], & n \geq 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$ **(l)** $y(t) = x(2t)$

(m) $y[n] = x[2n]$ **(n)** $y[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

1.31. En este problema ilustramos una de las consecuencias más importantes de las propiedades de linealidad y de invariancia en el tiempo. Específicamente, una vez que conocemos la respuesta de un sistema lineal o de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) a una sola entrada o las respuestas a varias entradas, podemos calcular de manera directa las respuestas a muchas otras señales de entrada. Gran parte del resto de este libro trata con una amplia explotación de este hecho

para desarrollar resultados y técnicas para el análisis y síntesis de los sistemas LTI.

(a) Considere un sistema LTI cuya respuesta a la señal $x_1(t)$ en la figura P1.31(a) sea la señal $y_1(t)$ ilustrada en la figura P1.31(b). Determine y dibuje cuidadosamente la respuesta del sistema a la entrada $x_2(t)$ dibujada en la figura P1.31(c).

(b) Determine y dibuje la respuesta del sistema considerado en la parte (a) para la entrada $x_3(t)$ mostrada en la figura P1.31(d).

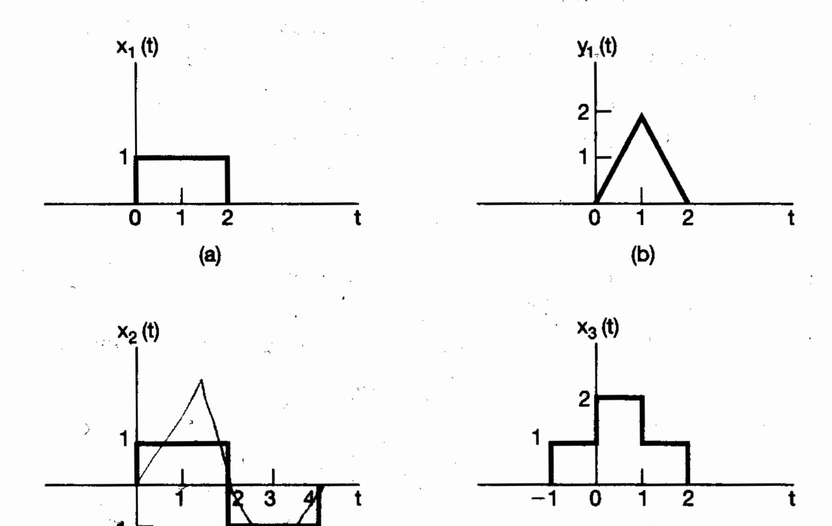


Figura P1.31

PROBLEMAS AVANZADOS

1.32. Sea $x(t)$ una señal continua, y sea

$$y_1(t) = x(2t) \text{ y } y_2(t) = x(t/2).$$

La señal $y_1(t)$ representa una versión acelerada de $x(t)$ en el sentido de que la duración de la señal disminuye a la mitad. De manera similar, $y_2(t)$ representa una versión más lenta de $x(t)$ en el sentido de que la duración de la señal se ha duplicado. Considere las siguientes afirmaciones:

(1) Si $x(t)$ es periódica, entonces $y_1(t)$ es periódica.
(2) Si $y_1(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.
(3) Si $x(t)$ es periódica, entonces $y_2(t)$ es periódica.
(4) Si $y_2(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.

Para cada afirmación, determine si es verdadera, y si lo es, determine la relación entre los periodos fundamentales de las dos señales consideradas en el enunciado. Si no es verdadera, haga un contraejemplo de ella.

1.33. Sea $x[n]$ una señal discreta, y sea

$$y_1[n] = x[2n] \text{ y } y_2[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}.$$

Las señales $y_1[n]$ y $y_2[n]$ representan respectivamente en algún sentido las versiones acelerada y retardada de $x[n]$. Sin embargo, se debe notar que las nociones de tiempo discreto de la aceleración y el retardo tienen sutiles diferencias con respecto a sus contrapartes continuas. Considere las siguientes afirmaciones:
(1) Si $x[n]$ es periódica, entonces $y_1[n]$ es periódica.
(2) Si $y_1[n]$ es periódica, entonces $x[n]$ es periódica.
(3) Si $x[n]$ es periódica, entonces $y_2[n]$ es periódica.
(4) Si $y_2[n]$ es periódica, entonces $x[n]$ es periódica.
Para cada afirmación, determine si es verdadera, y si lo es, determine la relación entre los periodos fundamentales de las dos señales consideradas en el enunciado. Si no es verdadera, haga un contraejemplo de la afirmación.

1.34. En este problema, exploramos varias de las propiedades de las señales par e impar.

(a) Demuestre que si $x[n]$ es una señal impar, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 0.$$

(b) Demuestre que si $x_1[n]$ es una señal impar y $x_2[n]$ es una señal par, entonces $x_1[n]x_2[n]$ es una señal impar.

(c) Sea $x[n]$ una señal arbitraria con partes par e impar denotadas por

$$x_e[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\}$$

y

$$x_o[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\}.$$

Demuestre que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n].$$

(d) Aunque las partes (a)-(c) se han establecido en términos de las señales discretas, las propiedades análogas también son válidas para las señales continuas. Para demostrar esto, muestre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)dt,$$

donde $x_e(t)$ y $x_o(t)$ son, respectivamente, las partes par e impar de $x(t)$.

1.35. Considere la señal periódica exponencial discreta

$$x[n] = e^{jm(2\pi/N)n}.$$

Demuestre que el periodo fundamental de esta señal es

$$N_0 = N/\gcd(m, N),$$

donde $\gcd(m, N)$ es el *máximo común divisor* de m y N, esto es, el entero más grande que divide tanto a m como a N un número entero de veces. Por ejemplo,

$$\gcd(2, 3) = 1, \gcd(2, 4) = 2, \gcd(8, 12) = 4.$$

Observe que $N_0 = N$ si m y N no tienen factores en común.

1.36. Sea $x(t)$ la señal continua exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

con frecuencia fundamental ω_0 y periodo fundamental $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Considere la señal discreta obtenida al tomar muestras de $x(t)$ igualmente espaciadas, esto es,

$$x[n] = x(nT) = e^{j\omega_0 nT}.$$

(a) Demuestre que si $x[n]$ es periódica si y sólo si T/T_0 es un número racional, es decir, si y sólo si algún múltiplo del intervalo de muestreo *es exactamente igual* a un múltiplo del periodo $x(t)$.

(b) Suponga que $x[n]$ es periódica, esto es, que

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{q}, \tag{P1.36-1}$$

donde p y q son enteros. ¿Cuál es el periodo fundamental y cuál la frecuencia fundamental de $x[n]$? Exprese la frecuencia fundamental como una fracción de $\omega_0 T$.

(c) Suponiendo nuevamente que T/T_0 satisface la ecuación (P1.36-1), determine con precisión cuántos periodos de $x(t)$ se necesitan para obtener las muestras que forman un solo periodo de $x[n]$.

1.37. Un concepto importante en muchas aplicaciones de comunicaciones es la *correlación* entre dos señales. En los problemas al final de capítulo 2 tendremos más que decir acerca de este tema y proporcionaremos alguna indicación de cómo se usa en la práctica. Por ahora nos conformamos con una breve introducción a las funciones de correlación y algunas de sus propiedades.

Sean $x(t)$ y $y(t)$ dos señales; entonces la *función de correlación* se define como

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau.$$

La función $\phi_{xx}(t)$ se conoce como la *función de autocorrelación* de la señal $x(t)$, mientras que a $\phi_{xy}(t)$ a menudo se le llama *función de correlación cruzada.*

(a) ¿Cuál es la relación entre $\phi_{xy}(t)$ y $\phi_{yx}(t)$?

(b) Calcule la parte impar de $\phi_{xx}(t)$.

(c) Suponga que $y(t) = x(t+T)$. Exprese $\phi_{xy}(t)$ y $\phi_{yy}(t)$ en términos de $\phi_{xx}(t)$.

1.38. En este problema examinamos algunas propiedades de la función impulso unitario.

(a) Demuestre que

$$\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t).$$

Sugerencia: Examine $\delta_\Delta(t)$. (Vea la figura 1.34.)

(b) En la sección 1.4 definimos el impulso unitario continuo como el límite de la señal $\delta_\Delta(t)$. Con mayor precisión, definimos varias de las *propiedades* de $\delta(t)$ mediante el examen de las propiedades correspondientes de $\delta_\Delta(t)$. Por ejemplo,

$$u_\Delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta_\Delta(\tau)d\tau$$

ya que la señal converge al escalón unitario

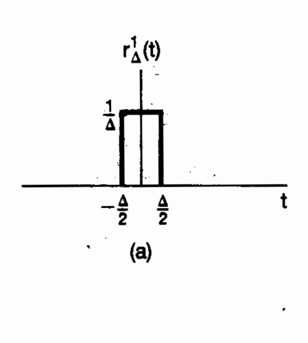
$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_{\Delta}(t), \tag{P1.38-1}$$

interpretaríamos $\delta(t)$ mediante la ecuación

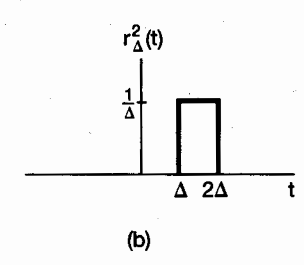
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

o viendo a $\delta(t)$ como la derivada formal de $u(t)$.

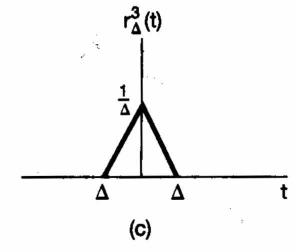
Este tipo de análisis es importante, ya que estamos tratando de definir $\delta(t)$ a través de sus propiedades en lugar de especificar su valor para cada t, lo cual no es posible. En el capítulo 2, proporcionamos una caracterización muy simple del comportamiento del impulso unitario que es extremadamente útil en el estudio de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Sin embargo, por ahora nos concentraremos en demostrar que el concepto importante en el uso del impulso unitario consiste en entender *cómo* se comporta éste. Para lograrlo, considere las seis señales representadas en la figura P1.38. Demuestre que



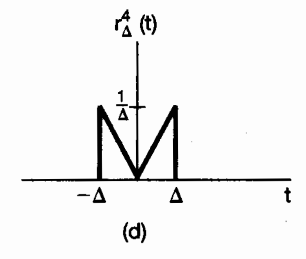
(a)



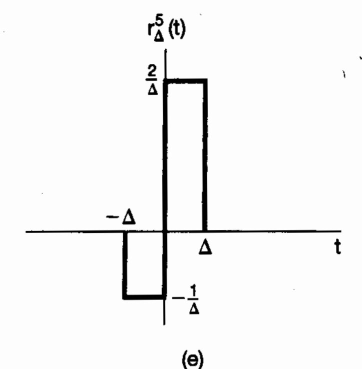
(b)



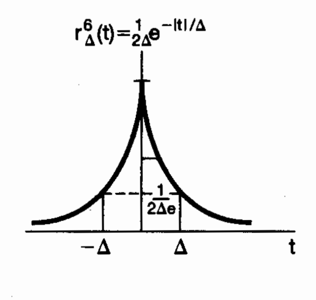
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura P1.38

cada una "se comporta como un impulso" conforme $\Delta \to 0$ en el sentido en que, si determinamos

$$u_\Delta^i(t) = \int_{-\infty}^{t} r_\Delta^i(\tau)d\tau,$$

entonces

$$\lim_{\Delta \to 0} u_\Delta^i(t) = u(t).$$

En cada caso, dibuje y etiquete cuidadosamente la señal $u_\Delta^i(t)$. Observe que

$$r_\Delta^2(0) = r_\Delta^4(0) = 0 \text{ para toda } \Delta.$$

Por tanto, no es suficiente con definir o pensar que $\delta(t)$ es cero para $t \neq 0$ e infinita para $t = 0$. Por el contrario, son propiedades como la ecuación (P1.38-1) las que definen el impulso. En la sección 2.5 definiremos la clase completa de señales conocidas como *funciones singulares*, las cuales están relacionadas con el impulso unitario y también están definidas en términos de sus propiedades en lugar de sus valores.

1.39. El papel que juegan $u(t)$, $\delta(t)$ y otras funciones singulares en el estudio de los sistemas lineales invariantes en el tiempo es el de una *idealización* de un fenómeno físico y, como veremos más adelante, el uso de estas idealizaciones nos permite obtener una representación de enorme importancia pero muy sencilla de dichos sistemas. Sin embargo, al usar las funciones singulares, necesitamos ser cuidadosos. En particular, debemos recordar que son idealizaciones y, entonces, siempre que realicemos un cálculo usándolas, estaremos considerando implícitamente que este cálculo representa una descripción exacta del comportamiento de las señales que se está buscando idealizar. Para ilustrar lo anterior, considere la ecuación

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t). \tag{P1.39-1}$$

Esta ecuación se basa en la observación de que

$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t). \tag{P1.39-2}$$

Tomando el límite de esta relación se produce entonces una relación idealizada dada por la ecuación (P1.39-1). Sin embargo, un examen más cuidadoso de nuestra deducción de la ecuación (P1.39-2) muestra que esa ecuación realmente tiene sentido sólo si $x(t)$ es continua en $t = 0$. Si no lo es, entonces no se tendrá $x(t) \approx x(0)$ para t pequeñas.

Para hacer este punto más claro, considere la señal escalón unitario $u(t)$. Recordemos de la ecuación (1.70) que $u(t) = 0$ para $t < 0$ y $u(t) = 1$ para $t > 0$, pero su valor en $t = 0$ no está definido. [Observe, por ejemplo, que $u_\Delta(0) = 0$ para toda Δ, mientras que $u_\Delta^1(0) = \frac{1}{2}$ (tomado del problema 1.38(b)).] El hecho de que $u(0)$ no esté definida no es de particular importancia, siempre y cuando los cálculos que realicemos usando $u(t)$ no dependan de una selección específica de $u(0)$. Por ejemplo, si $f(t)$ es una señal que sea continua en $t = 0$, entonces el valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

no depende de una selección de $u(0)$. Por otro lado, el hecho de que $u(0)$ no esté definida es importante, pues significa que ciertos cálculos que involucran funciones singulares no están definidas. Considere el tratar de definir un valor para el producto $u(t)\delta(t)$.

Para ver que esto *no se puede* definir, demuestre que

$$\lim_{\Delta\to 0}\,[u_\Delta(t)\delta(t)] = 0,$$

pero

$$\lim_{\Delta\to 0}\,[u_\Delta(t)\delta_\Delta(t)] = \frac{1}{2}\delta(t).$$

En general, podemos definir el producto de dos señales sin ninguna dificultad en tanto las señales no contengan funciones singulares (discontinuidades, impulsos o las otras singularidades presentadas en la sección 2.5) cuyas posiciones coincidan. Cuando las posiciones coinciden, el producto es indefinido. Como un ejemplo, muestre que la señal

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

es idéntica a $u(t)$; es decir, es 0 para $t < 0$, es igual a 1 para $t > 0$ y es indefinida para $t = 0$.

1.40. **(a)** Muestre que si un sistema es *ya sea* aditivo u homogéneo, tiene la propiedad de que si la entrada es idéntica a cero, entonces la salida también es idéntica a cero.

(b) Determine un sistema (ya sea en continuo o discreto) que *no sea* aditivo *ni* homogéneo pero que tenga una salida cero si la entrada también es cero.

(c) A partir de (a), ¿puede concluir que si la entrada a un sistema lineal es cero entre los tiempos t_1 y t_2 en tiempo continuo, o entre los tiempos n_1 y n_2 en tiempo discreto, entonces la salida también debe ser cero entre esos mismos tiempos? Explique su respuesta.

1.41. Considere un sistema S con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ relacionadas mediante

$$y[n] = x[n]\{g[n] + g[n-1]\}.$$

(a) Si $g[n] = 1$ para toda n, demuestre que S es invariante en el tiempo.

(b) Si $g[n] = n$, demuestre que S no es invariante en el tiempo.

(c) Si $g[n] = 1 + (-1)^n$, demuestre que S es invariante en el tiempo.

1.42. **(a)** ¿Es verdadero o falso el siguiente enunciado?

La interconexión en serie de dos sistemas lineales e invariantes en el tiempo es también un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Justifique su respuesta.

(b) ¿Es verdadero o falso el siguiente enunciado?

La interconexión en serie de dos sistemas no lineales es también un sistema no lineal.

Justifique su respuesta.

(c) Considere tres sistemas con las siguientes relaciones entrada-salida:

$$\text{Sistema 1:} \qquad y[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases},$$

Sistema 2: $y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{4}x[n-2]$,

Sistema 3: $y[n] = x[2n]$.

Suponga que estos sistemas están conectados en serie como se muestra en la figura P1.42. Determine la relación entrada-salida para el sistema total interconectado. ¿El sistema es lineal? ¿Es invariante en el tiempo?

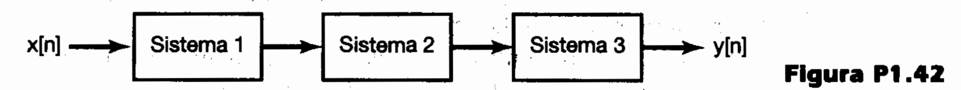


Figura P1.42

1.43. **(a)** Considere un sistema invariante en el tiempo con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. Demuestre que si $x(t)$ es periódica con periodo T, entonces también lo es $y(t)$. Demuestre que el resultado análogo también se cumple en tiempo discreto.

(b) Dé un ejemplo de un sistema invariante en el tiempo y una señal $x(t)$ de entrada no periódica tal que la correspondiente salida $y(t)$ sea periódica.

1.44. **(a)** Demuestre que la causalidad para un sistema lineal continuo es equivalente a la siguiente afirmación:

Para cualquier tiempo t_0 y cualquier entrada $x(t)$ tales que $x(t) = 0$ para $t < t_0$, la salida correspondiente $y(t)$ también debe ser cero para $t < t_0$.

Una afirmación análoga se puede hacer para un sistema lineal discreto.

(b) Encuentre un sistema no lineal que satisfaga la condición anterior pero que no sea causal.

(c) Encuentre un sistema no lineal que sea causal pero que no satisfaga la condición.

(d) Muestre que la invertibilidad para un sistema lineal discreto es equivalente a la siguiente afirmación:

La única entrada que produce $y[n] = 0$ para toda n es $x[n] = 0$ para toda n.

La afirmación análoga también es válida para un sistema lineal continuo.

(e) Encuentre un sistema no lineal que satisfaga la condición de la parte (d) pero que no sea invertible.

1.45. En el problema 1.37 presentamos el concepto de funciones de correlación. Con frecuencia es importante en la práctica calcular la función de correlación $\phi_{hx}(t)$ donde $h(t)$ es una señal fija dada, pero donde $x(t)$ puede ser cualquier señal dentro de una amplia variedad. En este caso, lo que se hace es diseñar un sistema S con entrada $x(t)$ y salida $\phi_{hx}(t)$.

(a) ¿S es lineal? ¿S es invariante en el tiempo? ¿S es causal? Explique sus respuestas.

(b) ¿Alguna de sus respuestas de la parte (a) cambia si tomamos como salida $\phi_{xh}(t)$ en lugar de $\phi_{hx}(t)$?

1.46. Considere el sistema retroalimentado de la figura P1.46. Suponga que $y[n] = 0$ para $n < 0$.

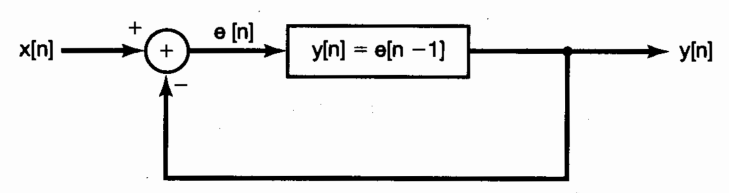
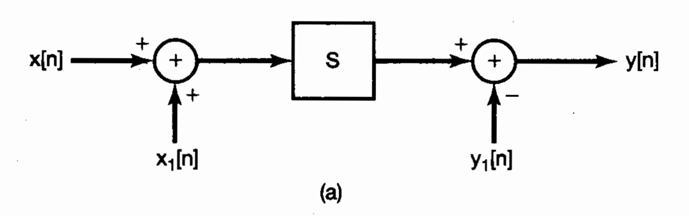


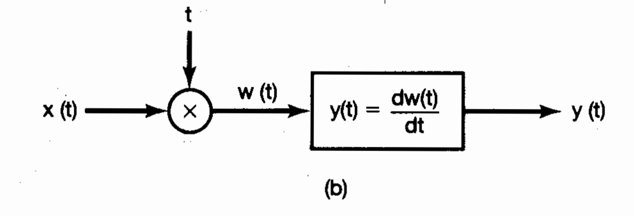
Figura P1.46

(a) Dibuje la salida cuando $x[n] = \delta[n]$.
(b) Dibuje la salida cuando $x[n] = u[n]$.

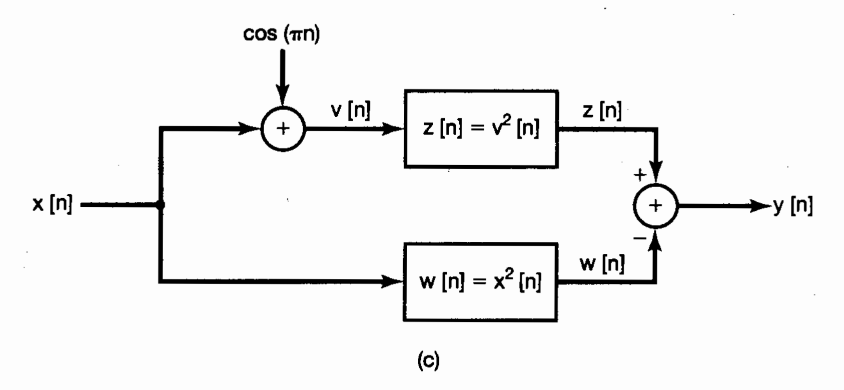
1.47. **(a)** Suponga que S denota un sistema incrementalmente lineal, y que $x_1[n]$ es una señal de entrada arbitraria a S con su correspondiente salida $y_1[n]$. Considere el sistema ilustrado en la figura P1.47(a). Muestre que si este sistema es lineal y que, de hecho, la relación entrada-salida total entre $x[n]$ y $y[n]$ no depende de la selección particular de $x_1[n]$.
(b) Use el resultado de la parte (a) para demostrar que S se puede representar en la forma mostrada en la figura 1.48.
(c) ¿Cuáles de los siguientes sistemas son incrementalmente lineales? Justifique su respuesta, y si un sistema lo es, identifique el sistema lineal L y la respuesta a entrada cero $y_0[n]$ o $y_0(t)$ para la representación del sistema como se muestra en la figura 1.48.
(i) $y[n] = n + x[n] + 2x[n + 4]$
(ii) $y[n] = \begin{cases} n/2, & n \text{ par} \\ (n-1)/2 + \sum_{k=-\infty}^{(n-1)/2} x[k], & n \text{ impar} \end{cases}$



(a)



(b)



(c)

Figura P1.47

(iii) $y[n] = \begin{cases} x[n] - x[n-1] + 3, & \text{si } x[0] \geq 0 \\ x[n] - x[n-1] - 3, & \text{si } x[0] < 0 \end{cases}$

(iv) El sistema descrito en la figura P1.47(b).

(v) El sistema descrito en la figura P1.47(c).

(d) Suponga que un sistema incrementalmente lineal en particular tiene una representación como la de la figura 1.48, en el cual se denota a L como el sistema lineal y a $y_0[n]$ como la respuesta a entrada cero. Muestre que S es invariante en el tiempo si y sólo si L es un sistema invariante en el tiempo y $y_0[n]$ es constante.

REVISIÓN MATEMÁTICA

El número complejo z se puede expresar de varias formas. La forma *cartesiana* o *rectangular* para z es

$$z = x + jy,$$

donde $j = \sqrt{-1}$ y x y y son números reales conocidos respectivamente como la *parte real* y la *parte imaginaria* de z. Como indicamos anteriormente, a menudo usaremos la notación

$$x = \mathcal{Re}\{z\}, y = \mathcal{Im}\{z\}.$$

El número complejo z también se puede representar en *forma polar* como

$$z = re^{j\theta},$$

donde $r > 0$ es la *magnitud* de z y θ es el *ángulo* o *fase* de z. Estas cantidades con frecuencia se escribirán como

$$r = |z|, \theta = \sphericalangle z.$$

La relación entre estas dos representaciones de números complejos puede determinarse ya sea a partir de la *relación de Euler*,

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta,$$

o graficando z en el plano complejo, como se muestra en la figura P1.48, en la cual los ejes de las coordenadas se encuentran $\mathcal{Re}\{z\}$ a lo largo del eje horizontal y $\mathcal{Im}\{z\}$ a lo largo del eje vertical. Con respecto a esta representación gráfica, x y y son las coordenadas cartesianas de z, y r y θ son sus coordenadas polares.

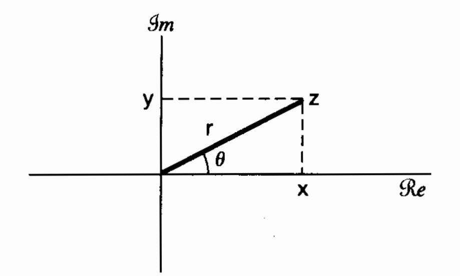


Figura P1.48

1.48. Sea z_0 un número complejo con coordenadas polares (r_0, θ_0) y coordenadas cartesianas (x_0, y_0). Determine las expresiones para las coordenadas cartesianas de los siguientes números complejos en términos de x_0 y y_0. Grafique los puntos z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 y z_5 en el plano complejo cuando $r_0 = 2$ y $\theta_0 = \pi/4$ y cuando $r_0 = 2$ y $\theta_0 = \pi/2$. Indique en sus gráficas las partes real e imaginaria de cada punto.

(a) $z_1 = r_0 e^{-j\theta_0}$ **(b)** $z_2 = r_0$ **(c)** $z_3 = r_0 e^{j(\theta_0+\pi)}$
(d) $z_4 = r_0 e^{j(-\theta_0+\pi)}$ **(e)** $z_5 = r_0 e^{j(\theta_0+2\pi)}$

1.49. Exprese cada uno de los siguientes números complejos en forma polar y grafíquelos en el plano complejo, indicando la magnitud y el ángulo de cada número:

(a) $1 + j\sqrt{3}$ **(b)** -5 **(c)** $-5 -5j$
(d) $3 + 4j$ **(e)** $(1 - j\sqrt{3})^3$ **(f)** $(1 + j)^5$
(g) $(\sqrt{3} + j^3)(1 - j)$ **(h)** $\frac{2-j(6/\sqrt{3})}{2+j(6/\sqrt{3})}$ **(i)** $\frac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{3}+j}$
(j) $j(1 + j)e^{j\pi/6}$ **(k)** $(\sqrt{3} + j)2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$ **(l)** $\frac{e^{j\pi/3}-1}{1+j\sqrt{3}}$

1.50. **(a)** Usando la relación de Euler o la figura P1.48, determine las expresiones para x y y en términos de r y θ.
(b) Determine las expresiones para r y θ en términos de x y y.
(c) Si tan sólo se nos dan r y tan θ, ¿podemos unívocamente determinar x y y? Explique su respuesta.

1.51. Usando la relación de Euler, obtenga las siguientes relaciones:
(a) $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$
(b) $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$
(c) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$
(d) $(\text{sen}\,\theta)(\text{sen}\,\phi) = \frac{1}{2}\cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}\cos(\theta + \phi)$
(e) $\text{sen}(\theta + \phi) = \text{sen}\,\theta\cos\phi + \cos\theta\,\text{sen}\,\phi$

1.52. Supongamos que z denota una variable compleja; esto es,

$$z = x + jy = re^{j\theta}.$$

El *conjugado complejo* de z es

$$z^* = x - jy = re^{-j\theta}.$$

Obtenga cada una de las siguientes relaciones, donde z, z_1 y z_2 son números complejos arbitrarios:
(a) $zz^* = r^2$
(b) $\frac{z}{z^*} = e^{j2\theta}$
(c) $z + z^* = 2\mathcal{Re}\{z\}$
(d) $z - z^* = 2j\mathcal{Im}\{z\}$
(e) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
(f) $(az_1z_2)^* = az_1^*z_2^*$, donde a es cualquier número real
(g) $(\frac{z_1}{z_2})^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$
(h) $\mathcal{Re}\{\frac{z_1}{z_2}\} = \frac{1}{2}[\frac{z_1z_2^*+z_1^*z_2}{z_2z_2^*}]$

1.53. Obtenga las siguientes relaciones, donde z, z_1 y z_2 son números complejos arbitrarios:
(a) $(e^z)^* = e^{z^*}$
(b) $z_1z_2^* + z_1^*z_2 = 2\mathcal{Re}\{z_1z_2^*\} = 2\mathcal{Re}\{z_1^*z_2\}$

(c) $|z| = |z^*|$
(d) $|z_1 z_2|^* = |z_1||z_2|$
(e) $\mathcal{R}e\{z\} \leq |z|,\ \mathcal{I}m\{z\} \leq |z|$
(f) $|z_1 z_2^* + z_1^* z_2| \leq 2|z_1 z_2|$
(g) $(|z_1| - |z_2|)^2 \leq |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

1.54. Las relaciones consideradas en este problema se usan en muchas ocasiones en todo el libro.

(a) Pruebe la validez de las siguientes expresiones:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N, & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}, & \text{para cualquier número complejo } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

A menudo a esto se le llama la *fórmula de suma finita.*

(b) Demuestre que si $|\alpha| < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}.$$

A menudo a esto se le llama la *fórmula de suma infinita.*

(c) Demuestre también que si $|\alpha| < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}.$$

(d) Evalúe

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n,$$

suponiendo que $|\alpha| < 1$.

1.55. Usando los resultados del problema 1.54, evalúe cada una de las siguientes sumas y exprese su respuesta en forma cartesiana (rectangular):

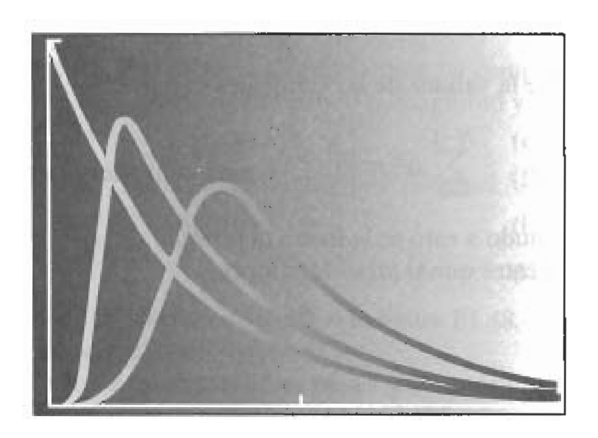
(a) $\sum_{n=0}^{9} e^{j\pi n/2}$ **(b)** $\sum_{n=-2}^{7} e^{j\pi n/2}$
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n e^{j\pi n/2}$ **(d)** $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{2})^n e^{j\pi n/2}$
(e) $\sum_{n=0}^{9} \cos(\frac{\pi}{2} n)$ **(f)** $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \cos(\frac{\pi}{2} n)$

1.56. Evalúe cada una de las siguientes integrales y exprese su respuesta en forma cartesiana (rectangular):

(a) $\int_0^4 e^{j\pi t/2} dt$ **(b)** $\int_0^6 e^{j\pi t/2} dt$
(c) $\int_2^8 e^{j\pi t/2} dt$ **(d)** $\int_0^{\infty} e^{-(1+j)t} dt$
(e) $\int_0^{\infty} e^{-t} \cos(t) dt$ **(f)** $\int_0^{\infty} e^{-2t}\, \text{sen}(3t) dt$

2

SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO



2.0 INTRODUCCIÓN

En la sección 1.6 presentamos y analizamos varias de las propiedades básicas de los sistemas. Dos de ellas, la linealidad y la invariancia en el tiempo, juegan un papel fundamental en el análisis de señales y sistemas por dos razones principales. La primera, muchos procesos físicos poseen estas propiedades por lo que pueden modelarse como sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI). Además, los sistemas LTI se pueden analizar con suficiente detalle para proporcionar tanto el conocimiento de sus propiedades como un conjunto de poderosas herramientas que conforman el núcleo del análisis de señales y sistemas.

Un objetivo esencial de este libro consiste en desarrollar la comprensión de estas propiedades y herramientas así como proporcionar una introducción a varias de las muy importantes aplicaciones en las cuales se usan estas herramientas. En este capítulo iniciamos el desarrollo mediante la deducción y examen de una representación fundamental y extremadamente útil para los sistemas LTI, así como con la introducción de una clase importante de estos sistemas.

Una de las principales razones por la que los sistemas LTI son accesibles al análisis es que todos estos sistemas poseen la propiedad de superposición descrita en la sección 1.6.6. Como consecuencia, si podemos representar la entrada a un sistema LTI en términos de una combinación lineal de un conjunto de señales básicas, entonces podemos utilizar la superposición para calcular la salida del sistema en términos de sus respuestas a estas señales básicas.

Como veremos en las siguientes secciones, una de las características importantes del impulso unitario, tanto discreto como continuo, es que las señales muy generales se pueden representar como la combinación lineal de impulsos retardados. Este hecho, junto con las propiedades de superposición e invariancia en el tiempo, nos permiten realizar una caracterización completa de cualquier sistema LTI en términos de su respuesta a un

impulso unitario. Esta representación, conocida como suma de convolución en el caso discreto, e integral de convolución en el continuo, proporciona una considerable comodidad analítica al tratar con sistemas LTI. Siguiendo con nuestro desarrollo de la suma de convolución y la integral de convolución, usamos estas caracterizaciones para examinar algunas otras propiedades de los sistemas LTI. Posteriormente, consideramos la clase de continuos descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, así como su contraparte discreta, la clase de sistemas descritos por ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes. Volveremos a examinar estas dos clases muy importantes de sistemas en diversas ocasiones en los capítulos subsecuentes. Por último, echaremos un vistazo nuevamente a la función del impulso unitario de tiempo continuo y a otras señales que están muy relacionadas con ésta, de modo que podamos proporcionar algún conocimiento adicional sobre estas señales idealizadas y, de manera particular, sobre su uso e interpretación en el contexto del análisis de sistemas LTI.

2.1 SISTEMAS LTI DISCRETOS: LA SUMA DE CONVOLUCIÓN

2.1.1 La representación de señales discretas en términos de los impulsos

La idea fundamental de visualizar cómo el impulso unitario discreto se puede usar para construir cualquier señal discreta consiste en pensar en una señal discreta como una secuencia de impulsos individuales. Para ver la forma en que esta idea intuitiva puede transformarse en una representación matemática, considere la señal $x[n]$ mostrada en la figura 2.1(a). En las partes restantes de esta figura hemos dibujado cinco secuencias de impulso unitario desplazadas en el tiempo y escaladas, donde el escalamiento de cada impulso es igual al valor de $x[n]$ en el instante particular en que ocurre la muestra unitaria. Por ejemplo,

$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases},$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases},$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1], & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}.$$

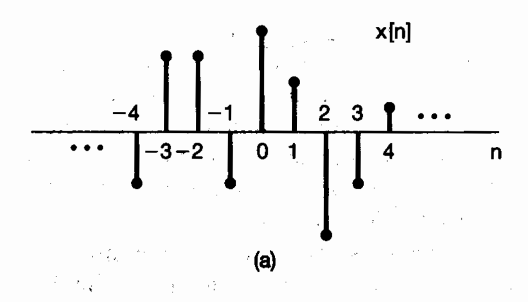
Por tanto, la suma de las cinco secuencias en la figura es igual a $x[n]$ para $-2 \leq n \leq 2$. De manera más general, si incluimos impulsos adicionales desplazados y escalados, podemos escribir

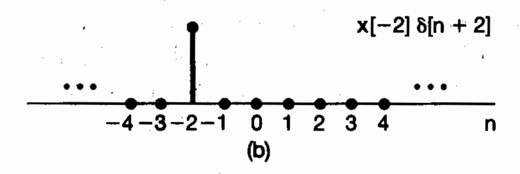
$$\begin{aligned} x[n] = \ldots &+ x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] \\ &+ x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \ldots. \end{aligned} \tag{2.1}$$

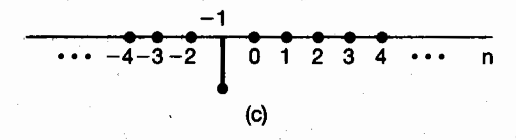
Para cualquier valor de n, sólo uno de los términos del miembro derecho de la ecuación (2.1) es diferente de cero, y el escalamiento asociado con ese término es precisamente $x[n]$. Al escribir esta sumatoria en una forma más compacta, tenemos

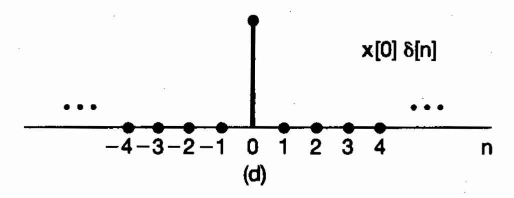
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]. \tag{2.2}$$

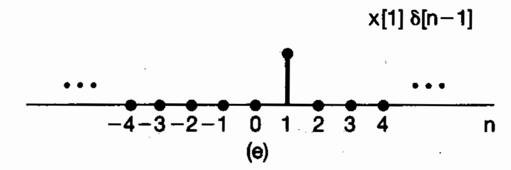
Esto corresponde a la representación de una secuencia arbitraria como una combinación lineal de impulsos unitarios desplazados $\delta[n-k]$, donde los pesos en esta combinación lineal son $x[k]$. Como un ejemplo, considere $x[n] = u[n]$, el escalón unitario. En este caso, puesto











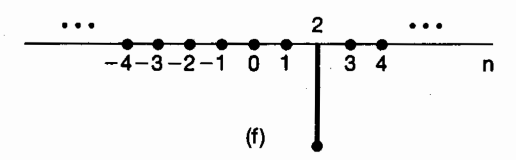


Figura 2.1 Descomposición de una señal discreta en una suma ponderada de impulsos desplazados.

que $u[k] = 0$ para $k < 0$ y $u[k] = 1$ para $k \geq 0$, la ecuación (2.2) se convierte en

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k],$$

la cual es idéntica a la expresión deducida en la sección 1.4. [Vea la ecuación (1.67).]

La ecuación (2.2) se llama *propiedad de selección* del impulso unitario discreto. Puesto que la secuencia $\delta[n-k]$ es diferente de cero sólo cuando $k = n$, la sumatoria del lado derecho de la ecuación (2.2) "selecciona" a través de la secuencia de valores de $x[k]$ y mantiene únicamente el valor que corresponde a $k = n$. En la siguiente subsección explotaremos esta representación de las señales discretas con el fin de desarrollar la representación de la suma de convolución para un sistema LTI discreto.

2.1.2 La respuesta al impulso unitario discreto y la representación de la suma de convolución de sistemas LTI

La importancia de la propiedad de selección de las ecuaciones (2.1) y (2.2) reside en el hecho de que representa a $x[n]$ como una superposición de versiones escaladas de un conjunto muy sencillo de funciones elementales, o sea, los impulsos unitarios desplazados $\delta[n-k]$, cada uno de los cuales es diferente de cero (con valor 1) en un solo punto en el tiempo, especificado por el correspondiente valor de k. La respuesta de un sistema lineal a $x[n]$ será la superposición de las respuestas escaladas del sistema a cada uno de estos impulsos desplazados. Además, la propiedad de invariancia en el tiempo nos dice que las respuestas de un sistema invariante en el tiempo a los impulsos unitarios desplazados en el tiempo son simplemente versiones desplazadas en el tiempo una de otra. La representación de la suma de convolución para sistemas discretos que son *tanto* lineales *como* invariantes en el tiempo resulta de poner juntos estos dos hechos básicos.

De manera más específica, considere la respuesta de un sistema lineal (pero posiblemente variante en el tiempo) a una entrada arbitraria $x[n]$. Podemos representar la entrada mediante la ecuación (2.2) como una combinación lineal de impulsos unitarios desplazados. Designemos a $h_k[n]$ como la respuesta del sistema lineal al impulso unitario desplazado $\delta[n-k]$. Entonces, a partir de la propiedad de superposición de un sistema lineal [ecuaciones (1.123) y (1.124)], la respuesta $y[n]$ del sistema lineal a la entrada $x[n]$ en la ecuación (2.2) es simplemente la combinación lineal ponderada de estas respuestas básicas. Es decir, con la entrada $x[n]$ a un sistema lineal expresado en la forma de la ecuación (2.2), la salida $y[n]$ se expresa como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]. \tag{2.3}$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación (2.3), si conocemos la respuesta de un sistema lineal al conjunto de impulsos unitarios desplazados, podemos construir la respuesta a una entrada arbitraria. Una interpretación de la ecuación (2.3) se ilustra en la figura 2.2. La señal $x[n]$ se aplica como la entrada a un sistema lineal cuyas respuestas $h_{-1}[n]$, $h_0[n]$ y $h_1[n]$ a las señales $\delta[n+1]$, $\delta[n]$ y $\delta[n-1]$, respectivamente, están representadas en la figura 2.2(b). Ya que $x[n]$ se puede escribir como una combinación lineal de $\delta[n+1]$, $\delta[n]$ y $\delta[n-1]$, la superposición nos permite escribir la respuesta a $x[n]$ como una combinación lineal de respuestas a impulsos individuales desplazados. Los impulsos individuales desplazados y escalados que constituyen $x[n]$ se ilustran en el lado izquierdo de la figura 2.2(c), en tanto que las respuestas a estas señales componentes se presentan del lado derecho. En la figura 2.2(d) hemos dibujado la entrada real $x[n]$, la cual es la suma

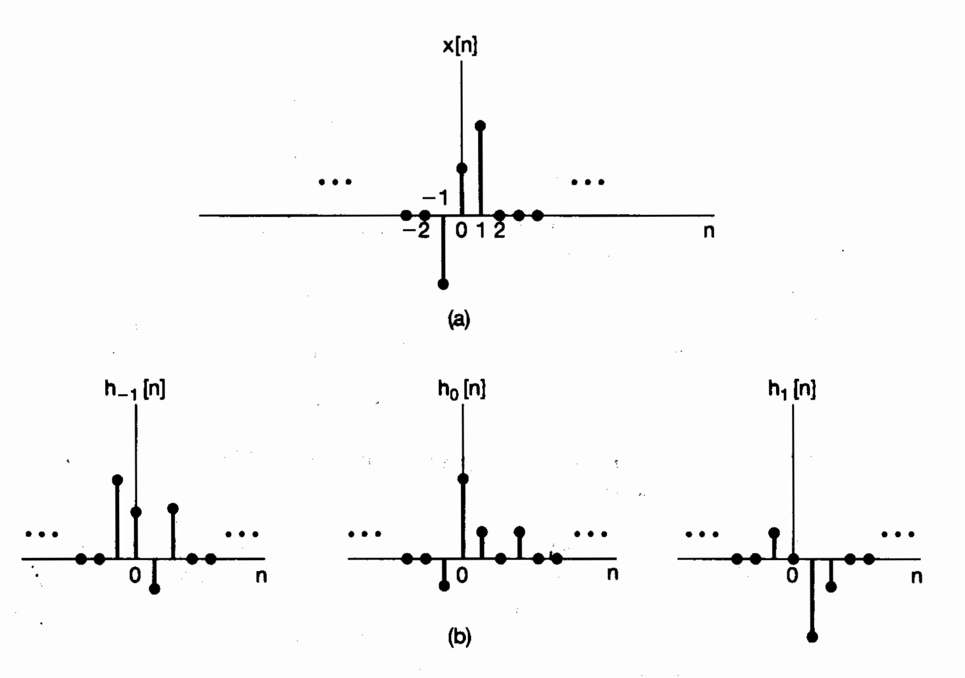


Figura 2.2 Interpretación gráfica de la respuesta de un sistema lineal discreto expresado en la ecuación (2.3).

de los componentes del lado izquierdo de la figura 2.2(c) con la salida real $y[n]$, la que, por superposición, es la suma de los componentes del lado derecho de la figura 2.2(c). De este modo, la respuesta al tiempo n de un sistema lineal, es de manera simple, la superposición de las respuestas debidas al valor de entrada en cada punto en el tiempo.

En general, por supuesto, las respuestas $h_k[n]$ no necesitan estar relacionadas una con otra para diferentes valores de k. Sin embargo, si el sistema lineal también es *invariante en el tiempo*, entonces estas respuestas a impulsos unitarios desplazados en el tiempo son todas versiones desplazadas en el tiempo unas de otras. Específicamente, ya que $\delta[n-k]$ es una versión desplazada en tiempo de $\delta[n]$, la respuesta $h_k[n]$ es una versión desplazada en tiempo de $h_0[n]$; es decir,

$$h_k[n] = h_0[n-k]. \tag{2.4}$$

Para facilitar la notación, eliminaremos el subíndice en $h_0[n]$ y definiremos la *respuesta al impulso (muestra) unitario*

$$h[n] = h_0[n]. \tag{2.5}$$

Esto es, $h[n]$ es la salida del sistema LTI cuando $\delta[n]$ es la entrada. Entonces, para un sistema LTI, la ecuación (2.3) se vuelve

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k].} \tag{2.6}$$

Este resultado se conoce como la *suma de convolución* o *suma de superposición*, y a la operación del miembro derecho de la ecuación (2.6) se le llama *convolución* de las secuencias $x[n]$ y $h[n]$. Representaremos la operación de convolución de manera simbólica como

$$y[n] = x[n] * h[n]. \tag{2.7}$$

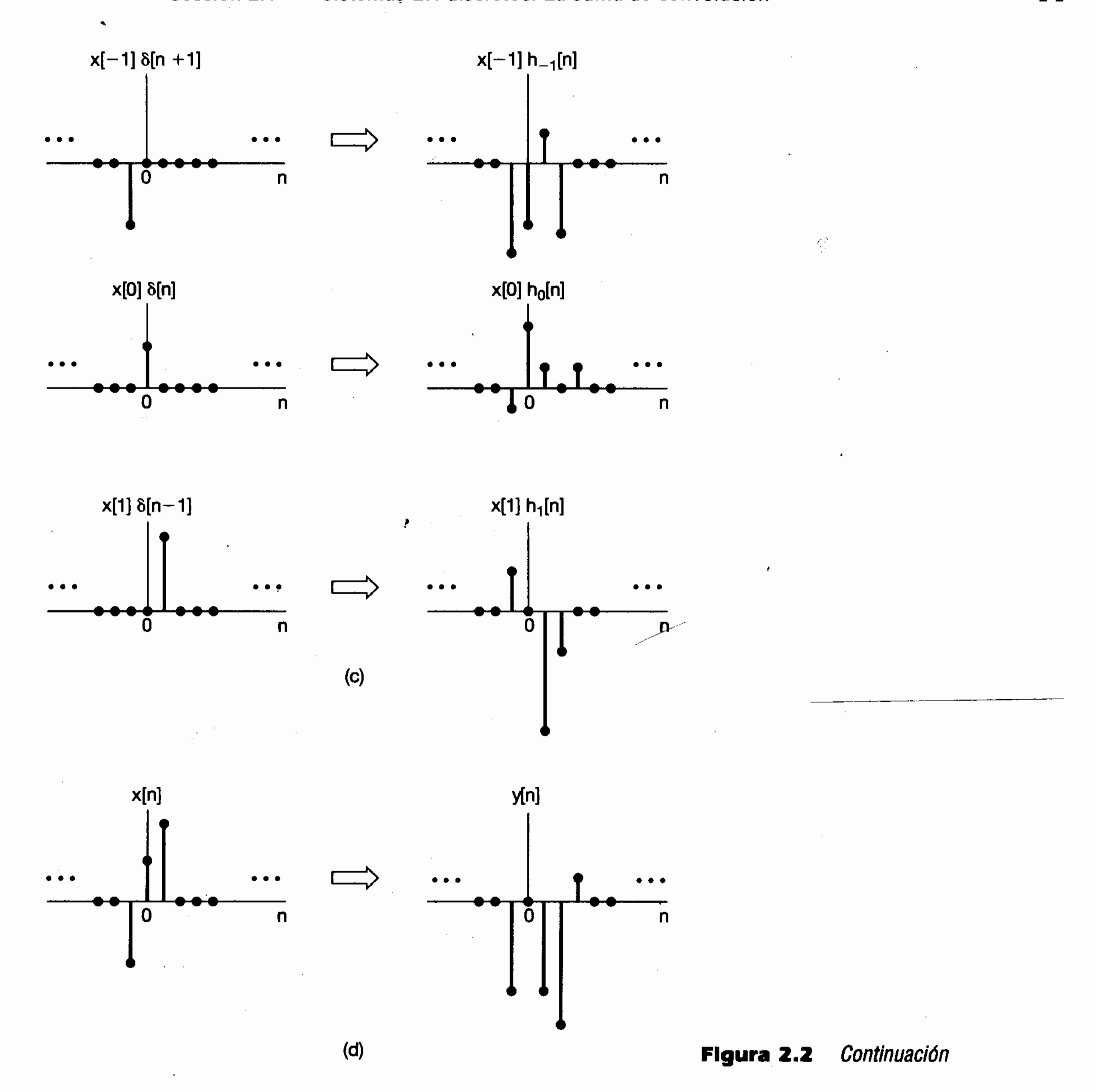


Figura 2.2 *Continuación*

Note que la ecuación (2.6) expresa la respuesta de un sistema LTI a una entrada arbitraria en términos de la respuesta del sistema al impulso unitario. De aquí se desprende que un sistema LTI se caracteriza completamente por su respuesta a una sola señal, es decir, su respuesta al impulso unitario.

La interpretación de la ecuación (2.6) es similar a la que dimos para la ecuación (2.3), donde, en el caso de un sistema LTI, la respuesta debida a la entrada $x[k]$ aplicada en el tiempo k es $x[k]h[n-k]$; es decir, es una versión desplazada y escalada (un "eco") de $h[n]$. Al igual que antes, la salida real es la superposición de todas estas respuestas.

Ejemplo 2.1

Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ y entrada $x[n]$, como se ilustra en la figura 2.3(a). Para este caso, ya que sólo $x[0]$ y $x[1]$ son diferentes de cero, la ecuación (2.6) se simplifica hasta la expresión

$$y[n] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] = 0.5h[n] + 2h[n-1]. \quad (2.8)$$

Las secuencias $0.5h[n]$ y $2h[n-1]$ son los dos ecos de la respuesta al impulso necesarios para la superposición involucrada en la generación de $y[n]$. Estos ecos se presentan en la figura 2.3(b). Sumando los dos ecos para cada valor de n obtenemos $y[n]$, la cual se muestra en la figura 2.3(c).

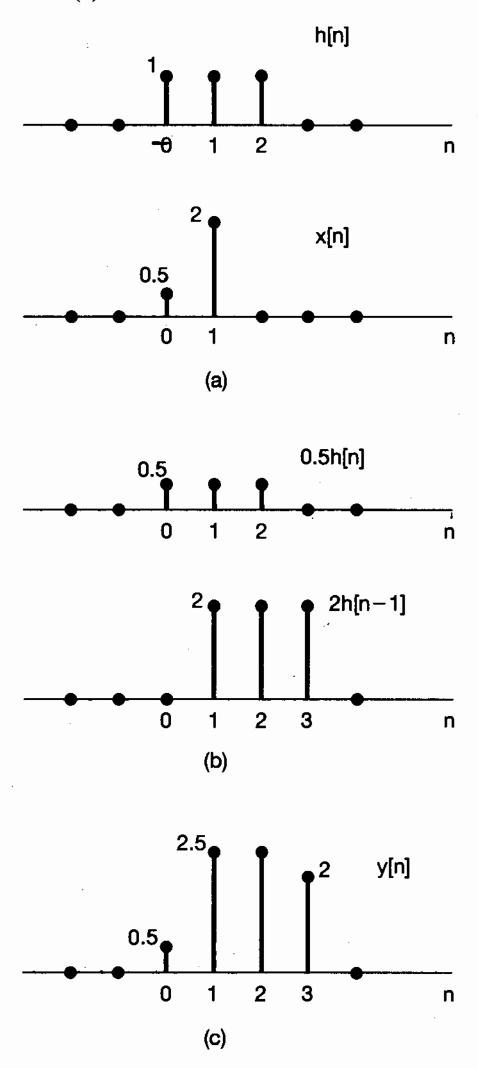


Figura 2.3 (a) La respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema LTI y una entrada $x[n]$ al sistema; (b) las respuestas o "ecos" $0.5h[n]$ y $2h[n-1]$, para los valores diferentes de cero de la entrada, esto es, $x[0] = 0.5$ y $x[1] = 2$; (c) la respuesta total $y[n]$, la cual es la suma de los ecos en (b).

Si tomamos en cuenta el efecto de la suma de superposición en cada muestra de salida individual, obtenemos otro método muy útil de visualizar el cálculo de $y[n]$ mediante la suma de convolución. En particular, considere la evaluación del valor de salida en algún tiempo específico n. Una manera particularmente conveniente de presentar este cálculo de forma gráfica se inicia con las dos señales $x[k]$ y $h[n-k]$ vistas como funciones de k. Multiplicando estas dos funciones, obtenemos una secuencia $g[k] = x[k]h[n-k]$, la cual, en cada tiempo k, se ve que representa la contribución de $x[k]$ a la salida en el tiempo n. Concluimos así que el sumar todas las muestras en la secuencia $g[k]$ produce el valor de salida en el tiempo seleccionado n. De este modo, para calcular $y[n]$ para todos los valores de n es necesario repetir este procedimiento para cada valor de n. Afortunadamente, cambiar el valor de n tiene una interpretación gráfica muy sencilla para las dos señales $x[k]$ y $h[n-k]$, vistas como funciones de k. Los siguientes ejemplos muestran esto, así como el uso del punto de vista antes mencionado al evaluar las sumas de convolución.

Ejemplo 2.2

Consideremos de nuevo el problema de convolución presentado en el ejemplo 2.1. La secuencia $x[k]$ se muestra en la figura 2.4(a), en tanto que la secuencia $h[n-k]$, vista como una función de k y con n fija, se muestra en la figura 2.4(b) para diferentes valores de n. Al dibujar estas secuencias, nos hemos valido del hecho de que $h[n-k]$ (vista como una función de k con n fija) es una versión invertida en el tiempo y desplazada de la respuesta al impulso $h[k]$. En particular, conforme k se incrementa, el argumento $n-k$ disminuye, explicando así la necesidad de realizar una inversión en el tiempo de $h[k]$. Si sabemos esto, entonces, para dibujar la señal $h[n-k]$, sólo necesitamos determinar su valor para algún valor particular de k. Por ejemplo, el argumento $n-k$ será igual a 0 en el valor $k = n$. De este modo, si dibujamos la señal $h[-k]$, podemos obtener la señal $h[n-k]$ simplemente desplazando a la derecha (por n) si n es positiva o a la izquierda si n es negativa. El resultado para nuestro ejemplo, para valores de $n < 0, n = 0, 1, 2, 3$ y $n > 3$, se muestra en la figura 2.4(b).

Habiendo dibujado $x[k]$ y $h[n-k]$ para cualquier valor particular de n, multiplicamos estas dos señales y sumamos todos los valores de k. En el caso de nuestro ejemplo, para $n < 0$, vemos de la figura 2.4 que $x[k]h[n-k] = 0$ para toda k, ya que los valores diferentes de cero de $x[k]$ y $h[n-k]$ no se traslapan. En consecuencia, $y[n] = 0$ para $n < 0$. Para $n = 0$, puesto que el producto de la secuencia $x[k]$ con la secuencia $h[0-k]$ tiene sólo una muestra diferente de cero cuyo valor es 0.5, concluimos que

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k] = 0.5. \tag{2.9}$$

El producto de la secuencia $x[k]$ con la secuencia $h[1-k]$ tiene dos muestras diferentes de cero, las cuales se pueden sumar para obtener

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = 0.5 + 2.0 = 2.5. \tag{2.10}$$

De manera similar,

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = 0.5 + 2.0 = 2.5, \tag{2.11}$$

y

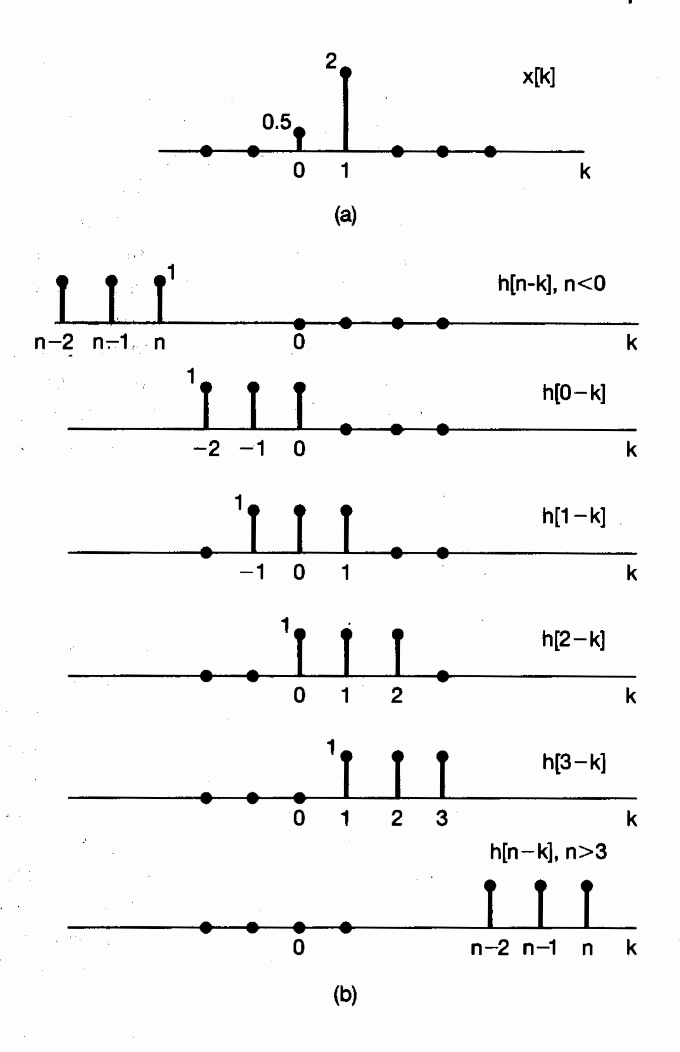


Figura 2.4 Interpretación de la ecuación (2.6) para las señales $h[n]$ y $x[n]$ en la figura 2.3: (a) la señal $x[k]$, y (b) la señal $h[n-k]$ como una función de k con n fijo) para diversos valores de n ($n<0$; $n=0, 1, 2, 3$; $n>3$). Cada señal se obtiene mediante el reflejo y el corrimiento de la respuesta al impulso unitario $h[k]$. La respuesta $y[n]$ para cada valor de n se obtiene multiplicando las señales $x[k]$ y $h[n-k]$ en (b) y (c) y sumando después los productos sobre todos los valores de k. El cálculo de este ejemplo se detalla en el ejemplo 2.2.

$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = 2.0. \tag{2.12}$$

Finalmente, para $n > 3$, el producto $x[k]h[n-k]$ es cero para toda k, a partir de lo cual concluimos que $y[n] = 0$ para $n > 3$. Los valores de salida resultantes concuerdan con los obtenidos en el ejemplo 2.1.

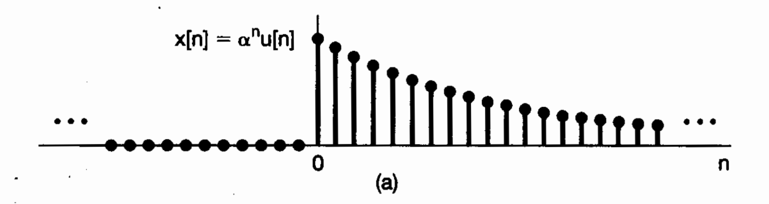
Ejemplo 2.3

Considere una entrada $x[n]$ y una respuesta al impulso unitario $h[n]$ dada por

$$x[n] = \alpha^n u[n],$$
$$h[n] = u[n],$$

con $0 < \alpha < 1$. Estas señales se ilustran en la figura 2.5. Además, para ayudarnos a visualizar y calcular la convolución de las señales, en la figura 2.6 hemos dibujado la señal $x[k]$ seguida por $h[-k]$, $h[-1-k]$ y $h[1-k]$ (es decir, $h[n-k]$ para $n = 0, -1$ y $+1$) y, finalmente, $h[n-k]$ para un valor positivo arbitrario de n y un valor negativo arbitrario de n. De esta figura podemos observar que, para $n < 0$, no hay traslape entre puntos diferentes de cero en $x[k]$ y $h[n-k]$. Entonces, para $n < 0$, $x[k]h[n-k] = 0$ para todos los valores de k, y en consecuencia, de la ecuación (2.6) vemos que $y[n] = 0, n < 0$. Para $n \geq 0$,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$



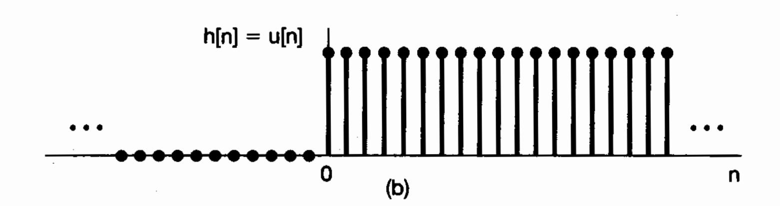


Figura 2.5 Las señales $x[n]$ y $h[n]$ del ejemplo 2.3.

Así, para $n \geq 0$,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k,$$

y usando el resultado del problema 1.54 se puede escribir como

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \quad \text{para } n \geq 0. \tag{2.13}$$

Entonces, para toda n,

$$y[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n].$$

La señal $y[n]$ está representada en la figura 2.7.

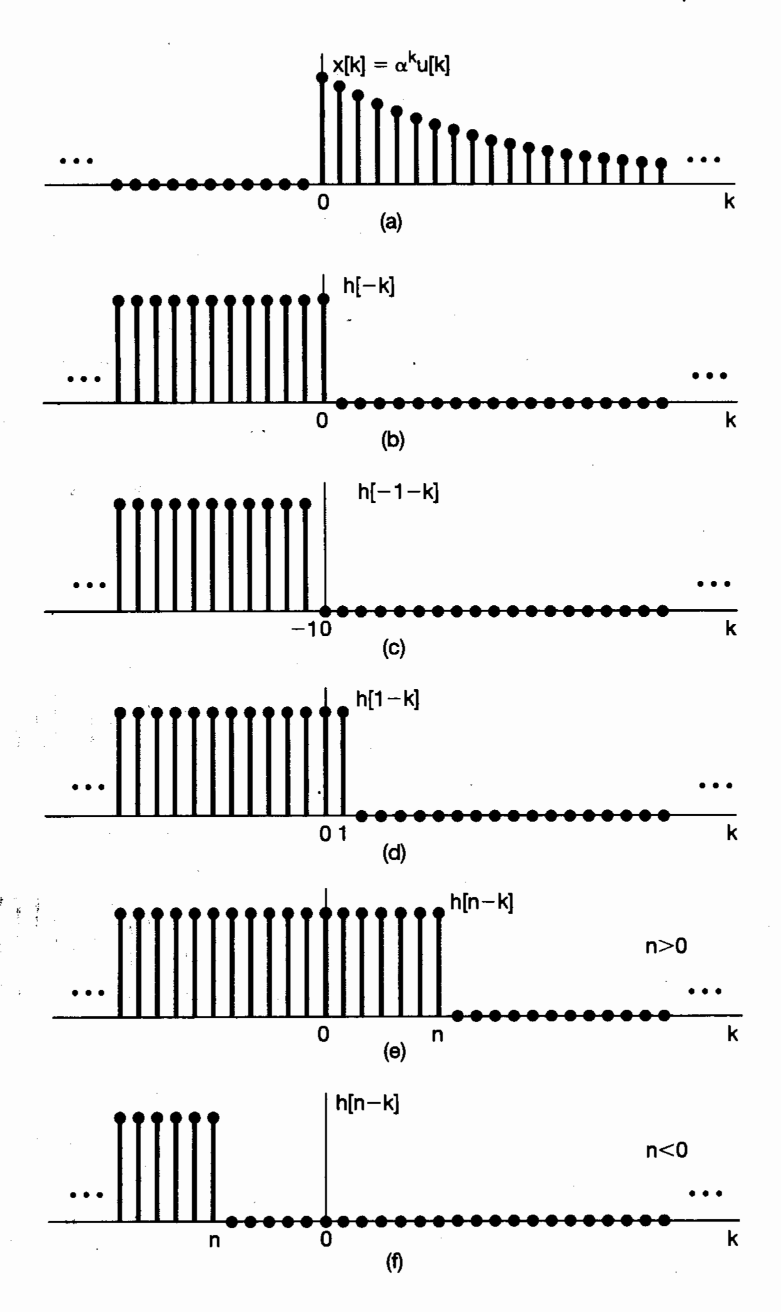


Figura 2.6 Interpretación gráfica del cálculo de la suma de convolución del ejemplo 2.3.

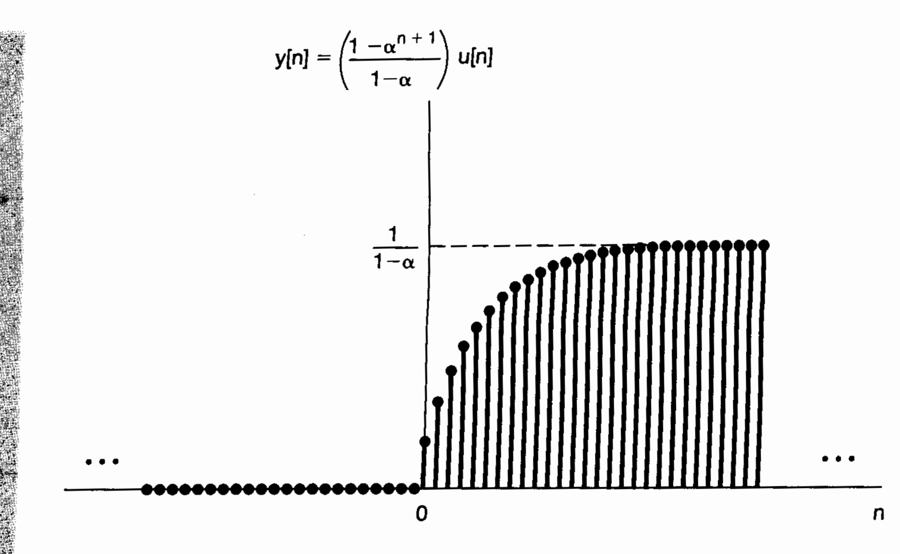


Figura 2.7 Salida para el ejemplo 2.3.

La operación de convolución algunas veces se describe en términos de "deslizar" la secuencia $h[n - k]$ sobre $x[k]$. Por ejemplo, suponga que hemos evaluado $y[n]$ para algún valor particular de n, digamos, $n = n_0$. Esto es, hemos dibujado la señal $h[n_0 - k]$, la hemos multiplicado por la señal $x[k]$ y sumado el resultado con todos los valores de k. Para evaluar $y[n]$ en el siguiente valor de n —es decir, $n = n_0 + 1$—, necesitamos dibujar la señal $h[(n_0 + 1) - k]$. Sin embargo, esto se puede hacer tomando simplemente la señal $h[n_0 - k]$ y desplazándola un punto a la derecha. Para cada valor sucesivo de n, continuamos con el proceso de desplazar $h[n - k]$ un punto a la derecha, multiplicarla por $x[k]$ y sumar el resultado sobre k.

Ejemplo 2.4

Como un ejemplo adicional, considere las dos secuencias

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

y

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Estas señales están representadas en la figura 2.8 para un valor positivo de $\alpha > 1$. Para calcular la convolución de las dos señales, resulta conveniente considerar cinco intervalos separados para n. Esto se ilustra en la figura 2.9.

Intervalo 1. Para $n < 0$, no hay traslape entre las porciones diferentes de cero de $x[k]$ y $h[n - k]$, y en consecuencia, $y[n] = 0$.

Intervalo 2. Para $0 \leq n \leq 4$,

$$x[k]h[n - k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

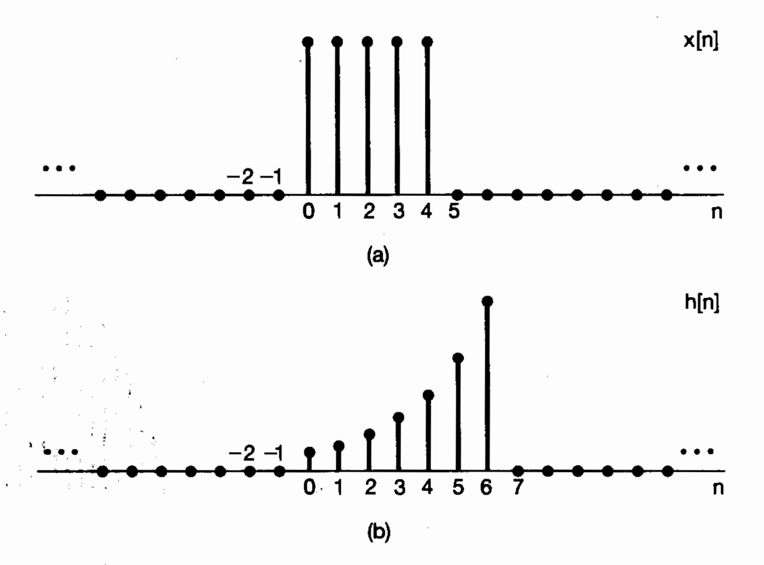


Figura 2.8 Las señales a convolucionarse en el ejemplo 2.4.

Así, en este intervalo,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}. \tag{2.14}$$

Podemos evaluar esta suma mediante el uso de la fórmula de suma finita, ecuación (2.13). Específicamente, cambiando la variable de la sumatoria en la ecuación (2.14) de k a $r = n - k$, obtenemos

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{r} = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}.$$

Intervalo 3. Para $n > 4$ pero $n - 6 \leq 0$ (es decir, $4 < n \leq 6$),

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Así, en este intervalo,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k}. \tag{2.15}$$

De nueva cuenta podemos usar la fórmula de suma geométrica en la ecuación (2.13) para evaluar la ecuación (2.15). Específicamente, separando el factor constante α^n de la sumatoria en la ecuación (2.15) se obtiene

$$y[n] = \alpha^{n} \sum_{k=0}^{4} (\alpha^{-1})^{k} = \alpha^{n} \frac{1 - (\alpha^{-1})^{5}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}. \tag{2.16}$$

Intervalo 4. Para $n > 6$ pero $n - 6 \leq 4$ (es decir, para $6 < n \leq 10$),

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & (n-6) \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases},$$

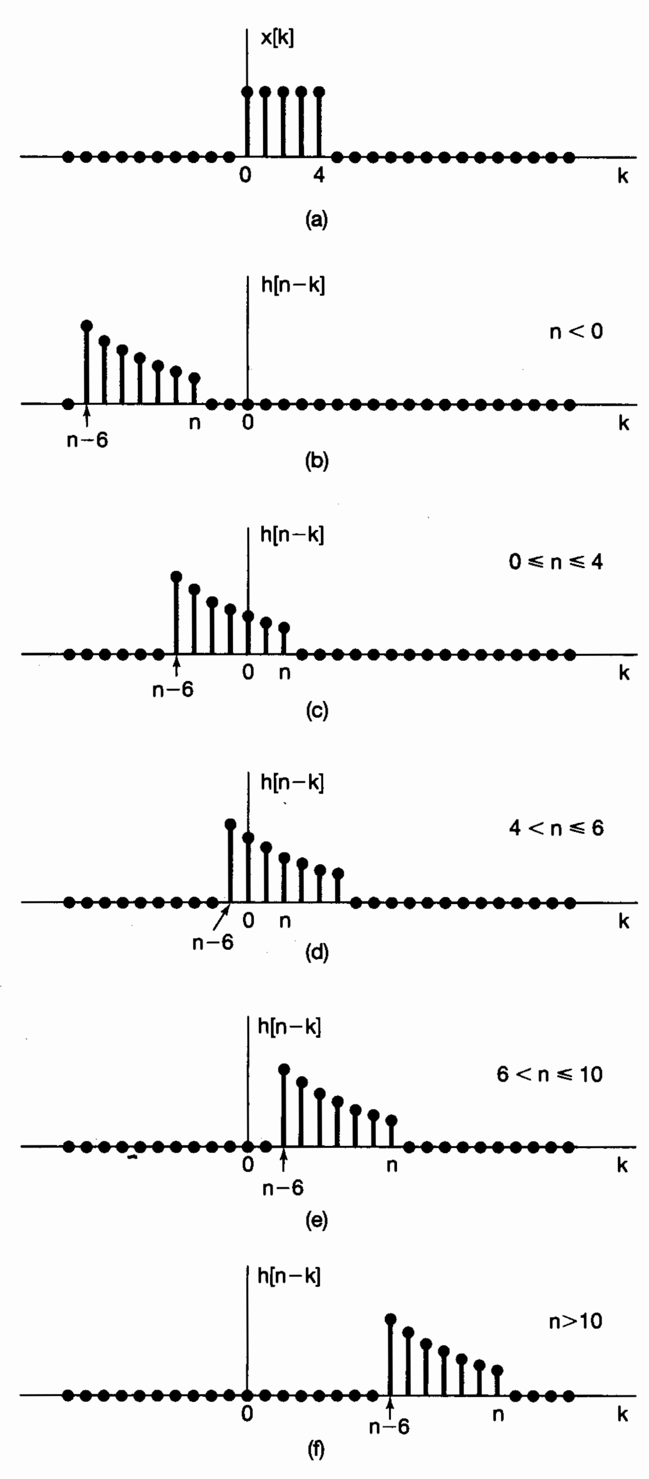


Figura 2.9 Interpretación gráfica de la convolución realizada en el ejemplo 2.4.

de manera que

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k}.$$

Podemos usar de nuevo la ecuación (2.13) para evaluar esta sumatoria. Haciendo que $r = k - n + 6$, obtenemos

$$y[n] = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^r = \alpha^6 \frac{1 - \alpha^{n-11}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}.$$

Intervalo 5. Para $n - 6 > 4$, o de manera equivalente, $n > 10$, no hay traslape entre las porciones diferentes de cero de $x[k]$ y $h[n - k]$, y por consiguiente

$$y[n] = 0.$$

Resumiendo entonces, obtenemos

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \dfrac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, & 0 \le n \le 4 \\ \dfrac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, & 4 < n \le 6, \\ \dfrac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}, & 6 < n \le 10 \\ 0, & 10 < n \end{cases}$$

lo cual se ilustra en la figura 2.10.

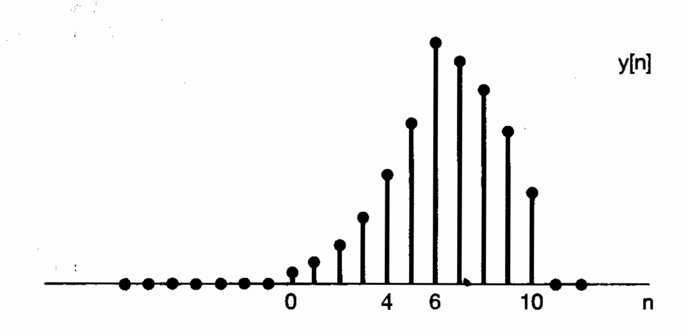


Figura 2.10 Resultado de llevar a cabo la convolución del ejemplo 2.4.

Ejemplo 2.5

Considere un sistema LTI con entrada $x[n]$ y respuesta al impulso $h[n]$ especificadas como sigue:

$$x[n] = 2^n u[-n], \tag{2.17}$$

$$h[n] = u[n]. \tag{2.18}$$

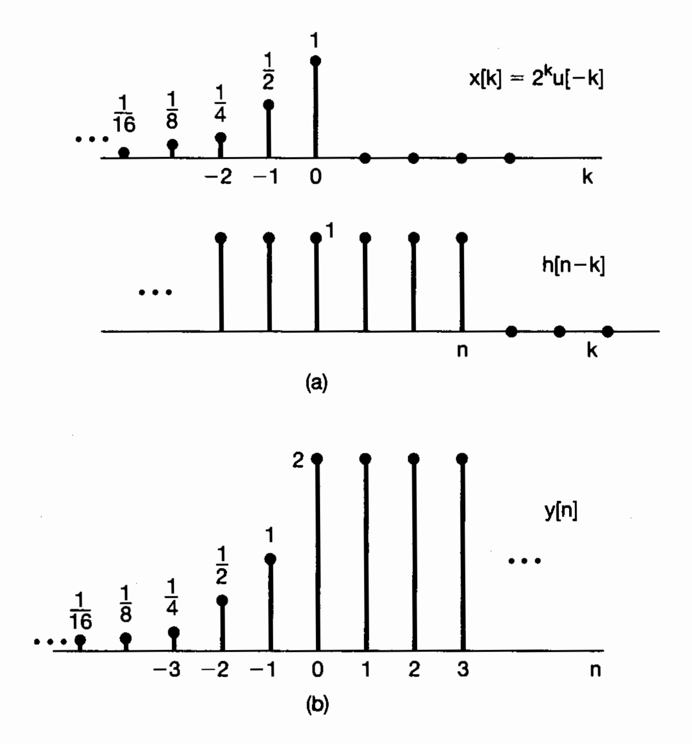


Figura 2.11 (a) Las secuencias $x[k]$ y $h[n-k]$ para el problema de la convolución considerado en el ejemplo 2.5; (b) la señal de salida resultante $y[n]$.

Las secuencias $x[k]$ y $h[n-k]$ están dibujadas en la figura 2.11(a) como funciones de k. Observe que $x[k]$ es cero para $k > 0$ y $h[n-k]$ es cero para $k > n$. Observe también que, sin importar el valor de n, la secuencia $x[k]h[n-k]$ siempre tiene muestras diferentes de cero a lo largo del eje k. Cuando $n \geq 0$, $x[k]h[n-k]$ tiene muestras en el intervalo $k \leq 0$. De ello se desprende que para $n \geq 0$,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k. \tag{2.19}$$

Para evaluar la suma infinita en la ecuación (2.19), podemos usar la *fórmula de la suma infinita*,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad 0 < |\alpha| < 1. \tag{2.20}$$

Cambiando la variable de la sumatoria en la ecuación (2.19) de k a $r = -k$, obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-(1/2)} = 2. \tag{2.21}$$

De este modo, $y[n]$ toma un valor constante de 2 para $n \geq 0$.

Cuando $n < 0, x[k]h[n-k]$ tiene muestras diferentes de cero para $k \leq n$. En consecuencia, para $n < 0$,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k. \qquad (2.22)$$

Realizando un cambio de variable $l = -k$ y entonces $m = l + n$, nuevamente podemos hacer uso de la fórmula de la suma infinita, ecuación (2.20), para evaluar la suma de la ecuación (2.22). El resultado es el siguiente para $n < 0$:

$$y[n] = \sum_{l=-n}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^l = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}. \qquad (2.23)$$

La secuencia completa de $y[n]$ está dibujada en la figura 2.11(b).

Estos ejemplos ilustran la utilidad de visualizar los cálculos de la suma de convolución de manera gráfica. No sólo esto, además de proporcionar un método útil mediante el cual se pueda calcular la respuesta de un sistema LTI, la suma de convolución también ofrece una representación en extremo útil para los sistemas LTI que nos permite examinar sus propiedades con gran detalle. En particular, en la sección 2.3 describiremos algunas de las propiedades de la convolución, y además analizaremos algunas de las propiedades introducidas en el capítulo anterior de modo que podamos ver cómo estas propiedades se pueden caracterizar para los sistemas LTI.

2.2 SISTEMAS LTI CONTINUOS: LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

De manera análoga con los resultados deducidos y analizados en la sección anterior, el objetivo de esta sección es obtener una caracterización completa de un sistema LTI continuo en términos de su respuesta al impulso unitario. En el sistema discreto, la clave para nuestro desarrollo de la suma de convolución fue la propiedad de selección del impulso unitario discreto, esto es, representar matemáticamente de una señal como la superposición de funciones impulso unitario escaladas y desplazadas. Por tanto, de manera intuitiva podemos imaginar que estos sistemas discretos responden a una secuencia de impulsos individuales. En el caso continuo, de hecho, no tenemos una secuencia discreta de valores de entrada. No obstante, como analizamos en la sección 1.4.2, si pensamos en el impulso unitario como la idealización de un pulso el cual es tan corto que su duración no tiene consecuencias en un sistema físico real, podemos desarrollar una representación para señales continuas arbitrarias en términos de estos pulsos idealizados con una duración pequeña que tiende a desaparecer o, de forma equivalente, en términos de impulsos. Esta representación se desarrolla en la siguiente subsección, y después procederemos como en la sección 2.1 para desarrollar la representación de la integral de convolución para sistemas LTI continuos.

2.2.1 La representación de señales continuas en términos de los impulsos

Para desarrollar la contraparte de tiempo continuo de la propiedad de selección en tiempo discreto mostrada en la ecuación (2.2), debemos comenzar por considerar una aproximación o pulso de "escalera", $\hat{x}(t)$, para una señal continua $x(t)$, como se ilustra en la figura 2.12(a). De manera similar a la empleada en el caso discreto, esta aproximación se

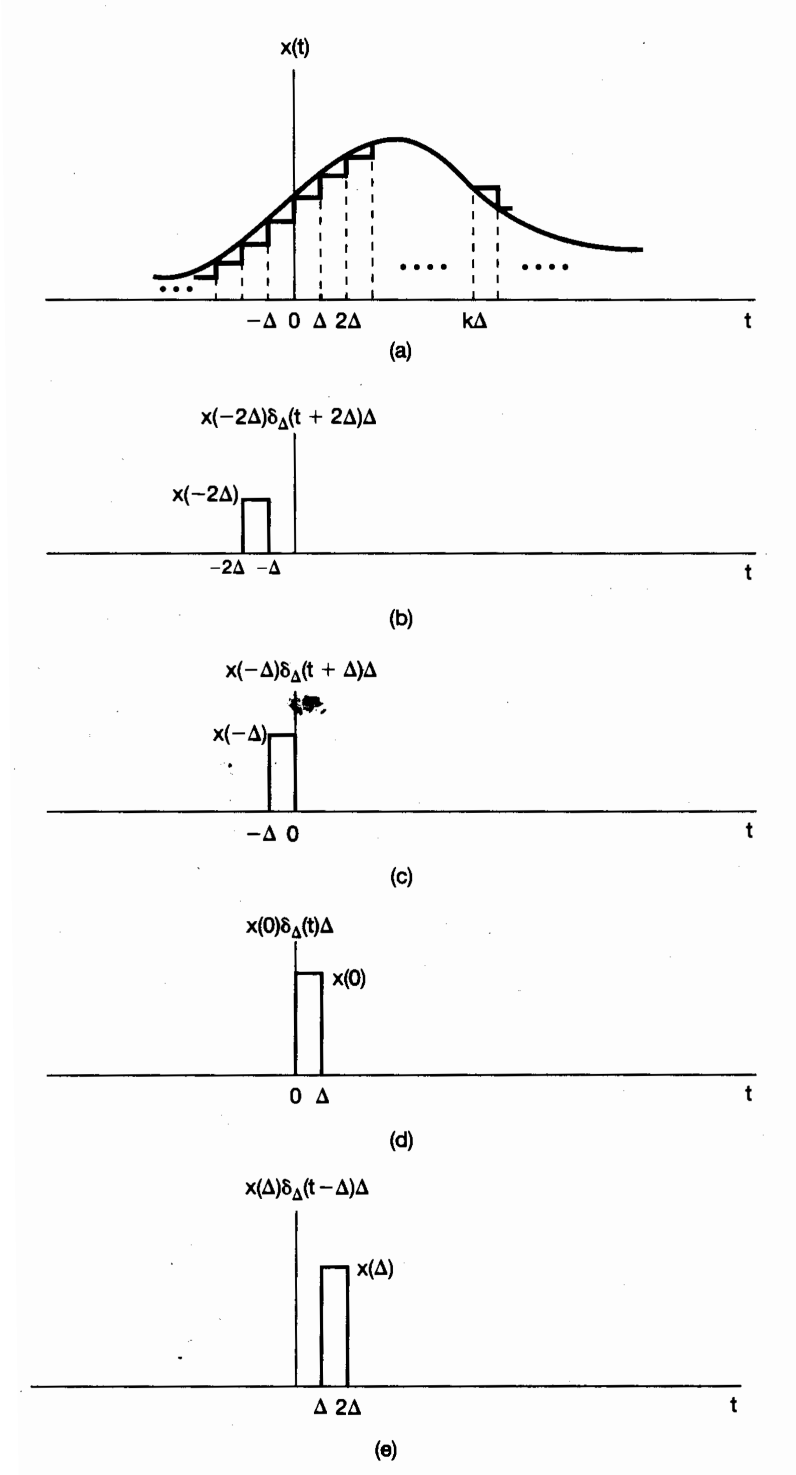


Figura 2.12 Aproximación en escalera a una señal continua.

puede expresar como una combinación lineal de pulsos retrasados, lo cual se muestra en la figura 2.12(a)-(e). Si definimos

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t < \Delta \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}, \tag{2.24}$$

entonces, ya que $\Delta\delta_\Delta(t)$ tiene una amplitud unitaria, tenemos la expresión

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta. \tag{2.25}$$

A partir de la figura 2.12, vemos que, como en el caso discreto [ecuación (2.2)], para cualquier valor de t, sólo un término de la sumatoria en el miembro derecho de la ecuación (2.25) es diferente de cero.

Conforme Δ se aproxima a 0, la aproximación $\hat{x}(t)$ mejora cada vez más, y en el límite es igual a $x(t)$. Por tanto,

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta. \tag{2.26}$$

Asimismo, a medida que $\Delta \to 0$, la sumatoria en la ecuación (2.26) se aproxima a una integral. Esto se puede ver al considerar la interpretación gráfica de la ecuación, la cual se ilustra en la figura 2.13. Aquí hemos mostrado las señales $x(\tau)$, $\delta_\Delta(t - \tau)$, y sus productos. También hemos indicado una región sombreada cuya área se aproxima al área bajo $x(\tau)\delta_\Delta(t - \tau)$ conforme $\Delta \to 0$. Nótese que la región sombreada tiene un área igual a $x(m\Delta)$ donde $t - \Delta < m\Delta < t$. Además, para este valor de t, sólo el término con $k = m$ es diferente de cero en la sumatoria en la ecuación (2.26) y, por tanto, el lado derecho de esta ecuación también es igual a $x(m\Delta)$. En consecuencia, de la ecuación (2.26) y del argumento anterior se desprende que $x(t)$ es igual al límite conforme $\Delta \to 0$ del área bajo $x(\tau)\delta_\Delta(t - \tau)$. Más aún, de la ecuación (1.74) sabemos que el límite cuando $\Delta \to 0$ de $\delta_\Delta(t)$ es la función impulso unitario $\delta(t)$. En consecuencia,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau. \tag{2.27}$$

Al igual que en el caso discreto, la ecuación (2.27) se conoce como la *propiedad de selección* del impulso de tiempo continuo. Podemos observar que, para el ejemplo específico de $x(t) = u(t)$, la ecuación (2.27) se convierte en

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t - \tau)d\tau, \tag{2.28}$$

ya que $u(\tau) = 0$ para $\tau < 0$ y $u(\tau) = 1$ para $\tau > 0$. La ecuación (2.28) es idéntica a la ecuación (1.75) deducida en la sección 1.4.2.

De nueva cuenta, la ecuación (2.27) se debe ver como una idealización en el sentido de que, para una Δ "lo suficientemente pequeña", la aproximación de $x(t)$ en la ecuación (2.25) es en esencia exacta para cualquier propósito práctico. Entonces, la ecuación (2.27) representa simplemente una idealización de la ecuación (2.25) al considerar una Δ tan pequeña que tienda a desaparecer. Observe también que pudimos haber deducido la ecuación (2.27) directamente mediante el uso de varias de las propiedades básicas del impulso unitario que deducimós en la sección 1.4.2.

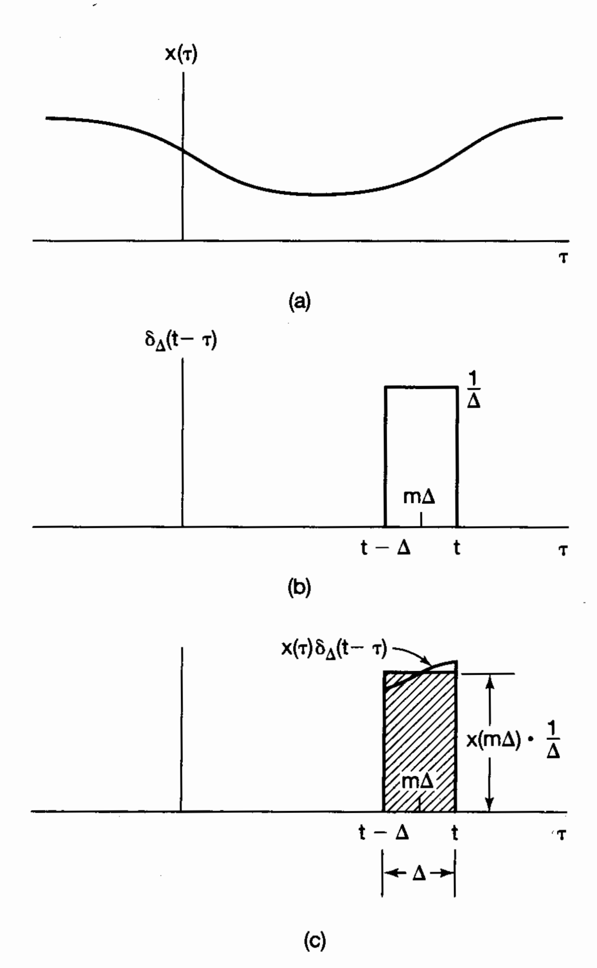


Figura 2.13 Interpretación gráfica de la ecuación (2.26).

Específicamente, como se ilustra en la figura 2.14(b), la señal $\delta(t - \tau)$ (vista como una función de τ con t fija) es un impulso unitario localizado en $\tau = t$. Por tanto, como se muestra en la figura 2.14(c), la señal $x(\tau)\delta(t - \tau)$ (de nuevo vista como una función de τ) es igual a $x(t)\delta(t - \tau)$ [es decir, es un impulso escalado en $\tau = t$ con un área igual al valor de $x(t)$]. En consecuencia, la integral de esta señal a partir de $\tau = -\infty$ a $\tau = +\infty$ es igual a $x(t)$; esto es,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - \tau)d\tau = x(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau)d\tau = x(t).$$

Aunque esta deducción surge directamente de la sección 1.4.2, hemos incluido la deducción proporcionada en las ecuaciones (2.24)-(2.27) para comparar las similitudes con el caso discreto y, en particular, para enfatizar la interpretación de la ecuación (2.27) como la representación de la señal $x(t)$ en forma de "suma" (más precisamente una integral) de impulsos ponderados y desplazados.

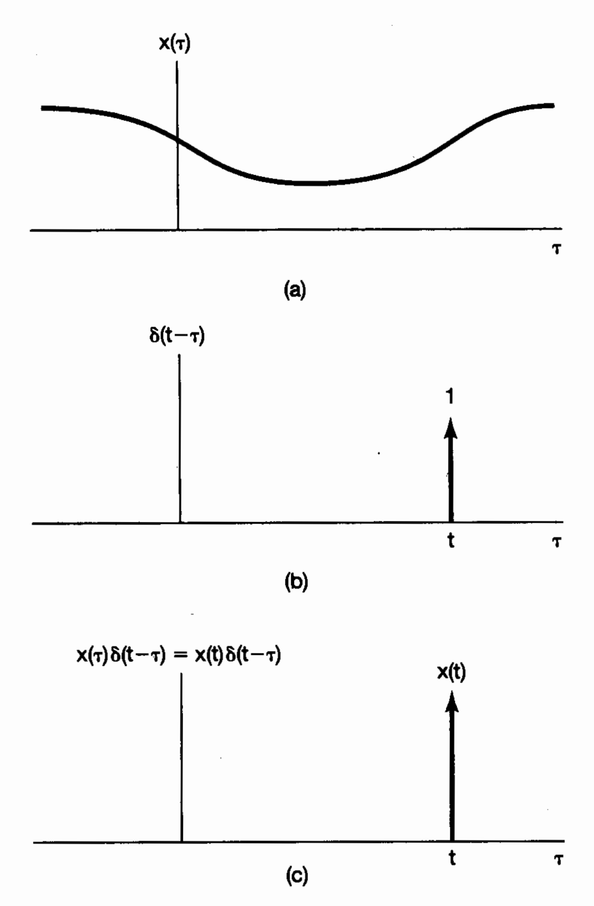


Figura 2.14 (a) Señal arbitraria $x(\tau)$; (b) impulso $\delta(t-\tau)$ como una función de τ con t fija; (c) producto de estas dos señales.

2.2.2 La respuesta al impulso unitario continuo y la representación de la integral de convolución de sistemas LTI

Al igual que en el caso discreto, la representación desarrollada en la sección anterior nos proporciona un método con el cual se puede ver una señal arbitraria continua como la superposición de pulsos escalados y desplazados. En particular, la representación aproximada en la ecuación (2.25) representa la señal $\hat{x}(t)$ como una suma de versiones escaladas y desplazadas de la señal pulso básico $\delta_\Delta(t)$. En consecuencia, la respuesta $\hat{y}(t)$ de un sistema lineal a esta señal será la superposición de las respuestas a las versiones escaladas y desplazadas de $\delta_\Delta(t)$. Específicamente, definamos $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ como la respuesta de un sistema LTI a la entrada $\delta_\Delta(t-k\Delta)$. Entonces, de la ecuación (2.25) y la propiedad de superposición, para sistemas lineales de tiempo continuo, vemos que

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta. \tag{2.29}$$

La interpretación de la ecuación (2.29) es similar a aquella de la ecuación (2.3) para el caso discreto. En particular, considere la figura 2.15, la cual es la contraparte continua de la figura 2.2. En la figura 2.15(a) hemos representado la entrada $x(t)$ y su aproximación

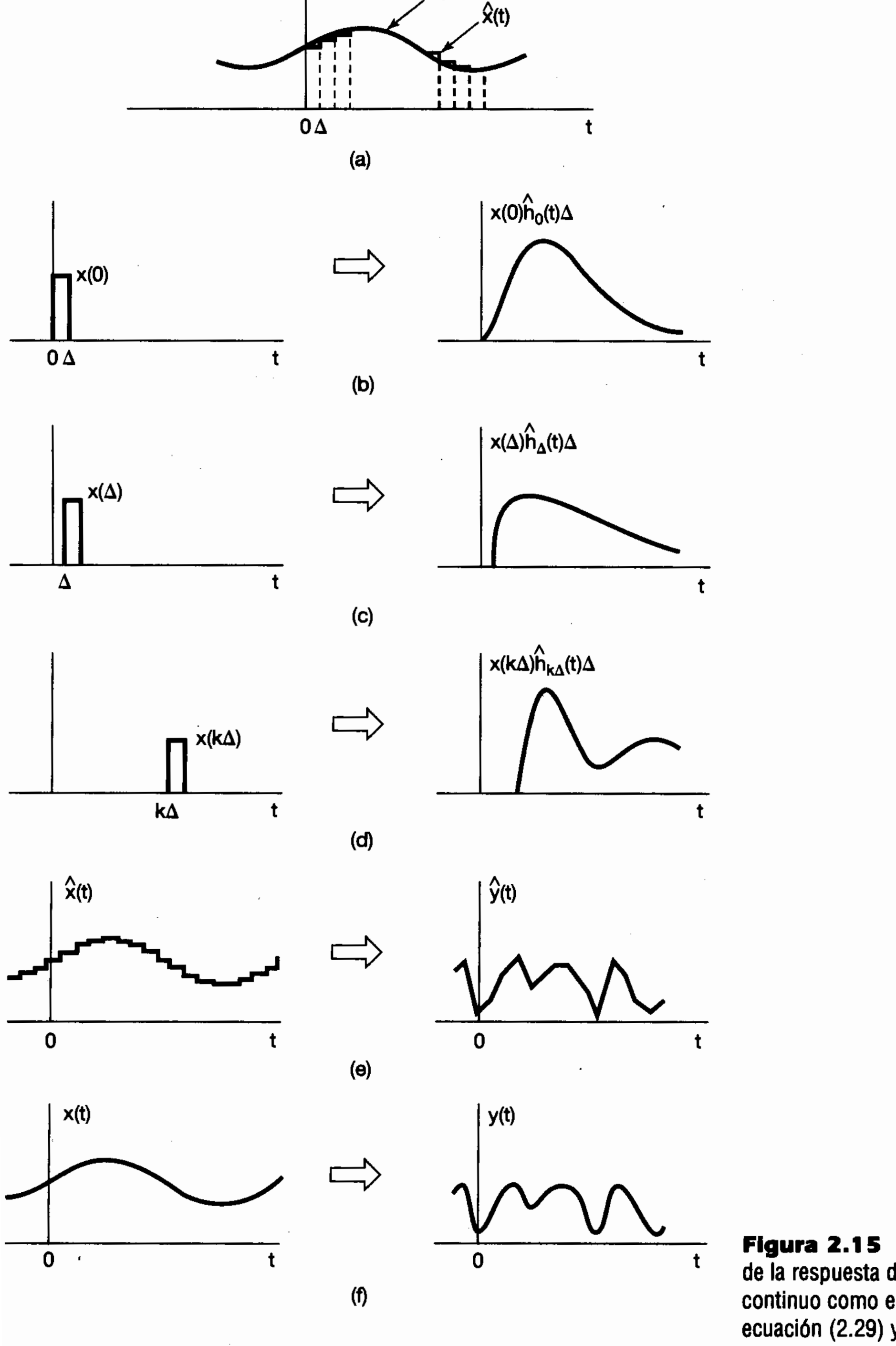


Figura 2.15 Interpretación gráfica de la respuesta de un sistema lineal continuo como el expresado en las ecuación (2.29) y (2.30).

$\hat{x}(t)$, mientras que en la figura 2.15(b)-(d) hemos mostrado las respuestas del sistema a tres de los pulsos ponderados de la expresión para $\hat{x}(t)$. Entonces la salida $\hat{y}(t)$ correspondiente a $\hat{x}(t)$ es la superposición de todas estas respuestas, como se indica en la figura 2.15(e).

Lo que falta, entonces, es preguntarse qué pasa conforme Δ se hace muy pequeño, es decir, conforme $\Delta \rightarrow 0$. En particular, con $x(t)$ expresada como en la ecuación (2.26), $\hat{x}(t)$ se vuelve cada vez mejor aproximación a $x(t)$ y, de hecho, las dos coinciden a medida que $\Delta \rightarrow 0$. En consecuencia, la respuesta a $\hat{x}(t)$, es decir, $\hat{y}(t)$ en la ecuación (2.29), debe converger hacia $y(t)$, la respuesta a la entrada real $x(t)$, como se ilustra en la figura 2.15(f). Además, como hemos dicho, para una Δ "lo suficientemente pequeña", la duración del pulso $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ no es significativa, en cuanto que, en lo concerniente al sistema, la respuesta a este pulso es en esencia la misma que la respuesta a un impulso unitario en el mismo punto en el tiempo. Esto es, puesto que el pulso $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ corresponde a un impulso unitario desplazado conforme $\Delta \rightarrow 0$, la respuesta $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ a este pulso de entrada se convierte en la respuesta a un impulso en el límite. Por tanto, si hacemos que $h_\tau(t)$ denote la respuesta en el tiempo t a un impulso unitario $\delta(t - \tau)$ localizado en el tiempo τ, entonces

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t) \Delta. \tag{2.30}$$

Conforme $\Delta \rightarrow 0$, la sumatoria del lado derecho pasa a ser una integral, como se puede ver gráficamente en la figura 2.16. En forma específica, en la figura 2.16 el rectángulo sombreado representa un término en la sumatoria del lado derecho de la ecuación (2.30) y a medida que $\Delta \rightarrow 0$ la sumatoria se aproxima al área bajo $x(\tau)h_\tau(t)$ vista como una función de τ. Por tanto,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_\tau(t) d\tau. \tag{2.31}$$

La interpretación de la ecuación (2.31) es análoga a la de la ecuación (2.29). Como demostramos en la sección 2.2.1, cualquier entrada $x(t)$ se puede representar como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

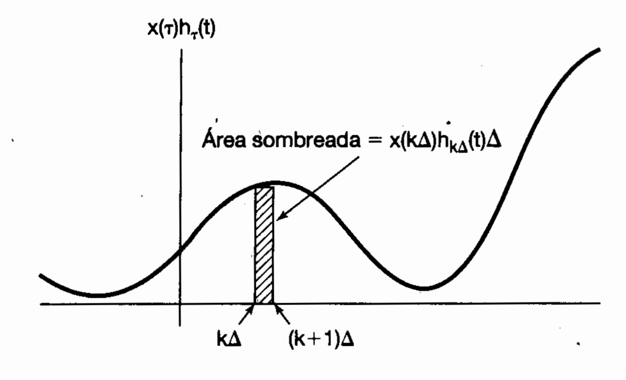


Figura 2.16 Representación gráfica de las ecuaciones (2.30) y (2.31).

Esto es, podemos pensar intuitivamente en $x(t)$ como una "suma" de impulsos ponderados desplazados, donde el peso en el impulso $\delta(t - \tau)$ es $x(\tau)d\tau$. Con esta interpretación, la ecuación (2.31) representa la superposición de las respuestas a cada una de estas entradas, y por linealidad, el peso en la respuesta $h_\tau(t)$ al impulso desplazado $\delta(t - \tau)$ también es $x(\tau)d\tau$.

La ecuación (2.31) representa la forma general de la respuesta de un sistema lineal en el caso continuo. Si además de ser lineal, el sistema también es invariante en el tiempo, entonces $h_\tau(t) = h_0(t - \tau)$; es decir, la respuesta de un sistema LTI al impulso unitario $\delta(t - \tau)$, el cual está desplazado τ segundos desde el origen, es una versión de la respuesta a la función impulso unitario $\delta(t)$ desplazada en forma semejante. Nuevamente por comodidad de notación, quitaremos el subíndice y definiremos la *respuesta al impulso unitario* $h(t)$ como

$$h(t) = h_0(t); \tag{2.32}$$

es decir, $h(t)$ es la respuesta a $\delta(t)$. En este caso, la ecuación (2.31) se vuelve

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau.} \tag{2.33}$$

La ecuación (2.33), conocida como la *integral de convolución* o la *integral de superposición*, es la contraparte continua de la suma de convolución de la ecuación (2.6) y corresponde a la representación de un sistema LTI continuo en términos de su respuesta a un impulso unitario. La convolución de dos señales $x(t)$ y $h(t)$ será representada simbólicamente como

$$y(t) = x(t) * h(t). \tag{2.34}$$

Aun cuando hemos decidido usar el símbolo $*$ para denotar tanto la convolución discreta como la continua, por lo general el contexto será suficiente para distinguir el caso de que se trate.

Al igual que en el caso discreto, podemos ver que un sistema LTI continuo está completamente caracterizado por su respuesta al impulso, es decir, por su respuesta a una sola señal elemental, el impulso unitario $\delta(t)$. En la siguiente sección exploraremos las implicaciones que esto conlleva conforme examinamos varias de las propiedades de la convolución y de los sistemas LTI tanto en el caso continuo como en tiempo discreto.

El procedimiento para evaluar la integral de convolución es bastante similar al de su contraparte de tiempo discreto, la suma de convolución. Específicamente, en la ecuación (2.33) vemos que para cualquier valor de t, la salida $y(t)$ es una integral ponderada de la entrada, donde el peso sobre $x(\tau)$ es $h(t - \tau)$. Para evaluar esta integral para un valor específico de t, primero debemos obtener la señal $h(t - \tau)$ (considerada como una función de τ con t fija) a partir de $h(\tau)$ mediante un reflejo alrededor del origen y un corrimiento a la derecha en un valor t si $t > 0$, o hacia la izquierda por $|t|$ para $t < 0$. En seguida multiplicamos las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ y se obtiene $y(t)$ al integrar el producto resultante desde $\tau = -\infty$ hasta $\tau = +\infty$. Para ilustrar la evaluación de la integral de convolución, consideremos varios ejemplos.

Ejemplo 2.6

Sea $x(t)$ la entrada a un sistema LTI con respuesta al impulso unitario $h(t)$, donde

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

y

$$h(t) = u(t).$$

En la figura 2.17 hemos representado las funciones $h(\tau)$, $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ para un valor negativo y uno positivo de t. Gracias a la figura, vemos que para $t < 0$ el producto de $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ es cero, y en consecuencia, $y(t)$ es cero. Para $t > 0$,

$$x(\tau)h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}.$$

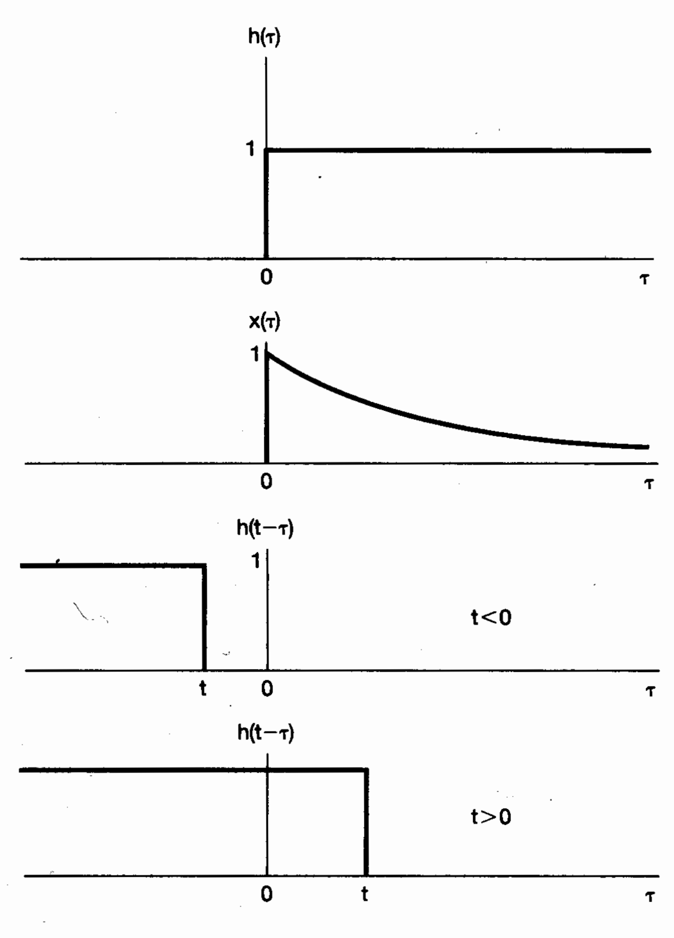


Figura 2.17 Cálculo de la integral de convolución para el ejemplo 2.6.

De esta expresión podemos calcular $y(t)$ para $t > 0$:

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau}d\tau = -\frac{1}{a}e^{-a\tau}\Big|_0^t$$
$$= \frac{1}{a}(1 - e^{-a\tau}).$$

Por consiguiente, para toda t, $y(t)$ es

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t),$$

la cual se muestra en la figura 2.18.

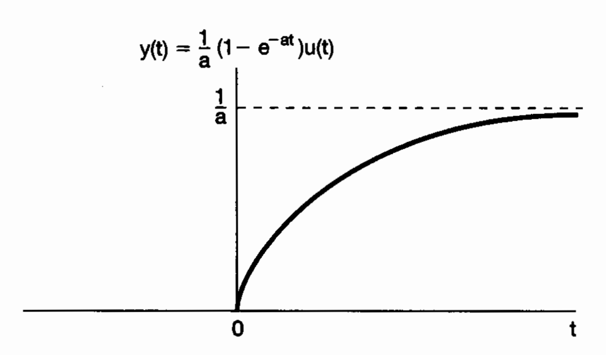


Figura 2.18 Respuesta del sistema en el ejemplo 2.6 con respuesta al impulso $h(t) = u(t)$ a la entrada $x(t) = e^{-at}u(t)$.

Ejemplo 2.7

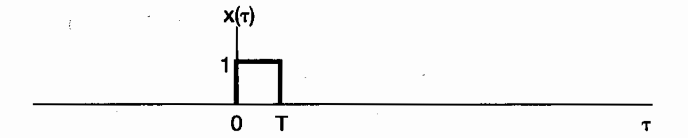
Considere la convolución de las siguientes dos señales:

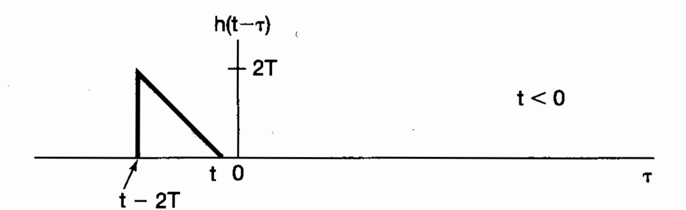
$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases},$$
$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}.$$

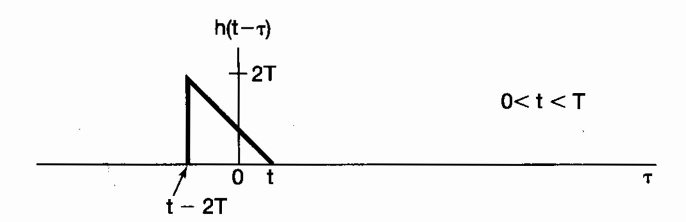
Al igual que en el ejemplo 2.4 para la convolución discreta, es conveniente considerar la evaluación de $y(t)$ en intervalos separados. En la figura 2.19 hemos dibujado $x(\tau)$ e ilustrado $h(t - \tau)$ en cada uno de los intervalos de interés. Para $t < 0$ y para $t > 3T$, $x(\tau)h(t - \tau) = 0$ para todos los valores de τ, y en consecuencia, $y(t) = 0$. Para los otros intervalos, el producto $x(\tau)h(t - \tau)$ es como se indica en la figura 2.20. Así, para estos tres intervalos, la integración puede realizarse de forma gráfica con el siguiente resultado:

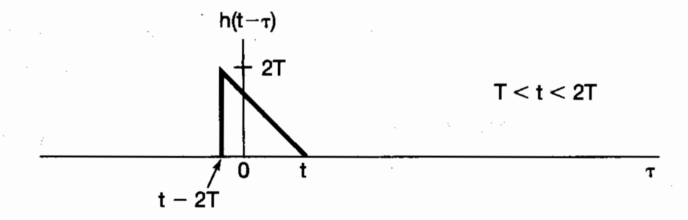
$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & 3T < t \end{cases},$$

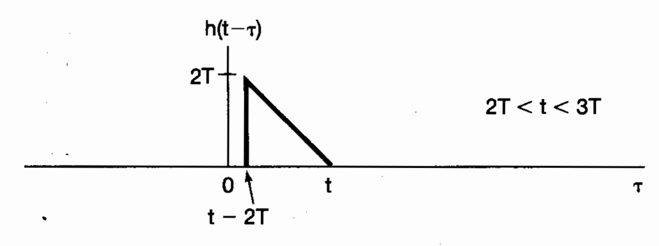
lo cual se muestra en la figura 2.21.











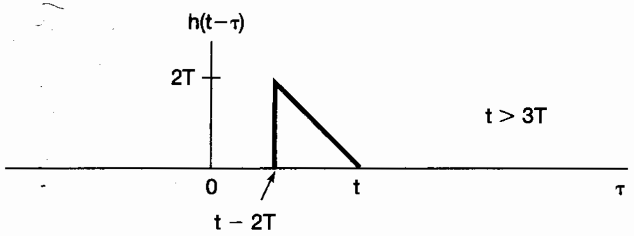


Figura 2.19 Señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ para diferentes valores de t del ejemplo 2.7.

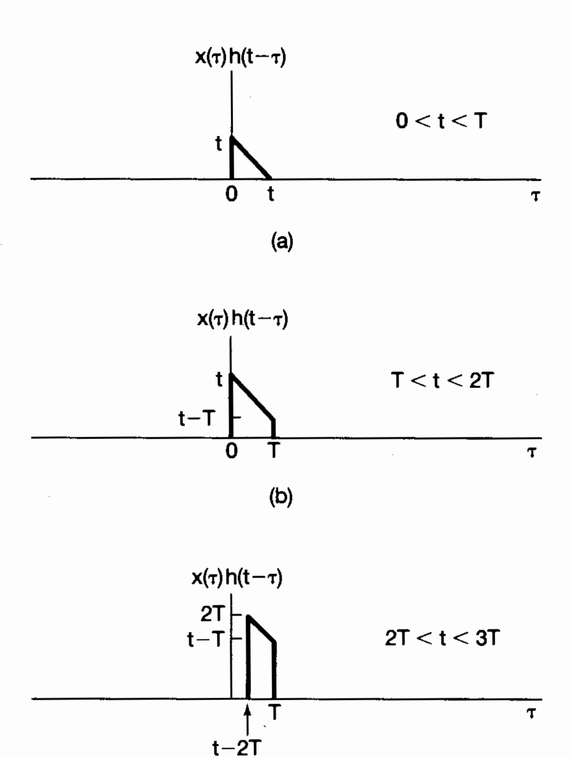


Figura 2.20 Producto $x(\tau)h(t-\tau)$ del ejemplo 2.7 para los tres intervalos de valores de t en los cuales el producto no es idéntico a cero. (Vea la figura 2.19.)

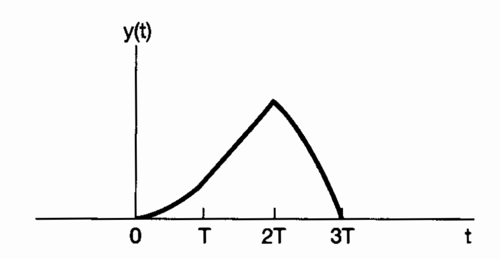


Figura 2.21 Señal $y(t) = x(t) * h(t)$ para el ejemplo 2.7.

Ejemplo 2.8

Sea que $y(t)$ denota la convolución de las siguientes dos señales:

$$x(t) = e^{2t}u(-t), \tag{2.35}$$

$$h(t) = u(t-3). \tag{2.36}$$

Las señales $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ están trazadas como funciones de τ en la figura 2.22(a). Observamos primero que estas dos señales tienen regiones diferentes de cero que se

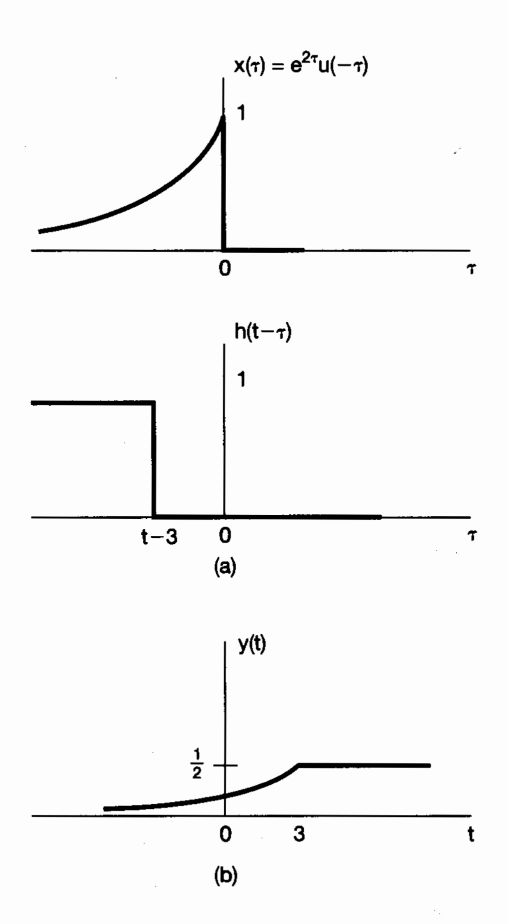


Figura 2.22 El problema de convolución considerado en el ejemplo 2.8.

traslapan, sin importar el valor de t. Cuando $t-3 \leq 0$, el producto de $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ es diferente de cero para $-\infty < \tau < t-3$, y la integral de convolución se convierte en

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)}. \tag{2.37}$$

Para $t-3 \geq 0$, el producto $x(\tau)h(t-\tau)$ es diferente de cero para $-\infty < \tau < 0$, de manera que la integral de convolución es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}. \tag{2.38}$$

La señal resultante $y(t)$ está trazada en la figura 2.22(b).

Como ilustran estos ejemplos y los presentados en la sección 2.1, la interpretación gráfica de la convolución continua y la discreta es de un valor considerable para visualizar la evaluación de las integrales y sumas de convolución.

2.3 PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

En las dos secciones anteriores desarrollamos las representaciones, en extremo importantes, de los sistemas LTI continuos y discretos en términos de sus respuestas al impulso unitario. En el caso discreto esta representación toma la forma de la suma de convolución, mientras que su contraparte continua es la integral de convolución, las cuales repetimos aquí por conveniencia:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \tag{2.39}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \tag{2.40}$$

Como ya hemos enfatizado, una consecuencia de estas representaciones es que las características de un sistema LTI están determinadas completamente por su respuesta al impulso. Es importante enfatizar que esta propiedad se cumple en general *sólo* para sistemas LTI. En particular, como se ilustra en los siguientes ejemplos, la respuesta al impulso unitario de un sistema no lineal *no* caracteriza por completo el comportamiento del sistema.

Ejemplo 2.9

Considere un sistema discreto con respuesta al impulso unitario

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}. \tag{2.41}$$

Si el sistema es LTI, entonces la ecuación (2.41) determina por completo su comportamiento entrada-salida. En particular, sustituyendo la ecuación (2.41) por la suma de convolución, es decir, la ecuación (2.39), encontramos la siguiente ecuación explícita que describe cómo están relacionadas la entrada y la salida de este sistema LTI:

$$y[n] = x[n] + x[n-1]. \tag{2.42}$$

Por otro lado, hay *muchos* sistemas no lineales con la misma respuesta [es decir, la proporcionada por la ecuación (2.41)] a la entrada $\delta[n]$. Por ejemplo, los siguientes sistemas tienen esta propiedad:

$$y[n] = (x[n] + x[n-1])^2,$$

$$y[n] = \text{máx}(x[n], x[n-1]).$$

En consecuencia, si el sistema no es lineal, no está caracterizado por completo por la respuesta al impulso presentada en la ecuación (2.41).

El ejemplo anterior ilustra el hecho de que los sistemas LTI tienen varias propiedades que no poseen otros sistemas, empezando por la muy especial representación que tienen en términos de las integrales y sumas de convolución. En lo que queda de esta sección exploraremos algunas de las más importantes y básicas de estas propiedades.

2.3.1 Propiedad conmutativa

Una propiedad básica de la convolución tanto continua como discreta consiste en que es una operación *conmutativa*. Es decir,

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k], \tag{2.43}$$

y en el caso continuo,

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \tag{2.44}$$

Estas expresiones se pueden verificar de una forma directa mediante la sustitución de variables en las ecuaciones (2.39) y (2.40). Por ejemplo, en el discreto, si consideramos que $r = n - k$ o, de manera equivalente, $k = n - r$, la ecuación (2.39) se convierte en

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-r]h[r] = h[n] * x[n]. \tag{2.45}$$

Con esta sustitución de variables, los papeles de $x[n]$ y $h[n]$ se intercambian. De acuerdo con la ecuación (2.45), la salida de un sistema LTI con entrada $x[n]$ y respuesta al impulso unitario $h[n]$ es idéntica a la salida de un sistema LTI con entrada $h[n]$ y respuesta al impulso unitario $x[n]$. Por ejemplo, pudimos haber calculado la convolución en el ejemplo 2.4, reflejando y desplazando primero $x[k]$, multiplicando después las señales $x[n-k]$ y $h[k]$ y sumando finalmente los productos para todos los valores de k.

De manera similar, la ecuación (2.44) se puede verificar mediante un cambio de variables, y las implicaciones de este resultado en el caso continuo son las mismas: la salida de un sistema LTI con entrada $x(t)$ y respuesta al impulso unitario $h(t)$ es idéntica a la salida de un sistema LTI con entrada $h(t)$ y respuesta al impulso unitario $x(t)$. Por tanto, pudimos haber calculado la convolución en el ejemplo 2.7 mediante el reflejo y corrimiento de $x(t)$, multiplicando las señales $x(t-\tau)$ y $h(\tau)$, e integrando sobre $-\infty < \tau < +\infty$. En casos específicos, una de las dos formas para calcular las convoluciones [es decir, la ecuación (2.39) o la (2.43) en el caso discreto y la ecuación (2.40) o la (2.44) en el caso continuo] se puede visualizar más fácilmente, pero ambas formas siempre dan la misma respuesta.

2.3.2 Propiedad distributiva

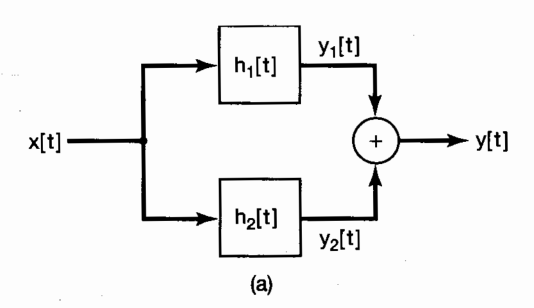
Otra propiedad básica de la convolución en la propiedad *distributiva*. Específicamente, la convolución se distribuye a través de la adición, de manera que en el caso discreto

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n], \tag{2.46}$$

y en el continuo

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t). \tag{2.47}$$

Esta propiedad se puede verificar en una forma directa.



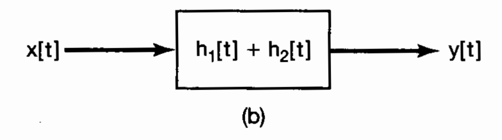


Figura 2.23 Interpretación de la propiedad distributiva de la convolución para una interconexión en paralelo de los sistemas LTI.

La propiedad distributiva posee una interpretación útil en términos de interconexiones de los sistemas. Considere dos sistemas LTI continuos en paralelo, como se indica en la figura 2.23(a). Los sistemas mostrados en el diagrama de bloque son sistemas LTI con las respuestas al impulso unitario indicadas. Esta representación gráfica es una forma particularmente conveniente para denotar los sistemas LTI en diagramas de bloque, y también enfatiza nuevamente el hecho de que la respuesta al impulso de un sistema LTI caracteriza por completo su comportamiento.

Los dos sistemas con respuestas al impulso $h_1(t)$ y $h_2(t)$, tienen idénticas entradas y sus salidas se suman. Puesto que

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$

y

$$y_2(t) = x(t) * h_2(t),$$

el sistema de la figura 2.23(a) tiene una salida

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t), \tag{2.48}$$

que corresponde al miembro derecho de la ecuación (2.47). El sistema de la figura 2.23(b) tiene una salida

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)], \tag{2.49}$$

que corresponde al miembro izquierdo de la ecuación (2.47). Al aplicar la ecuación (2.47) a la ecuación (2.49) y comparar el resultado con la ecuación (2.48) vemos que los sistemas en las figuras 2.23(a) y (b) son idénticos.

Existe una interpretación idéntica en el caso discreto, en la cual cada una de las señales en la figura 2.23 es reemplazada por su contraparte discreta (es decir, $x(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ y $y(t)$ son reemplazadas por $x[n]$, $h_1[n]$, $h_2[n]$, $y_1[n]$, $y_2[n]$ y $y[n]$, respectivamente). Entonces, resumiendo, en virtud de la propiedad distributiva de la convolución, una combinación en paralelo de sistemas LTI se puede reemplazar con un solo sistema LTI cuya respuesta al impulso unitario sea la suma de las respuestas individuales al impulso unitario en la combinación en paralelo.

Asimismo, como una consecuencia de las propiedades conmutativa y distributiva, tenemos

$$[x_1[n] + x_2[n]] * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n] \tag{2.50}$$

y

$$[x_1(t) + x_2(t)] * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t), \tag{2.51}$$

lo cual establece simplemente que la respuesta de un sistema LTI a la suma de dos entradas debe ser igual a la suma de las respuestas a esas señales de manera individual.

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, la propiedad distributiva de la convolución también puede explotarse para descomponer una convolución complicada en varias más sencillas.

Ejemplo 2.10

Sea $y[n]$ que denota la convolución de las siguientes dos secuencias:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n], \tag{2.52}$$

$$h[n] = u[n]. \tag{2.53}$$

Observe que la secuencia $x[n]$ es diferente de cero en todo el eje de tiempo. La evaluación directa de dicha convolución es algo tediosa. En su lugar, podemos hacer uso de la propiedad distributiva para expresar $y[n]$ como la suma de los resultados de dos problemas de convolución más simples. En particular, si determinamos que $x_1[n] = (1/2)^n u[n]$ y $x_2[n] = 2^n u[-n]$, se sigue que

$$y[n] = (x_1[n] + x_2[n]) * h[n]. \tag{2.54}$$

Usando la propiedad distributiva de la convolución, podemos rescribir la ecuación (2.54) como

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n], \tag{2.55}$$

donde

$$y_1[n] = x_1[n] * h[n] \tag{2.56}$$

y

$$y_2[n] = x_2[n] * h[n]. \tag{2.57}$$

La convolución en la ecuación (2.56) para $y_1[n]$ se puede obtener del ejemplo 2.3 (con $\alpha = 1/2$), mientras que $y_2[n]$ se evaluó en el ejemplo 2.5. La suma de ambas es $y[n]$, la cual se muestra en la figura 2.24.

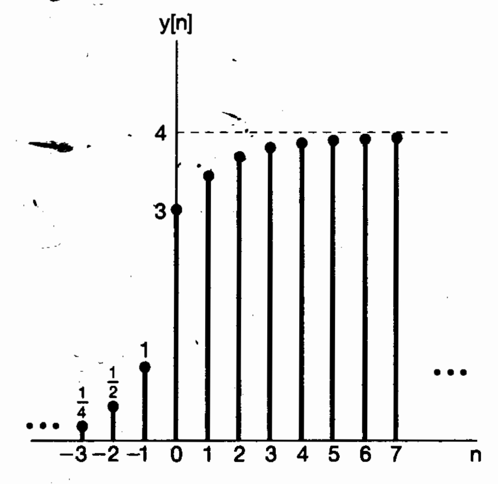


Figura 2.24 La señal $y[n] = x[n] * h[n]$ del ejemplo 2.10.

2.3.3 Propiedad asociativa

Otra propiedad importante y útil de la convolución es la asociativa. Esto es, en el caso discreto

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n], \tag{2.58}$$

y en el continuo

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t). \tag{2.59}$$

Esta propiedad se prueba mediante manipulaciones directas de las sumatorias e integrales involucradas. Los ejemplos que lo verifican se dan en el problema 2.43.

Como una consecuencia de la propiedad asociativa, las expresiones

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n] \tag{2.60}$$

y

$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) \tag{2.61}$$

no son ambiguas. Es decir, de acuerdo con las ecuación (2.58) y (2.59), no importa en qué orden convolucionemos estas señales.

Una interpretación de la propiedad asociativa se ilustra para sistemas discretos en las figuras 2.25(a) y (b). En la figura 2.25(a),

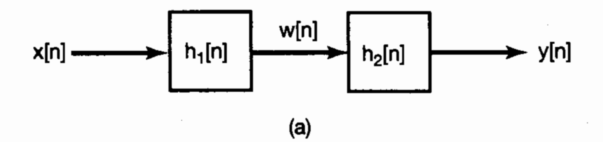
$$\begin{aligned} y[n] &= w[n] * h_2[n] \\ &= (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]. \end{aligned}$$

En la figura 2.25(b),

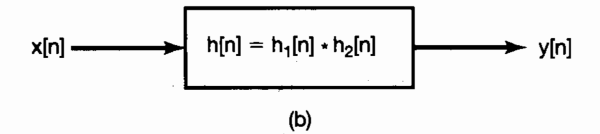
$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= x[n] * (h_1[n] * h_2[n]). \end{aligned}$$

De acuerdo con la propiedad asociativa, la interconexión en serie de los dos sistemas en la figura 2.25(a) es equivalente al sistema individual en la figura 2.25(b). Esto se puede generalizar a un número arbitrario de sistemas LTI en cascada, y la interpretación y conclusión análogas también se cumplen en el caso continuo.

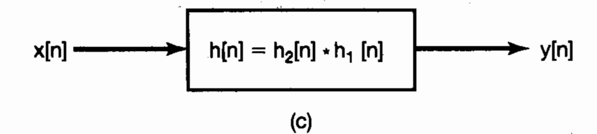
Si usamos la propiedad conmutativa junto con la propiedad asociativa, podremos encontrar otra propiedad muy importante de los sistemas LTI. Específicamente, gracias a las figuras 2.25(a) y (b), podemos concluir que la respuesta al impulso de los dos sistemas LTI en cascada es la convolución de sus respuestas individuales al impulso. Puesto que la convolución es conmutativa, podemos calcular esta convolución de $h_1[n]$ y $h_2[n]$ en cualquier orden. Por tanto, las figuras 2.25(b) y (c) son equivalentes, y a causa de la propiedad asociativa, éstas son a su vez equivalentes al sistema de la figura 2.25(d), la cual notamos que es una combinación en cascada de dos sistemas como en la figura 2.25(a), pero con el orden de la cascada invertido. En consecuencia, la respuesta al impulso unitario de dos sistemas LTI en cascada no depende del orden en el cual estén conectados. De hecho, la misma situación se repite para un número arbitrario de sistemas LTI en cascada: el orden en que se conecten no importa en lo que concierne a la respuesta al impulso del sistema como un todo. Las mismas conclusiones se cumplen en el caso continuo.



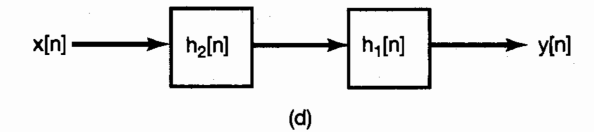
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2.25 Propiedad asociativa de la convolución y su implicación, y la propiedad conmutativa de la interconexión en serie de los sistemas LTI.

Es importante subrayar que el comportamiento de los sistemas LTI en cascada (y, en particular, el hecho de que la respuesta del sistema completo no depende del orden de los sistemas en cascada) es muy especial para esos sistemas. En contraste, por lo general el orden en el cual están conectados en cascada los sistemas no lineales no se puede cambiar sin que cambie la respuesta total. Por ejemplo, si tenemos dos sistemas sin memoria, uno que sea la multiplicación por dos y el otro el cuadrado de la entrada, entonces si multiplicamos primero y elevamos al cuadrado después, obtenemos

$$y[n] = 4x^2[n].$$

Sin embargo, si multiplicamos por dos después de elevar al cuadrado, tenemos

$$y[n] = 2x^2[n].$$

Por tanto, el poder intercambiar el orden de los sistemas en cascada es una característica particular de los sistemas LTI. De hecho, como se muestra en el problema 2.51, para que esta propiedad sea válida en general, necesitamos tanto la linealidad como la invariancia en el tiempo.

2.3.4 Sistemas LTI con y sin memoria

Como se especificó en la sección 1.6.1, un sistema es sin memoria si su salida en cualquier tiempo depende sólo del valor de la entrada en ese mismo tiempo. Gracias a la ecuación (2.39) podemos ver que la única manera en que esto se cumpla para un sistema LTI dis-

creto es que $h[n] = 0$ para $n \neq 0$. En este caso la respuesta al impulso tiene la forma

$$h[n] = K\delta[n], \tag{2.62}$$

donde $K = h[0]$ es una constante y la suma de convolución se reduce a la relación

$$y[n] = Kx[n]. \tag{2.63}$$

Si un sistema LTI discreto tiene una respuesta al impulso $h[n]$ que no es idéntica a cero para $n \neq 0$, entonces el sistema tiene memoria. Un ejemplo de un sistema LTI con memoria es el sistema proporcionado por la ecuación (2.42). La respuesta al impulso para este sistema, ofrecida en la ecuación (2.41), es diferente de cero para $n = 1$.

De la ecuación (2.40) podemos deducir propiedades similares de los sistemas LTI continuos con y sin memoria. En particular, un sistema LTI continuo es sin memoria si $h(t) = 0$ para $t \neq 0$, y dicho sistema LTI sin memoria tiene la forma

$$y(t) = Kx(t) \tag{2.64}$$

para alguna constante K y tiene la respuesta al impulso

$$h(t) = K\delta(t). \tag{2.65}$$

Note que si $K = 1$ en las ecuaciones (2.62) y (2.65), entonces estos sistemas llegan a ser sistemas identidad, con salida igual a la entrada y con respuesta al impulso unitario igual al impulso unitario. En este caso, las fórmulas de suma e integral de convolución implican que

$$x[n] = x[n] * \delta[n]$$

y

$$x(t) = x(t) * \delta(t),$$

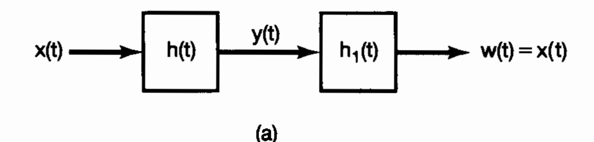
las cuales se reducen a las propiedades de selección de los impulsos unitarios continuos y discretos:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$$

2.3.5 Invertibilidad de sistemas LTI

Considere un sistema LTI continuo con respuesta al impulso $h(t)$. Con base en el análisis de la sección 1.6.2, este sistema es invertible únicamente si existe un sistema inverso que, cuando está conectado en serie con el sistema original, produce una salida igual a la entrada del primer sistema. Más aún, si un sistema LTI es invertible, entonces tiene un inverso LTI. (Véase el problema 2.50.) Por tanto, tenemos el dibujo mostrado en la figura 2.26. Se nos ha dado un sistema con respuesta al impulso $h(t)$. El sistema inverso, con respuesta al impulso $h_1(t)$ resulta en $w(t) = x(t)$, tal que la interconexión en serie en la figura 2.26(a) sea idéntica al sistema identidad de la figura 2.26(b). Ya que la respuesta



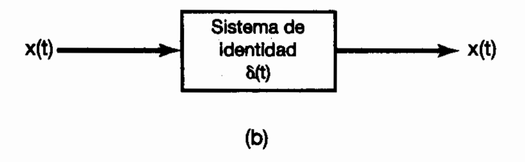


Figura 2.26 Concepto de un sistema inverso para los sistemas LTI continuos. El sistema con respuesta al impulso $h_1(t)$ es el inverso del sistema con respuesta al impulso $h(t)$ si $h(t)*h_1(t) = \delta(t)$.

total al impulso en la figura 2.26(a) es $h(t) * h_1(t)$, tenemos la condición de que, para satisfacerla, $h_1(t)$ debe ser la respuesta al impulso del sistema inverso, o sea:

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t). \tag{2.66}$$

De manera similar, en el caso discreto la respuesta al impulso $h_1[n]$ del sistema inverso para un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ debe cumplir con

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]. \tag{2.67}$$

Los siguientes dos ejemplos ilustran la invertibilidad y la construcción de un sistema inverso.

Ejemplo 2.11

Considere el sistema LTI que consiste en un puro corrimiento en el tiempo

$$y(t) = x(t - t_0). \tag{2.68}$$

Este sistema está *retrasado* si $t_0 > 0$ y *adelantado* si $t_0 < 0$. Por ejemplo, si $t_0 > 0$, entonces la salida en el tiempo t es igual al valor de la entrada en el tiempo anterior $t - t_0$. Si $t_0 = 0$, el sistema en la ecuación (2.68) es el sistema identidad y es por tanto sin memoria. Para cualquier otro valor de t_0, este sistema tiene memoria, ya que responde al valor de la entrada en un tiempo diferente al tiempo actual.

La respuesta al impulso para el sistema se puede obtener de la ecuación (2.68) tomando la entrada igual a $\delta(t)$, es decir,

$$h(t) = \delta(t - t_0). \tag{2.69}$$

Por tanto,

$$x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0). \tag{2.70}$$

Esto es, la convolución de una señal con un impulso desplazado, simplemente desplaza la señal.

Para recuperar la entrada a partir de la salida, es decir, para invertir el sistema, todo lo que se requiere es desplazar la salida en sentido contrario. El sistema con esta compensación de corrimiento en el tiempo es entonces el sistema inverso. Esto es, si

tomamos

$$h_1(t) = \delta(t + t_0),$$

entonces

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t).$$

De manera similar, un mero corrimiento en el tiempo en tiempo discreto tiene la respuesta al impulso unitario $\delta[n - n_0]$, de manera que el convolucionar una señal con un impulso desplazado es lo mismo que desplazar la señal. Además, el inverso del sistema LTI con respuesta la impulso $\delta[n - n_0]$ es el sistema LTI que desplaza la señal en la dirección opuesta por la misma cantidad, es decir, el sistema LTI con respuesta al impulso $\delta[n + n_0]$.

Ejemplo 2.12

Considere un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h[n] = u[n]. \tag{2.71}$$

Usando la suma de convolución, podemos calcular la respuesta de este sistema a una entrada arbitraria:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n - k]. \tag{2.72}$$

Ya que $u[n - k]$ es igual a 0 para $n - k < 0$ y 1 para $n - k \geq 0$, la ecuación (2.72) se convierte en

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]. \tag{2.73}$$

Es decir, este sistema, el cual encontramos primero en la sección 1.6.1 [vea la ecuación (1.92)], es un sumador o acumulador que calcula la sumatoria consecutiva de todos los valores de la entrada hasta el tiempo presente. Como ya vimos en la sección 1.6.2, este sistema es invertible, y su inverso, como se obtuvo por la ecuación (1.99), es

$$y[n] = x[n] - x[n - 1], \tag{2.74}$$

el cual es simplemente una operación de *primera diferencia*. Si escogemos $x[n] = \delta[n]$, encontraremos que la respuesta al impulso del sistema inverso es

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]. \tag{2.75}$$

Como una comprobación de que $h[n]$ en la ecuación (2.71) y $h_1[n]$ en la ecuación (2.75) son realmente las respuestas al impulso de los sistemas LTI que son inversos uno de otro, podemos verificar la ecuación (2.67) por cálculo directo:

$$\begin{aligned} h[n] * h_1[n] &= u[n] * \{\delta[n] - \delta[n - 1]\} \\ &= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n - 1] \\ &= u[n] - u[n - 1] \\ &= \delta[n]. \end{aligned} \tag{2.76}$$

2.3.6 Causalidad para los sistemas LTI

En la sección 1.6.3 presentamos la propiedad de causalidad: la salida de un sistema causal depende sólo de los valores presentes y pasados de la entrada al mismo. Si usamos la suma y la integral de convolución, podemos relacionar esta propiedad con una propiedad correspondiente de la respuesta al impulso de un sistema LTI. En concreto, para que un sistema LTI discreto sea causal, $y[n]$ no debe depender de $x[k]$ para $k > n$. De la ecuación (2.39) sabemos que, para que esto sea válido, todos los coeficientes $h[n-k]$ que multiplican valores de $x[k]$ para $k > n$ deben ser cero. Entonces, esto requiere que la respuesta al impulso de un sistema LTI causal discreto satisfaga la condición

$$h[n] = 0 \quad \text{para } n < 0. \tag{2.77}$$

De acuerdo con la ecuación (2.77), la respuesta al impulso de un sistema LTI causal debe ser cero antes de que ocurra el impulso, lo cual es consistente con el concepto intuitivo de causalidad. De manera más general, como se muestra en el problema 1.44, la causalidad para un sistema lineal es equivalente a la condición de *reposo inicial*; es decir, si la entrada a un sistema causal es 0 hasta algún punto en el tiempo, entonces la salida también debe ser 0 hasta ese tiempo. Es importante subrayar que la equivalencia entre la causalidad y la condición de reposo inicial se aplica sólo a sistemas lineales. Por ejemplo, como se analizó en la sección 1.6.6, el sistema $y[n] = 2x[n] + 3$ no es lineal. Sin embargo, es causal, y de hecho sin memoria. Por otro lado, si $x[n] = 0$, $y[n] = 3 \neq 0$, de modo que no satisface la condición de reposo inicial.

Para un sistema LTI causal discreto, la condición en la ecuación (2.77) implica que la representación de la suma de convolución en la ecuación (2.39) se convierta en

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k], \tag{2.78}$$

y la forma equivalente alternativa, la ecuación (2.43), es ahora

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]. \tag{2.79}$$

De manera análoga, un sistema LTI continuo es causal si

$$h(t) = 0 \quad \text{para } t < 0, \tag{2.80}$$

y en este caso la integral de convolución está dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \tag{2.81}$$

Tanto el acumulador ($h[n] = u[n]$) como su inverso ($h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$), descritos en el ejemplo 2.12, satisfacen la ecuación (2.77) y por tanto son causales. El puro corrimiento en el tiempo con respuesta al impulso $h(t) = \delta(t - t_0)$ es causal para $t_0 \geq 0$ (cuando el corrimiento en el tiempo es un retardo), pero es no causal para $t_0 < 0$ (en cuyo caso el corrimiento en el tiempo es un adelanto, de modo que la salida anticipa valores futuros de la entrada).

Finalmente, mientras que la causalidad es una propiedad de los sistemas, es terminología común referirse a una señal como causal si es cero para $n < 0$ o $t < 0$. La motivación para esta terminología surge de las ecuaciones (2.77) y (2.80): la causalidad de un sistema LTI es equivalente a su respuesta al impulso cuando ésta es una señal causal.

2.3.7 Estabilidad para los sistemas LTI

Recordemos de la sección 1.6.4 que un sistema es *estable* si cada entrada limitada produce una salida limitada. Para determinar las condiciones bajo las cuales los sistemas LTI son estables, considere una entrada $x[n]$ que está limitada en magnitud:

$$|x[n]| < B \quad \text{para toda } n. \tag{2.82}$$

Suponga que aplicamos esta entrada a un sistema LTI con respuesta al impulso unitario $h[n]$. Entonces, usando la suma de convolución, obtenemos una expresión para la magnitud de la salida

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]\right|. \tag{2.83}$$

Ya que la magnitud de la suma de un conjunto de números no es mayor que la suma de las magnitudes de los números, deducimos de la ecuación (2.83) que

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]||x[n-k]|. \tag{2.84}$$

A partir de la ecuación (2.82), $|x[n-k]| < B$ para todos los valores de k y n. Junto con la ecuación (2.84), esto implica que

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \quad \text{para toda } n. \tag{2.85}$$

De la ecuación (2.85) podemos concluir que si la respuesta al impulso unitario es *absolutamente sumable*, esto es, si

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty, \tag{2.86}$$

entonces $y[n]$ está limitada en magnitud y por consiguiente el sistema es estable. En consecuencia, la ecuación (2.86) es una condición suficiente para garantizar la estabilidad de un sistema LTI discreto. De hecho, ésta es también una condición necesaria, ya que, como se muestra en el problema 2.49, si la ecuación (2.86) no se satisface, hay entradas limitadas que producen salidas no limitadas. Así, la estabilidad de un sistema LTI discreto es por completo equivalente a la ecuación (2.86).

En el caso continuo obtenemos una caracterización análoga de estabilidad en términos de la respuesta al impulso de un sistema LTI. Concretamente, si $|x(t)| < B$ para toda t, entonces, en analogía con las ecuaciones (2.83)-(2.85), encontramos que

$$\begin{aligned}|y(t)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \\ &\leq B\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau.\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema es estable si la respuesta al impulso es *absolutamente integrable*; es decir, si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty. \tag{2.87}$$

Como en el caso discreto, si la ecuación (2.87) no se satisface, habrá entradas limitadas que producirán salidas no limitadas. Por consiguiente, la estabilidad de un sistema LTI de tiempo continuo es equivalente a la ecuación (2.87). El uso de las ecuación (2.86) y (2.87) para probar la estabilidad se muestra en los dos siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.13

Considere un sistema que es un puro corrimiento en el tiempo, ya sea continuo o discreto. Entonces en el caso discreto

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\delta[n-n_0]| = 1, \tag{2.88}$$

mientras que en el caso continuo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(\tau - t_0)|d\tau = 1, \tag{2.89}$$

y concluimos que ambos sistemas son estables. Esto no debería sorprendernos, ya que si una señal está limitada en magnitud, también lo estará cualquier versión desplazada en el tiempo de esa misma señal.

Ahora considere el acumulador descrito en el ejemplo 2.12. Como analizábamos en la sección 1.6.4, éste es un sistema inestable ya que si aplicamos una entrada constante al acumulador, la salida crece sin límite. También puede verse que este sistema es inestable por el hecho de que su respuesta al impulso $u[n]$ no es absolutamente sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] = \infty.$$

De manera parecida, considere el integrador, la contraparte continua del acumulador:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau. \tag{2.90}$$

Éste es un sistema inestable precisamente por la misma razón que se dio en el acumulador, es decir, una entrada constante da lugar a una salida que crece sin límite. La respuesta al impulso para el integrador puede encontrarse permitiendo que $x(t) = \delta(t)$,

en cuyo caso

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\tau)|d\tau = \int_{0}^{+\infty} d\tau = \infty.$$

Puesto que la respuesta al impulso no es absolutamente integrable, el sistema no es estable.

2.3.8 Respuesta al escalón unitario de un sistema LTI

Hasta ahora hemos visto que la representación de un sistema LTI en términos de su respuesta al impulso nos permite obtener caracterizaciones muy explícitas de las propiedades de los sistemas. En pocas palabras, ya que $h[n]$ o $h(t)$ determinan por completo el comportamiento de un sistema LTI, hemos podido relacionar las propiedades de los sistemas, como la estabilidad y la causalidad, con las propiedades de la respuesta al impulso.

Hay otra señal que también se usa con bastante frecuencia para describir el comportamiento de sistemas LTI: la *respuesta al escalón unitario*, $s[n]$ o $s(t)$, que corresponde a la salida cuando $x[n] = u[n]$ o $x(t) = u(t)$. La encontraremos útil cuando llegue la ocasión de referirse a la respuesta al escalón y, por tanto, vale la pena relacionarla con la respuesta al impulso. A partir de la representación de la suma de convolución, sabemos que la respuesta al escalón de un sistema LTI discreto es la convolución del escalón unitario con la respuesta al impulso; esto es,

$$s[n] = u[n] * h[n].$$

Sin embargo, por la propiedad conmutativa de la convolución, $s[n] = h[n] * u[n]$, y por tanto $s[n]$ puede verse como la respuesta a la entrada $h[n]$ de un sistema LTI discreto con respuesta al impulso unitario $u[n]$. Como hemos visto en el ejemplo 2.12, $u[n]$ es la respuesta al impulso unitario del acumulador. Entonces,

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]. \tag{2.91}$$

A partir de esta ecuación y del ejemplo 2.12, resulta claro que $h[n]$ se puede recuperar a partir de $s[n]$ usando la relación

$$h[n] = s[n] - s[n-1]. \tag{2.92}$$

Esto es, la respuesta al escalón de un sistema LTI discreto es la sumatoria consecutiva de su respuesta al impulso [ecuación (2.91)]. Por el contrario, la respuesta al impulso de un sistema LTI discreto es la primera diferencia de su respuesta al escalón [ecuación (2.92)].

De manera similar, en el caso continuo la respuesta al escalón de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ está dada por $s(t) = u(t) * h(t)$, la cual también es igual a la respuesta de un integrador [con respuesta al impulso $u(t)$] a la entrada $h(t)$. Es decir, la respuesta al escalón unitario de un sistema LTI de tiempo continuo es la integral consecutiva de su respuesta al impulso, o

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau, \tag{2.93}$$

y a partir de la ecuación (2.93), la respuesta al impulso unitario es la primera derivada de la respuesta al escalón unitario,[1] o

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t). \tag{2.94}$$

Por consiguiente, tanto en el caso continuo como en el discreto, la respuesta al escalón unitario también se puede usar para caracterizar a un sistema LTI, ya que podemos calcular la respuesta al impulso unitario a partir de ella. En el problema 2.45 se derivan las expresiones análogas a la suma de convolución y a la integral de convolución para la representación de un sistema LTI en términos de su respuesta al escalón unitario.

2.4 SISTEMAS LTI CAUSALES DESCRITOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE DIFERENCIAS

Una clase en extremo importante de sistemas continuos es aquella para la cual la entrada y la salida están relacionadas a través de una *ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes*. Las ecuaciones de este tipo surgen de la descripción de una amplia variedad de sistemas y fenómenos físicos. Por ejemplo, como explicábamos en el capítulo 1, la respuesta del circuito *RC* en la figura 1.1, así como el movimiento de un vehículo sujeto a entradas de aceleración y fuerzas de fricción representado en la figura 1.2, se pueden describir mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Este tipo de ecuaciones diferenciales surgen en la descripción de sistemas mecánicos que contienen fuerzas de restauración y de amortiguamiento, en la cinética de reacciones químicas y en muchos otros contextos.

En forma correspondiente, una clase importante de sistemas discretos es aquella en la cual la entrada y la salida están relacionadas a través de una *ecuación de diferencias lineal con coeficientes constantes*. Las ecuaciones de este tipo se utilizan para describir el comportamiento secuencial de procesos muy diferentes. Veamos una muestra de ello: en el ejemplo 1.10 vimos cómo las ecuaciones de diferencias surgen de la descripción de la acumulación de ahorros en una cuenta de banco, y en el ejemplo 1.11 vimos la forma en que se pueden usar para describir una simulación digital de un sistema continuo descrito por una ecuación diferencial. Las ecuaciones de diferencias también surgen con frecuencia en la especificación de sistemas discretos diseñados para realizar operaciones particulares en la señal de entrada. Por ejemplo, el sistema que calcula la diferencia entre valores sucesivos de entrada, como en la ecuación (1.99), y el sistema descrito por la ecuación (1.104) que calcula el valor promedio de la entrada sobre un intervalo, son descritos mediante ecuaciones de diferencias.

A lo largo de todo este libro habrá muchas ocasiones en las cuales consideraremos y examinaremos sistemas descritos mediante ecuaciones lineales y con coeficientes constantes diferenciales y de diferencias. En esta sección vemos de manera general estos sistemas para introducir algunas de las ideas básicas involucradas en la solución de las ecuaciones diferenciales y de diferencias, y para descubrir y explorar algunas de las propiedades de los sistemas descritos por dichas ecuaciones. En los capítulos siguientes desarrollaremos herramientas adicionales para el análisis de señales y sistemas que aumentarán en forma considerable tanto nuestra habilidad para analizar los sistemas descritos por esas ecuaciones como nuestra comprensión de sus características y comportamiento.

[1]En todo el libro usaremos las dos notaciones indicadas en la ecuación (2.94) para denotar la primera derivada. Una notación análoga también será usada para derivadas de mayor orden.

2.4.1 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Para introducir algunas de las ideas más importantes referentes a sistemas especificados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, consideremos una ecuación diferencial de primer orden como en la ecuación (1.85):

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \tag{2.95}$$

donde $y(t)$ denota la salida del sistema y $x(t)$ es la entrada. Por ejemplo, al comparar la ecuación (2.95) con la ecuación diferencial (1.84) para la velocidad de un vehículo sujeto a fuerzas aplicadas y de fricción, vemos que la ecuación (2.95) correspondería exactamente a este sistema si $y(t)$ estuviera identificada con la velocidad $v(t)$ del vehículo, si $x(t)$ fuera tomada como la fuerza aplicada $f(t)$, y si los parámetros en la ecuación (1.84) estuvieran normalizados en unidades tales que $b/m = 2$ y $1/m = 1$.

Un punto muy importante acerca de ecuaciones diferenciales como la ecuación (2.95) es que proporcionan una especificación implícita del sistema. Es decir, describen una relación entre la entrada y la salida antes que una expresión explícita para la salida del sistema como una función de la entrada. Para obtener una expresión explícita, debemos resolver la ecuación diferencial. Para encontrar una solución, necesitamos más información que la proporcionada por la ecuación diferencial sola. Por ejemplo, para determinar la velocidad de un automóvil al final de un intervalo de 10 segundos cuando ha estado sujeto a una aceleración constante de 1 m/s^2 durante 10 segundos, necesitaríamos también conocer qué tan rápido se estuvo moviendo el vehículo al *inicio* del intervalo. De manera similar, si se nos dice que se aplica un voltaje constante de 1 volt de la fuente al circuito *RC* de la figura 1.1 durante 10 segundos, no podemos determinar cuál es el voltaje del capacitor al final de ese intervalo si no sabemos cuál es el voltaje inicial del capacitor.

De manera más general, para resolver una ecuación diferencial, debemos especificar una o más condiciones auxiliares y, una vez que son especificadas, podemos entonces, en principio, obtener una expresión explícita para la salida en términos de la entrada. En otras palabras, una ecuación diferencial tal como la ecuación (2.95) describe una limitante entre la entrada y la salida de un sistema, pero para caracterizar por completo el sistema debemos además especificar las condiciones auxiliares. Diferentes selecciones de estas condiciones auxiliares conducen por tanto a relaciones diferentes entre la entrada y la salida. En la mayor parte de este libro nos enfocaremos en el uso de ecuaciones diferenciales para describir los sistemas LTI causales, para los cuales las condiciones auxiliares toman una forma particular y simple. Como una forma de ilustrar esto y descubrir además algunas de las propiedades básicas de las soluciones a las ecuaciones diferenciales, veamos la solución de la ecuación (2.95) para una señal de entrada específica $x(t)$.[2]

[2]Nuestro análisis de la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes es breve, ya que damos por hecho que el lector está familiarizado con esta materia. Como un repaso, recomendamos algún texto sobre la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, tal como *Ordinary Differential Equations* (3a. edición), de G. Birkhoff y G.-C. Rota (Nueva York: John Wiley and Sons, 1978); o *Elementary Differential Equations* (3a. edición), de W.E. Boyce y R.C. DiPrima (Nueva York: John Wiley and Sons, 1977). Asimismo, hay muchos textos que analizan las ecuaciones diferenciales en el contexto de la teoría de circuitos. Vea, por ejemplo, *Basic Circuit Theory* de L.O. Chua, C.A. Desoer y E.S. Kuh (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1987). Como se mencionó en el texto, en los siguientes capítulos presentamos otros métodos muy útiles para resolver ecuaciones diferenciales lineales que serán suficientes para nuestros propósitos. Además, en los problemas al final del capítulo se incluye un gran número de ejercicios que involucran la solución de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 2.14

Considere la solución de la ecuación (2.95) cuando la señal de entrada es

$$x(t) = Ke^{3t}u(t), \tag{2.96}$$

donde K es un número real.

La solución completa de la ecuación (2.96) consiste en la suma de una *solución particular* $y_p(t)$ y una *solución homogénea*, $y_h(t)$, es decir,

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t), \tag{2.97}$$

donde la solución particular satisface la ecuación (2.95) y $y_h(t)$ es una solución de la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0. \tag{2.98}$$

Un método común para encontrar la solución particular para una señal de entrada exponencial como la ecuación (2.96) es buscar la llamada *respuesta forzada*, es decir, una señal de la misma forma que la entrada. Con respecto a la ecuación (2.95), puesto que $x(t) = Ke^{3t}$ para $t > 0$, planteamos una solución hipotética para $t > 0$ de la forma

$$y_p(t) = Ye^{3t}, \tag{2.99}$$

donde Y es un número que debemos determinar. Sustituyendo las ecuaciones (2.96) y (2.99) con la ecuación (2.95) para $t > 0$, obtenemos

$$3Ye^{3t} + 2Ye^{3t} = Ke^{3t}. \tag{2.100}$$

Cancelando el factor e^{3t} en ambos miembros de la ecuación (2.100), obtenemos

$$3Y + 2Y = K, \tag{2.101}$$

o

$$Y = \frac{K}{5}, \tag{2.102}$$

de modo que

$$y_p(t) = \frac{K}{5}e^{3t}, \quad t > 0. \tag{2.103}$$

Para determinar $y_h(t)$ planteamos una solución hipotética de la forma

$$y_h(t) = Ae^{st}. \tag{2.104}$$

Sustituyéndola con la ecuación (2.98) da

$$Ase^{st} + 2Ae^{st} = Ae^{st}(s + 2) = 0. \tag{2.105}$$

A partir de esta ecuación, nos damos cuenta de que debemos tomar $s = -2$ y que Ae^{-2t} es una solución de la ecuación (2.98) para *cualquier* selección de A. Utilizando este hecho y la ecuación (2.103) en la ecuación (2.97), encontramos que la solución de la ecuación diferencial para $t > 0$ es

$$y(t) = Ae^{-2t} + \frac{K}{5}e^{3t}, \quad t > 0. \tag{2.106}$$

Como hicimos notar antes, la ecuación diferencial (2.95) por sí misma no especifica de manera única la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t)$ en la ecuación (2.96). En particular, la constante A en la ecuación (2.106) aún no ha sido determinada. Para que el valor de A sea determinado, necesitamos especificar una condición auxiliar además de la ecuación diferencial (2.95). Como exploramos en el problema 2.34, diferentes selecciones para esta condición auxiliar conducen a diferentes soluciones de $y(t)$ y, en consecuencia, a diferentes relaciones entre la entrada y la salida. Como ya se ha indicado, en la mayor parte de este libro nos enfocaremos en las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones de diferencias usadas para describir los sistemas que son LTI y causales, y en este caso la condición auxiliar toma la forma de la condición de reposo inicial. Es decir, como se muestra en el problema 1.44, para un sistema LTI causal, si $x(t) = 0$ para $t < t_0$, entonces $y(t)$ también debe ser igual a 0 para $t < t_0$. De la ecuación (2.96) vemos que, para nuestro ejemplo, $x(t) = 0$ para $t < 0$ y, por tanto, la condición de reposo inicial implica que $y(t) = 0$ para $t < 0$. Al evaluar la ecuación (2.106) en $t = 0$ y estableciendo $y(0) = 0$ se obtiene

$$0 = A + \frac{K}{5},$$

o

$$A = -\frac{K}{5}.$$

Entonces, para $t > 0$,

$$y(t) = \frac{K}{5}\left[e^{3t} - e^{-2t}\right], \tag{2.107}$$

mientras que para $t < 0$, $y(t) = 0$, debido a la condición de reposo inicial. Combinando estos dos casos, obtenemos la solución completa

$$y(t) = \frac{K}{5}\left[e^{3t} - e^{-2t}\right]u(t). \tag{2.108}$$

El ejemplo 2.14 ilustra varios puntos muy importantes que conciernen a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y a los sistemas que éstas representan. Primero, la respuesta a una entrada $x(t)$ consistirá, por lo general, en la suma de una solución particular a la ecuación diferencial y a una solución homogénea, es decir, una solución a la ecuación diferencial fijando la entrada a cero. A la solución homogénea con frecuencia se le conoce como la *respuesta natural* del sistema. Las respuestas naturales de circuitos eléctricos y sistemas mecánicos sencillos se exploran en los problemas 2.61 y 2.62.

En el ejemplo 2.14 también vimos que, para determinar por completo la relación entre la entrada y la salida de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial como la ecuación (2.95), debemos especificar las condiciones auxiliares. Una implicación de este hecho, el cual se ilustra en el problema 2.34, es que las selecciones diferentes de las condiciones auxiliares conducen a diferentes relaciones entre la entrada y la salida. Como se mostró en el ejemplo, en la mayor parte usaremos la condición de reposo inicial para los sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales. En este ejemplo, puesto que la entrada fue 0 para $t < 0$, la condición de reposo inicial involucró la condición inicial $y(0) = 0$. Como se planteó anteriormente, y fue ilustrado en el problema 2.33, bajo la

condición de reposo inicial el sistema descrito mediante la ecuación (2.95) es LTI y causal.[3] Por ejemplo, si en la ecuación (2.96) multiplicamos la entrada por dos, la salida resultante será el doble de la salida en la ecuación (2.108).

Es importante enfatizar que la condición de reposo inicial no especifica una condición inicial de cero en un punto específico en el tiempo, sino que más bien ajusta dicho punto en el tiempo de modo que la respuesta sea cero *hasta* que la entrada se vuelva diferente de cero. Por tanto, si $x(t) = 0$ para $t \leq t_0$ para el sistema LTI causal descrito por la ecuación (2.95), entonces $y(t) = 0$ para $t \leq t_0$, y usaríamos la condición inicial $y(t_0) = 0$ para resolver para la salida en $t > t_0$. Como un ejemplo físico, considere de nuevo el circuito en la figura 1.1, también analizado en el ejemplo 1.8. El reposo inicial para este ejemplo corresponde al planteamiento de que, hasta no conectar una fuente de voltaje diferente de cero al circuito, el voltaje del capacitor será de cero. Entonces, si empezamos a usar el circuito al mediodía de hoy, el voltaje inicial del capacitor será de cero al momento de conectar la fuente de voltaje el mediodía de hoy. De manera similar, si en vez de ello empezamos a usar el circuito al mediodía de mañana, el voltaje inicial del capacitor será cero al momento de conectar la fuente de voltaje el mediodía de mañana.

Este ejemplo también nos proporciona una idea intuitiva de por qué la condición de reposo inicial hace un sistema, descrito por una ecuación diferencial lineal con coeficiente constante, invariante en el tiempo. Por ejemplo, si realizamos un experimento en el circuito, empezando con reposo inicial y considerando después que los coeficientes R y C no cambian con el tiempo, esperaríamos obtener los mismos resultados ya fuera que hiciéramos el experimento hoy o mañana. Esto es, si realizamos experimentos idénticos en los dos días, en donde el circuito empiece a operar a partir del reposo inicial al mediodía de cada día, entonces esperaríamos observar idénticas respuestas (es decir, respuestas que están simplemente desplazadas en el tiempo por un día una con respecto de la otra).

Así como hemos usado la ecuación diferencial de primer orden (2.95) como el medio para el análisis de estos temas, las mismas ideas se extienden de forma directa a los sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales de mayor orden. Una ecuación diferencial general lineal de orden N con coeficiente constante está dada por

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \tag{2.109}$$

El orden se refiere a la derivada de mayor orden de la salida $y(t)$ que aparece en la ecuación. En el caso cuando $N = 0$, la ecuación (2.109) se reduce a

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \tag{2.110}$$

En este caso $y(t)$ es una función explícita de la entrada $x(t)$ y sus derivadas. Para $N \geq 1$, la ecuación (2.109) especifica la salida en forma implícita en términos de la entrada. En este caso, el análisis de la ecuación procede de manera análoga a nuestro análisis de la ecuación diferencial de primer orden en el ejemplo 2.14. La solución $y(t)$ consiste de dos partes, una solución particular a la ecuación (2.109) más una solución a la ecuación

[3] De hecho, como también se muestra en el problema 2.34, si la condición inicial de la ecuación (2.95) es diferente de cero, el sistema resultante es incrementalmente lineal. Esto es, la respuesta total puede verse, como en la figura 1.48, como la superposición de la respuesta a las condiciones iniciales solas (con la entrada fijada en 0) sobre la respuesta a la entrada con una condición inicial de 0 (es decir, la respuesta del sistema LTI causal descrito por la ecuación (2.95)).

diferencial homogénea

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0. \qquad (2.111)$$

Las soluciones a esta ecuación se conocen como las *respuestas naturales* del sistema.

Al igual que en el caso de primer orden, la ecuación diferencial (2.109) no especifica por completo la salida en términos de la entrada, por lo que necesitamos identificar las condiciones auxiliares para determinar por completo la relación entrada-salida del sistema. De nueva cuenta, las diferentes selecciones para estas condiciones auxiliares dan como resultado diferentes relaciones entrada-salida, pero en la mayor parte de este libro usaremos la condición de reposo inicial cuando se trate de sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales. Esto es, si $x(t) = 0$ para $t \leq t_0$, suponemos que $y(t) = 0$ para $t \leq t_0$ y, por tanto, la respuesta para $t > t_0$ se puede calcular a partir de la ecuación diferencial (2.109) con las condiciones iniciales

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \ldots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0. \qquad (2.112)$$

Bajo la condición de reposo inicial, el sistema descrito por la ecuación (2.109) es causal y LTI. Dadas las condiciones iniciales en la ecuación (2.112), la salida $y(t)$ puede, en principio, determinarse resolviendo la ecuación diferencial de la forma en que se hizo en el ejemplo 2.14 y se explica más tarde en varios problemas al final del capítulo. Sin embargo, en los capítulos 4 y 9 desarrollaremos algunas herramientas para el análisis de sistemas LTI continuos que facilitarán enormemente la solución de las ecuaciones diferenciales y, en particular, nos proporcionarán métodos poderosos para analizar y caracterizar las propiedades de los sistemas descritos por esas ecuaciones.

2.4.2 Ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes

La contraparte en tiempo discreto de la ecuación (2.109) es la ecuación de diferencias lineal de orden N con coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]. \qquad (2.113)$$

Una ecuación de este tipo se puede resolver de manera exactamente análoga a la de las ecuaciones diferenciales (véase el problema 2.32).[4] En concreto, la solución $y[n]$ puede escribirse como la suma de una solución particular de la ecuación (2.113) y de una solución de la ecuación homogénea

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0. \qquad (2.114)$$

[4]Para un tratamiento detallado de los métodos para resolver ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes, vea *Finite Difference Equations* de H. Levy y F. Lessman (Nueva York, Macmillan, Inc., 1961), o *Finite Difference Equations and Simulations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1968) de F. B. Hildebrand. En el capítulo 6 presentamos otro método para resolver ecuaciones de diferencias que facilita en gran medida el análisis de los sistemas lineales invariantes en el tiempo que son descritos por ellas. Además, remitimos al lector a los problemas al final de este capítulo, los cuales tienen que ver con la solución de las ecuaciones de diferencias.

Las soluciones a esta ecuación homogénea se conocen como la respuesta natural del sistema descrito por la ecuación (2.113).

Como en el caso continuo, la ecuación (2.113) no especifica por completo la salida en términos de la entrada. Para hacer esto, debemos también especificar algunas condiciones auxiliares. Puesto que hay muchas posibles selecciones para las condiciones auxiliares que conducen a diferentes relaciones entrada-salida, nos enfocaremos en su mayor parte en la condición de reposo inicial, es decir, si $x[n] = 0$ para $n < n_0$, entonces $y[n] = 0$ también para $n < n_0$. Con reposo inicial, el sistema descrito por la ecuación (2.113) es LTI y causal.

Aunque todas estas propiedades se pueden desarrollar siguiendo un planteamiento que es directamente paralelo a nuestro análisis para ecuaciones diferenciales, el caso discreto ofrece un camino alternativo. Éste surge de la observación de que la ecuación (2.113) se puede reacomodar de la siguiente forma:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}. \tag{2.115}$$

La ecuación (2.115) expresa de forma directa la salida en el tiempo n en términos de los valores previos de la entrada y de la salida. De aquí podemos ver de manera inmediata la necesidad de condiciones auxiliares. Para poder calcular $y[n]$, necesitamos conocer $y[n-1], \ldots, y[n-N]$. Por tanto, si nos dan la entrada para toda n y un conjunto de condiciones auxiliares tales como $y[-N]$, $y[-N+1], \ldots, y[-1]$, la ecuación (2.115) puede resolverse para valores sucesivos de $y[n]$.

Una ecuación de la forma de la ecuación (2.113) o (2.115) se llama *ecuación recursiva*, ya que especifica un procedimiento recursivo para determinar la salida en términos de la entrada y de las salidas previas. En el caso especial cuando $N = 0$, la ecuación (2.115) se reduce a

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M}\left(\frac{b_k}{a_0}\right)x[n-k]. \tag{2.116}$$

Ésta es la contraparte en tiempo discreto del sistema continuo dado en la ecuación (2.110). En este caso $y[n]$ es una función explícita de los valores presentes y previos de la entrada. Por esta razón, la ecuación (2.116) se conoce como *ecuación no recursiva*, ya que no usamos de forma recursiva los valores de la salida calculados previamente para determinar el valor presente de la salida. Por tanto, al igual que en el caso del sistema dado en la ecuación (2.110), no necesitamos condiciones auxiliares para determinar $y[n]$. Además, la ecuación (2.116) describe un sistema LTI y, por cálculo directo se encuentra que la respuesta al impulso de este sistema es

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}. \tag{2.117}$$

Esto es, la ecuación (2.116) no es más que la suma de convolución. Observe que la respuesta al impulso para este sistema tiene duración finita; es decir, es diferente de cero sólo dentro de un intervalo finito de tiempo. Debido a esta propiedad el sistema especificado por la ecuación (2.116) es a menudo denominado *sistema de respuesta finita al impulso (FIR)*.

Aunque no requerimos condiciones auxiliares para el caso de $N = 0$, tales condiciones son necesarias para el caso recursivo cuando $N \geq 1$. Para ilustrar la solución a este tipo de ecuación y obtener algún conocimiento acerca del comportamiento y de las propiedades de las ecuaciones recursivas de diferencias, examinaremos el sencillo ejemplo siguiente:

Ejemplo 2.15

Considere la ecuación de diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n], \tag{2.118}$$

la cual también se puede expresar en la forma

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1], \tag{2.119}$$

resaltando el hecho de que necesitamos los valores previos de la salida, $y[n-1]$, para calcular el valor actual. Así, para empezar la recursión, necesitamos una condición auxiliar.

Por ejemplo, suponga que imponemos la condición de reposo inicial y consideramos la entrada

$$x[n] = K\delta[n]. \tag{2.120}$$

En este caso, ya que $x[n] = 0$ para $n \leq -1$, la condición de reposo inicial implica que $y[n] = 0$ para $n \leq -1$, así que tenemos una condición inicial $y[-1] = 0$. Partiendo de esta condición inicial, podemos resolver para valores sucesivos de $y[n]$ para $n \geq 0$ como sigue:

$$y[0] = x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = K, \tag{2.121}$$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}K, \tag{2.122}$$

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 K, \tag{2.123}$$

$$\vdots$$

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n K. \tag{2.124}$$

Ya que el sistema especificado por la ecuación (2.118) y la condición de reposo inicial es LTI, su comportamiento entrada-salida se caracteriza por completo por su respuesta al impulso. Haciendo $K = 1$, vemos que la respuesta al impulso para el sistema considerado en este ejemplo es

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]. \tag{2.125}$$

Observe que el sistema LTI causal en el ejemplo 2.15 tiene una respuesta al impulso de duración infinita. De hecho, si $N \geq 1$ en la ecuación (2.113), de manera que la ecuación de diferencias sea recursiva, por lo general se da el caso de que el sistema LTI correspondiente a esta ecuación, junto con la condición de reposo inicial, tendrán una respuesta al impulso de duración infinita. Estos sistemas se conocen como *sistemas de respuesta infinita al impulso (IIR)*.

Como hemos indicado antes, en su mayor parte usaremos ecuaciones recursivas de diferencias en el contexto de describir y analizar los sistemas que son lineales, invariantes en el tiempo y causales, y en consecuencia, por lo general adoptaremos la premisa de reposo inicial. En los capítulos 5 y 10 desarrollaremos herramientas para el análisis de los sistemas discretos que nos proveen con métodos muy útiles y eficientes para resolver las

ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes y para analizar las propiedades de los sistemas que éstas describen.

2.4.3 Representación en diagrama de bloque de sistemas de primer orden descritos mediante ecuaciones diferenciales y de diferencias

Una importante propiedad de los sistemas descritos por ecuaciones de diferencias y diferenciales lineales con coeficientes constantes es que se pueden representar en formas muy sencillas y naturales en términos de interconexiones en diagrama de bloque de operaciones elementales. Esto es significativo por varias razones. Una es que proporciona una representación gráfica que nos facilita el comprender el comportamiento y las propiedades de estos sistemas. Además, dicha representación es de considerable valor para la simulación o instrumentación de los sistemas. Por ejemplo, la representación en diagrama de bloque que será mostrada en esta sección para sistemas continuos, es la base de las simulaciones en las primitivas computadoras analógicas de los sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales, y también se puede transferir directamente a un programa para la simulación de esos sistemas en una computadora digital. Por añadidura, la representación correspondiente para las ecuaciones de diferencias discretas plantea formas sencillas y eficientes en las cuales los sistemas descritos por estas ecuaciones se pueden construir con circuitos digitales. En esta sección, ilustramos las ideas básicas detrás de estas representaciones en diagrama de bloque mediante su construcción para los sistemas causales de primer orden presentados en los ejemplos 1.8-1.11. En los problemas 2.57-2.60 y en los capítulos 9 y 10, consideramos los diagramas de bloques para sistemas descritos mediante otras ecuaciones diferenciales y en diferencias más complejas.

Empezaremos con un caso discreto y, en particular, con el sistema causal descrito por la ecuación de diferencias de primer orden

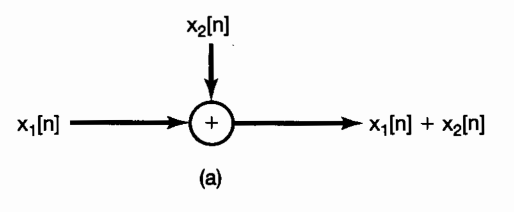
$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]. \tag{2.126}$$

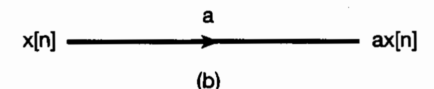
Para desarrollar una representación en diagrama de bloque de este sistema, observe que la evaluación de la ecuación (2.126) requiere de tres operaciones básicas: suma, multiplicación por un coeficiente y retardo (para capturar la relación entre $y[n]$ y $y[n-1]$). Por tanto, definamos tres elementos de red básicos, como se indica en la figura 2.27. Para ver cómo estos tres elementos básicos se pueden usar para representar el sistema causal descrito por la ecuación (2.126), rescribimos esta ecuación en la forma directa planteada por un algoritmo recursivo para calcular los valores sucesivos de la salida $y[n]$:

$$y[n] = -ay[n-1] + bx[n]. \tag{2.127}$$

Este algoritmo se representa gráficamente en la figura 2.28, la cual es un ejemplo de un sistema retroalimentado, ya que la salida se retroalimenta de regreso a través de un retardo y la multiplicación por un coeficiente y entonces se suma a $bx[n]$. La presencia de la retroalimentación es una consecuencia directa de la naturaleza recursiva de la ecuación (2.127).

El diagrama de bloque de la figura 2.28 pone en claro el requerimiento de memoria en el sistema y la consecuente necesidad de las condiciones iniciales. En particular, un retardo corresponde a un elemento de memoria que debe mantener el valor previo de su entrada. De este modo, el valor inicial de dicho elemento de memoria sirve como una condición inicial necesaria para el cálculo recursivo especificado gráficamente en la figura 2.28 y matemáticamente en la ecuación (2.127). Por supuesto, si el sistema descrito por la ecuación (2.126) está inicialmente en reposo, el valor inicial almacenado en el elemento de memoria es cero.





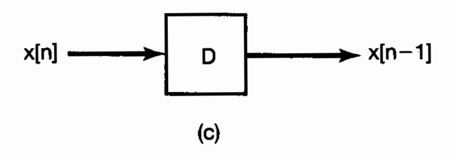


Figura 2.27 Elementos básicos para la representación en diagrama de bloque del sistema causal descrito por la ecuación (2.126): (a) un sumador; (b) multiplicación por un coeficiente; (c) un retardo unitario.

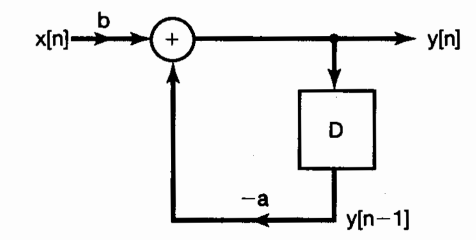


Figura 2.28 Representación en diagrama de bloque del sistema discreto causal descrito por la ecuación (2.126).

Considere ahora el sistema causal continuo descrito mediante una ecuación diferencial de primer orden:

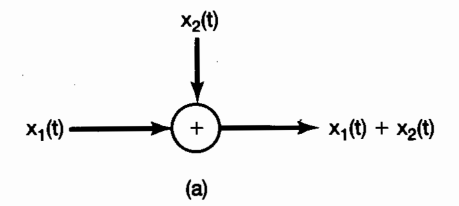
$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t). \tag{2.128}$$

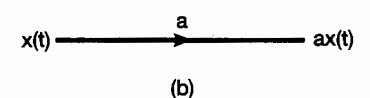
Como un primer intento por definir una representación en diagrama de bloque para este sistema, rescribamos la ecuación como

$$y(t) = \frac{1}{a}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a}x(t). \tag{2.129}$$

El miembro derecho de esta ecuación involucra tres operaciones básicas: suma, multiplicación por un coeficiente y diferenciación. Por tanto, si definimos los tres elementos de red básicos indicados en la figura 2.29, podemos considerar el representar la ecuación (2.129) como una interconexión de estos elementos básicos de una forma análoga a la usada en los sistemas discretos descritos previamente, lo cual da como resultado el diagrama de bloque de la figura 2.30.

Si bien esta figura es una representación válida del sistema causal descrito por la ecuación (2.128), no es la representación que se usa con más frecuencia o la representación que conduce de manera directa a la ejecución práctica, ya que los diferenciadores son tanto difíciles de construir como sensibles en extremo a errores y ruido. Una construcción alternativa que se emplea con más frecuencia se puede obtener rescribien-





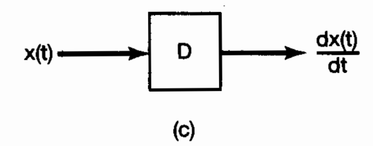


Figura 2.29 Un conjunto posible de elementos básicos para la representación en diagrama de bloque del sistema descrito por la ecuación (2.128): (a) un sumador; (b) multiplicación por un coeficiente; (c) un diferenciador.

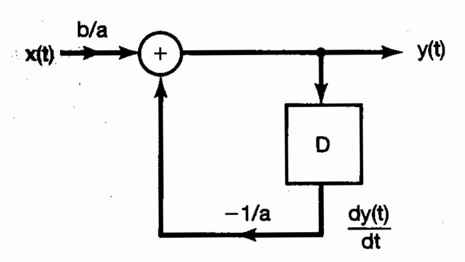


Figura 2.30 Representación en diagrama de bloque del sistema descrito por las ecuaciones (2.128) y (2.129) usando sumadores, multiplicación por coeficientes y diferenciadores.

do primero la ecuación (2.128) como

$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t) \tag{2.130}$$

e integrando entonces desde $-\infty$ hasta t. Específicamente, si suponemos que el sistema descrito por la ecuación (2.130) está inicialmente en reposo, entonces la integral de $dy(t)/dt$ desde $-\infty$ hasta t es precisamente $y(t)$ (debido a que el valor de $y(-\infty)$ es cero). En consecuencia, obtenemos la ecuación

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[bx(\tau) - ay(\tau)\right] d\tau. \tag{2.131}$$

En esta forma, nuestro sistema se puede poner en práctica usando el sumador y el multiplicador de coeficiente indicados en la figura 2.29, junto con un *integrador*, como el que se define en la figura 2.31. La figura 2.32 constituye una representación en diagrama de bloque para este sistema que utiliza estos elementos.

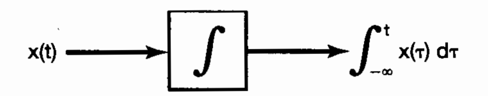


Figura 2.31 Representación gráfica de un integrador.

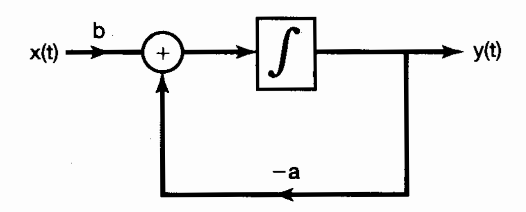


Figura 2.32 Representación en diagrama de bloque del sistema descrito por las ecuaciones (2.128) y (2.131) usando sumadores, multiplicación por coeficientes e integradores.

Ya que los integradores se pueden construir fácilmente usando amplificadores operacionales, representaciones como las de la figura 2.32 conducen de manera directa a las construcciones analógicas, y en realidad ésta es la base de las primitivas computadoras analógicas y los modernos sistemas de computación analógica. Observe que en el caso continuo, el integrador es el que representa el elemento almacenador de memoria del sistema. Esto se observa más fácilmente si consideramos integrar la ecuación (2.130) desde un punto finito en el tiempo t_0, lo que da como resultado la expresión

$$y(t) = y\,(t_0) + \int_{t_0}^{t} [bx(\tau) - ay(\tau)]\, d\tau. \qquad (2.132)$$

Esta ecuación pone en claro el hecho de que la especificación de $y(t)$ requiere de una condición inicial, o sea, el valor de $y(t_0)$. Es precisamente este valor el que almacena el integrador en el tiempo t_0.

Si bien hemos ilustrado la construcción de diagramas de bloque solamente para las más sencillas ecuaciones diferenciales y de diferencias de primer orden, dichos diagramas también se pueden desarrollar para sistemas de mayor orden, lo cual proporciona al mismo tiempo un valioso conocimiento y las posibles puestas en práctica de estos sistemas. En los problemas 2.58 y 2.60 se pueden encontrar algunos ejemplos de diagramas de bloques para sistemas de mayor orden.

2.5 FUNCIONES SINGULARES

En esta sección damos otro vistazo a la función impulso unitario continua para obtener mayores conocimientos acerca de esta importante señal idealizada y para introducir un conjunto de señales relacionadas conocidas colectivamente como *funciones singulares*. De manera particular, en la sección 1.4.2 indicamos que un impulso unitario continuo se puede ver como la idealización de un pulso que sea "lo suficientemente corto" como para que su forma y duración no tengan consecuencias prácticas (es decir, de modo que, en lo que a la respuesta de cualquier sistema LTI particular concierne, toda el área bajo el pulso pueda considerarse como aplicada de manera instantánea). En esta sección nos gustaría proporcionar primero un ejemplo concreto de lo que esto significa, y sólo entonces usar la interpretación incluida en el ejemplo para mostrar que la clave para el uso de los impulsos unitarios y otras funciones singulares está en la especificación de cómo los sistemas LTI responden a esas señales idealizadas; en otras palabras, las señales se definen en esencia en términos de la forma en que se comportan bajo la convolución con otras señales.

2.5.1 El impulso unitario como un pulso corto idealizado

A partir de la propiedad de selección, ecuación (2.27), el impulso unitario $\delta(t)$ es la respuesta al impulso del sistema identidad. Esto es,

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \tag{2.133}$$

para cualquier señal $x(t)$. Por tanto, si tomamos $x(t) = \delta(t)$, tenemos

$$\delta(t) = \delta(t) * \delta(t). \tag{2.134}$$

La ecuación (2.134) es una propiedad básica del impulso unitario y también tiene una implicación significativa sobre nuestra interpretación del impulso unitario como un pulso idealizado. Por ejemplo, al igual que en la sección 1.4.2, suponga que concebimos a $\delta(t)$ como la forma límite de un pulso rectangular. En concreto, consideremos que $\delta_\Delta(t)$ corresponde al pulso rectangular definido en la figura 1.34 y que

$$r_\Delta(t) = \delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t). \tag{2.135}$$

Entonces $r_\Delta(t)$ sería como está dibujada en la figura 2.33. Si deseamos interpretar a $\delta(t)$ como el límite cuando $\Delta \to 0$ de $\delta_\Delta(t)$, entonces, en virtud de la ecuación (2.134), el límite de $r_\Delta(t)$ cuando $\Delta \to 0$ también debe ser un impulso unitario. De manera similar, podemos argumentar que los límites de $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$ o de $r_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ cuando $\Delta \to 0$ deben ser impulsos unitarios, y así se puede continuar. De este modo, vemos que para ser consistentes, si definimos el impulso unitario como la forma límite de alguna señal, entonces, de hecho, hay un número ilimitado de señales de apariencia muy diferente, todas las cuales se comportan como un impulso en el límite.

Las palabras clave en el párrafo precedente son: "se comportan como un impulso", con las cuales, como hemos indicado, lo que queremos decir es que la respuesta de un sistema LTI a cualquiera de estas señales es en esencia idéntica, en tanto el pulso sea "lo bastante corto", es decir, Δ es "lo suficientemente pequeña". El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

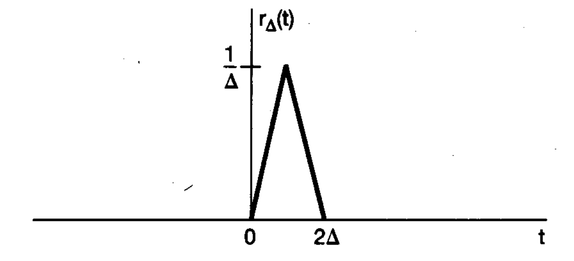


Figura 2.33 La señal $r_\Delta(t)$ definida en la ecuación (2.135).

Ejemplo 2.16

Considere el sistema LTI descrito mediante la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \tag{2.136}$$

junto con la condición de reposo inicial. La figura 2.34 representa la respuesta de este sistema a $\delta_\Delta(t)$, $r_\Delta(t)$, $r_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ y $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$ para varios valores de Δ. Para valores de Δ lo suficientemente grandes, las respuestas a estas señales de entrada difieren de manera notable. Sin embargo, cuando Δ es lo suficientemente pequeña, las respuestas son en esencia las mismas, de manera que todas las señales de entrada de "comportan" de la misma forma. Además, como se indica en la figura, la forma límite de estas respuestas es precisamente $e^{-2t}u(t)$. Puesto que el límite de cada una de estas señales conforme $\Delta \to 0$ es el impulso unitario, concluimos que $e^{-2t}u(t)$ es la respuesta al impulso en este sistema.[5]

[5]En los capítulos 4 y 9 describiremos formas mucho más sencillas de determinar la respuesta al impulso de sistemas LTI causales descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

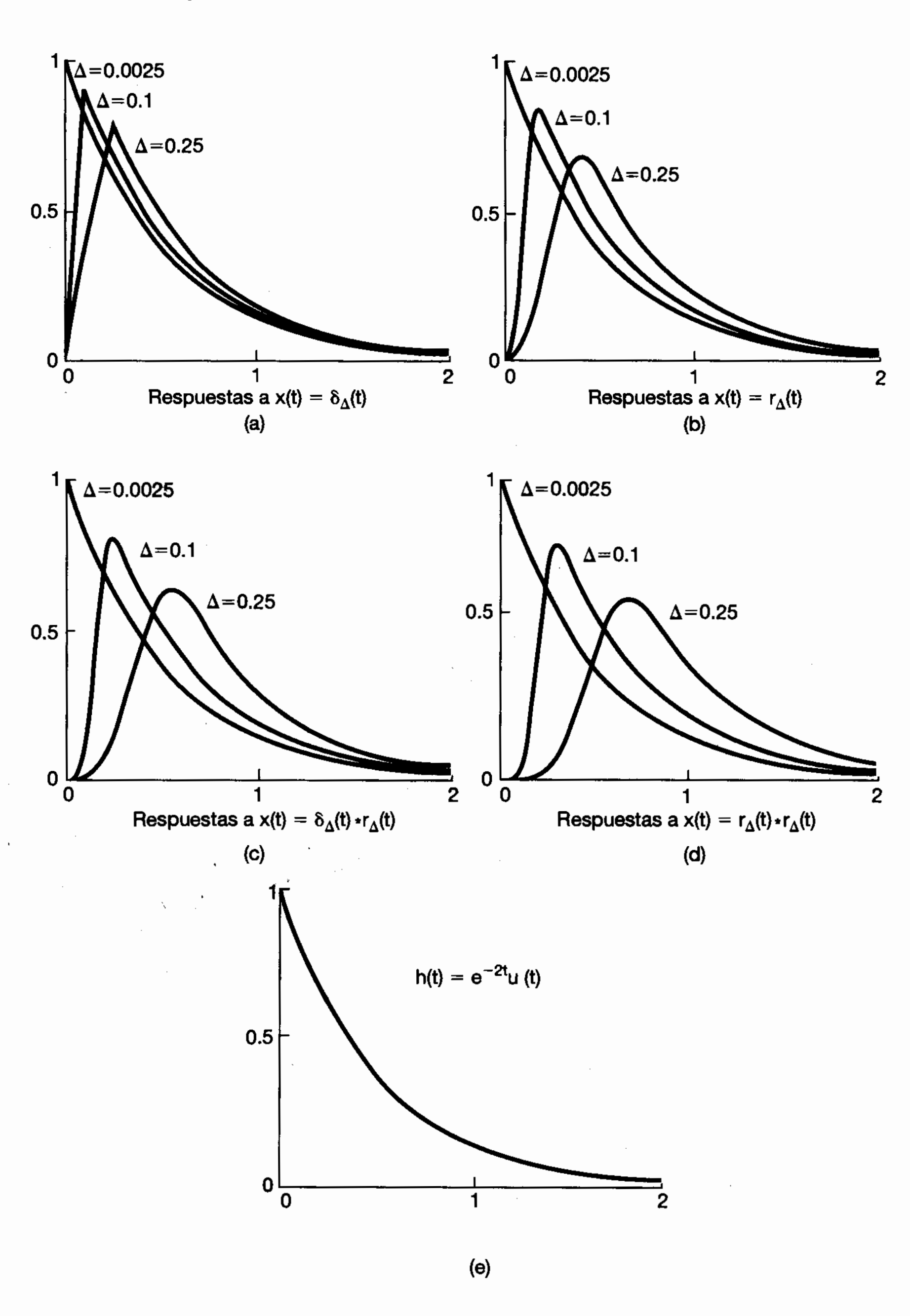


Figura 2.34 Interpretación de un impulso unitario como la idealización de un pulso cuya duración es "lo suficientemente corta" que, en lo que concierne a la respuesta de un sistema LTI a este pulso, éste se puede concebir como que ha sido aplicado instantáneamente: (a) respuestas del sistema LTI causal descrito por la ecuación (2.136) a la entrada $\delta_\Delta(t)$ para $\Delta = 0.25$, 0.1 y 0.0025; (b) respuestas del mismo sistema a $r_\Delta(t)$ para los mismos valores de Δ; (c) respuestas a $\delta_\Delta(t) * r_\Delta(t)$; (d) respuestas a $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$; (e) respuesta al impulso $h(t) = e^{-2t}u(t)$ para el sistema. Observe que, para $\Delta = 0.25$, hay notables diferencias entre las respuestas a estas señales diferentes; sin embargo, conforme Δ se hace cada vez más pequeña, la diferencia disminuye, y todas las respuestas convergen a la respuesta al impulso mostrada en (e).

Un punto importante que hay que enfatizar es que, lo que entendemos por un "Δ lo suficientemente pequeño", depende del sistema LTI en particular al cual sean aplicados los pulsos anteriores. Por ejemplo, en la figura 2.35 hemos ilustrado las respuestas a estos pulsos para diferentes valores de Δ para el sistema causal LTI descrito mediante la

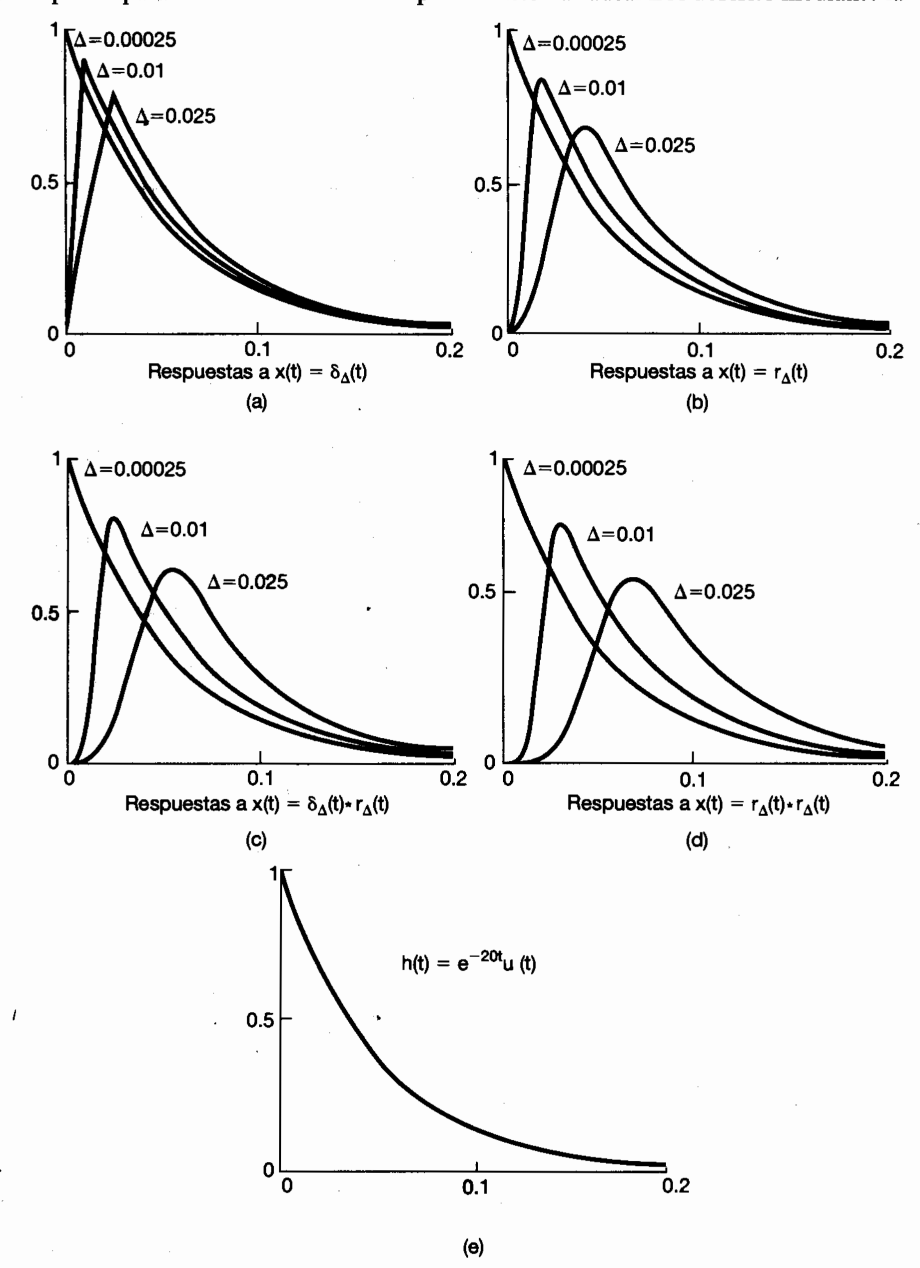


Figura 2.35 El encontrar un valor de Δ que sea "lo suficientemente pequeño" depende del sistema al cual se aplicarán las entradas: (a) respuestas del sistema LTI causal descrito por la ecuación (2.137) a la entrada $\delta_\Delta(t)$ para $\Delta = 0.025$, 0.01 y 0.00025; (b) respuestas a $r_\Delta(t)$; (c) respuestas a $\delta_\Delta(t) * r_\Delta(t)$; (d) respuestas a $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$; (e) respuesta al impulso $h(t) = e^{-20t}u(t)$ para el sistema. Al comparar estas respuestas con las de la figura 2.34, vemos que en este caso necesitamos usar un valor más pequeño de Δ, antes que la duración y forma del pulso no tengan consecuencias.

ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy(t)}{dt} + 20y(t) = x(t). \tag{2.137}$$

Como podemos ver en la figura, en este caso necesitamos un valor más pequeño de Δ para que las respuestas sean indistinguibles unas de otras y a partir de las respuestas al impulso $h(t) = e^{-20t}u(t)$ para el sistema. Así, mientras que lo que entendemos por "Δ lo suficientemente pequeño" es diferente para los dos sistemas, podemos encontrar valores de Δ suficientemente pequeños para ambos. El impulso unitario es por tanto la idealización de un pulso corto cuya duración es suficientemente corta para *todos* los sistemas.

2.5.2 Definición del impulso unitario mediante la convolución

Como se muestra en los ejemplos anteriores, para una Δ lo bastante pequeña, las señales $\delta_\Delta(t), r_\Delta(t), r_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ y $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$ actúan como impulsos cuando se aplican a un sistema LTI. De hecho, hay muchas otras señales para las cuales esto también es válido. Todo lo cual indica que debemos pensar en un impulso unitario en términos de cómo responde un sistema LTI a él. Mientras que por lo general una función o señal se define por lo que es en cada valor de la variable independiente, la importancia primordial del impulso unitario no consiste en lo que éste *es* en cada valor de t, sino lo que *hace* ante la convolución. Por tanto, desde el punto de vista del análisis de sistemas lineales, podemos *definir* de manera alternativa el impulso unitario como aquella señal que, cuando es aplicada a un sistema LTI, produce la respuesta al impulso. Esto es, definimos $\delta(t)$ como la señal para la cual

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \tag{2.138}$$

para cualquier $x(t)$. En este sentido, señales como $\delta_\Delta(t), r_\Delta(t)$, etc., las cuales corresponden a pulsos cortos con duración extremadamente pequeña conforme $\Delta \to 0$, en su totalidad se comportan como un impulso unitario en el límite, ya que si reemplazamos $\delta(t)$ por cualquiera de estas señales, entonces la ecuación (2.138) se satisface en el límite.

Todas las propiedades del impulso unitario que necesitamos se pueden obtener de la *definición operacional* proporcionada por la ecuación (2.138). Por ejemplo, si hacemos $x(t) = 1$ para toda t, entonces

$$1 = x(t) = x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)d\tau,$$

de manera que el impulso unitario tiene área unitaria.

Algunas veces resulta útil usar otra definición operacional por completo equivalente para $\delta(t)$. Para obtener esta forma alternativa, considere tomar una señal arbitraria $g(t)$, invertirla en el tiempo para obtener $g(-t)$ y entonces convolucionarla con $\delta(t)$. Usando la ecuación (2.138) obtenemos

$$g(-t) = g(-t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau - t)\delta(\tau)d\tau,$$

la cual, para $t = 0$, da

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\delta(\tau)d\tau. \tag{2.139}$$

Por tanto, la definición operacional de $\delta(t)$ dada por la ecuación (2.138) implica la ecuación (2.139). Por otro lado, la ecuación (2.139) implica la (2.138). Para ver esto, sea $x(t)$ una señal dada, fíjese en un tiempo t y defínase

$$g(\tau) = x(t - \tau).$$

Entonces, usando la ecuación (2.139), tenemos

$$x(t) = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)\delta(\tau)d\tau,$$

la cual es precisamente la ecuación (2.138). Por tanto, la ecuación (2.139) es una definición operacional equivalente del impulso unitario. Esto es, el impulso unitario es la señal que, cuando se multiplica por una señal $g(t)$ y se integra después desde $-\infty$ hasta $+\infty$, produce el valor $g(0)$.

Puesto que nos ocuparemos principalmente de los sistemas LTI y, por tanto, de la convolución, la caracterización de $\delta(t)$ dada en la ecuación (2.138) será a la que nos referiremos con mayor frecuencia. Sin embargo, la ecuación (2.139) es útil para determinar algunas de las otras propiedades del impulso unitario. Por ejemplo, considere la señal $f(t)\delta(t)$, donde $f(t)$ es otra señal. Entonces, de la ecuación (2.139)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(\tau)\delta(\tau)d\tau = g(0)f(0). \tag{2.140}$$

Por otro lado, si consideramos la señal $f(0)\delta(t)$, vemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(0)\delta(\tau)d\tau = g(0)f(0). \tag{2.141}$$

Al comparar las ecuaciones (2.140) y (2.141), encontramos que las dos señales, $f(t)\delta(t)$ y $f(0)\delta(t)$, actúan en forma idéntica cuando se multiplican por cualquier señal $g(t)$ y después se integran desde $-\infty$ hasta $+\infty$. En consecuencia, al usar esta definición operacional de señales, concluimos que

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t), \tag{2.142}$$

la cual es la propiedad que deducimos mediante una forma alternativa en la sección 1.4.2. [Véase la ecuación (1.76).]

2.5.3 Dobletes unitarios y otras funciones singulares

El impulso unitario es uno de los tipos de señales conocidas como *funciones singulares*, cada una de las cuales se puede definir operacionalmente en términos de su comportamiento ante la convolución. Considere el sistema LTI para el cual la salida es la derivada de la entrada, es decir,

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \tag{2.143}$$

La respuesta al impulso unitario de este sistema es la derivada del impulso unitario, la cual se llama *doblete unitario*, $u_1(t)$. De la representación de la convolución para los sistemas LTI tenemos

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t) \tag{2.144}$$

para cualquier señal $x(t)$. Así como la ecuación (2.138) funciona como la definición operacional de $\delta(t)$, tomaremos la ecuación (2.144) como la definición operacional de $u_1(t)$. De manera similar, podemos definir $u_2(t)$, la segunda derivada de $\delta(t)$, como la respuesta al impulso de un sistema LTI que calcula la segunda derivada de la entrada, es decir,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = x(t) * u_2(t). \tag{2.145}$$

De la ecuación (2.144) vemos que

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = x(t) * u_1(t) * u_1(t), \tag{2.146}$$

y, por tanto,

$$u_2(t) = u_1(t) * u_1(t). \tag{2.147}$$

En general, $u_k(t)$, para $k > 0$, es la $k$ésima derivada de $\delta(t)$ y por consiguiente es la respuesta al impulso de un sistema que calcula la $k$ésima derivada de la entrada. Ya que este sistema se puede representar como una cascada de k diferenciadores, tenemos que

$$u_k(t) = \underbrace{u_1(t) * \cdots * u_1(t).}_{k \text{ veces}} \tag{2.148}$$

Al igual que el impulso unitario, cada una de estas funciones singulares tiene propiedades que se pueden deducir de su definición operacional. Por ejemplo, si consideramos la señal constante $x(t) = 1$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dx(t)}{dt} &= x(t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

de manera que el área del doblete unitario es cero. Más aún, si hacemos la convolución de la señal $g(-t)$ con $u_1(t)$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau - t)u_1(\tau)d\tau = g(-t) * u_1(t) = \frac{dg(-t)}{dt} = -g'(-t),$$

la cual, para $t = 0$ da

$$-g'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)u_1(\tau)d\tau. \tag{2.149}$$

De manera análoga, podemos deducir propiedades relacionadas de $u(t)$ y de funciones singulares de orden superior, algunas de las cuales son consideradas en el problema 2.69.

Al igual que con el impulso unitario, cada una de estas funciones singulares puede estar relacionada de manera informal con pulsos cortos. Por ejemplo, ya que el doblete unitario es, de manera formal, la derivada del impulso unitario, podemos concebir al doblete como la idealización de la derivada de un pulso corto con área unitaria. Como muestra, considere el pulso corto $\delta_\Delta(t)$ en la figura 1.34. Este pulso se comporta como un impulso cuando $\Delta \to 0$. En consecuencia, esperaríamos que su derivada actuara como un doblete a medida que $\Delta \to 0$. Como se verifica en el problema 2.72, $d\delta_\Delta(t)/dt$ es como está representada en la figura 2.36: consiste en un impulso unitario en $t = 0$ con un área $+1/\Delta$, seguida por un impulso unitario de área $-1/\Delta$ en $t = \Delta$, es decir,

$$\frac{d\delta_\Delta(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta}[\delta(t) - \delta(t - \Delta)]. \tag{2.150}$$

En consecuencia, usando el hecho de que $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$ [véase la ecuación (2.70)], encontramos que

$$x(t) * \frac{d\delta_\Delta(t)}{dt} = \frac{x(t) - x(t - \Delta)}{\Delta} \cong \frac{dx(t)}{dt}, \tag{2.151}$$

donde la aproximación se vuelve incrementalmente exacta conforme $\Delta \to 0$. Al comparar la ecuación (2.151) con la ecuación (2.144), vemos que $d\delta_\Delta(t)/dt$ en verdad se comporta como un doblete unitario conforme $\Delta \to 0$.

Además de las funciones singulares que son derivadas de diferente orden del impulso unitario, también podemos definir señales que representan integrales sucesivas de la función impulso unitario. Como vimos en el ejemplo 2.13, el escalón unitario es la respuesta al impulso de un integrador:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau.$$

Por tanto,

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau, \tag{2.152}$$

Figura 2.36 La derivada de $d\delta_\Delta(t)/dt$ del pulso rectangular corto $\delta_\Delta(t)$ de la figura 1.34.

y también tenemos la siguiente definición operacional de $u(t)$:

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau. \tag{2.153}$$

De manera similar, podemos definir el sistema que consiste en una cascada de dos integradores. Su respuesta al impulso se denota con $u_{-2}(t)$, la cual es simplemente la convolución de $u(t)$, la respuesta al impulso de un integrador, con ella misma:

$$u_{-2}(t) = u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau. \tag{2.154}$$

Puesto que $u(t)$ es igual a cero para $t < 0$ y es igual a 1 para $t > 0$, vemos que

$$u_{-2}(t) = tu(t). \tag{2.155}$$

Esta señal, la cual se conoce como la *función rampa unitaria*, se muestra en la figura 2.37. Asimismo, a partir de las ecuaciones (2.153) y (2.154) podemos obtener una definición operacional para el comportamiento de $u_{-2}(t)$ bajo convolución:

$$\begin{aligned} x(t) * u_{-2}(t) &= x(t) * u(t) * u(t) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{t} x(\sigma)d\sigma\right) * u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} x(\sigma)d\sigma\right)d\tau. \end{aligned} \tag{2.156}$$

De manera análoga, podemos definir integrales de orden superior de $\delta(t)$ como las respuestas al impulso de integradores en cascada:

$$u_{-k}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{k \text{ veces}} = \int_{-\infty}^{t} u_{-(k-1)}(\tau)d\tau. \tag{2.157}$$

La convolución de $x(t)$, con $u_{-3}(t)$ $u_{-4}(t), \ldots$, genera las correspondientes integrales de $x(t)$ de orden mayor. Observe también que las integrales en la ecuación (2.157) se pueden evaluar de forma directa (véase el problema 2.73), como se hizo en la ecuación (2.155),

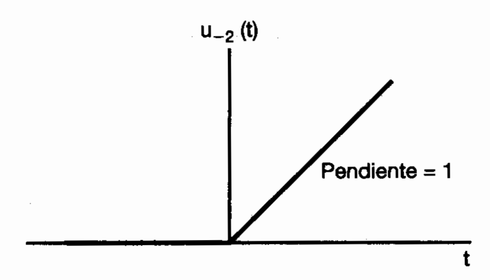


Figura 2.37 Función rampa unitaria.

para obtener

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t). \tag{2.158}$$

Por tanto, a diferencia de las derivadas de $\delta(t)$, las integrales sucesivas del impulso unitario son funciones que se pueden definir para cada valor de t [ecuación (2.158)], así como por su comportamiento ante la convolución.

A veces será útil emplear una notación alternativa para $\delta(t)$ y $u(t)$, a saber,

$$\delta(t) = u_0(t), \tag{2.159}$$

$$u(t) = u_{-1}(t). \tag{2.160}$$

Con esta notación, $u_k(t)$ para $k > 0$ denota la respuesta al impulso de una cascada de k diferenciadores, $u_0(t)$ es la respuesta al impulso del sistema identidad, y para $k < 0$, $u_k(t)$ es la respuesta al impulso de una cascada de $|k|$ integradores. Más aún, ya que un diferenciador es el sistema inverso de un integrador,

$$u(t) * u_1(t) = \delta(t),$$

o, empleando nuestra notación alternativa,

$$u_{-1}(t) * u_1(t) = u_0(t). \tag{2.161}$$

De manera más general, de las ecuaciones (2.148), (2.157) y (2.161) vemos que para cualquier entero k y r,

$$u_k(t) * u_r(t) = u_{k+r}(t). \tag{2.162}$$

Si k y r son ambos positivos, la ecuación (2.162) establece que una cascada de k diferenciadores, seguida por r diferenciadores adicionales, conduce a una salida que es la derivada de orden $(k + r)$ de la entrada. Igualmente, si k y r son negativos, tenemos una cascada de $|k|$ integradores seguida por otros $|r|$ integradores. Asimismo, si k es negativo y r es positivo tenemos una cascada de k integradores seguida por r diferenciadores, y el sistema completo es equivalente a una cascada de $|k + r|$ integradores si $k + r < 0$, a una cascada de $k + r$ diferenciadores si $k + r > 0$, o al sistema identidad si $k + r = 0$. Por tanto, al definir las funciones singulares en términos de su comportamiento bajo la convolución, obtenemos una caracterización que nos permite manipularlas con relativa facilidad e interpretarlas directamente en términos de su importancia para los sistemas LTI. Ya que, en el libro, éste es nuestro principal interés, la definición operacional de las funciones singulares que hemos dado en esta sección será suficiente para nuestros propósitos.[6]

[6]Como se mencionó en el capítulo 1, las funciones singulares han sido ampliamente estudiadas en el campo de las matemáticas bajo los nombres alternativos de *funciones generalizadas* y *teoría de la distribución*. El enfoque que hemos adoptado en esta sección está, en realidad, muy cerca en espíritu al enfoque riguroso adoptado en las referencias que se proporcionaron en la nota 3 de la sección 1.4.

2.6 RESUMEN

En este capítulo hemos desarrollado representaciones muy importantes para los sistemas LTI, tanto discretos como continuos. En el caso discreto obtuvimos una representación de las señales como sumas ponderadas de impulsos unitarios desplazados, y después la usamos para deducir la representación de la suma de convolución para la respuesta de un sistema LTI discreto. En el caso continuo obtuvimos una representación análoga para señales continuas como integrales ponderadas de impulsos unitarios desplazados, y utilizamos esta información para deducir la representación de la integral de convolución para sistemas LTI continuos. Estas representaciones son en extremo importantes, puesto que nos permiten calcular la respuesta de un sistema LTI a una entrada arbitraria en términos de la respuesta del sistema a un impulso unitario. Más aún, en la sección 2.3 la suma y la integral de convolución nos proporcionaron los medios para analizar las propiedades de los sistemas LTI y, en particular, para relacionar las propiedades de los sistemas LTI, incluyendo la causalidad y la estabilidad, con las propiedades correspondientes de la respuesta al impulso unitario. Además, en la sección 2.5 desarrollamos una interpretación del impulso unitario continuo, y otras funciones singulares relacionadas, en términos de su comportamiento bajo la convolución. Esta interpretación es particularmente útil en el análisis de sistemas LTI.

Una clase importante de sistemas continuos son los descritos por ecuaciones diferenciales lineales con coeficiente constante. De manera semejante, en el caso discreto, las ecuaciones de diferencias lineales con coeficiente constante, juegan un papel igualmente importante. En la sección 2.4 revisamos ejemplos sencillos de ecuaciones diferenciales y en diferencias y analizamos algunas de las propiedades de sistemas descritos por este tipo de ecuaciones. En particular, serán LTI y causales los sistemas descritos por medio de ecuaciones diferenciales y de diferencias lineales con coeficiente constante junto con la condición de reposo inicial. En los siguientes capítulos desarrollaremos herramientas adicionales que faciliten ampliamente nuestra habilidad para analizar estos sistemas.

Capítulo 2 Problemas

La primera sección de problemas corresponde a la categoría básica, y las respuestas se proporcionan al final del libro. Las tres secciones restantes contienen problemas correspondientes a las categorías básica, avanzada y de extensión, respectivamente.

Los **problemas de extensión** introducen aplicaciones, conceptos o métodos más allá de los presentados en el texto.

PROBLEMAS BÁSICOS CON RESPUESTAS

2.1. Sea

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3] \quad \text{y} \quad h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1].$$

Calcule y haga la gráfica de cada una de las siguientes convoluciones:

(a) $y_1[n] = x[n] * h[n]$ **(b)** $y_2[n] = x[n+2] * h[n]$

(c) $y_3[n] = x[n] * h[n+2]$

2.2. Considere la señal

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \{u[n+3] - u[n-10]\}.$$

Exprese A y B en términos de n de manera que se cumplan las siguientes ecuaciones:

$$h[n-k] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{n-k-1}, & A \leq k \leq B \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

2.3. Considere una entrada $x[n]$ y una respuesta al impulso unitario $h[n]$ dada por

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2],$$

$$h[n] = u[n+2].$$

Determine y dibuje la salida $y[n] = x[n] * h[n]$.

2.4. Calcule y dibuje $y[n] = x[n] * h[n]$, donde

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 3 \leq n \leq 8 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases},$$

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 4 \leq n \leq 15 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

2.5. Sea

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases} \quad \text{y} \quad h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases},$$

donde $N \leq 9$ es un entero. Determine el valor de N, dado que $y[n] = x[n] * h[n]$ y

$$y[4] = 5, \quad y[14] = 0.$$

2.6. Calcule y dibuje la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$, donde

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n-1] \quad \text{y} \quad h[n] = u[n-1].$$

2.7. Un sistema lineal S tiene la relación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

entre la entrada $x[n]$ y su salida $y[n]$, donde $g[n] = u[n] - u[n-4]$.

(a) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-1]$.
(b) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-2]$.
(c) ¿S es LTI?
(d) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = u[n]$.

2.8. Determine y bosqueje la convolución de las siguientes dos señales:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t \le 2 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases},$$

$$h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1).$$

2.9. Sea

$$h(t) = e^{2t}u(-t+4) + e^{-2t}u(t-5).$$

Determine A y B tales que

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2(t-\tau)}, & \tau < A \\ 0, & A < \tau < B \\ e^{2(t-\tau)}, & B < \tau \end{cases}$$

2.10. Suponga que

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

y $h(t) = x(t/\alpha)$, donde $0 < \alpha \le 1$.
(a) Determine y bosqueje $y(t) = x(t) * h(t)$.
(b) Si $d\,y(t)/dt$ contiene sólo tres discontinuidades, ¿cuál es el valor de α?

2.11. Sea

$$x(t) = u(t-3) - u(t-5) \quad \text{y} \quad h(t) = e^{-3t}u(t).$$

(a) Calcule $y(t) = x(t) * h(t)$.
(b) Calcule $g(t) = (dx(t)/dt) * h(t)$.
(c) ¿Cómo está relacionada $g(t)$ con $y(t)$?

2.12. Sea

$$y(t) = e^{-t}u(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k).$$

Demuestre que $y(t) = Ae^{-t}$ para $0 \le t < 3$, y determine el valor de A.

2.13. Considere un sistema discreto S_1 con respuesta al impulso

$$h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n].$$

(a) Determine el entero A tal que $h[n] - Ah[n-1] = \delta[n]$.
(b) Usando el resultado de la parte (a), determine la respuesta al impulso $g[n]$ de un sistema LTI S_2 el cual es el sistema inverso de S_1.

2.14. ¿Cuál de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas estables LTI?
(a) $h_1(t) = e^{-(1-2j)t}u(t)$ **(b)** $h_2(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t)$

2.15. ¿Cuál de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas estables LTI?
(a) $h_1[n] = n\cos(\frac{\pi}{4}n)u[n]$ **(b)** $h_2[n] = 3^n u[-n+10]$

2.16. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determine si es verdadera o falsa:
(a) Si $x[n] = 0$ para $n < N_1$ y $h[n] = 0$ para $n < N_2$, entonces $x[n] * h[n] = 0$ para $n < N_1 + N_2$.
(b) Si $y[n] = x[n] * h[n]$, entonces $y[n-1] = x[n-1] * h[n-1]$.
(c) Si $y(t) = x(t) * h(t)$, entonces $y(-t) = x(-t) * h(-t)$.
(d) Si $x(t) = 0$ para $t > T_1$ y $h(t) = 0$ para $t > T_2$, entonces $x(t) * h(t) = 0$ para $t > T_1 + T_2$.

2.17. Considere un sistema LTI cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ estén relacionadas por la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t). \qquad \text{(P2.17-1)}$$

El sistema también satisface la condición de reposo inicial.
(a) Si $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$, ¿cuál es $y(t)$?
(b) Observe que $\mathcal{R}e\{x(t)\}$ satisfará la ecuación (P2.17-1) con $\mathcal{R}e\{y(t)\}$. Determine la salida $y(t)$ del sistema LTI si

$$x(t) = e^{-t}\cos(3t)u(t).$$

2.18. Considere un sistema LTI causal cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ estén relacionadas por la ecuación de diferencias

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n].$$

Determine $y[n]$ si $x[n] = \delta[n-1]$.

2.19. Considere la conexión en cascada de los siguientes dos sistemas S_1 y S_2, como se muestran en la figura P2.19:

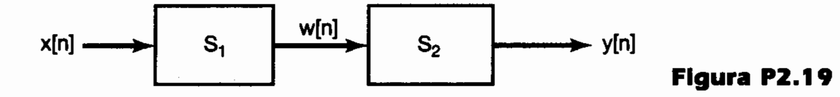


Figura P2.19

S_1 : es LTI causal,

$$w[n] = \frac{1}{2}w[n-1] + x[n];$$

S_2 : es LTI causal,

$$y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n].$$

La ecuación de diferencias que relaciona $x[n]$ y $y[n]$ es:

$$y[n] = -\frac{1}{8}y[n-2] + \frac{3}{4}y[n-1] + x[n].$$

(a) Determine α y β.
(b) Obtenga la respuesta al impulso de la conexión en cascada de S_1 y S_2.

2.20. Evalúe las siguientes integrales:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} u_0(t)\cos(t)dt$

(b) $\int_0^5 \text{sen}(2\pi t)\delta(t+3)dt$

(c) $\int_{-5}^{5} u_1(1-\tau)\cos(2\pi\tau)d\tau$

PROBLEMAS BÁSICOS

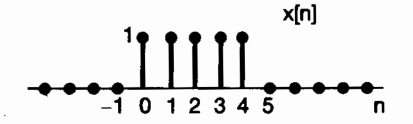
2.21. Calcule la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$ de los siguientes pares de señales:

(a) $\left.\begin{array}{l} x[n] = \alpha^n u[n], \\ h[n] = \beta^n u[n], \end{array}\right\} \alpha \neq \beta$

(b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$

(c) $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n-4]$
$h[n] = 4^n [2-n]$

(d) $x[n]$ y $h[n]$ son como en la figura P2.21.



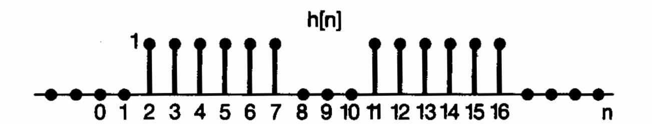
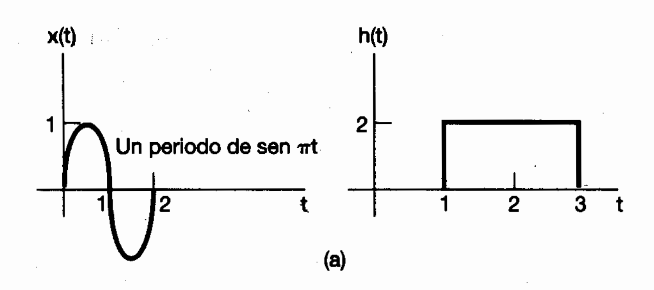


Figura P2.21

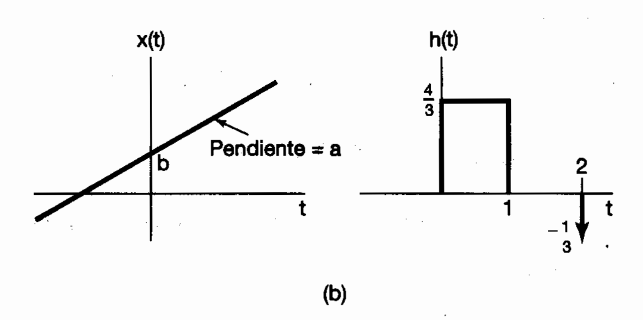
2.22. Para cada uno de los siguientes pares de formas de onda, use la integral de convolución para encontrar la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t)$ del sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t)$. Bosqueje sus resultados.

(a) $\left.\begin{array}{l} x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \\ h(t) = e^{-\beta t}u(t) \end{array}\right\}$ (Obtenga el resultado cuando $\alpha \neq \beta$ y cuando $\alpha = \beta$.)

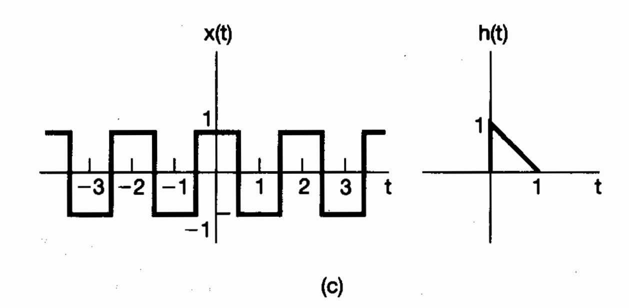
(b) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$
$h(t) = e^{2t}u(1-t)$
(c) $x(t)$ y $h(t)$ son como en la figura P2.22(a).
(d) $x(t)$ y $h(t)$ son como en la figura P2.22(b).
(e) $x(t)$ y $h(t)$ son como en la figura P2.22(c).



(a)



(b)



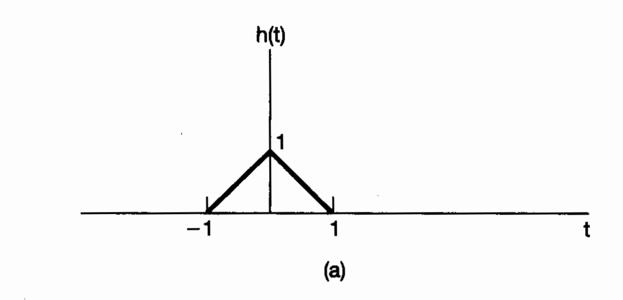
(c)

Figura P2.22

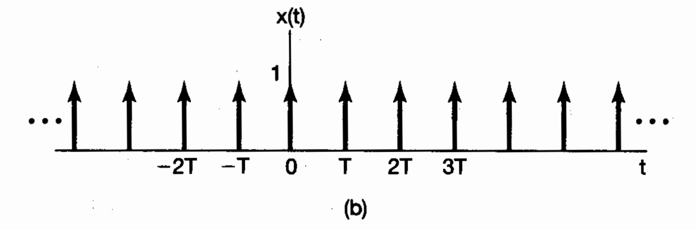
2.23. Sea $h(t)$ el pulso triangular mostrado en la figura P2.23(a) y $x(t)$ el tren de impulsos representado en la figura P2.23(b). Esto es,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT).$$

Determine y trace $y(t) = x(t) * h(t)$ para los siguientes valores de T:
(a) $T = 4$ **(b)** $T = 2$ **(c)** $T = 3/2$ **(d)** $T = 1$



(a)



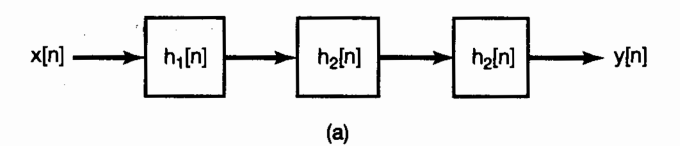
(b)

Figura P2.23

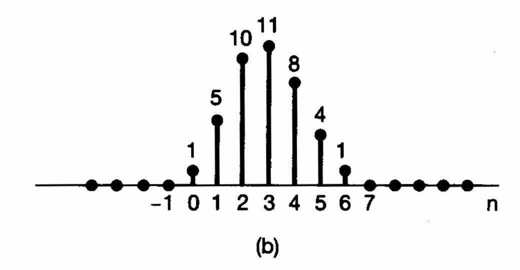
2.24. Examine la interconexión en cascada de los tres sistemas LTI causales ilustrados en la figura P2.24(a). La respuesta al impulso $h_2[n]$ es

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2],$$

y la respuesta total al impulso es como se muestra en la figura P2.24(b).



(a)



(b)

Figura P2.24

(a) Encuentre la respuesta al impulso $h_1[n]$.
(b) Encuentre la respuesta del sistema total a la entrada

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1].$$

2.25. Sea la señal

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

donde

$$x[n] = 3^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

y

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3].$$

(a) Determine $y[n]$ *sin utilizar* la propiedad distributiva de la convolución.
(b) Determine $y[n]$ *utilizando* la propiedad distributiva de la convolución.

2.26. Examine la evaluación de

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] * x_3[n],$$

donde $x_1[n] = (0.5)^n u[n]$, $x_2[n] = u[n+3]$ y $x_3[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.
(a) Evalúe la convolución $x_1[n] * x_2[n]$.
(b) Realice la convolución de la parte (a) con $x_3[n]$ para evaluar $y[n]$.
(c) Evalúe la convolución de $x_2[n] * x_3[n]$.
(d) Realice la convolución del resultado de la parte (c) con $x_1[n]$ para evaluar $y[n]$.

2.27. Definimos el área bajo una señal continua $v(t)$ como

$$A_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)dt.$$

Demuestre que si $y(t) = x(t) * h(t)$, entonces

$$A_y = A_x A_h.$$

2.28. A continuación mostramos las respuestas al impulso de sistemas LTI discretos. Determine si cada sistema es causal y/o estable. Justifique sus respuestas.
(a) $h[n] = (\frac{1}{5})^n u[n]$
(b) $h[n] = (0.8)^n u[n+2]$
(c) $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n]$
(d) $h[n] = (5)^n u[3-n]$
(e) $h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1.01)^n u[n-1]$
(f) $h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]$
(g) $h[n] = n(\frac{1}{3})^n u[n-1]$

2.29. A continuación ofrecemos las respuestas al impulso de sistemas LTI continuos. Determine si cada sistema es causal y/o estable. Justifique sus respuestas.
(a) $h(t) = e^{-4t}u(t-2)$
(b) $h(t) = e^{-6t}u(3-t)$
(c) $h(t) = e^{-2t}u(t+50)$
(d) $h(t) = e^{2t}u(-1-t)$

(e) $h(t) = e^{-6|t|}$
(f) $h(t) = te^{-t}u(t)$
(g) $h(t) = (2e^{-t} - e^{(t-100)/100})u(t)$

2.30. Examine la ecuación de diferencias de primer orden

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n].$$

Dando por sentado la condición de reposo inicial (es decir, si $x[n] = 0$ para $n < n_0$, entonces $y[n] = 0$ para $n < n_0$), determine la respuesta al impulso de un sistema cuya entrada y salida estén relacionadas mediante esta ecuación de diferencias. Puede resolver el problema rescribiendo la ecuación de manera que $y[n]$ quede expresada en términos de $y[n-1]$ y $x[n]$ y generando los valores de $y[0]$, $y[+1]$, $y[+2], \ldots$, en ese orden.

2.31. Examine el sistema LTI inicialmente en reposo y descrito por la ecuación de diferencias

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-2].$$

Determine la respuesta de este sistema a la entrada que se representa en la figura P2.31 resolviendo recursivamente la ecuación.

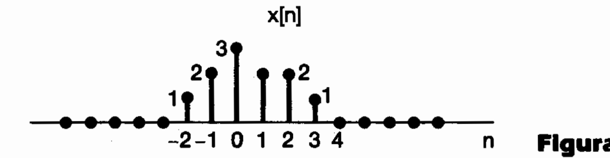


Figura P2.31

2.32. Considere la ecuación de diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n], \qquad \text{(P2.32-1)}$$

y suponga que

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]. \qquad \text{(P2.32-2)}$$

Dé por sentado que la solución $y[n]$ consiste en la suma de una solución particular $y_p[n]$ para la ecuación (P2.32-1) y una solución homogénea $y_h[n]$ que satisface la ecuación

$$y_h[n] - \frac{1}{2}y_h[n-1] = 0.$$

(a) Verifique que la solución homogénea esté dada por

$$y_h[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(b) Consideremos que se obtiene una solución particular $y_p[n]$ tal que

$$y_p[n] - \frac{1}{2}y_p[n-1] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

Suponiendo que $y_p[n]$ es de la forma $B(\frac{1}{3})^n$ para $n \geq 0$, y la sustituimos en la ecuación de diferencias antes descrita, determine el valor de B.

(c) Suponga que el sistema LTI descrito por la ecuación (P2.32-1) e inicialmente en reposo tiene como entrada la señal especificada por la ecuación (P2.32-2). Ya que $x[n] = 0$ para $n < 0$, tenemos que $y[n] = 0$ para $n < 0$. Asimismo, de las partes (a) y (b) tenemos que $y[n]$ tiene la forma

$$y[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

para $n \geq 0$. Para obtener el valor de la constante desconocida A, debemos especificar un valor para $y[n]$ para algún $n \geq 0$. Utilice la condición de reposo inicial y las ecuaciones (P2.32-1) y (P2.32-2) para determinar $y[0]$. A partir de este valor determine la constante A. El resultado de este cálculo conduce a la solución de la ecuación de diferencias (P2.32-1) bajo la condición de reposo inicial, cuando la entrada está dada por la ecuación (P2.32-2).

2.33. Considere un sistema cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ satisfagan la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t). \qquad \text{(P2.33-1)}$$

El sistema también satisface la condición de reposo inicial.

(a) (i) Determine la salida del sistema $y_1(t)$ cuando la entrada es $x_1(t) = e^{3t}u(t)$.

(ii) Determine la salida del sistema $y_2(t)$ cuando la entrada es $x_2(t) = e^{2t}u(t)$.

(iii) Determine la salida del sistema $y_3(t)$ cuando la entrada es $x_3(t) = \alpha e^{3t}u(t) + \beta e^{2t}u(t)$, donde α y β son números reales. Demuestre que $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$.

(iv) Ahora, sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ señales arbitrarias tales que

$$x_1(t) = 0, \text{ para } t < t_1,$$
$$x_2(t) = 0, \text{ para } t < t_2.$$

Si $y_1(t)$ es la salida del sistema para la entrada $x_1(t)$, $y_2(t)$ la salida del sistema a la entrada $x_2(t)$ y $y_3(t)$ la salida del sistema a la entrada $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, demuestre que

$$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t).$$

Por tanto, podemos concluir que el sistema en estudio es lineal.

(b) (i) Determine la salida del sistema $y_1(t)$ cuando la entrada es $x_1(t) = Ke^{2t}u(t)$.

(ii) Determine la salida del sistema $y_2(t)$ cuando la entrada es $x_2(t) = Ke^{2(t-T)}u(t - T)$. Demuestre que $y_2(t) = y_1(t - T)$.

(iii) Ahora, sea $x_1(t)$ una señal arbitraria tal que $x_1(t) = 0$ para $t < t_0$. Si $y_1(t)$ es la salida del sistema a la entrada $x_1(t)$ y $y_2(t)$ es la salida del sistema a $x_2(t) = x_1(t - T)$, demuestre que

$$y_2(t) = y_1(t - T).$$

Podemos concluir, por tanto, que el sistema analizado es invariante en el tiempo. Junto con el resultado obtenido en la parte (a), concluimos que el sistema dado es LTI. Y ya que este sistema satisface la condición de reposo inicial, también es causal.

2.34. La conjetura de reposo inicial corresponde a una condición auxiliar valuada en cero, la cual es impuesta en un tiempo determinado de acuerdo con la señal de entrada. En este problema mostraremos que si la condición auxiliar usada es diferente de cero, o si siempre se aplica en un tiempo fijo (sin importar la señal de entrada), el sistema correspondiente no puede ser LTI. Considere un sistema cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ satisfagan la ecuación diferencial de primer orden (P2.33-1).

(a) Dada la condición auxiliar $y(1) = 1$, utilice un contraejemplo para demostrar que el sistema es no lineal.

(b) Dada la condición auxiliar $y(1) = 1$, utilice un contraejemplo para demostrar que el sistema es no invariante en el tiempo.

(c) Dada la condición auxiliar $y(1) = 1$, demuestre que el sistema es incrementalmente lineal.

(d) Dada la condición auxiliar $y(1) = 0$, demuestre que el sistema es lineal pero no invariante en el tiempo.

(e) Dada la condición auxiliar $y(0) + y(4) = 0$, demuestre que el sistema es lineal pero no invariante en el tiempo.

2.35. En el problema anterior vimos que la aplicación de una condición auxiliar en un tiempo fijo (sin que importe la señal de entrada) conduce al sistema correspondiente que no es invariante en el tiempo. En este problema, exploramos el efecto que tienen las condiciones auxiliares fijas sobre la causalidad de un sistema. Considere un sistema cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ satisfagan la ecuación diferencial de primer orden (P2.33-1). Suponga que la condición auxiliar asociada con la ecuación diferencial es $y(0) = 0$. Determine la salida del sistema para cada una de las siguientes entradas:

(a) $x_1(t) = 0$, para toda t

(b) $x_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & t > -1 \end{cases}$

Observe que si $y_1(t)$ es la salida para la entrada $x_1(t)$ y $y_2(t)$ es la salida para la entrada $x_2(t)$, entonces $y_1(t)$ y $y_2(t)$ no son idénticas para $t < -1$, aun cuando $x_1(t)$ y $x_2(t)$ sean idénticas para $t < -1$. Utilice esta observación como base de un argumento para deducir que el sistema dado no es causal.

2.36. Considere un sistema discreto cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas por

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)y[n-1] + x[n].$$

(a) Demuestre que si este sistema satisface la condición de reposo inicial (es decir, si $x[n] = 0$ para $n < n_0$, entonces $y[n] = 0$ para $n < n_0$), entonces es lineal e invariante en el tiempo.

(b) Demuestre que si este sistema no satisface la condición de reposo inicial, se vale en su lugar de la condición auxiliar $y[0] = 0$, es no causal. [*Sugerencia:* Utilice una aproximación similar a la del problema 2.35.]

2.37. Considere un sistema cuya entrada y salida estén relacionadas por la ecuación diferencial de primer orden (P2.33-1). Suponga que el sistema satisface la condición de reposo final [es decir, si $x(t) = 0$ para $t > t_0$, entonces $y(t) = 0$ para $t > t_0$]. Demuestre que este sistema es *no* causal. [*Sugerencia:* Considere dos entradas al sistema, $x_1(t) = 0$ y $x_2(t)= e^t(u(t) - u(t-1))$, las cuales dan como resultado salidas $y_1(t)$ y $y_2(t)$, respectivamente. Después, demuestre que $y_1(t) \neq y_2(t)$ para $t < 0$.]

2.38. Dibuje la representación en diagrama de bloque para los sistemas LTI causales descritos por las siguientes ecuaciones de diferencias:

(a) $y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n]$

(b) $y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + x[n-1]$

2.39. Dibuje la representación en diagrama de bloque para los sistemas LTI causales descritos por las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y(t) = -(\frac{1}{2})dy(t)/dt + 4x(t)$

(b) $dy(t)/dt + 3y(t) = x(t)$

PROBLEMAS AVANZADOS

2.40. **(a)** Considere un sistema LTI con entrada y salida relacionadas a través de la ecuación

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau.$$

¿Cuál es la respuesta al impulso de este sistema?

(b) Determine la respuesta del sistema cuando la entrada $x(t)$ es como se muestra en la figura P2.40.

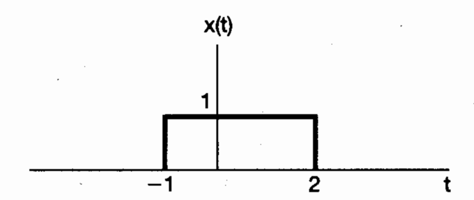


Figura P2.40

2.41. Examine la señal

$$x[n] = \alpha^n u[n].$$

(a) Dibuje la señal $g[n] = x[n] - \alpha x[n-1]$.

(b) Utilice el resultado de la parte (a) junto con las propiedades de convolución para determinar una secuencia $h[n]$ tal que

$$x[n] * h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n+2] - u[n-2]\}.$$

2.42. Imagine la señal

$$x(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5)$$

y la señal

$$h(t) = e^{j\omega_0 t}.$$

(a) Determine un valor de ω_0 el cual asegure que

$$y(0) = 0,$$

donde $y(t) = x(t) * h(t)$.

(b) Con respecto a la parte anterior, ¿es única su respuesta?

2.43. Una de las propiedades más importantes de la convolución, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, es la de asociatividad. En este problema, verificaremos e ilustraremos dicha propiedad.

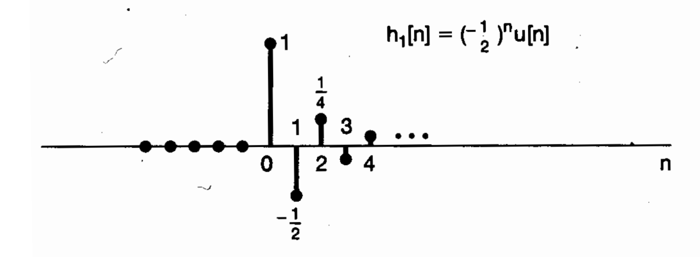
(a) Pruebe la igualdad

$$[x(t) * h(t)] * g(t) = x(t) * [h(t) * g(t)] \tag{P2.43-1}$$

al mostrar que ambos lados de la ecuación (P2.43-1) son igual a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\sigma)g(t-\tau-\sigma)d\tau\,d\sigma.$$

(b) Considere dos sistemas LTI con respuestas a la muestra unitaria $h_1[n]$ y $h_2[n]$ mostradas en la figura P2.43(a). Estos dos sistemas están en cascada, como se muestra en la figura P2.43(b). Sea $x[n] = u[n]$.



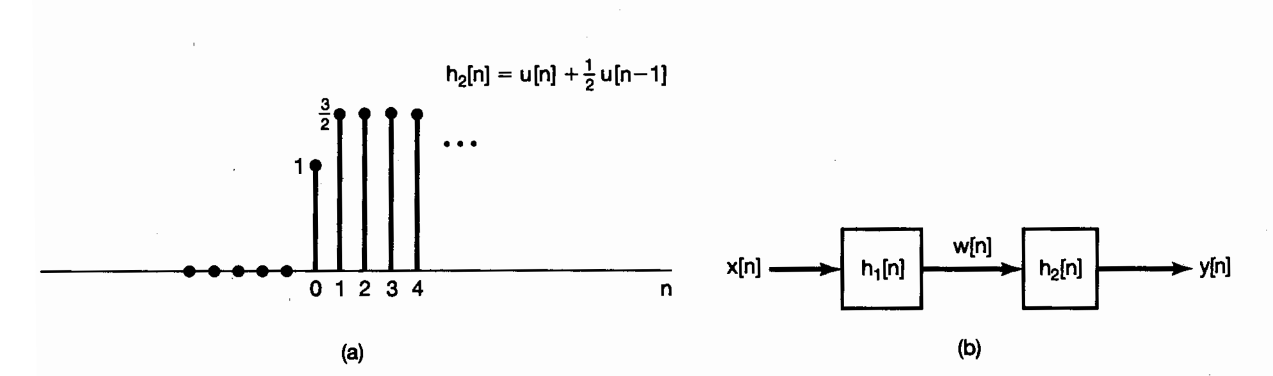


Figura P2.43

(i) Calcule $y[n]$ calculando primero $w[n] = x[n] * h_1[n]$ y entonces calculando después $y[n] = w[n] * h_2[n]$; esto es, $y[n] = [x[n] * h_1[n]] * h_2[n]$.

(ii) Ahora determine $y[n]$ aplicando la convolución primero a $h_1[n]$ y $h_2[n]$ para obtener $g[n] = h_1[n] * h_2[n]$ y convolucionando entonces $x[n]$ con $g[n]$ para obtener $y[n] = x[n] * [\ h_1[n] * h_2[n]]$.

Las respuestas a (i) e (ii) deben ser idénticas, y deben ilustrar la propiedad de asociatividad de la convolución de tiempo discreto.

(c) Considere la conexión en cascada de dos sistemas LTI como en la figura P2.43(b), donde en este caso

$$h_1[n] = \text{sen}\, 8n$$

y

$$h_2[n] = a^n u[n],\ |a| < 1,$$

y donde la entrada es

$$x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1].$$

Determine la salida $y[n]$. (*Sugerencia:* El uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la convolución deben facilitar bastante la solución.)

2.44. (a) Si

$$x(t) = 0,\ |t| > T_1,$$

y

$$h(t) = 0,\ |t| > T_2,$$

entonces

$$x(t) * h(t) = 0,\ |t| > T_3$$

para algún número positivo T_3. Exprese T_3 en términos de T_1 y T_2.

(b) Un sistema LTI discreto tiene una entrada $x[n]$, una respuesta al impulso $h[n]$ y una salida $y[n]$. Si se sabe que $h[n]$ es cero en cualquier valor fuera del intervalo $N_0 \le n \le N_1$ y se sabe que $x[n]$ es cero en cualquier valor fuera del intervalo $N_2 \le n \le N_3$, entonces la salida $y[n]$ está restringida a ser cero en cualquier valor, excepto en algún intervalo $N_4 \le n \le N_5$.

(i) Determine N_4 y N_5 en términos de N_0, N_1, N_2 y N_3.

(ii) Si el intervalo $N_0 \le n \le N_1$ es de longitud M_h, $N_2 \le n \le N_3$ tiene una longitud M_x, y $N_4 \le n \le N_5$ es de longitud M_y, exprese M_y en términos de M_h y M_x.

(c) Considere un sistema LTI discreto con la siguiente propiedad: si la entrada $x[n] = 0$ para toda $n \ge 10$, entonces la salida $y[n] = 0$ para toda $n \ge 15$. ¿Qué condición debe satisfacer $h[n]$, la respuesta al impulso del sistema, para que esto sea válido?

(d) Considere el sistema LTI con respuesta al impulso de la figura P2.44. ¿Qué intervalo de $x(t)$ debemos conocer para determinar $y(0)$?

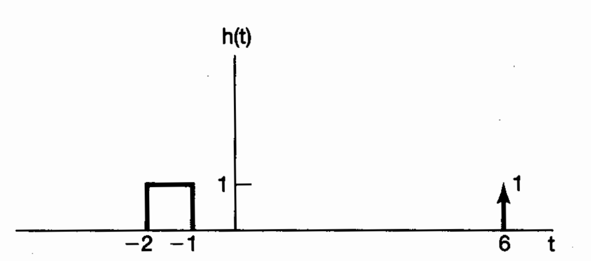


Figura P2.44

2.45. (a) Demuestre que si la respuesta de un sistema LTI a $x(t)$ es la salida $y(t)$, entonces la respuesta del sistema a

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

es $y'(t)$. Resuelva este problema en tres formas diferentes:

(i) De forma directa a través de las propiedades de linealidad e invariancia en el tiempo y el hecho de que

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t) - x(t-h)}{h}.$$

(ii) Diferenciando la integral de convolución.

(iii) Analizando el sistema de la figura P2.45.

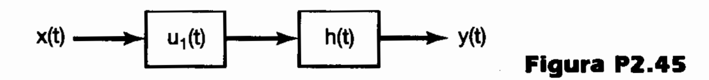


Figura P2.45

(b) Demuestre la validez de las siguientes relaciones:

(i) $y'(t) = x(t) * h'(t)$

(ii) $y(t) = (\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau) * h'(t) = \int_{-\infty}^{t} [x'(\tau) * h(\tau)]d\tau = x'(t) * (\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau)$

[*Sugerencia:* Esto se lleva a cabo fácilmente mediante el uso de los diagramas de bloques como en (iii) de la parte (a) y el hecho de que $u_1(t) * u_{-1}(t) = \delta(t)$.]

(c) Un sistema LTI tiene la respuesta $y(t) = \text{sen}\,\omega_0 t$ a la entrada $x(t) = e^{-5t}u(t)$. Utilice el resultado de la parte (a) como ayuda para determinar la respuesta al impulso de este sistema.

(d) Sea $s(t)$ la respuesta al escalón unitario de un sistema LTI de tiempo continuo. Utilice la parte (b) para deducir que la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t)$ es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau) * s(t-\tau)d\tau. \qquad \text{(P2.45-1)}$$

Demuestre también que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau)u(t-\tau)d\tau. \qquad \text{(P2.45-2)}$$

(e) Use la ecuación (P2.45-1) para determinar la respuesta de un sistema LTI con respuesta escalón

$$s(t) = (e^{-3t} - 2e^{-2t} + 1)u(t)$$

a la entrada $x(t) = e^{t}u(t)$.

(f) Sea $s[n]$ la respuesta escalón unitario de un sistema LTI discreto. ¿Cuáles son las contrapartes discretas de las ecuaciones (P2.45-1) y (P2.45-2)?

2.46. Considere un sistema LTI S y una señal $x(t) = 2e^{-3t}u(t-1)$. Si

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

y

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow -3y(t) + e^{-2t}u(t),$$

determine la respuesta al impulso $h(t)$ de S.

2.47. Se nos ha dado cierto sistema lineal invariante en el tiempo con respuesta al impulso $h_0(t)$. Cuando la entrada es $x_0(t)$, la salida es $y_0(t)$, la cual está dibujada en la figura P2.47. Se nos ha dado entonces el siguiente conjunto de entradas a los sistemas lineales invariantes en el tiempo con sus correspondientes respuestas al impulso:

	Entrada $x(t)$	*Respuesta al impulso* $h(t)$
(a)	$x(t) = 2x_0(t)$	$h(t) = h_0(t)$
(b)	$x(t) = x_0(t) - x_0(t-2)$	$h(t) = h_0(t)$
(c)	$x(t) = x_0(t-2)$	$h(t) = h_0(t+1)$
(d)	$x(t) = x_0(-t)$	$h(t) = h_0(t)$
(e)	$x(t) = x_0(-t)$	$h(t) = h_0(-t)$
(f)	$x(t) = x'_0(t)$	$h(t) = h'_0(t)$

[Aquí, $x'_0(t)$ y $h'_0(t)$ denotan las primeras derivadas de $x_0(t)$ y $h_0(t)$, respectivamente.]

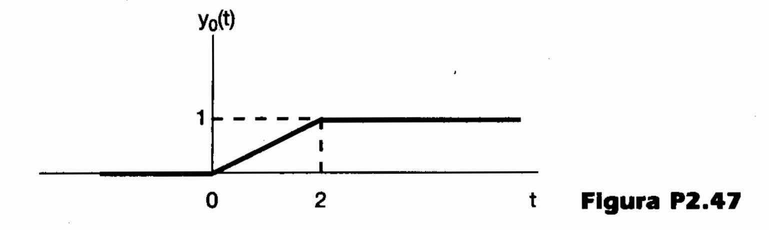


Figura P2.47

En cada uno de estos casos, determine si hay o no suficiente información para determinar la salida $y(t)$ cuando la entrada es $x(t)$ y la respuesta al impulso del sistema es $h(t)$. Si es posible determinar $y(t)$, proporcione su gráfica exacta con valores numéricos indicados en forma clara.

2.48. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones concernientes a los sistemas LTI son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

(a) Si $h(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema LTI y $h(t)$ es periódica y diferente de cero, el sistema es inestable.

(b) El inverso de un sistema LTI causal siempre es causal.

(c) Si $|h[n]| \leq K$ para cada n, donde K es un número dado, entonces el sistema LTI cuya respuesta al impulso sea $h[n]$ será estable.

(d) Si un sistema LTI discreto tiene una respuesta al impulso $h[n]$ de duración finita, el sistema es estable.

(e) Si un sistema LTI es causal, es estable.

(f) La conexión en cascada de un sistema LTI no causal con uno causal es necesariamente no causal.

(g) Un sistema LTI continuo es estable si y sólo si su respuesta al escalón $s(t)$ es absolutamente integrable; esto es, si y sólo si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|dt < \infty.$$

(h) Un sistema LTI discreto es causal si y sólo si su respuesta al escalón $s[n]$ es cero para $n < 0$.

2.49. En el texto, mostramos que si $h[n]$ es absolutamente sumable, es decir, si

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty,$$

entonces el sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ es estable. Esto significa que ser absolutamente sumable es una condición *suficiente* para la estabilidad. En este problema, mostraremos que también es una condición *necesaria*. Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ que no es absolutamente sumable; esto es,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \infty.$$

(a) Suponga que la entrada a este sistema es

$$x[n] = \begin{cases} 0, & \text{si } h[-n] = 0 \\ \frac{h[-n]}{|h[-n]|}, & \text{si } h[-n] \neq 0 \end{cases}.$$

¿Esta señal de entrada representa una entrada limitada? Si así es, ¿cuál es el valor más pequeño de B tal que:

$$|x[n]| \leq B \text{ para toda } n?$$

(b) Calcule la salida en $n = 0$ para esta selección particular de la entrada. ¿El resultado prueba el argumento de que la sumabilidad absoluta es una condición necesaria para la estabilidad?

(c) De manera parecida, demuestre que un sistema LTI continuo es estable si y sólo si su respuesta al impulso es absolutamente integrable.

2.50. Considere la conexión en cascada de dos sistemas mostrados en la figura P2.50. Se sabe que el primer sistema, A, es LTI. Sabemos que el segundo sistema, B, es el inverso del sistema A. Sea que $y_1(t)$ denota la respuesta del sistema A a $x_1(t)$ y que $y_2(t)$ denota la respuesta del sistema A a $x_2(t)$.

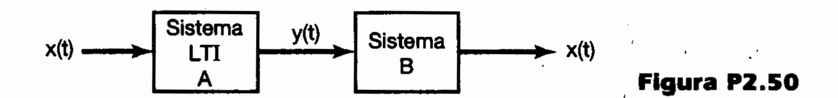


Figura P2.50

(a) ¿Cuál es la respuesta del sistema B a la entrada $ay_1(t) + by_2(t)$, donde a y b son constantes?

(b) ¿Cuál es la respuesta del sistema B a la entrada $y_1(t - \tau)$?

2.51. En el texto, vimos que la relación general entrada-salida de la conexión en cascada de dos sistemas LTI no depende del orden en el cual estén conectados. Este hecho, conocido como la propiedad conmutativa, depende tanto de la linealidad como de la invariancia en el tiempo de ambos sistemas. En este problema ilustramos el punto.

(a) Considere dos sistemas discretos A y B, donde el sistema A es un sistema LTI con respuesta a la muestra unitaria $h[n] = (1/2)^n u[n]$. Por otro lado, el sistema B es lineal pero variante en el tiempo. Específicamente, si la entrada al sistema B es $w[n]$, su salida es

$$z[n] = nw[n].$$

Demuestre que la propiedad conmutativa no se cumple para estos dos sistemas mediante el cálculo de las respuestas al impulso de las combinaciones en cascada mostradas en las figuras P2.51(a) y P2.51(b), respectivamente.

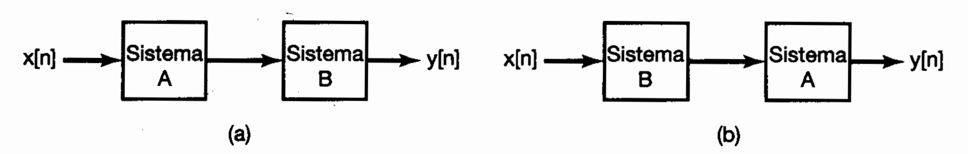


Figura P2.51

(b) Suponga que reemplazamos el sistema B en cada uno de los sistemas interconectados de la figura P2.51 por el sistema que muestra la siguiente relación entre su entrada $w[n]$ y su salida $z[n]$:

$$z[n] = w[n] + 2.$$

Repita los cálculos de la parte (a) en este caso.

2.52. Considere un sistema LTI discreto con respuesta a la muestra unitaria

$$h[n] = (n + 1)\alpha^n u[n],$$

donde $|\alpha| < 1$. Demuestre que la respuesta al escalón de este sistema es

$$s[n] = \left[\frac{1}{(\alpha - 1)^2} - \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2}\alpha^n + \frac{\alpha}{(\alpha - 1)}(n + 1)\alpha^n\right]u[n].$$

(*Sugerencia:* Note que

$$\sum_{k=0}^{N}(k + 1)\alpha^k = \frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{N+1}\alpha^k).$$

2.53. (a) Considere la ecuación diferencial homogénea

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0. \qquad \text{(P2.53-1)}$$

Demuestre que si s_0 es una solución de la ecuación

$$p(s) = \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0, \qquad \text{(P2.53-2)}$$

entonces $Ae^{s_0 t}$ es una solución de la ecuación (P2.53-1), donde A es una constante compleja arbitraria.

(b) El polinomio $p(s)$ en la ecuación (P2.53-2) puede factorizarse en términos de sus raíces $s_1, \ldots, s_r$ como

$$p(s) = a_N(s - s_1)^{\sigma_1}(s - s_2)^{\sigma_2} \ldots (s - s_r)^{\sigma_r},$$

donde s_i son las distintas soluciones de la ecuación (P2.53-2) y σ_i son sus *multiplicidades*, es decir, el número de veces que cada raíz aparece como una solución de la ecuación. Observe que

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_r + N.$$

En general, si $\sigma_i > 1$, entonces no sólo $Ae^{s_i t}$ es una solución de la ecuación (P2.53-1), sino que también lo es $At^j e^{s_i t}$, en tanto j sea un entero mayor que o igual a cero y menor que o igual a $\sigma_i - 1$. Para ilustrar este punto, demuestre que si $\sigma_i = 2$, entonces $Ate^{s_i t}$ es una solución de la ecuación (P2.53-1). [*Sugerencia:* Demuestre que si s es un número complejo arbitrario, entonces

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k(Ate^{st})}{dt^k} = Ap(s)te^{st} + A\frac{dp(s)}{ds}e^{st}.]$$

Por tanto, la solución más general de la ecuación (P2.53-1) es

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\sigma_i-1} A_{ij}t^j e^{s_i t},$$

donde A_{ij} son constantes complejas arbitrarias.

(c) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas con las condiciones auxiliares específicas:

(i) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

(ii) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

(iii) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

(iv) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

(v) $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1\ \ y''(0) = -2$

(vi) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

2.54. (a) Considere la ecuación de diferencias homogénea

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0, \tag{P2.54-1}$$

Demuestre que si z_0 es una solución de la ecuación

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = 0, \tag{P2.54-2}$$

entonces Az_0^n es una solución de la ecuación (P2.54-1), donde A es una constante arbitraria.

(b) Como por el momento resulta más conveniente trabajar con polinomios que tienen sólo potencias no negativas de z, considere la ecuación obtenida al multiplicar ambos miembros de la ecuación (P2.54-2) por z^N:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k} = 0. \tag{P2.54-3}$$

El polinomio $p(z)$ se puede factorizar como

$$p(z) = a_0(z - z_1)^{\sigma_1} \ldots (z - z_r)^{\sigma_r},$$

donde $z_1, \ldots, z_r$ son las distintas raíces de $p(z)$.

Demuestre que si $y[n] = nz^{n-1}$, entonces

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \frac{dp(z)}{dz} z^{n-N} + (n - N)p(z)z^{n-N-1}.$$

Utilice este hecho para demostrar que si $\sigma_i = 2$, entonces tanto Az_i^n como Bnz_i^{n-1} son las soluciones de la ecuación (P2.54-1), donde A y B son constantes complejas arbitrarias. De manera más general, se puede usar este mismo procedimiento para demostrar que si $\sigma_i > 1$, entonces

$$A\frac{n!}{r!(n-r)!}z^{n-r}$$

es una solución de la ecuación (P2.54-1) para $r = 0, 1, \ldots, \sigma_i - 1$.[7]

(c) Resuelva las siguientes ecuaciones de diferencias homogéneas con las condiciones auxiliares específicas:

(i) $y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 0;\ y[0] = 1, y[-1] = -6$

(ii) $y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = 0;\ y[0] = 1, y[1] = 0$

(iii) $y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = 0;\ y[0] = 1, y[10] = 21$

(iv) $y[n] - \frac{\sqrt{2}}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = 0;\ y[0] = 0, y[-1] = 1$

2.55. Dentro del texto describimos un método para resolver las ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes, y mostramos otro método para hacerlo, el cual se ilustra en el problema 2.30. Si se hace la hipótesis de reposo inicial de manera que el sistema descrito por la ecuación de diferencias sea LTI y causal, entonces, en principio, podemos determinar la respuesta al impulso unitario $h[n]$ usando cualquiera de estos dos procedimientos. En el capítulo 5 describimos otro método que nos permite determinar $h[n]$ en una forma más elegante. En este problema describimos una aproximación más, la cual muestra básicamente que $h[n]$ se puede determinar resolviendo la ecuación homogénea con las condiciones iniciales adecuadas.

(a) Considere el sistema inicialmente en reposo descrito por la ecuación

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]. \qquad \text{(P2.55-1)}$$

Suponiendo que $x[n] = \delta[n]$, ¿cuál es el valor de $y[0]$? ¿Qué ecuación para $h[n]$ se satisface para $n \geq 1$ y con qué condiciones auxiliares? Resuelva esta ecuación para obtener una expresión de forma cerrada para $h[n]$.

(b) Considere ahora el sistema LTI inicialmente en reposo descrito por la ecuación de diferencias

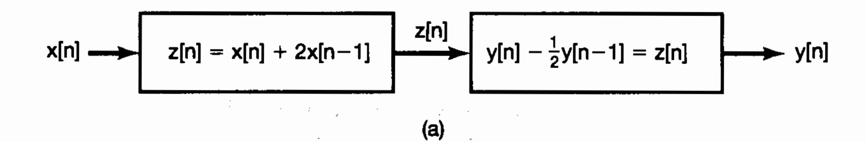
$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1]. \qquad \text{(P2.55-2)}$$

Este sistema está representado en la figura P2.55(a) como una conexión en cascada de dos sistemas LTI que están inicialmente en reposo. Debido a las propiedades de los sistemas LTI, podemos invertir el orden para obtener una representación alternativa del mismo sistema completo, como se ilustra en la figura P2.55(b). A partir de esto, utilice el resultado de la parte (a) para determinar la respuesta al impulso para el sistema descrito por la ecuación (P2.55-2).

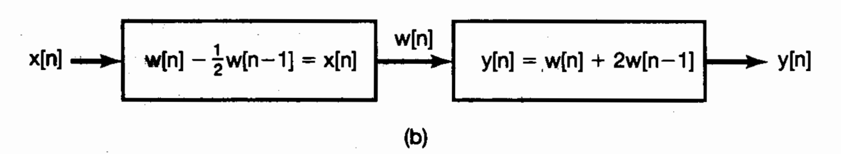
(c) Considere nuevamente el sistema de la parte (a), con $h[n]$ que denota su respuesta al impulso. Demuestre, mediante la verificación de que la ecuación (P2.55-3) satisface la ecuación de diferencias (P2.55-1), que la respuesta $y[n]$ a una entrada arbitraria $x[n]$ está dada por la suma de convolución

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[n-m]x[m]. \qquad \text{(P2.55-3)}$$

[7]Aquí estamos usando la notación factorial; es decir, $k! = k(k-1)(k-2)\ldots(2)(1)$, donde $0!$ se define como 1.



(a)



(b)

Figura P2.55

(d) Considere el sistema LTI inicialmente en reposo descrito por la ecuación de diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n]. \qquad \text{(P2.55-4)}$$

Suponiendo que $a_0 \neq 0$, ¿cuál es el valor de $y[0]$ si $x[n] = \delta[n]$? Usando este resultado, especifique la ecuación homogénea y las condiciones iniciales que debe satisfacer la respuesta al impulso del sistema.

Considere a continuación el sistema LTI causal descrito por la ecuación de diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]. \qquad \text{(P2.55-5)}$$

Exprese la respuesta al impulso de este sistema en términos de la respuesta dada para el sistema LTI descrito por la ecuación (P2.55-4).

(e) Hay un método alternativo para determinar la respuesta al impulso del sistema LTI descrito por la ecuación (P2.55-5). En concreto, dada la condición de reposo inicial, es decir, en este caso, $y[-N] = y[-N+1] = \ldots = y[-1] = 0$, resuelva la ecuación (P2.55-5) de forma recursiva cuando $x[n] = \delta[n]$ para determinar $y[0], \ldots, y[M]$. ¿Qué ecuación satisface $h[n]$ para $n \geq M$? ¿Cuáles son las condiciones iniciales adecuadas para esta ecuación?

(f) Usando cualquiera de los métodos descritos en las partes (d) y (e), encuentre las respuestas al impulso de los sistemas LTI causales descritos por las siguientes ecuaciones:

(i) $y[n] - y[n-2] = x[n]$
(ii) $y[n] - y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$
(iii) $y[n] - y[n-2] = 2x[n] - 3x[n-4]$
(iv) $y[n] - (\sqrt{3}/2)y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$

2.56. En este problema consideramos un procedimiento que es la contraparte de tiempo continuo de la técnica desarrollada en el problema 2.55. Nuevamente veremos que el problema de determinar la respuesta al impulso $h(t)$ para $t > 0$ para un sistema LTI inicialmente en reposo descrito por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, se reduce al problema de resolver la ecuación homogénea con condiciones iniciales apropiadas.

(a) Considere el sistema LTI inicialmente en reposo y descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t). \qquad \text{(P2.56-1)}$$

Suponga que $x(t) = \delta(t)$. Para determinar el valor de $y(t)$ *inmediatamente después* de la aplicación del impulso unitario, considere la integral de la ecuación (P2.56−1) desde $t = 0^-$ hasta $t = 0^+$ (es decir, desde 'justo antes" hasta "justo después" de la aplicación del impulso). Esto nos da

$$y(0^+) - y(0^-) + 2\int_{0^-}^{0^+} y(\tau)d\tau = \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)d\tau = 1. \qquad \text{(P2.56-2)}$$

Puesto que el sistema está inicialmente en reposo y $x(t) = 0$ para $t < 0$, $y(0^-) = 0$. Para satisfacer la ecuación (P2.56-9-2) debemos tener $y(0^+) = 1$. Por tanto, debido a que $x(t) = 0$ para $t > 0$, la respuesta al impulso de nuestro sistema es la solución de la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

con condición inicial

$$y(0^+) = 1.$$

Resuelva esta ecuación diferencial para obtener la respuesta al impulso $h(t)$ para este sistema. Verifique su resultado demostrando que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

satisface la ecuación (P2.56-1) para cualquier entrada $x(t)$.

(b) Para generalizar este argumento, considere un sistema LTI inicialmente en reposo y descrito por la ecuación diferencial

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = x(t) \qquad \text{(P2.56-3)}$$

con $x(t) = \delta(t)$. Asuma la condición de reposo inicial la cual, ya que $x(t) = 0$ para $t < 0$, implica que

$$y(0^-) = \frac{dy}{dt}(0^-) = \ldots = \frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}(0^-) = 0. \qquad \text{(P2.56-4)}$$

Integre ambos miembros de la ecuación (P2.56-3), a partir de $t = 0^-$ hasta $t = 0^+$, y use la ecuación (P2.56-4) y un argumento similar al usado en la parte (a)

para demostrar que la ecuación resultante se satisface con

$$y(0^+) = \frac{dy}{dt}(0^+) = \ldots = \frac{d^{N-2}y}{dt^{N-2}}(0^+) = 0. \qquad \text{(P2.56-5}a\text{)}$$

y

$$\frac{d^{N-2}y}{dt^{N-2}}(0^+) = \frac{1}{a^N}. \qquad \text{(P2.56-5}b\text{)}$$

En consecuencia, la respuesta al impulso del sistema para $t > 0$ puede obtenerse resolviendo la ecuación homogénea

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

con condiciones iniciales dadas por las ecuaciones (P2.56-5).

(c) Considere ahora el sistema LTI causal descrito mediante la ecuación diferencial

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \qquad \text{(P2.56-6)}$$

Exprese la respuesta al impulso de este sistema en términos de la que se obtuvo para el sistema de la parte (b). (*Sugerencia:* Examine la figura P2.56.)

Figura P2.56

(d) Aplique el procedimiento descrito en las partes (b) y (c) para encontrar las respuestas al impulso para los sistemas LTI inicialmente en reposo y descritos por las siguientes ecuaciones diferenciales:

(i) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$

(ii) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$

(e) Use los resultados de las partes (b) y (c) para deducir que si $M \geq N$ en la ecuación (P2.56-6), entonces la respuesta al impulso $h(t)$ contendrá términos singulares concentrados en $t = 0$. En particular, $h(t)$ contendrá un término de la forma

$$\sum_{r=0}^{M-N} \alpha_r u_r(t),$$

donde α_r son constantes y las $u_r(t)$ son funciones singulares definidas en la sección 2.5.

(f) Encuentre las respuestas al impulso de los sistemas LTI causales descritos por las siguientes ecuaciones diferenciales:

(i) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$

(ii) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{d^3x(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$

2.57. Considere un sistema LTI causal S cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ estén relacionadas por la ecuación de diferencias

$$y[n] = -ay[n-1] + b_0x[n] + b_1x[n-1].$$

(a) Verifique que S pueda considerarse una conexión en cascada de dos sistemas LTI causales S_1 y S_2 con la siguiente relación entrada-salida:

$$S_1 : y_1[n] = b_0x_1[n] + b_1x_1[n-1],$$

$$S_2 : y_2[n] = -ay_2[n-1] + x_2[n],$$

(b) Dibuje la representación de S_1 en diagrama de bloque.
(c) Dibuje la representación de S_2 en diagrama de bloque.
(d) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_1 seguida de la representación de S_2.
(e) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_2 seguida de la representación de S_1.
(f) Demuestre que los dos elementos de retardo en la representación de S en diagrama de bloque obtenida en la parte (e) se puede reducir a un elemento de retardo. El diagrama de bloques resultante se conoce como realización de la *Forma Directa II de S*, en tanto que los diagramas de bloques obtenidos en las partes (d) y (e) se conocen como realizaciones de la *Forma Directa I de S*.

2.58. Imagine un sistema LTI causal S cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ estén relacionadas por la ecuación de diferencias:

$$2y[n] - y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 5x[n-4].$$

(a) Verifique que S se pueda considerar como una conexión en cascada de dos sistemas LTI causales S_1 y S_2 con las siguientes relaciones de entrada-salida:

$$S_1 : 2y_1[n] = x_1[n] - 5x_1[n-4],$$

$$S_2 : y_2[n] = \frac{1}{2}y_2[n-1] - \frac{1}{2}y_2[n-3] + x_2[n].$$

(b) Dibuje la representación de S_1 en diagrama de bloque.
(c) Dibuje la representación de S_2 en diagrama de bloque.
(d) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la misma representación de S_1 seguida de la representación de S_2.
(e) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_2 seguida de la representación de S_1.
(f) Demuestre que los cuatro elementos de retardo en la representación de S en diagrama de bloque obtenida en la parte (e) se puede reducir a tres elementos. El diagrama de bloques resultante se conoce como realización de la *Forma Directa II de S*, mientras que los diagramas de bloques obtenidos en las partes (d) y (e) se conocen como realizaciones de la *Forma Directa I de S*.

2.59. Considere un sistema LTI causal S cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ estén relacionadas por la ecuación diferencial

$$a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_0x(t) + b_1\frac{dx(t)}{dt}.$$

(a) Demuestre que

$$y(t) = A\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau + Bx(t) + C\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau,$$

y exprese las constantes A, B y C en términos de las constantes a_0, a_1, b_0 y b_1.

(b) Demuestre que S se puede considerar como una conexión en cascada de los dos siguientes sistemas LTI causales:

$$S_1 : y_1(t) = Bx_1(t) + C\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau,$$

$$S_2 : y_2(t) = A\int_{-\infty}^{t} y_2(\tau)d\tau + x_2(t).$$

(c) Dibuje la representación de S_1 en diagrama de bloque.

(d) Dibuje la representación de S_2 en diagrama de bloque.

(e) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_1 seguida de la representación de S_2.

(f) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_2 seguida de la representación de S_1.

(g) Demuestre que los dos integradores en su respuesta a la parte (f) se pueden reducir a uno solo. El diagrama de bloques resultante se conoce como realización de la *Forma Directa II de S*, en tanto que los diagramas de bloques obtenidos en las partes (e) y (f) se conocen como realizaciones de la *Forma Directa I de S*.

2.60. Considere un sistema LTI causal S cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ estén relacionadas por la ecuación diferencial

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_0x(t) + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_2\frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

(a) Demuestre que

$$y(t) = A\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau + B\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} y(\sigma)d\sigma\right)d\tau$$

$$+ Cx(t) + D\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau + E\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} x(\sigma)d\sigma\right)d\tau,$$

y exprese las constantes A, B, C, D y E en términos de las constantes a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 y b_2.

(b) Demuestre que S se puede considerar como una conexión en cascada de los dos siguientes sistemas LTI causales:

$$S_1: y_1(t) = Cx_1(t) + D\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau + E\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} x_1(\sigma)d\sigma\right)d\tau,$$

$$S_2: y_2(t) = A\int_{-\infty}^{t} y_2(\tau)d\tau + B\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} y_2(\sigma)d\sigma\right)d\tau + x_2(t).$$

(c) Dibuje la representación de S_1 en diagrama de bloque.

(d) Dibuje la representación de S_2 en diagrama de bloque.

(e) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_1 seguida de la representación de S_2.

(f) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_2 seguida de la representación de S_1.

(g) Demuestre que los cuatro integradores en su respuesta a la parte (f) se pueden reducir a dos. El diagrama de bloques resultante se conoce como realización de la *Forma Directa II de S*, mientras que los diagramas de bloques obtenidos en las partes (e) y (f) se conocen como realizaciones de la *Forma Directa I de S*.

PROBLEMAS DE EXTENSIÓN

2.61. (a) En el circuito mostrado en la figura P2.61(a), $x(t)$ es el voltaje de entrada. El voltaje $y(t)$ a través del capacitor se considera la salida del sistema.

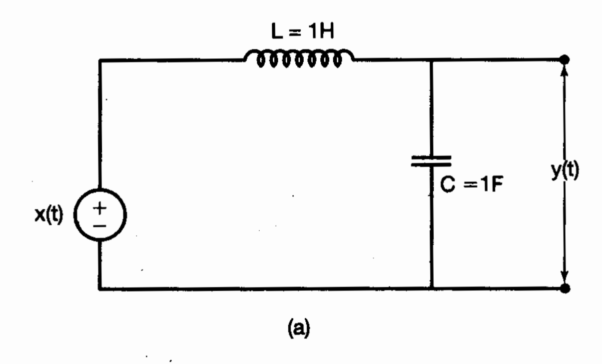


Figura P2.61a

(i) Determine la ecuación diferencial que relaciona a $x(t)$ con $y(t)$.

(ii) Demuestre que la solución homogénea de la ecuación diferencial de la parte (i) tiene la forma $K_1e^{j\omega_1 t} + K_2e^{j\omega_2 t}$. Especifique los valores de ω_1 y ω_2.

(iii) Demuestre que, ya que el voltaje y la corriente están restringidos a ser reales, la respuesta natural del sistema es senoidal.

(b) En el circuito mostrado en la figura P2.61(b), $x(t)$ es el voltaje de entrada. El voltaje $y(t)$ a través del capacitor se considera la salida del sistema.

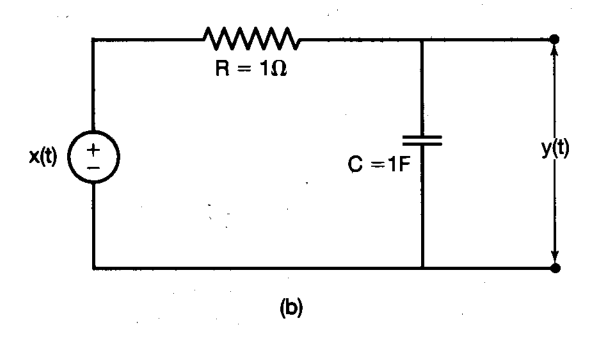


Figura P2.61b

(i) Determine la ecuación diferencial que relaciona a $x(t)$ con $y(t)$.

(ii) Demuestre que la respuesta natural de este sistema tiene la forma Ke^{-at}, y especifique el valor de a.

(c) En el circuito mostrado en la figura P2.61(c), $x(t)$ es el voltaje de entrada. El voltaje $y(t)$ a través del capacitor se considera la salida del sistema.

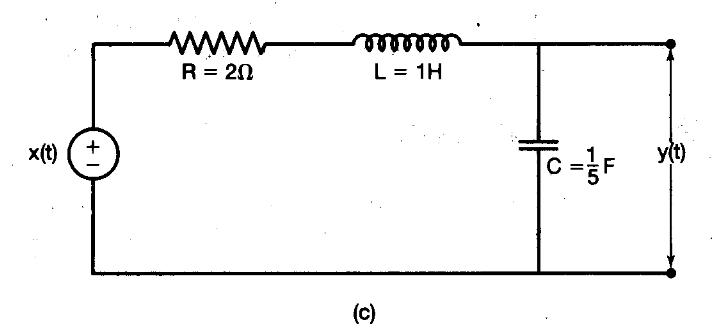


Figura P2.61c

(i) Determine la ecuación diferencial que relaciona a $x(t)$ con $y(t)$.

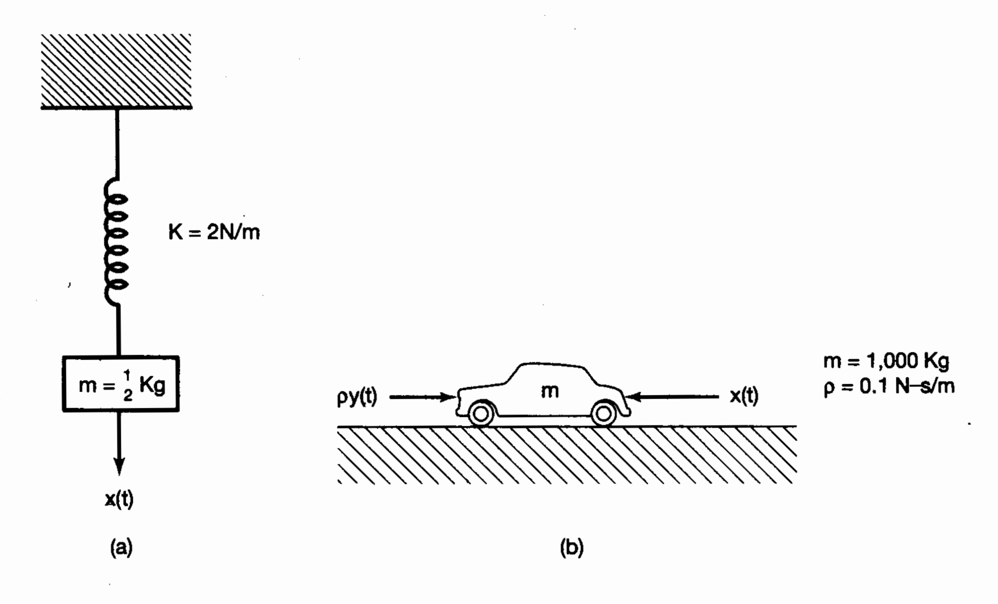
(ii) Demuestre que la solución homogénea de la ecuación diferencial de la parte (i) tiene la forma $e^{-at}\{K_1e^{j2t} + K_2e^{-j2t}\}$, y especifique el valor de a.

(iii) Demuestre que, ya que el voltaje y la corriente están restringidos a ser reales, la respuesta natural del sistema es una senoidal decreciente.

2.62. (a) En el sistema mecánico que se muestra en la figura P2.62(a), la fuerza $x(t)$ aplicada a la masa representa la entrada, mientras que el desplazamiento $y(t)$ de la masa representa la salida. Determine la ecuación diferencial que relaciona a $x(t)$ con $y(t)$. Demuestre que la respuesta natural de este sistema es periódica.

(b) Examine la figura P2.62(b), en la cual la fuerza $x(t)$ es la entrada y la velocidad $y(t)$ es la salida. La masa del auto es m, en tanto que el coeficiente de fricción cinética es ρ. Demuestre que la respuesta natural de este sistema decae conforme aumenta el tiempo.

(c) En el sistema mecánico mostrado en la figura P2.62(c), la fuerza $x(t)$ aplicada a la masa representa la entrada, mientras que el corrimiento $y(t)$ de la masa representa la salida.



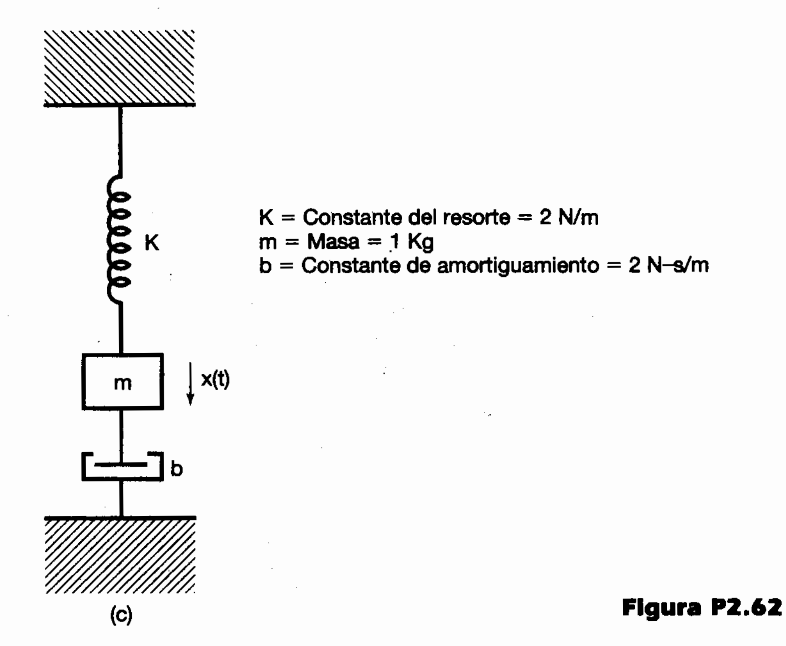


Figura P2.62

(i) Determine la ecuación diferencial que relaciona a $x(t)$ con $y(t)$.

(ii) Demuestre que la solución homogénea de la ecuación diferencial de la parte (i) tiene la forma $e^{-at}\{K_1 e^{jt} + K_2 e^{-jt}\}$, y especifique el valor de a.

(iii) Demuestre que, ya que el voltaje y la corriente están restringidos a ser reales, la respuesta natural del sistema es una senoidal decreciente.

2.63. Una hipoteca de \$100,000 será liquidada mediante pagos mensuales *iguales* de D dólares. El interés compuesto mensual se carga a una tasa de 12% anual sobre el balance no pagado; por ejemplo, después del primer mes, la deuda total es igual a

$$\$100{,}000 + \left(\frac{0.12}{12}\right)\$100{,}000 = \$101{,}000.$$

El problema es determinar D de manera tal que, después de un tiempo especificado, la hipoteca sea pagada totalmente, dejando un balance neto de cero.

(a) Para abordar el problema, suponga que $y[n]$ denota el balance no pagado después del pago mensual n. Suponga también que el principal se presta en el mes 0 y los pagos mensuales se inician en el mes 1. Demuestre que $y[n]$ satisface la ecuación de diferencias

$$y[n] - \gamma y[n-1] = -D \quad n \geq 1 \qquad \text{(P2.63-1)}$$

con la condición inicial

$$y[0] = \$100{,}000,$$

donde γ es una constante que debe ser determinada.

(b) Resuelva la ecuación de diferencias de la parte (a) para determinar

$$y[n] \text{ para } n \geq 0.$$

(*Sugerencia:* La solución particular de la ecuación (P2.63-1) es una constante Y. Encuentre el valor de Y y exprese $y[n]$ para $n \geq 1$ como la suma de las soluciones particular y homogénea. Determine la constante desconocida en la solución homogénea mediante el calculando directamente $y[1]$ a partir de la ecuación (P2.63-1) y comparándola con la solución que usted obtuvo).

(c) Si la hipoteca debiera ser pagada en 30 años después de haberse hecho 360 pagos mensuales de D dólares, determine el valor apropiado de D.

(d) ¿Cuál es el pago total hecho al banco después del periodo de 30 años?

(e) ¿Por qué los bancos hacen préstamos?

2.64. Un uso importante de los sistemas inversos se encuentra en las situaciones en las que uno desea eliminar algún tipo de distorsiones. Un buen ejemplo de esto es el problema de eliminar ecos de las señales acústicas. Por ejemplo, si un auditorio tiene un eco perceptible, entonces un impulso acústico inicial producirá versiones atenuadas del sonido a intervalos regulares. En consecuencia, un modelo utilizado a menudo para tratar este fenómeno es un sistema LTI con una respuesta al impulso que consiste de un tren de impulsos, es decir,

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta(t - kT). \qquad \text{(P2.64-1)}$$

Aquí los ecos ocurren cada T segundos, y h_k representa el factor de ganancia en el eco k resultante a partir de un impulso acústico inicial.

(a) Suponga que $x(t)$ representa la señal acústica original (por ejemplo, la música producida por una orquesta) y que $y(t) = x(t) * h(t)$ es la señal real que se escucha si no se hace ningún procesamiento para eliminar los ecos. Con el fin de eliminar la distorsión introducida por los ecos, suponga que se usa un micrófono para detectar $y(t)$ y que la señal resultante será convertida en una señal

eléctrica. También usaremos $y(t)$ para denotar esta señal, ya que representa el equivalente eléctrico de la señal acústica, y podemos ir de una a otra mediante los sistemas de conversión acústico-eléctrica.

El punto importante a resaltar es que el sistema con respuesta al impulso dado por la ecuación (P2.64-1) es invertible. Por tanto, podemos encontrar un sistema LTI con respuesta al impulso $g(t)$ tal que

$$y(t) * g(t) = x(t),$$

y entonces, al procesar la señal eléctrica $y(t)$ de esta manera y convertirla de nuevo en una señal acústica, podemos eliminar los ecos que causan problemas.

La respuesta al impulso requerida $g(t)$ también es un tren de impulsos:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t - kT).$$

Determine las ecuaciones algebraicas que deben satisfacer los g_k sucesivos, y resuelva estas ecuaciones para g_0, g_1 y g_2 en términos de h_k.

(b) Suponga que $h_0 = 1, h_1 = 1/2$ y $h_i = 0$ para toda $i \geq 2$. ¿Cuál es $g(t)$ en este caso?

(c) Un buen modelo para la generación de los ecos se ilustra en la figura P2.64. En consecuencia, cada eco sucesivo representa una versión retroalimentada de $y(t)$, retrasada T segundos y escalada por α. El valor típico es $0 < \alpha < 1$, ya que los ecos sucesivos son atenuados.

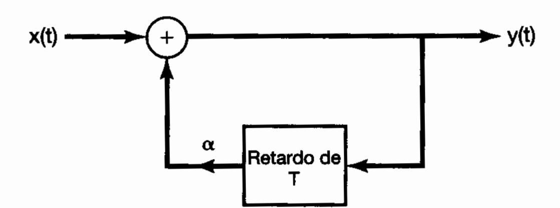


Figura P2.64

(i) ¿Cuál es la respuesta al impulso de este sistema? (Considere un reposo inicial, es decir, $y(t) = 0$ para $t < 0$ si $x(t) = 0$ para $t < 0$.)

(ii) Demuestre que el sistema es estable si $0 < \alpha < 1$ e inestable si $\alpha > 1$.

(iii) ¿Cuál es $g(t)$ en este caso? Construya una realización del sistema inverso usando sumadores, multiplicadores de coeficientes y elementos de retardo de T segundos.

(d) Aunque hemos descrito el análisis anterior en términos de sistemas continuos debido a la aplicación que hemos estado considerando, las mismas ideas generales se cumplen para el caso de tiempo discreto. Es decir, el sistema LTI con respuesta al impulso

$$h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - kN]$$

es invertible y tiene como su inverso un sistema LTI con respuesta al impulso

$$g[n] = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta[n - kN].$$

No es difícil verificar que g_i satisface las mismas ecuaciones algebraicas que en la parte (a).

Considere ahora el sistema LTI discreto con respuesta al impulso

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN].$$

Este sistema *no* es invertible. Encuentre dos entradas que produzcan la misma salida.

2.65. En el problema 1.45 presentamos y examinamos algunas de las propiedades básicas de las funciones de correlación para señales continuas. La contraparte discreta de la función de correlación tiene esencialmente las mismas propiedades que la continua, y ambas son extremadamente importantes en numerosas aplicaciones (como se analiza en los problemas 2.66 y 2.67). En este problema introducimos la función de correlación discreta y examinamos algunas más de sus propiedades.

Sean $x[n]$ y $y[n]$ dos señales reales discretas. Las *funciones de autocorrelación* $\phi_{xx}[n]$ y $\phi_{yy}[n]$ de $x[n]$ y $y[n]$, respectivamente, están definidas por las siguientes expresiones:

$$\phi_{xx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m + x]x[m]$$

y

$$\phi_{yy}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m + n]y[m]$$

y las *funciones de correlación cruzada* están dadas por

$$\phi_{xy}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m + n]y[m]$$

y

$$\phi_{yx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m + n]x[m].$$

Como en el caso continuo, estas funciones poseen ciertas propiedades de simetría. Específicamente, $\phi_{xx}[n]$ y $\phi_{yy}[n]$ son funciones par, mientras que $\phi_{xy}[n] = \phi_{yx}[-n]$.

(a) Calcule las secuencias de autocorrelación para las señales $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$ y $x_4[n]$ mostradas en la figura P2.65.

(b) Calcule las secuencias de correlación cruzada

$$\phi_{x_i x_j}[n], i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

para $x_i[n], i = 1, 2, 3, 4$, como se muestra en la figura P2.65.

(c) Sea $x[n]$ la entrada de un sistema LTI con respuesta a la muestra unitaria $h[n]$, y sea $y[n]$ su salida correspondiente. Encuentre expresiones para $\phi_{xy}[n]$ y $\phi_{yy}[n]$ en términos de $\phi_{xx}[n]$ y $h[n]$. Demuestre la forma en que $\phi_{xy}[n]$ y $\phi_{yy}[n]$ se pueden ver como la salida de sistemas LTI con $\phi_{xx}[n]$ como entrada. (Haga esto

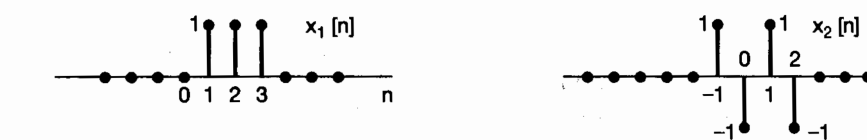




Figura P2.65

especificando de manera explícita la respuesta al impulso de cada uno de los dos sistemas.)

(d) Sea $h[n] = x_1[n]$ en la figura P2.65, y sea $y[n]$ la salida del sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ cuando la entrada $x[n]$ es también igual a $x_1[n]$. Calcule $\phi_{xy}[n]$ y $\phi_{yy}[n]$ usando los resultados de la parte (c).

2.66. Sean $h_1(t)$, $h_2(t)$ y $h_3(t)$, bosquejadas en la figura P2.66, las respuestas al impulso de tres sistemas LTI. Estas tres señales se conocen como *funciones de Walsh* y son de considerable importancia práctica porque se pueden generar fácilmente con circuitos lógicos digitales y porque la multiplicación por cada una de estas funciones puede llevarse a cabo con facilidad mediante un interruptor inversor de polaridad.

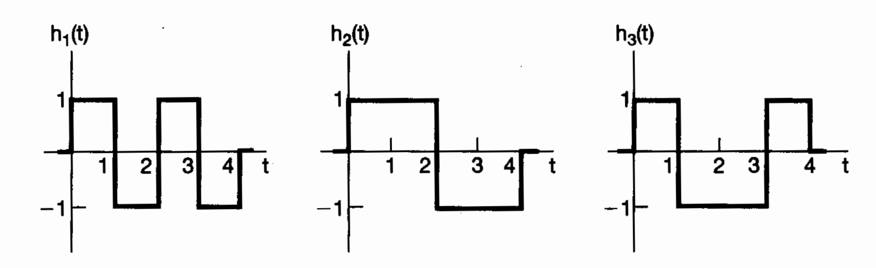


Figura P2.66

(a) Determine y dibuje su selección para $x_1(t)$, una señal continua que tiene las siguientes propiedades:

(i) $x_1(t)$ es real.

(ii) $x_1(t) = 0$ para $t < 0$.

(iii) $|x_1(t)| \leq 1$ para toda $t \geq 0$.

(iv) $y_1(t) = x_1(t) * h(t)$ es tan grande como sea posible en $t = 4$.

(b) Repita la parte (a) para $x_2(t)$ y $x_3(t)$ haciendo $y_2(t) = x_2(t) * h_2(t)$ y $y_3(t) = x_3(t) * h_3(t)$ cada una tan grande como sea posible en $t = 4$.

(c) ¿Cuál es el valor de

$$y_{ij}(t) = x_i(t) * h_j(t), i \neq j$$

en $t = 4$ para $i, j = 1, 2, 3$?

El sistema con respuesta al impulso $h_i(t)$ se conoce como *filtro de acoplamiento* para la señal $x_i(t)$ ya que la respuesta al impulso se sintoniza con $x_i(t)$ para producir la señal de salida máxima. En el siguiente problema, relacionamos el concepto de filtro de acoplamiento con el de la función de correlación para señales continuas.

2.67. La *función de correlación cruzada* entre dos señales reales continuas $x(t)$ y $y(t)$ es

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)y(\tau)d\tau. \qquad \text{(P2.67-1)}$$

La *función de autocorrelación* de una señal $x(t)$ se obtiene al establecer $y(t) = x(t)$ en la ecuación (P2.67-1):

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)x(\tau)d\tau.$$

(a) Calcule la función de autocorrelación para las dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representadas en la figura P2.67(a).

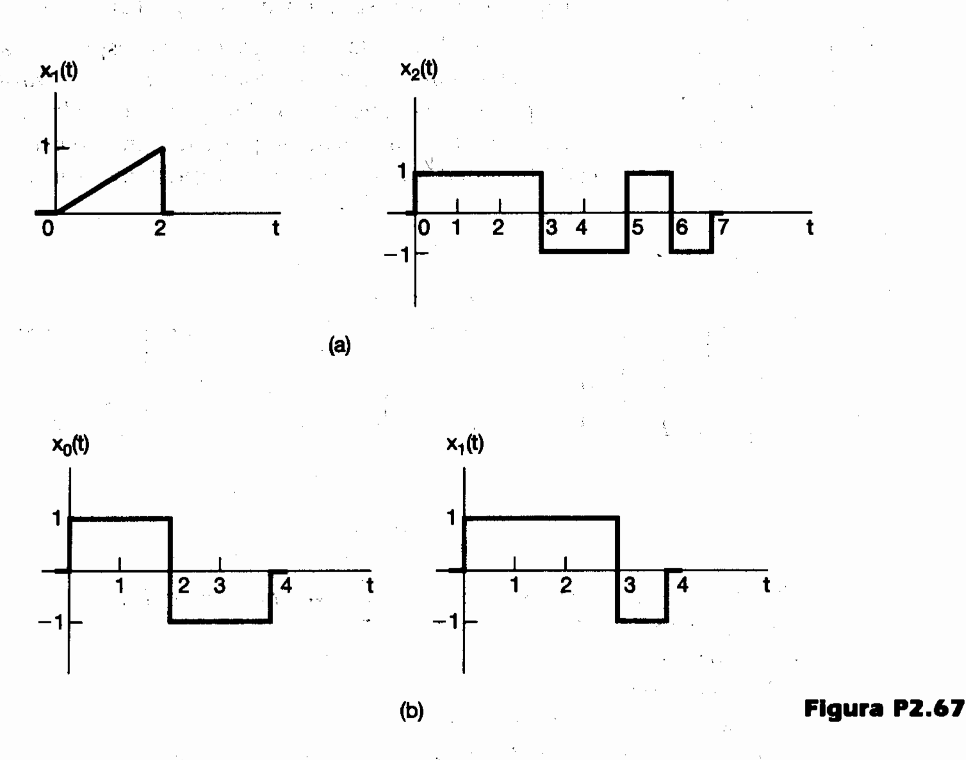


Figura P2.67

(b) Sea $x(t)$ una señal dada, y suponga que es, además, de duración finita, es decir, que $x(t) = 0$ para $t < 0$ y $t > T$. Encuentre la respuesta al impulso de un sistema LTI de manera que $\phi_{xx}(t - T)$ es la salida si $x(t)$ es la entrada.

(c) El sistema determinado en la parte (b) es un *filtro de acoplamiento* para la señal $x(t)$. De los datos siguientes se puede deducir que esta definición de un filtro de acoplamiento es idéntica a la introducida en el problema 2.66:

Sea $x(t)$ como en la parte (b), y sea que $y(t)$ denote la respuesta a $x(t)$ de un sistema LTI con respuesta real al impulso $h(t)$. Suponga que $h(t) = 0$ para $t < 0$ y para $t > T$. Demuestre que la selección de $h(t)$ que maximiza $y(T)$, sujeta ésta a la limitación de que

$$\int_0^T h^2(t)dt = M, \text{ un número positivo fijo,} \tag{P2.67-2}$$

es un múltiplo escalar de la respuesta al impulso determinada en la parte (b). [*Sugerencia:* La desigualdad de Schwartz establece que

$$\int_b^a u(t)v(t)dt \leq \left[\int_a^b u^2(t)dt\right]^{1/2}\left[\int_a^b v^2(t)dt\right]^{1/2}$$

para cualesquiera dos señales $u(t)$ y $v(t)$. Utilícela para obtener un límite sobre $y(T)$.]

(d) La restricción establecida por la ecuación (P2.67-2) proporciona simplemente un escalamiento a la respuesta al impulso, ya que al incrementarse M sólo cambia el escalar multiplicador mencionado en la parte (c). Entonces, vemos que la selección particular de $h(t)$ en las partes (b) y (c) se iguala a la señal $x(t)$ para producir la salida máxima. Ésta es una propiedad en extremo importante en diversas aplicaciones, como indicaremos a continuación.

En problemas de comunicación, de un pequeño número de posibles piezas de información con frecuencia se desea transmitir sólo una. Por ejemplo, si un mensaje complejo se codifica en una secuencia de dígitos binarios, podemos imaginar un sistema que transmite la información bit por bit. Entonces, cada bit se puede transmitir mediante el envío de una señal, digamos $x_0(t)$, si el bit es un 0, o una señal diferente $x_1(t)$ si es un 1 lo que debe comunicarse. En este caso, el sistema receptor de dichas señales debe ser capaz de reconocer si se ha recibido $x_0(t)$ o $x_1(t)$. De manera intuitiva, lo que tiene sentido es tener dos sistemas en el receptor, uno sintonizado en $x_0(t)$ y el otro en $x_1(t)$, donde "sintonizar" significa que el sistema proporciona una gran salida después de que se recibió la señal para la que está sintonizado. La propiedad de producir una salida grande cuando se recibe una señal particular es precisamente la que posee el filtro de acoplamiento.

En la práctica, siempre hay distorsión e interferencia en los procesos de transmisión y recepción. En consecuencia, queremos maximizar la diferencia entre la respuesta de un filtro de acoplamiento a la entrada para la cual está sintonizado, y la respuesta del filtro a una de las otras señales que puede ser transmitida. Para ilustrar este punto, considere las dos señales $x_0(t)$ y $x_1(t)$ representadas en la figura P2.67(b). Demos por sentado que L_0 denota el filtro de acoplamiento para $x_0(t)$ y L_1 denota el filtro de acoplamiento para $x_1(t)$.

(i) Dibuje las respuestas de L_0 a $x_0(t)$ y $x_1(t)$. Haga lo mismo para L_1.

(ii) Compare los valores de estas respuestas en $t = 4$. ¿Cuánto se puede modificar $x_0(t)$ de manera tal que el receptor pueda distinguir más fácilmente entre $x_0(t)$ y $x_1(t)$ en que la respuesta de L_0 a $x_1(t)$ y la de L_1 a $x_0(t)$ sean cero en $t = 4$?

2.68. Otra aplicación en la cual juegan un papel importante los filtros de acoplamiento y las funciones de correlación es en los sistemas de radar. El principio básico del radar consiste en un pulso electromagnético que se transmite a un objetivo; este

pulso será reflejado por dicho objetivo y regresará al transmisor con un retraso proporcional a la distancia a la que se encuentra el objetivo. En forma ideal, la señal recibida será una versión desplazada y posiblemente escalada de la señal original transmitida.

Sea $p(t)$ el pulso original que se envía. Demuestre que

$$\phi_{pp}(0) = \max_t \phi_{pp}(t).$$

Esto es, $\phi_{pp}(0)$ es el valor más grande que toma $\phi_{pp}(t)$. Utilice esta ecuación para deducir que, si la forma de onda que regresa al transmisor es

$$x(t) = \alpha p(t - t_0),$$

donde α es una constante positiva, entonces

$$\phi_{xp}(t_0) = \max_t \phi_{xp}(t).$$

(*Sugerencia:* Use la desigualdad de Schwartz.)
De este modo, la forma en la cual operan los sistemas sencillos de rastreo por radar se basa en el uso de un filtro de acoplamiento para la forma de onda transmitida $p(t)$ y en la anotación del tiempo en el cual la salida de este sistema alcanza su máximo valor.

2.69. En la sección 2.5 caracterizamos el doblete unitario mediante la ecuación

$$x(t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)u_1(\tau)d\tau = x'(t) \qquad \text{(P2.69-1)}$$

para cualquier señal $x(t)$. A partir de esta ecuación, dedujimos la relación

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)u_1(\tau)d\tau = -g'(0). \qquad \text{(P2.69-2)}$$

(a) Demuestre que la ecuación (P2.69-2) es una caracterización equivalente de $u_1(t)$ probando que la ecuación (P2.69-2) implica la ecuación (2.69-1). [*Sugerencia:* Fije t y defina la señal $g(\tau) = x(t - \tau)$.]

Así, hemos visto que caracterizar el impulso unitario o el doblete unitario mediante el comportamiento bajo la convolución es equivalente a caracterizar la forma en que se comporta bajo la integración cuando se multiplica por una señal arbitraria $g(t)$. De hecho, como se indicó en la sección 2.5, la equivalencia de estas definiciones operacionales se cumple para todas las señales y, en particular, para todas las funciones singulares.

(b) Sea $f(t)$ una señal dada. Demuestre que

$$f(t)u_1(t) = f(0)u_1(t) - f'(0)\delta(t)$$

mostrando que ambas funciones tienen las mismas definiciones operacionales.

(c) ¿Cuál es el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u_2(\tau)d\tau?$$

Encuentre una expresión para $f(t)u_2(t)$ análoga a la de la parte (b) para $f(t)u_1(t)$.

2.70. En analogía con las funciones singulares continuas, podemos definir un conjunto de señales discretas. Específicamente, sea

$$u_{-1}[n] = u[n],$$
$$u_0[n] = \delta[n],$$

y

$$u_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1],$$

y defínase

$$u_k[n] = \underbrace{u_1[n] * u_1[n] * \cdots * u_1[n]}_{k \text{ veces}}, \quad k > 0$$

y

$$u_k[n] = \underbrace{u_{-1}[n] * u_{-1}[n] * \cdots * u_{-1}[n]}_{|k| \text{ veces}}, k < 0.$$

Observe que

$$x[n] * \delta[n] = x[n],$$

$$x[n] * u[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m],$$

y

$$x[n] * u_1[n] = x[n] - x[n-1],$$

(a) ¿A qué corresponde

$$\sum_{m=\infty}^{\infty} x[m]u_1[m]?$$

(b) Demuestre que

$$x[n]u_1[n] = x[0]u_1[n] - [x[1] - x[0]]\delta[n-1]$$
$$= x[1]u_1[n] - [x[1] - x[0]]\delta[n].$$

(c) Grafique las señales $u_2[n]$ y $u_3[n]$.
(d) Grafique $u_{-2}[n]$ y $u_{-3}[n]$.
(e) Demuestre que, en general, para $k > 0$,

$$u_k[n] = \frac{(-1)^n k!}{n!(k-n)!}[u[n] - u[n-k-1]]. \qquad \text{(P2.70-1)}$$

(*Sugerencia:* Utilice la inducción. De la parte (c), resulta evidente que $u_k[n]$ satisface la ecuación (P2.70-1) para $k = 2$ y 3. Entonces, suponiendo que la ecuación (P2.70-1) satisface $u_k[n]$, escriba $u_{k+1}[n]$ en términos de $u_k[n]$, y demuestre que la ecuación también satisface $u_{k+1}[n]$.)

(f) Demuestre que, en general, para $k > 0$,

$$u_{-k}[n] = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}u[n]. \qquad \text{(P2.70-2)}$$

(*Sugerencia:* De nueva cuenta, utilice la inducción. Observe que

$$u_{-(k+1)}[n] - u_{-(k+1)}[n-1] = u_{-k}[n]. \qquad \text{(P2.70-3)}$$

Entonces, considerando que la ecuación (P2.70-2) es válida para $u_{-k}[n]$, use la ecuación (P2.70-3) para demostrar que la ecuación (P2.70-2) también es válida para $u_{-(k+1)}[n]$.)

2.71. En este capítulo hemos usado varias propiedades e ideas que facilitan ampliamente el análisis de sistemas LTI. Entre éstas, hay dos que deseamos analizar con más detalle. Como veremos más adelante, en ciertos casos muy especiales se debe tener cuidado al usar dichas propiedades, pues de otro modo se pueden cumplir sin validación.

(a) Una de las propiedades básicas y más importantes de la convolución (tanto continua como discreta) es la de asociatividad. Esto es, si $x(t), h(t)$ y $g(t)$ son tres señales, entonces

$$x(t) * [g(t) * h(t)] = [x(t) * g(t)] * h(t) = [x(t) * h(t)] * g(t). \qquad \text{(P2.71-1)}$$

Esta relación se cumple en tanto las tres expresiones estén bien definidas y sean finitas. Puesto que, en general ése es el caso en la práctica, usaremos la propiedad de asociatividad sin comentarios ni consideraciones. Sin embargo, hay algunos casos en los que *no* se cumple. Por ejemplo, considere el sistema ilustrado en la figura P2.71, con $h(t) = u_1(t)$ y $g(t) = u(t)$. Calcule la respuesta de este sistema a la entrada

$$x(t) = 1 \text{ para toda } t.$$

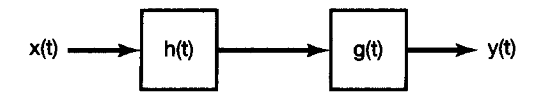




Figura P2.71

Realice esto en las tres diferentes formas indicadas por la ecuación (P2.71-1) y a partir de la figura:

(i) Convolucionando primero las dos respuestas al impulso y convolucionando después el resultado con $x(t)$.

(ii) Convolucionando primero $x(t)$ con $u_1(t)$ y convolucionando posteriormente el resultado con $u(t)$.

(iii) Convolucionando primero $x(t)$ con $u(t)$ y convolucionando el resultado con $u_1(t)$.

(b) Repita la parte (a) para

$$x(t) = e^{-t}$$

y

$$h(t) = e^{-t}u(t),$$
$$g(t) = u_1(t) + \delta(t).$$

(c) Haga lo mismo para

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$

$$g[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1].$$

Así pues, por lo general la propiedad de asociatividad de la convolución se cumple si y sólo si las tres expresiones en la ecuación (P2.71-1) tienen sentido (es decir, si y sólo si su interpretación en términos de los sistemas LTI son significativas). Por ejemplo, en la parte (a), diferenciar una constante e integrarla después tiene sentido, pero el proceso de integrar una constante desde $t = -\infty$ y *entonces* diferenciarla no lo tiene, y es sólo en tales casos que la asociatividad no se cumple.

Muy relacionado con el análisis anterior está un tema que involucra los sistemas inversos. Considere el sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = u(t)$. Como vimos en la parte (a), hay entradas (específicamente $x(t)$ = una constante diferente de cero) para las cuales la salida de este sistema es infinita y, por tanto, no tiene importancia considerar el planteamiento de invertir esos sistemas para recuperar la entrada. Sin embargo, si nos limitamos a entradas que conduzcan a salidas finitas, esto es, entradas que satisfagan

$$\left|\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right| < \infty, \qquad \text{(P2.71-2)}$$

entonces el sistema *es* invertible, y el sistema LTI con respuesta al impulso $u_1(t)$ tiene su inverso.

(d) Demuestre que el sistema LTI con respuesta al impulso $u_1(t)$ *no* es invertible. (*Sugerencia:* Encuentre dos entradas diferentes que produzcan salida cero para todo tiempo.) Sin embargo, demuestre que el sistema es invertible si nos limitamos a entradas que satisfagan la ecuación (P2.71-2). [*Sugerencia:* En el problema 1.44, demostramos que un sistema LTI es invertible si ninguna entrada excepto $x(t) = 0$ produce una salida que es cero para todo tiempo; ¿existen dos entradas $x(t)$ que satisfagan la ecuación (P2.71-2) y que conduzcan de manera idéntica a respuestas cero cuando se convolucionan con $u_1(t)$?]

Lo que hemos ilustrado en este problema es lo siguiente:

(1) Si $x(t)$, $h(t)$ y $g(t)$ son tres señales, y si $x(t) * g(t)$, $x(t) * h(t)$ y $h(t) * g(t)$ están *bien* definidas y son finitas, entonces se cumple la propiedad de asociatividad, la ecuación (P2.71-1).

(2) Sea $h(t)$ la respuesta al impulso de un sistema LTI, y suponga que la respuesta al impulso $g(t)$ de un segundo sistema tiene la propiedad

$$h(t) * g(t) = \delta(t). \tag{P2.71-3}$$

Entonces, a partir de (1), para *todas* las entradas $x(t)$ para las cuales $x(t) * h(t)$ y $x(t) * g(t)$ están bien definidas y son finitas, los dos sistemas en cascada ilustrados en la figura P2.71 actúan como el sistema identidad, y por tanto, los dos sistema LTI pueden considerarse como inversos uno del otro. Por ejemplo, si $h(t) = u(t)$ y $g(t) = u_1(t)$, entonces, en tanto nos limitemos a entradas que satisfagan la ecuación (P2.71-2), podremos considerar estos dos sistemas como inversos.

Por tanto, vemos que la propiedad de asociatividad de la ecuación (P2.71-1) y la definición de sistemas LTI inversos como fue proporcionada por la ecuación (P2.71-3) son válidas, en tanto que las convoluciones involucradas sean finitas. Puesto que éste es el caso en cualquier problema real, usaremos en general estas propiedades sin comentario o validación. Observe que, aunque hemos descrito gran parte de este análisis en términos de señales y sistemas continuos, los mismos puntos se aplican en el caso discreto [lo cual debe resultar evidente de la parte (c)].

2.72. Sea que $\delta_\Delta(t)$ denota el pulso rectangular de altura $\frac{1}{\Delta}$ para $0 < t \leq \Delta$. Verifique que

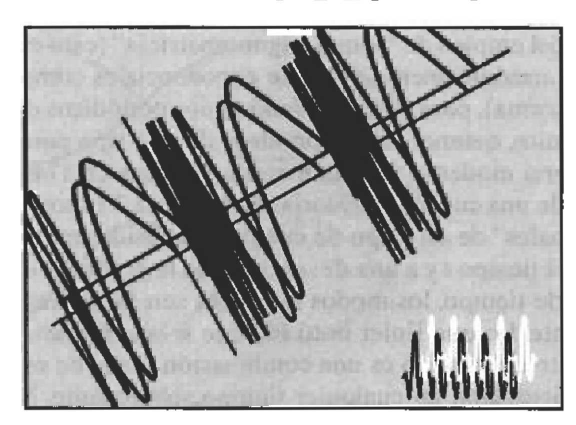
$$\frac{d}{dt}\delta\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}[\delta(t) - \delta(t - \Delta)].$$

2.73. Demuestre por inducción que

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t) \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

3

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES PERIÓDICAS EN SERIES DE FOURIER



3.0 INTRODUCCIÓN

La representación y el análisis de los sistemas LTI mediante la suma de convolución, desarrollados en el capítulo 2, se basa en la representación de señales como una combinación lineal de impulsos desplazados. En éste y en los dos siguientes capítulos, exploraremos una representación alternativa para señales y sistemas LTI. Al igual que en el capítulo 2, el punto de partida para nuestro análisis es el desarrollo de una representación de señales como combinaciones lineales de un conjunto de señales básicas. Para llevar a cabo esta representación alternativa usamos las exponenciales complejas. Las representaciones resultantes se conocen como la serie y la transformada de Fourier de tiempo continuo y de tiempo discreto. Como veremos más adelante, éstas se pueden usar para construir una amplia y útil clase de señales.

Posteriormente procederemos como lo hicimos en el capítulo 2. Esto es, debido a la propiedad de superposición, la respuesta de un sistema LTI a cualquier entrada que consista en una combinación lineal de señales básicas es la misma combinación lineal de las respuestas individuales a cada una de dichas señales básicas. En el capítulo 2, todas estas respuestas eran las versiones desplazadas de la respuesta al impulso unitario, lo cual conducía a la suma o a la integral de convolución. Como veremos en este capítulo, la respuesta de un sistema LTI a una exponencial compleja también tiene una forma particularmente sencilla, la cual nos proporciona otra representación conveniente para los sistemas LTI y otra forma analizar estos sistemas y obtener algún aprendizaje sobre sus propiedades.

En este capítulo dirigimos nuestra atención a la representación de las señales periódicas continuas y discretas conocidas como la serie de Fourier. En los capítulos 4 y 5 ampliamos el análisis a la representación mediante la transformada de Fourier de la amplia clase de señales aperiódicas y de energía finita. Unidas, estas representaciones proporcionan uno de los más poderosos e importantes conjuntos de herramientas así como las bases para analizar, diseñar y entender las señales y sistemas LTI, por lo que dedicamos una considerable atención en éste y en el siguiente capítulo a explorar el uso de los métodos de Fourier.

Iniciamos la siguiente sección con una breve reseña histórica que nos permita penetrar un poco en los conceptos y temas que desarrollamos con más detalle en las secciones y capítulos que le siguen.

3.1 UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA

El desarrollo del análisis de Fourier tiene una larga historia que involucra a un gran número de personas así como la investigación de muchos fenómenos físicos diferentes.[1] El concepto del empleo de "sumas trigonométricas" (esto es, las sumas de senos y cosenos relacionadas armónicamente, o las de exponenciales complejas periódicas, relacionadas en la misma forma), para describir fenómenos periódicos data cuando menos del tiempo de los babilonios, quienes utilizaron ideas de este tipo para predecir eventos astronómicos.[2] La historia moderna de esta materia empieza en 1748, cuando L. Euler examina el movimiento de una cuerda vibratoria. En la figura 3.1 mostramos algunos de los primeros "modos normales" de este tipo de cuerda. Si consideramos la deflexión vertical $f(t, x)$ de la cuerda en el tiempo t y a una distancia x a lo largo de la cuerda, entonces, para cualquier instante fijo de tiempo, los modos normales son funciones senoidales de x relacionadas armónicamente. Lo que Euler notó fue que si la configuración de una cuerda vibratoria en algún punto del tiempo es una combinación lineal de estos modos normales, también lo es su configuración en cualquier tiempo subsecuente. Más aún, Euler demostró que uno podía calcular los coeficientes de la combinación lineal para un tiempo posterior de una manera muy directa a partir de los coeficientes del tiempo anterior. Al hacer esto, Euler había efectuado el mismo tipo de cálculo que nosotros haremos en la próxima sección cuando deduzcamos una de las propiedades de las sumas trigonométricas que las hacen tan útiles para el análisis de los sistemas LTI. Específicamente, veremos que si la entrada a un sistema LTI se expresa como una combinación lineal de exponenciales complejas periódicas o senoides, la salida también se puede expresar de esta forma, con coeficientes que están relacionados de una forma directa con los de la entrada.

La propiedad descrita en el párrafo precedente no sería de utilidad particular alguna si no fuera cierto que una amplia clase de funciones interesantes puede representarse mediante combinaciones lineales de exponenciales complejas. A mediados del siglo XVIII este punto fue motivo de un acalorado debate. En 1753 D. Bernoulli argumentaba, con bases físicas, que todos los movimientos físicos de una cuerda podían ser representados mediante combinaciones lineales de modos normales, pero él no sustentó matemáticamente estas ideas, por lo que no fueron aceptadas ampliamente. De hecho, el mismo Euler descartó las series trigonométricas, y en 1759 J. L. Lagrange criticó fuertemente su uso en el examen de cuerdas vibratorias. Las críticas de Lagrange se basaban en su propia creencia de que era imposible representar señales con esquinas (es decir, con pendientes discontinuas) empleando series trigonométricas. Puesto que dicha configuración surge

[1]El material histórico en este capítulo fue tomado de las siguientes referencias: I. Grattan-Guiness, *Joseph Fourier, 1768-1830* (Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1972); G. F. Simmons, *Differential Equations: With Applications and Historical Notes* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1972); C. Lanczos, *Discourse on Fourier Series* (Londres: Oliver and Boyd, 1966); R. E. Edwards, *Fourier Series: A Modern Introduction* (Nueva York: Springer-Verlag, 2ª ed., 1970); y A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, y M. A. Lavrent'ev, *Mathematics: Its Content, Methods, and Meaning*, trad. por S. H. Gould; vol. ii; trad. por K. Hirsch; vol. iii (Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1969). De éstos, un relato mucho más completo de la vida y contribuciones de Fourier puede encontrarse en el libro de Grattan-Guiness. Otras referencias específicas se citan en varias partes del capítulo.

[2]H. Dym y H. P. McKean, *Fourier Series and Integrals* (Nueva York: Academic Press, 1972). Este texto y el libro de Simmons cuya referencia se cita en la nota 1, también contienen discusiones del problema de la cuerda vibratoria y de su papel en el desarrollo del análisis de Fourier.

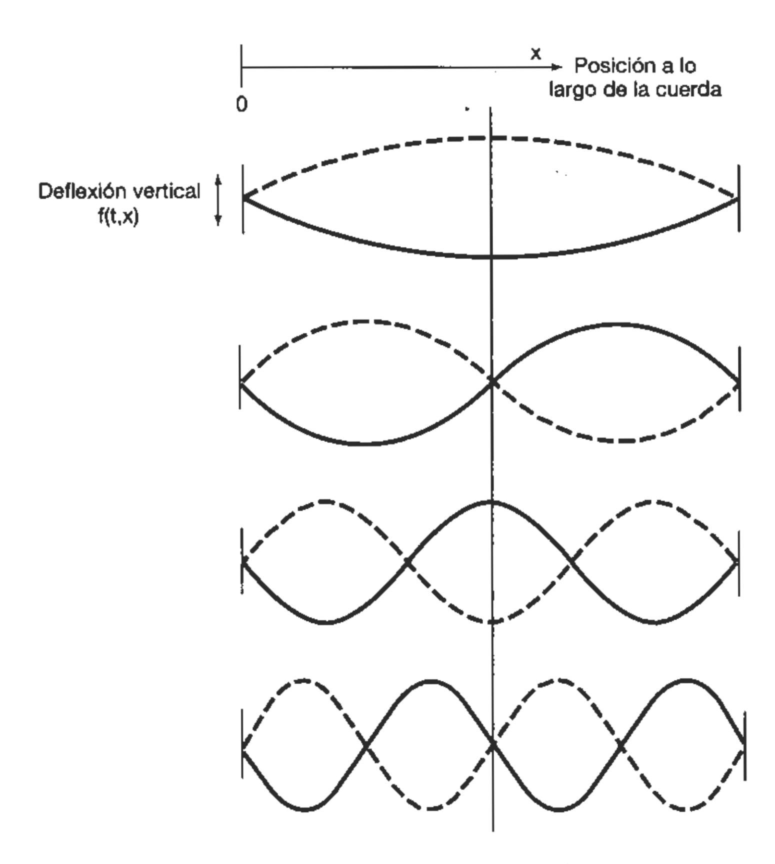


Figura 3.1 Modos normales de una cuerda en vibración. (Las líneas sólidas indican la configuración de cada uno de estos modos en algún instante de tiempo fijo *t*.)

cuando se pulsa una cuerda (es decir, tensándola para después soltarla), él argumentaba que las series trigonométricas eran de uso muy limitado.

Fue dentro de este ambiente un tanto hostil y escéptico que Jean Baptiste Joseph Fourier (figura 3.2) presentó sus ideas medio siglo después. Fourier nació el 21 de marzo de 1768 en Auxerre, Francia, y para la época en que entró en la controversia sobre las series trigonométricas ya tenía toda una vida de experiencias. Sus muchas contribuciones, en particular aquellas relativas a las series y transformadas que llevan su nombre, son aún



Figura 3.2 Jean Baptiste Joseph Fourier [foto de J. B. J. Fourier, *Oeuvres de Fourier*, vol. II (París: Gauthier-Villars et Fils, 1980)].

más impresionantes por las circunstancias en las cuales desarrolló su trabajo. Sus revolucionarios descubrimientos, aunque no fueron apreciados por completo durante su propia vida, han tenido un gran impacto en el desarrollo de las matemáticas, y además han sido y son todavía de gran importancia en una variedad extremadamente amplia de disciplinas científicas y de la ingeniería.

Además de sus estudios en matemáticas, Fourier llevó una vida política muy activa. De hecho, durante los años que siguieron a la Revolución Francesa sus actividades casi lo condujeron a la muerte, pues en dos ocasiones logró escapar de la guillotina por muy poco. Más tarde, Fourier se convirtió en colaborador de Napoleón Bonaparte, lo acompañó en sus expediciones a Egipto (durante las cuales Fourier recopiló la información que usaría después como base de sus tratados sobre Egiptología) y en 1802 fue nombrado por Bonaparte como prefecto de una región de Francia con sede en Grenoble. Fue ahí, mientras fungía como prefecto, que Fourier desarrolló sus ideas sobre las series trigonométricas.

Los eventos físicos que motivaron el trabajo de Fourier fueron los fenómenos de propagación y difusión del calor. Esto, por sí mismo, fue un paso significativo por cuanto que la mayor parte de la investigación previa en física matemática había tenido que ver con la mecánica racional y celestial. Para 1807, Fourier había completado un trabajo: había encontrado que algunas series de senoides relacionadas armónicamente eran útiles para representar la distribución de la temperatura a través de un cuerpo. Adicionalmente, sostenía que "cualquier" señal periódica podía ser representada por tales series. Si bien su tratamiento de este tema era significativo, muchas de las ideas básicas sobre las que se sustentaba habían sido descubiertas por otros. Asimismo, los argumentos matemáticos de Fourier eran aún imprecisos, y no fue sino hasta 1829 que P. L. Dirichlet proporcionó las condiciones precisas bajo las cuales una señal periódica podía ser representada con una serie de Fourier.[3] En este sentido, Fourier no contribuyó en realidad a la teoría matemática de las series de Fourier. Sin embargo, sí tuvo la perspicacia para ver el potencial de esta representación mediante series, y en gran medida su trabajo y sus afirmaciones fueron lo que impulsó muchos de los trabajos subsecuentes sobre las series de Fourier. Además, Fourier llevó este tipo de representación un gran paso adelante de cualquiera de sus predecesores: obtuvo una representación a para señales *aperiódicas* no como *sumas* ponderadas de senoides relacionadas armónicamente, sino como *integrales* ponderadas de senoides que no están relacionadas armónicamente. Es a esta extensión, desde la serie de Fourier hasta la integral o transformada de Fourier, a lo que se enfocan los capítulos 4 y 5. Al igual que la serie de Fourier, la transformada de Fourier sigue siendo una de las herramientas más poderosas para el análisis de sistemas LTI.

Cuatro distinguidos matemáticos y científicos fueron designados para examinar el documento presentado por Fourier en 1807. Tres de los cuatro (S. F. Lacroix, G. Monge y P. S. de Laplace) estaban a favor de que se publicara el documento, pero el cuarto, J. L. Lagrange, permaneció firme en su rechazo de las series trigonométricas, rechazo que había manifestado 50 años atrás. Debido a las vehementes objeciones de Lagrange, el documento de Fourier nunca se publicó. Después de varios intentos adicionales para que su trabajo fuese aceptado y publicado por el Instituto de Francia, Fourier empezó a escribir otra versión de su trabajo, la cual apareció con el nombre de *Théorie analytique de la chaleur*.[4]

[3] Tanto S. D. Poisson como A. L. Cauchy habían obtenido resultados acerca de la convergencia de la serie de Fourier antes de 1829, pero el trabajo de Dirichlet representó una extensión tan significativa de sus resultados que él es generalmente acreditado como el primero que consideró de manera rigurosa la convergencia de las series de Fourier.

[4] Véase J. B. J. Fourier, *The Analytical Theory of Heat*, trad. por A. Freeman (Nueva York: Dover, 1955).

Este libro fue publicado en 1822, 15 años después de que Fourier presentara por primera vez sus resultados a dicho instituto.

Hacia el final de su vida Fourier recibió parte del reconocimiento que merecía, pero el tributo más significativo que se le pudo haber hecho ha sido el enorme impacto que ha tenido su trabajo en muchas disciplinas dentro de los campos de las matemáticas, la ciencia y la ingeniería. La teoría de la integración, la topología de los conjuntos de puntos y las expansiones de las funciones propias son sólo unos cuantos ejemplos de los temas matemáticos que tienen sus raíces en el análisis de las series e integrales de Fourier.[5] Además de los estudios originales sobre vibraciones y difusión del calor, hay numerosos problemas de la ciencia y la ingeniería en los cuales las señales senoidales, y por consiguiente las series y transformadas de Fourier, juegan un importante papel. Por ejemplo, las señales senoidales surgen de manera natural al describir el movimiento de los planetas y el comportamiento periódico del clima de la Tierra. Las fuentes de corriente alterna generan voltajes y corrientes senoidales y, como veremos más adelante, las herramientas del análisis de Fourier nos habilitan para analizar la respuesta de un sistema LTI, como un circuito, a esas entradas senoidales. También, como se ilustra en la figura 3.3, las olas en el océano consisten de la combinación lineal de ondas senoidales con diferentes periodos espaciales o *longitudes de onda*. Asimismo, las señales transmitidas por las estaciones de radio y televisión son de naturaleza senoidal, y como lo demostraría la revisión rápida de cualquier texto sobre análisis de Fourier, la variedad de aplicaciones en las cuales surgen las señales senoidales, y en las cuales las herramientas del análisis de Fourier son útiles, se extienden mucho más allá de estos pocos ejemplos.

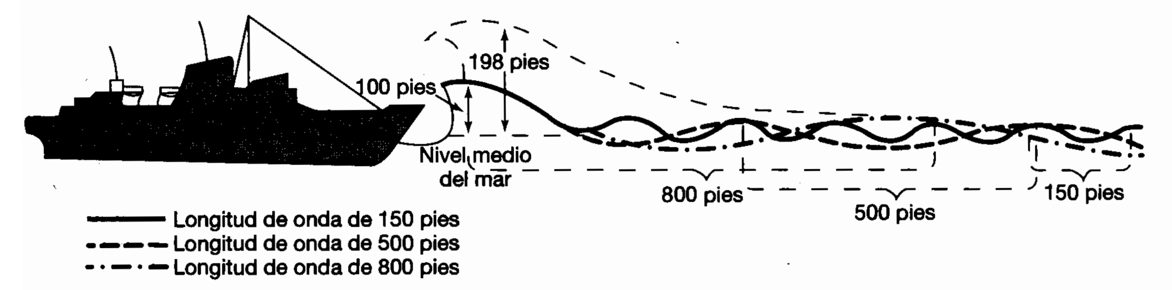


Figura 3.3 Barco que se encuentra con la superposición de un trío de trenes de olas, cada uno con un periodo espacial diferente. Cuando estas olas se refuerzan entre ellas, puede generarse una ola muy grande. En condiciones más severas del mar, se podría generar una ola gigantesca como la indicada por la línea punteada. El que este reforzamiento ocurra en cualquier punto depende de las fases relativas de las componentes que se superponen. [Adaptado de una ilustración de P. Mion, "Nightmare Waves Are All Too Real to Deepwater Sailors", por P. Britton, *Smithsonian* 8 (febrero de 1978), pp. 64-65.]

Mientras que muchas de las aplicaciones planteadas en el párrafo anterior, así como el trabajo original de Fourier y sus contemporáneos acerca de problemas de física matemática, se concentran en fenómenos continuos, las herramientas del análisis de Fourier para señales y sistemas discretos tienen sus propias raíces históricas distintivas y un conjunto igualmente rico de aplicaciones. En particular, los conceptos y métodos discretos son fundamentales para la disciplina del análisis numérico. Las fórmulas para el procesamiento de conjuntos discretos de datos que produzcan aproximaciones numéricas para la interpolación, la integración y la diferenciación, habían sido investigadas desde la época de Newton, allá por el siglo XVII. Además, el problema de predecir el movimiento de un cuerpo celeste, dada una secuencia de observaciones del mismo, estimuló a emi-

[5]Para mayor información sobre el impacto del trabajo de Fourier en las matemáticas, véase W. A. Coppel, "J. B. Fourier—on the occasion of His Two Hundredth Birthday", *American Mathematical Monthly*, 76 (1969), 468-483.

nentes científicos y matemáticos de los siglos XVIII y XIX, incluyendo a Gauss, a investigar las series de tiempo armónicas, lo cual proporcionó un segundo entorno dentro del cual se realizó mucho del trabajo inicial sobre señales y sistemas discretos.

A mediados de los años sesenta se introdujo un algoritmo, conocido en la actualidad como la transformada rápida de Fourier o FFT (por sus siglas en inglés), el cual fue descubierto independientemente por Cooley y Tukey en 1965. Este algoritmo también tiene una larga historia y puede, de hecho, encontrarse en las notas de Gauss.[6] Lo que hizo tan importante a este moderno descubrimiento fue el hecho de que la FFT demostró adaptarse perfectamente a la ejecución digital eficiente, lo cual redujo el tiempo requerido para calcular las transformadas por órdenes de magnitud. Con esta herramienta, muchas ideas interesantes, pero anteriormente poco prácticas, en las que se utilizaban las series y transformadas discretas de Fourier, repentinamente fueron practicables, y el desarrollo de las técnicas de análisis de señales y sistemas discretos avanzaron a un ritmo acelerado.

Lo que ha surgido de esta larga historia es un marco de referencia poderoso y coherente para el análisis de señales y sistemas continuos y discretos, así como un conjunto extraordinariamente amplio de aplicaciones existentes y potenciales. En éste y en los siguientes capítulos desarrollaremos las herramientas básicas de ese marco de referencia y examinaremos algunas de sus más importantes implicaciones.

3.2 LA RESPUESTA DE SISTEMAS LTI A EXPONENCIALES COMPLEJAS

Como indicamos en la sección 3.0, es muy ventajoso para el estudio de sistemas LTI el representar las señales como combinaciones lineales de señales básicas que posean las siguientes dos propiedades:

1. El conjunto de señales básicas se puede usar para construir una amplia y útil clase de señales.
2. La respuesta de un sistema LTI a cada una de las señales debe ser lo bastante sencilla en estructura como para proporcionarnos una representación conveniente de la respuesta del sistema a cualquier señal construida como una combinación lineal de las señales básicas.

La importancia del análisis de Fourier proviene en gran medida del hecho de que el conjunto de señales exponenciales complejas continuas y discretas produce estas propiedades, es decir, señales continuas de la forma e^{st} y discretas z^n, donde s y z son números complejos. En las secciones subsecuentes de éste y de los siguientes dos capítulos examinaremos la primera propiedad con detalle. En esta sección dirigimos nuestra atención a la segunda propiedad y de esta forma motivamos el uso de las series y las transformadas de Fourier en el análisis de sistemas LTI.

La importancia de las exponenciales complejas en el estudio de los sistemas LTI radica en el hecho de que la respuesta de un sistema LTI a una entrada exponencial compleja es la misma exponencial compleja con sólo un cambio en amplitud; esto es,

$$\text{continua: } e^{st} \rightarrow H(s)e^{st}, \tag{3.1}$$
$$\text{discreta: } z^n \rightarrow H(z)z^n, \tag{3.2}$$

donde el factor complejo de amplitud $H(s)$ y $H(z)$ será, en general, una función de la variable compleja s o z. A una señal para la cual la salida del sistema es una constante (posi-

[6]M. T. Heideman, D. H. Johnson y C. S. Burrus, "Gauss and the History of the Fast Fourier Transform", *The IEEE ASSP Magazine I* (1984), pp. 14-21.

blemente compleja) multiplicada por la entrada se le conoce como una *función propia* (*eigenfunction*) del sistema, y el factor de amplitud se conoce como el *valor propio* (*eigenvalue*) del sistema.

Para mostrar que las exponenciales complejas son en realidad funciones propias de los sistemas LTI, consideremos un sistema LTI continuo con respuesta al impulso $h(t)$. Para una entrada $x(t)$, podemos determinar la salida mediante el uso de la integral de convolución, de modo que con $x(t) = e^{st}$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}\, d\tau. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Expresando $e^{s(t-\tau)}$ como $e^{st}e^{-s\tau}$, y observando que e^{st} se puede mover fuera de la integral, vemos que la ecuación (3.3) se convierte en

$$y(t) = e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\, d\tau. \tag{3.4}$$

Suponiendo que la integral del miembro derecho de la ecuación (3.4) converge, la respuesta a e^{st} es de la forma

$$y(t) = H(s)e^{st}, \tag{3.5}$$

donde $H(s)$ es una constante compleja cuyo valor depende de s y que está relacionada con la respuesta al impulso del sistema por

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\, d\tau. \tag{3.6}$$

Por tanto, hemos demostrado que las exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas LTI. La constante $H(s)$ para un valor específico de s es entonces el valor propio asociado con la función propia e^{st}.

De forma exactamente paralela, podemos demostrar que las secuencias exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas LTI discretos. Esto es, suponga que un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ tiene como entrada la secuencia

$$x[n] = z^n, \tag{3.7}$$

donde z es un número complejo. Entonces, la salida del sistema se puede determinar a partir de la suma de convolución como

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Partiendo de esta expresión, podemos ver que si la entrada $x[n]$ es la exponencial compleja dada por la ecuación (3.7), entonces, suponiendo que la sumatoria del miembro derecho de la ecuación (3.8) converge, la salida es la misma exponencial compleja multi-

plicada por una constante que depende del valor de z. Esto es,

$$y[n] = H(z)z^n, \tag{3.9}$$

donde

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}. \tag{3.10}$$

En consecuencia, como en el caso continuo, las exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas LTI discretos. La constante $H(z)$ para un valor específico de z es el valor propio asociado con la función propia z^n.

Para el análisis de los sistemas LTI, la utilidad de descomponer señales más generales en términos de las funciones propias se puede ver a partir de un ejemplo. Imaginemos que $x(t)$ corresponde a una combinación lineal de tres exponenciales complejas; esto es,

$$x(t) = a_1e^{s_1t} + a_2e^{s_2t} + a_3e^{s_3t}. \tag{3.11}$$

A partir de la propiedad de función propia, la respuesta a cada señal por separado es

$$a_1e^{s_1t} \rightarrow a_1H(s_1)e^{s_1t},$$
$$a_2e^{s_2t} \rightarrow a_2H(s_2)e^{s_2t},$$
$$a_3e^{s_3t} \rightarrow a_3H(s_3)e^{s_3t},$$

y a partir de la propiedad de superposición, la respuesta a la suma es la suma de las respuestas, de manera que

$$y(t) = a_1H(s_1)e^{s_1t} + a_2H(s_2)e^{s_2t} + a_3H(s_3)e^{s_3t}. \tag{3.12}$$

De manera más general, en el caso continuo la ecuación (3.5), junto con la propiedad de superposición, implica que la representación de señales como una combinación lineal de exponenciales complejas conduce a una expresión conveniente para la respuesta de un sistema LTI. En concreto, si la entrada a un sistema LTI continuo se representa como una combinación lineal de exponenciales complejas, esto es, si

$$x(t) = \sum_k a_ke^{s_kt}, \tag{3.13}$$

entonces la salida será

$$y(t) = \sum_k a_kH(s_k)e^{s_kt}. \tag{3.14}$$

En una forma exactamente análoga, si la entrada a un sistema LTI discreto se representa como una combinación lineal de exponenciales complejas, esto es, si

$$x[n] = \sum_k a_kz_k^n, \tag{3.15}$$

entonces la salida será

$$y[n] = \sum_k a_kH(z_k)z_k^n. \tag{3.16}$$

En otras palabras, para el caso continuo y el discreto, si la entrada a un sistema LTI se representa como una combinación lineal de exponenciales complejas, entonces la salida también se puede representar como una combinación lineal de las mismas señales exponenciales complejas. Cada coeficiente en esta representación de la salida se obtiene sacando el producto del coeficiente correspondiente a_k de la entrada por el valor propio del sistema $H(s_k)$ o $H(z_k)$ asociado con la función propia $e^{s_k t}$ o z_k^n, respectivamente. Fue este hecho precisamente lo que descubrió Euler en relación con la cuerda vibratoria, lo que Gauss y otros usaron en el análisis de las series de tiempo y lo que motivó a Fourier y a otros después que él a considerar cómo una amplia clase de señales podía ser representada como una combinación lineal de exponenciales complejas. En las siguientes secciones examinaremos esta cuestión para señales periódicas, primero continuas y después discretas, y en los capítulos 4 y 5 consideraremos la posibilidad de extender estas representaciones a las señales aperiódicas. Aunque, en general, las variables s y z en las ecuaciones (3.1)-(3.16) pueden ser números arbitrarios complejos, el análisis de Fourier implica restringir nuestra atención a formas particulares para estas variables. En particular, en el caso continuo nos concentraremos en valores puramente imaginarios de s, es decir, $s = j\omega$, y por tanto consideramos sólo exponenciales complejas de la forma $e^{j\omega t}$. De manera similar, en el caso discreto restringimos la gama de valores de z a aquellos de magnitud unitaria, es decir, $z = e^{j\omega}$, de manera que nos enfocamos en exponenciales complejas de la forma $e^{j\omega n}$.

Ejemplo 3.1

Como una ilustración de las ecuaciones (3.5) y (3.6), considere un sistema LTI para el cual la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ están relacionadas por un desplazamiento en el tiempo de 3, es decir,

$$y(t) = x(t-3). \tag{3.17}$$

Si la entrada a este sistema es la señal exponencial compleja $x(t) = e^{j2t}$, entonces, de la ecuación (3.17)

$$y(t) = e^{j2(t-3)} = e^{-j6}e^{j2t}. \tag{3.18}$$

La ecuación (3.18) tiene la forma de la ecuación (3.5), como podríamos esperar, puesto que e^{j2t} es una función propia. El valor propio asociado es $H(j2) = e^{-j6}$. Es fácil confirmar la ecuación (3.6) para este ejemplo. De manera específica, de la ecuación (3.17), la respuesta al impulso del sistema es $h(t) = \delta(t-3)$. Sustituyéndola en la ecuación (3.6) obtenemos

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - 3)e^{-s\tau}d\tau = e^{-3s},$$

de manera que $H(j2) = e^{-j6}$.

Como un segundo ejemplo, en este caso para ilustrar las ecuaciones (3.11) y (3.12), considere la entrada $x(t) = \cos(4t) + \cos(7t)$. De la ecuación (3.17), $y(t)$ será de hecho

$$y(t) = \cos(4(t-3)) + \cos(7(t-3)). \tag{3.19}$$

Para comprobar que esto también será resultado de la ecuación (3.12), desarrollamos primero $x(t)$ usando la relación de Euler:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{-j4t} + \frac{1}{2}e^{j7t} + \frac{1}{2}^{-j7t}. \tag{3.20}$$

A partir de las ecuaciones (3.11) y (3.12),

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-j12}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j12}e^{-j4t} + \frac{1}{2}e^{-j21}e^{j7t} + \frac{1}{2}e^{j21}e^{-j7t},$$

o

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{j4(t-3)} + \frac{1}{2}e^{-j4(t-3)} + \frac{1}{2}e^{j7(t-3)} + \frac{1}{2}e^{-j7(t-3)}$$
$$= \cos 4(t-3) + \cos(7(t-3)).$$

Para este sencillo ejemplo, la multiplicación de cada componente exponencial periódico de $x(t)$, por ejemplo, $\frac{1}{2}e^{j4t}$, por el valor propio correspondiente, digamos $H(j4) = e^{-j12}$, provoca en efecto que el componente de entrada se desplace en el tiempo por 3. Es obvio en este caso que podemos determinar $y(t)$ en la ecuación (3.19) por inspección en lugar de emplear las ecuaciones (3.11) y (3.12). Sin embargo, como veremos más adelante, la propiedad general comprendida en estas ecuaciones no sólo nos permite calcular las respuestas de sistemas LTI más complejos, sino que también nos proporciona la base para la representación en el dominio de la frecuencia y el análisis de los sistemas LTI.

3.3 REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

3.3.1 Combinaciones lineales de exponenciales complejas relacionadas armónicamente

Como se definió en el capítulo 1, una señal es periódica si, para algún valor positivo de T,

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{para toda } t. \tag{3.21}$$

El periodo fundamental de $x(t)$ es el valor mínimo positivo de T diferente de cero para el cual la ecuación (3.21) se satisface, y el valor $\omega_0 = 2\pi/T$ se conoce como la frecuencia fundamental.

En el capítulo 1 también presentamos dos señales periódicas básicas, la señal senoidal

$$x(t) = \cos\omega_0 t \tag{3.22}$$

y la exponencial compleja periódica

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}. \tag{3.23}$$

Estas dos señales son periódicas con frecuencia fundamental ω_0 y periodo fundamental $T = 2\pi/\omega_0$. Asociado con la señal en la ecuación (3.23) está el conjunto de exponenciales complejas *relacionadas armónicamente*

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.24}$$

Cada una de estas señales tiene una frecuencia fundamental que es un múltiplo de ω_0, y por tanto, cada una es periódica con periodo T (aunque para $|k| \geq 2$, el periodo fundamental de $\phi_k(t)$ es una fracción de T). De esta forma, una combinación lineal de exponenciales complejas relacionadas armónicamente de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \tag{3.25}$$

también es periódica con periodo T. En la ecuación (3.25), el término para $k = 0$ es una constante. Los términos para $k = +1$ y $k = -1$ tienen una frecuencia fundamental igual a ω_0 y se conocen en conjunto como *componentes fundamentales* o *componentes de la primera armónica*. Los dos términos para $k = +2$ y $k = -2$ son periódicos con la mitad del periodo (o, de manera equivalente, al doble de la frecuencia) de la componente fundamental y se conocen como *componentes de la segunda armónica*. De manera más general, las componentes para $k = +N$ y $k = -N$ se conocen como las componentes de la Nésima (léase enésima) armónica.

La representación de una señal periódica en la forma de la ecuación (3.25) se conoce como la representación de la *serie de Fourier*. Antes de desarrollar las propiedades de esta representación, veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.2

Considere una señal periódica $x(t)$, con frecuencia fundamental 2π, que está expresada en la forma de la ecuación (3.25) como

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}, \tag{3.26}$$

donde

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4},$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}.$$

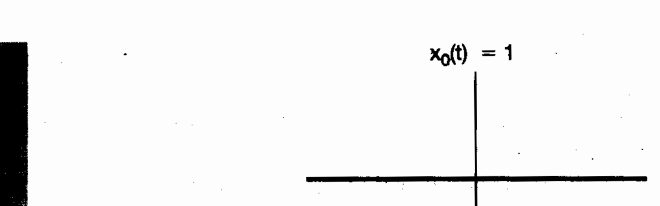
Rescribiendo la ecuación (3.26) y juntando cada una de las componentes armónicas que tienen la misma frecuencia fundamental, obtenemos

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}). \tag{3.27}$$

De forma equivalente, usando la relación de Euler, podemos escribir $x(t)$ en la forma

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t. \tag{3.28}$$

En la figura 3.4 mostramos gráficamente la manera en que la señal $x(t)$ se construye a partir de sus componentes armónicas.



$x_1(t) = \frac{1}{2}\cos 2\pi t$

$x_0(t) + x_1(t)$

$x_2(t) = \cos 4\pi t$

$x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$

$x_3(t) = \frac{2}{3}\cos 6\pi t$

$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$

Figura 3.4 Construcción de una señal $x(t)$ en el ejemplo 3.2 como una combinación lineal de señales senoidales relacionadas armónicamente.

La ecuación (3.28) es un ejemplo de una forma alternativa para la serie de Fourier de señales periódicas reales. Específicamente, suponga que $x(t)$ es real y se puede representar en la forma de la ecuación (3.25). Entonces, puesto que $x^*(t) = x(t)$, obtenemos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}.$$

Reemplazando k por $-k$ en la sumatoria, tenemos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^{*} e^{jk\omega_0 t},$$

la cual, al compararla con la ecuación (3.25), requiere que $a_k = a_{-k}^{*}$, o de forma equivalente, que

$$a_k^{*} = a_{-k}. \qquad (3.29)$$

Observe que éste es el caso en el ejemplo 3.2, donde las a_k son, de hecho, reales, y $a_k = a_{-k}$.

Para deducir las formas alternativas de la serie de Fourier, primero reacomodamos la sumatoria en la ecuación (3.25) como

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}].$$

Sustituyendo a_k^{*} por el a_{-k} de la ecuación (3.29), obtenemos

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^{*} e^{-jk\omega_0 t}].$$

Gracias a que los dos términos dentro de la sumatoria son complejos conjugados uno del otro, esto se puede expresar como

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathcal{R}e\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}. \qquad (3.30)$$

Si a_k se expresa en forma polar como

$$a_k = A_k e^{j\theta_k},$$

entonces la ecuación (3.30) se convierte en

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathcal{R}e\{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}\}.$$

Esto es,

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k). \qquad (3.31)$$

La ecuación (3.31) es una de las formas más comúnmente encontradas de la serie de Fourier de señales periódicas reales continuas. Otra forma se obtiene escribiendo a_k de forma rectangular como

$$a_k = B_k + jC_k,$$

donde B_k y C_k son reales. Con esta expresión para a_k, la ecuación (3.30) adopta la forma

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos k\omega_0 t - C_k \operatorname{sen} k\omega_0 t]. \qquad (3.32)$$

En el ejemplo 3.2 las a_k son reales, de manera que $a_k = A_k = B_k$ y, por tanto, ambas representaciones, las ecuaciones (3.31) y (3.32), se reducen a la misma forma, la ecuación (3.28).

Así, para funciones periódicas reales, la serie de Fourier en términos de exponenciales complejas, como las proporcionadas en la ecuación (3.25), es un equivalente matemático para cualquiera de las dos formas en las ecuaciones (3.31) y (3.32) que utilizan funciones trigonométricas. Aunque las dos últimas son formas comunes para la serie de Fourier,[7] la forma exponencial compleja de la ecuación (3.25) es en particular conveniente para nuestros propósitos, de modo que usaremos dicha forma casi exclusivamente.

La ecuación (3.29) ilustra una de las muchas propiedades asociadas con la serie de Fourier. Estas propiedades son con frecuencia muy útiles para obtener conocimientos y con fines de cálculo, por lo que en la sección 3.5 reunimos las más importantes. La deducción de varias de ellas se considera en los problemas al final del capítulo. En la sección 4.3 también desarrollamos la mayor parte de las propiedades dentro del amplio contexto de la transformada de Fourier.

3.3.2 Determinación de la representación en series de Fourier de una señal periódica continua

Suponiendo que una señal periódica pudiera representarse con la serie de la ecuación (3.25), necesitaríamos un procedimiento para determinar los coeficientes a_k. Multiplicando ambos miembros de la ecuación (3.25) por $e^{-jn\omega_0 t}$, obtenemos

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}. \tag{3.33}$$

Integrando ambos miembros desde 0 hasta $T = 2\pi/\omega_0$, tenemos

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}dt.$$

Aquí, T es el periodo fundamental de $x(t)$ y, en consecuencia, estamos integrando sobre un periodo. Intercambiar el orden de integración y de sumatoria produce

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right]. \tag{3.34}$$

La evaluación de la integral dentro de los corchetes es directa. Escribiendo de nuevo esta integral con la fórmula de Euler, obtenemos

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t\,dt + j\int_0^T \operatorname{sen}(k-n)\omega_0 t\,dt. \tag{3.35}$$

Para $k \neq n$, $\cos(k-n)\omega_0 t$ y $\operatorname{sen}(k-n)\omega_0 t$ son senoides periódicas con periodo fundamental $(T/|k-n|)$. Por tanto, en la ecuación (3.35) estamos integrando sobre un intervalo (de longitud T) que corresponde a un número entero de periodos de estas señales. Puesto que la integral puede ser vista como la cuantificación del área total bajo las funciones sobre el intervalo, vemos que para $k \neq n$, ambas integrales del miembro derecho de la ecuación (3.35) son cero. Para $k = n$, el integrando del miembro izquierdo de la ecuación (3.35) es igual a 1 y por consiguiente la integral es igual a T. En resumen tenemos entonces que

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases},$$

[7] De hecho, en este trabajo original, Fourier usó la forma seno-coseno de la serie de Fourier dada en la ecuación (3.32).

y en consecuencia, el miembro derecho de la ecuación (3.34) se reduce a Ta_n. Por tanto,

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt, \tag{3.36}$$

lo cual proporciona la ecuación que hemos estado buscando para determinar los coeficientes. Además, observe que al evaluar la ecuación (3.35), el único hecho que usamos en relación con el intervalo de integración fue que estuvimos integrando sobre un intervalo de longitud T, el cual corresponde a un número entero de periodos del $\cos(k-n)\omega_0 t$ y del $\operatorname{sen}(k-n)\omega_0 t$. Por consiguiente, obtendremos el mismo resultado si integramos sobre cualquier intervalo de longitud T. Esto es, si denotamos la integración sobre *cualquier* intervalo de longitud T por $\int_T$, tenemos que

$$\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases},$$

y, en consecuencia,

$$a_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt. \tag{3.37}$$

Para resumir, si $x(t)$ tiene una representación en serie de Fourier [es decir, si se puede expresar como una combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas en la forma de la ecuación (3.25)], entonces los coeficientes están dados por la ecuación (3.37). Entonces, este par de ecuaciones define la serie de Fourier de una señal periódica continua:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}, \tag{3.38}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}\,dt. \tag{3.39}$$

Aquí hemos escrito las expresiones equivalentes para la serie de Fourier en términos de la frecuencia fundamental ω_0 y el periodo fundamental T. La ecuación (3.38) se conoce como la ecuación de *síntesis* y la ecuación (3.39) es conocida como la ecuación de *análisis*. El conjunto de coeficientes $\{a_k\}$ se conoce a menudo como *coeficientes de la serie de Fourier* o *coeficientes espectrales* de $x(t)$.[8] Estos coeficientes complejos miden la porción de la señal $x(t)$ que está en cada armónica de la componente fundamental. El coeficiente a_0 es el componente constante o de cd de $x(t)$ y está dado por la ecuación (3.39) con $k = 0$. Esto es,

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt, \tag{3.40}$$

lo cual es simplemente el valor promedio de $x(t)$ sobre un periodo.

Las ecuaciones (3.38) y (3.39) eran familiares tanto para Euler como para Lagrange desde mediados del siglo XVIII. Sin embargo, ellos desecharon esta línea de análisis sin

[8]El término "coeficiente espectral" se deriva de problemas como la descomposición espectroscópica de la luz en líneas espectrales (es decir, en sus componentes elementales a diferentes frecuencias). La intensidad de cualquier línea de esa descomposición es una medida directa de la fracción de la energía total de la luz contenida en la frecuencia correspondiente a la línea.

haber examinado la cuestión de qué tan amplia sería la clase de señales periódicas que se podrían representar de esta manera. Antes de que abordemos esta cuestión en la próxima sección, ilustraremos la serie de Fourier mediante unos cuantos ejemplos.

Ejemplo 3.3

Considere la señal

$$x(t) = \text{sen}\omega_0 t,$$

cuya frecuencia fundamental es ω_0. Un camino para determinar los coeficientes de la serie de Fourier para esta señal consiste en aplicar la ecuación (3.39). Para este sencillo caso, sin embargo, es más fácil expandir la señal senoidal como una combinación lineal de exponenciales complejas e identificar por inspección los coeficientes de la serie de Fourier. De manera específica, podemos expresar $\text{sen}\omega_0 t$ como

$$\text{sen}\,\omega_0 t = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}.$$

Al comparar el miembro derecho de esta ecuación con la ecuación (3.38), obtenemos

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \qquad a_{-1} = -\frac{1}{2j},$$
$$a_k = 0, \qquad k \neq +1 \text{ o } -1.$$

Ejemplo 3.4

Sea

$$x(t) = 1 + \text{sen}\omega_0 t + 2\cos\omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right),$$

la cual tiene frecuencia fundamental ω_0. Al igual que en el ejemplo 3.3, de nuevo podemos expandir $x(t)$ directamente en términos de exponenciales complejas de tal modo que

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] + [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}[e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}].$$

Agrupando términos obtenemos

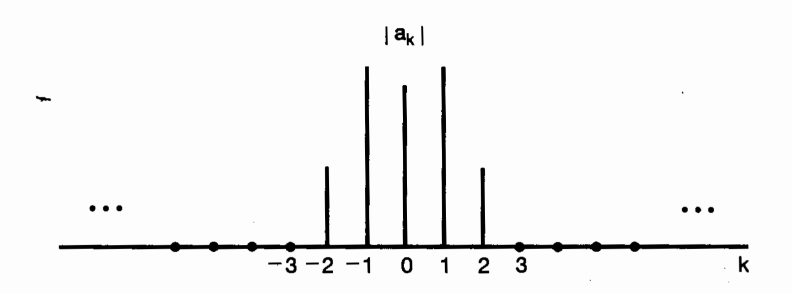
$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right)e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{j(\pi/4)}\right)e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)}\right)e^{-j2\omega_0 t}.$$

Por consiguiente, los coeficientes de la serie de Fourier para este ejemplo son

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) = 1 - \frac{1}{2}j,$$
$$a_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = 1 + \frac{1}{2}j,$$
$$a_2 = \frac{1}{2}e^{j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + j),$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j),$$
$$a_k = 0, |k| > 2.$$

En la figura 3.5 mostramos una gráfica de barras de la magnitud y la fase de a_k.



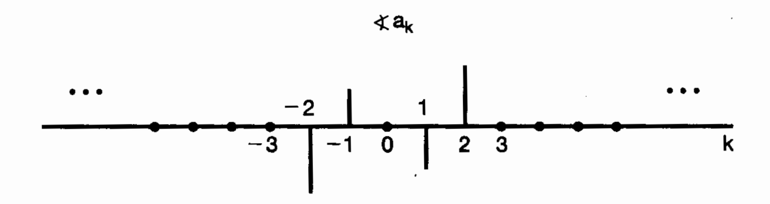


Figura 3.5 Gráficas de la magnitud y de la fase de los coeficientes de Fourier de la señal analizada en el ejemplo 3.4.

Ejemplo 3.5

La onda periódica cuadrada, dibujada en la figura 3.6 y definida sobre un periodo como

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}, \tag{3.41}$$

es una señal que encontraremos en varias ocasiones a lo largo de este libro. Esta señal es periódica con periodo fundamental T y con frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$.

Para determinar los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$, usaremos la ecuación (3.39). Debido a la simetría de $x(t)$ con respecto a $t = 0$, resulta más conveniente escoger $-T/2 \leq t < T/2$ como el intervalo sobre el cual se efectuará la integración,

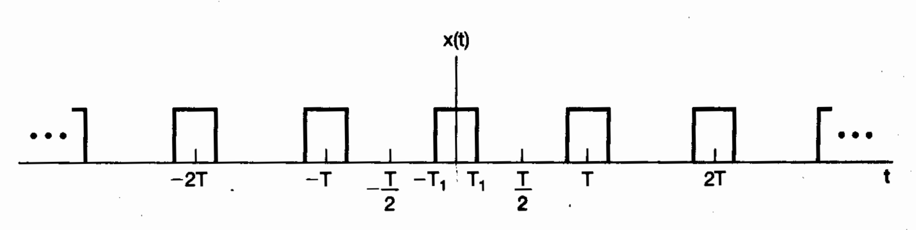


Figura 3.6 Onda cuadrada periódica.

aunque cualquier intervalo de longitud T es igualmente válido y por consiguiente conducirá al mismo resultado. Usando estos límites de integración y sustituyendo en la ecuación (3.41), tenemos primero, para $k = 0$, que

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}. \tag{3.42}$$

Como mencionamos anteriormente, a_0 se interpreta como el valor promedio de $x(t)$, que en este caso es igual a la fracción de cada periodo durante el cual $x(t) = 1$. Para $k \neq 0$ obtenemos

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}\, dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1},$$

la cual podemos rescribir como

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right]. \tag{3.43}$$

Si observamos que el término entre corchetes es sen $k\omega_0 T_1$, podemos expresar los coeficientes a_k como

$$a_k = \frac{2\,\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0, \tag{3.44}$$

donde nos hemos valido del hecho de que $\omega_0 T = 2\pi$.

La figura 3.7 corresponde a una gráfica de barras de los coeficientes de la serie de Fourier para este ejemplo. En particular, los coeficientes están dibujados para un valor fijo de T_1 y para diversos valores de T. Para este ejemplo específico, los coeficientes de Fourier son reales y, en consecuencia, pueden representarse con sólo una gráfica. De manera más general, por supuesto, los coeficientes de Fourier son complejos, por lo que requerirán de dos gráficas, una correspondiente a la parte real y la otra a la parte imaginaria, o magnitud y fase, de cada coeficiente. Para $T = 4T_1$, $x(t)$ es una onda cuadrada que tiene valor unitario para medio periodo y valor cero para el otro medio periodo. En este caso, $\omega_0 T_1 = \pi/2$, y a partir de la ecuación (3.44),

$$a_k = \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{k\pi}, \quad k \neq 0, \tag{3.45}$$

mientras que

$$a_0 = \frac{1}{2}. \tag{3.46}$$

De la ecuación (3.45), $a_k = 0$ para k par y diferente de cero. También sen$(\pi k/2)$ se alterna entre ± 1 para valores impares sucesivos de k. Por tanto,

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi},$$

$$a_3 = a_{-3} = -\frac{1}{3\pi},$$

$$a_5 = a_{-5} = \frac{1}{5\pi},$$

$$\vdots$$

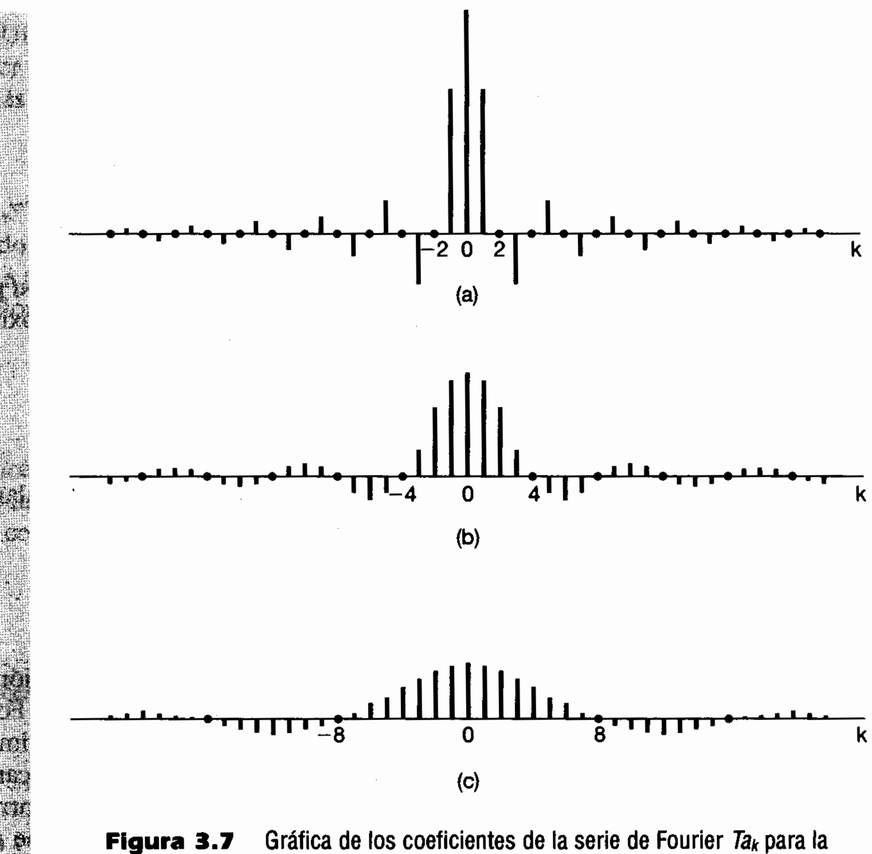


Figura 3.7 Gráfica de los coeficientes de la serie de Fourier Ta_k para la onda cuadrada periódica con T_1 fijo y varios valores de T: (a) $T = 4T_1$; (b) $T = 8T_1$; (c) $T = 16T_1$. Los coeficientes son muestras espaciadas en forma regular de la envolvente $(2 \operatorname{sen} \omega T_1)/\omega$, donde el espaciamiento entre muestras, $2\pi/T$ disminuye conforme T se incrementa.

3.4 CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE FOURIER

Aunque Euler y Lagrange habrían estado de acuerdo con los resultados de los ejemplos 3.3 y 3.4, hubiesen puesto objeciones al ejemplo 3.5, ya que $x(t)$ es discontinua mientras que cada una de sus componentes armónicas es continua. Por otra parte, Fourier consideró el mismo ejemplo y sostuvo que la representación en serie de Fourier de la onda cuadrada es válida. De hecho, Fourier sostuvo que *cualquier* señal periódica podría representarse por medio de una serie de Fourier. Aunque esto no es totalmente cierto, sí lo es que las series de Fourier se pueden utilizar para representar una clase extremadamente grande de señales periódicas, la cual incluye a la onda cuadrada y a todas las otras señales periódicas con las cuales trataremos en este libro y que son de interés práctico.

Para lograr entender el ejemplo de la onda cuadrada y, de manera más general, la cuestión de la validez de las representaciones mediante series de Fourier, examinemos el problema de la aproximación a una señal periódica $x(t)$ dada mediante la combinación lineal de un número finito de exponenciales complejas relacionadas armónicamente, es decir, mediante una serie finita de la forma

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}. \tag{3.47}$$

Considere que $e_N(t)$ denota el error de aproximación, esto es

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t}. \tag{3.48}$$

Para poder determinar qué tan buena es cualquier aproximación particular, necesitamos especificar una medida cuantitativa del tamaño del error de aproximación. El criterio que usaremos es la energía del error en un periodo:

$$E_N = \int_T |e_N(t)|^2\, dt. \tag{3.49}$$

Como se muestra en el problema 3.66, la selección particular de los coeficientes en la ecuación (3.47) que minimiza la energía en el error es

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\, dt. \tag{3.50}$$

Comparando las ecuaciones (3.50) y (3.39), vemos que la ecuación (3.50) es idéntica a la expresión usada para determinar los coeficientes de la serie de Fourier. Entonces, si $x(t)$ tiene una representación en serie de Fourier, la mejor aproximación usando sólo un número finito de exponenciales complejas relacionadas armónicamente se obtiene truncando la serie de Fourier al número de términos deseado. Conforme N se incrementa, se suman nuevos términos y E_N disminuye. De hecho, si $x(t)$ tiene una representación en serie de Fourier, entonces el límite de E_N cuando $N \to \infty$ es cero.

Volvamos ahora nuestra atención a la cuestión de saber cuándo una señal $x(t)$ tiene, de hecho, una representación en serie de Fourier para señales periódicas. Para cualquier señal podemos intentar obtener un conjunto de coeficientes de Fourier mediante el uso de la ecuación (3.39). Sin embargo, en algunos casos la integral en la ecuación (3.39) puede divergir; esto es, el valor obtenido para algunos de los coeficientes a_k puede ser infinito. Además, incluso si todos los coeficientes obtenidos a partir de la ecuación (3.39) son finitos, cuando éstos son sustituidos en la ecuación de síntesis (3.38), la serie infinita resultante puede no converger en la señal original $x(t)$.

Afortunadamente, no hay dificultades de convergencia para una amplia clase de señales periódicas. Por ejemplo, cualquier señal periódica continua tiene una representación en serie de Fourier para la cual la energía E_N en el error de aproximación se acerca a 0 conforme N tiende a ∞. Esto también es válido para muchas señales discontinuas. Puesto que encontraremos muy útil incluir señales discontinuas como las ondas cuadradas de nuestros análisis, vale la pena investigar el tema de la convergencia con un poco más de detalle. Hay dos condiciones un tanto diferentes que una señal periódica puede satisfacer para garantizar que se pueda representar mediante una serie de Fourier. Al analizar este tema no intentaremos proporcionar una justificación matemática completa; un tratamiento más riguroso se puede encontrar en muchos textos sobre análisis de Fourier.[9]

[9]Véase, por ejemplo, R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 3a. edición (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1978); W. Kaplan, *Operational Methods for Linear Systems* (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1962); y el libro de Dyn y McKean cuya referencia se da en la nota 2 de este capítulo.

Una clase de señales periódicas que se puede representar mediante las series de Fourier es la de señales que tienen energía finita sobre un solo periodo, es decir, señales para las cuales

$$\int_T |x(t)|^2\, dt < \infty. \tag{3.51}$$

Cuando se satisface esta condición, tenemos la garantía de que los coeficientes a_k obtenidos a partir de la ecuación (3.39) son finitos. Además, suponiendo que $x_N(t)$ sea la aproximación a $x(t)$ obtenida al usar estos coeficientes para $|k| \leq N$:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t}. \tag{3.52}$$

Entonces, tenemos la garantía de que la energía E_N en la aproximación del error, definida en la ecuación (3.49), converge a 0 conforme aumentamos más y más términos, es decir, conforme $N \to \infty$. Esto es, si definimos

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \tag{3.53}$$

entonces

$$\int_T |e(t)|^2\, dt = 0. \tag{3.54}$$

Como veremos en un ejemplo al final de esta sección, la ecuación (3.54) *no* implica que la señal $x(t)$ y su representación de serie de Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \tag{3.55}$$

sean iguales para cualquier valor de t. Lo que señala es que no hay energía en su diferencia.

Resulta bastante útil el tipo de convergencia garantizada cuando $x(t)$ tiene energía finita en un solo periodo. En este caso, la ecuación (3.54) establece que la diferencia entre $x(t)$ y su representación en serie de Fourier tiene energía cero. Ya que los sistemas físicos responden a la energía de la señal, desde esta perspectiva $x(t)$ y su representación en serie de Fourier son indistinguibles. Debido a que la mayoría de las señales periódicas que consideramos tienen energía finita sobre un solo periodo, consecuentemente tienen representaciones en series de Fourier. Además, un conjunto opcional de condiciones, desarrollado por P. L. Dirichlet y que también son satisfechas por prácticamente todas las señales con las cuales trataremos, garantiza que $x(t)$ es *igual* a su representación en serie de Fourier excepto en valores aislados de t para los cuales $x(t)$ es discontinua. En estos valores la serie infinita de la ecuación (3.55) converge al promedio de los valores en cualquier miembro de la discontinuidad.

Las condiciones de Dirichlet son las siguientes:

Condición 1. Sobre cualquier periodo, $x(t)$ debe ser *absolutamente integrable,* esto es

$$\int_T |x(t)|\, dt < \infty. \tag{3.56}$$

Como sucede con la integrabilidad al cuadrado, esto garantiza que cada coeficiente a_k será finito, ya que

$$|a_k| \leq \frac{1}{T}\int_T |x(t)e^{-jk\omega_0 t}|\,dt = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|\,dt.$$

De manera que si

$$\int_T |x(t)|\,dt < \infty,$$

entonces

$$|a_k| < \infty.$$

Una señal periódica que viola la primera condición de Dirichlet es

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1;$$

es decir, donde $x(t)$ es periódica con periodo 1. Esta señal se ilustra en la figura 3.8(a).

Condición 2. La variación de $x(t)$ en cualquier intervalo finito de tiempo está acotada; esto es, no hay más que un número finito de máximos y mínimos durante cualquier periodo de la señal.

Un ejemplo de una función de tiempo que cumple con la condición 1 pero no la condición 2 es

$$x(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \leq 1, \tag{3.57}$$

como se ilustra en la figura 3.8(b). Para esta función, la cual es periódica con $T = 1$,

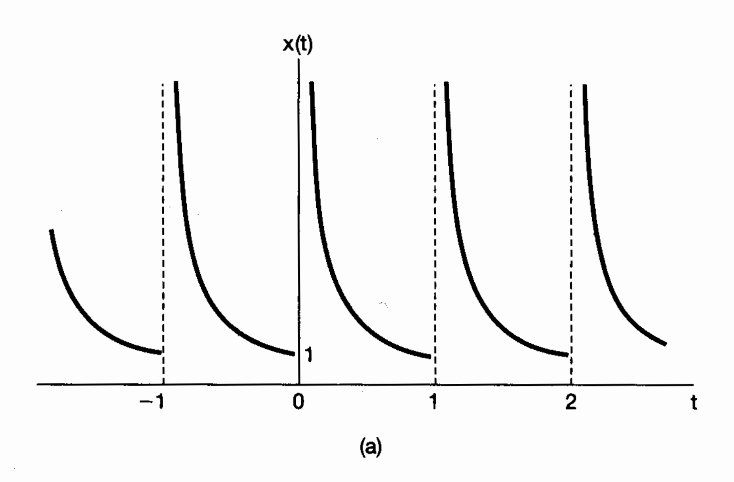
$$\int_0^1 |x(t)|\,dt < 1.$$

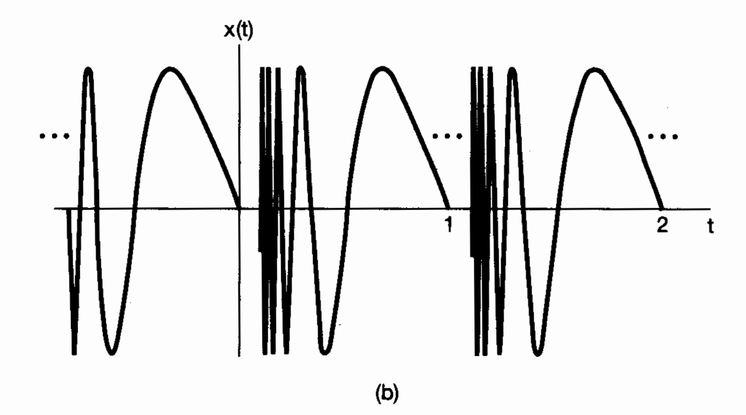
Sin embargo, la función tiene un número infinito de máximos y mínimos en el intervalo.

Condición 3. En cualquier intervalo finito de tiempo hay sólo un número finito de discontinuidades. Además, cada una de estas discontinuidades debe ser finita.

Un ejemplo de una función que viola la condición 3 se ilustra en la figura 3.8(c). La señal, de periodo $T = 8$, está compuesta por un número infinito de secciones, cada una de las cuales tiene la mitad de la altura y la mitad del ancho de la sección anterior. Así, el área bajo un periodo de la función es claramente menor que 8. Sin embargo, hay un número infinito de discontinuidades en cada periodo, lo cual viola por tanto la condición 3.

Como puede verse a partir de los ejemplos dados en la figura 3.8, las señales que no satisfacen las condiciones de Dirichlet son, en general, patológicas por naturaleza y por consiguiente no surgen de manera cotidiana en los contextos prácticos. Por esta razón, la cuestión de la convergencia de las series de Fourier no jugará un papel particularmente significativo en el resto del libro. Para una señal periódica que no tiene discontinuidades, la representación de la serie de Fourier converge e iguala a la señal original en todos los valores de t. Para una señal periódica con un número finito de discontinuidades en cada





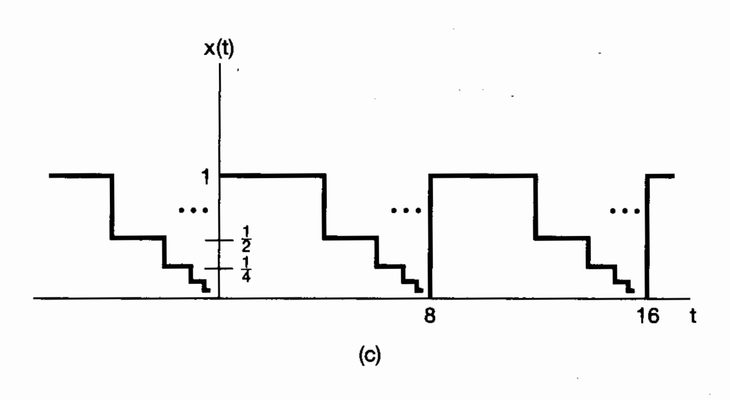


Figura 3.8 Señales que violan las condiciones de Dirichlet: (a) la señal $x(t) = 1/t$ para $0 < t \leq 1$, una señal periódica con periodo 1 (esta señal viola la primera condición de Dirichlet); (b) la señal periódica de la ecuación (3.57), la cual viola la segunda condición de Dirichlet; (c) una señal periódica con periodo 8 que viola la tercera condición de Dirichlet [para $0 \leq t < 8$, el valor de $x(t)$ decrece por un factor de 2 siempre que la distancia de t a 8 decrezca por un factor de 2; esto es, $x(t) = 1$, $0 \leq t < 4$, $x(t) = 1/2$, $4 \leq t < 6$, $x(t) = 1/4$, $6 \leq t < 7$, $x(t) = 1/8$, $7 \leq t < 7.5$, etcétera].

periodo, la representación de la serie de Fourier iguala la señal en cualquier lugar excepto en los puntos aislados de discontinuidad, en los cuales la serie converge al valor promedio de la señal en cualquier lado de la discontinuidad. En este caso, la diferencia entre la señal original y su representación en serie de Fourier no contiene energía y, en consecuencia, puede pensarse que las dos señales son la misma para cualquier propósito prác-

tico. Específicamente, puesto que las señales difieren sólo en puntos aislados, las integrales de ambas señales sobre cualquier intervalo *son* idénticas. Por esta razón, las dos señales se comportan de manera idéntica bajo la convolución y en consecuencia son idénticas desde el punto de vista del análisis de sistemas LTI.

Para entender un poco más cómo la serie de Fourier converge para una señal periódica con discontinuidades, retomemos el ejemplo de una onda cuadrada. En 1898,[10] en particular, un físico estadounidense, Albert Michelson, construyó un analizador armónico, un dispositivo que, para cualquier señal periódica $x(t)$, calculara la aproximación de la serie de Fourier truncada de la ecuación (3.52) para valores de N hasta 80. Michelson probó su dispositivo en muchas funciones, con el resultado esperado de que $x_N(t)$ se parecía mucho a $x(t)$. Sin embargo, cuando probó con la onda cuadrada, obtuvo un resultado importante y sorprendente para él. Michelson se preocupó por el comportamiento observado y pensó que su dispositivo podía tener algún defecto. Escribió acerca de este problema al famoso físico matemático Josiah Gibbs, quien lo investigó y reportó su explicación en 1899.

Lo que Michelson observó se ilustra en la figura 3.9, donde hemos mostrado a $x_N(t)$ para varios valores de N para $x(t)$, una onda cuadrada simétrica ($T = 4T_1$). En cada caso la suma parcial se ha sobrepuesto a la onda cuadrada original. Puesto que la onda cuadrada satisface las condiciones de Dirichlet, el límite cuando $N \to \infty$ de $x_N(t)$ en las discontinuidades debe ser el valor promedio de la discontinuidad. Vemos en la figura que, en efecto, éste es el caso, ya que para cualquier N, $x_N(t)$ tiene exactamente ese valor en las discontinuidades. Además, para cualquier otro valor de t digamos $t = t_1$, tenemos la garantía de que

$$\lim_{N\to\infty} x_N(t_1) = x(t_1).$$

Por tanto, el error cuadrado en la representación en serie de Fourier de la onda cuadrada tiene un área cero, como ocurre en las ecuaciones (3.53) y (3.54).

Para este ejemplo, el efecto interesante que Michelson observó es que el comportamiento de la suma parcial en la vecindad de la discontinuidad presenta rizos y que la amplitud pico de los mismos no parece disminuir conforme N se incrementa. Gibbs demostró que en efecto éste es el caso. Para una discontinuidad de altura unitaria, la suma parcial presenta un valor máximo de 1.09 (es decir, un exceso del 9% con respecto a la altura de la discontinuidad) sin importar qué tan grande llegue a ser N. Sin embargo, uno debe tener cuidado de interpretar esto correctamente. Como se estableció antes, para cualquier valor *fijo* de t, digamos $t = t_1$, las sumas parciales convergerán al valor correcto, y en la discontinuidad convergerán a la mitad de la suma de los valores de la señal en uno y otro lado de la discontinuidad. Sin embargo, mientras más cercano se escoja t_1 al punto de discontinuidad, más grande deberá ser N para reducir el error por debajo de una cantidad especificada. Entonces, conforme N se incrementa, los rizos en las sumas parciales llegan a comprimirse hacia la discontinuidad, pero para *cualquier* valor finito de N la amplitud pico de los rizos permanece constante. Este comportamiento ha llegado a conocerse como el *fenómeno de Gibbs*. La implicación de este fenómeno es que la aproximación de la serie truncada de Fourier $x_N(t)$ de una señal discontinua $x(t)$, en general presentará rizos de alta frecuencia y excederá de $x(t)$ cerca de las discontinuidades. Si tal aproximación se usa en la práctica, se debe escoger un valor de N lo bastante grande para garantizar que la energía total en estos rizos sea insignificante. En el límite, por supuesto, conocemos que la energía en el error de aproximación se desvanece y que la representación de la serie de Fourier de una señal discontinua como la onda cuadrada converge.

[10]La información histórica usada en este ejemplo se tomó del libro de Lanczos cuya referencia se da en la nota 1 de este capítulo.

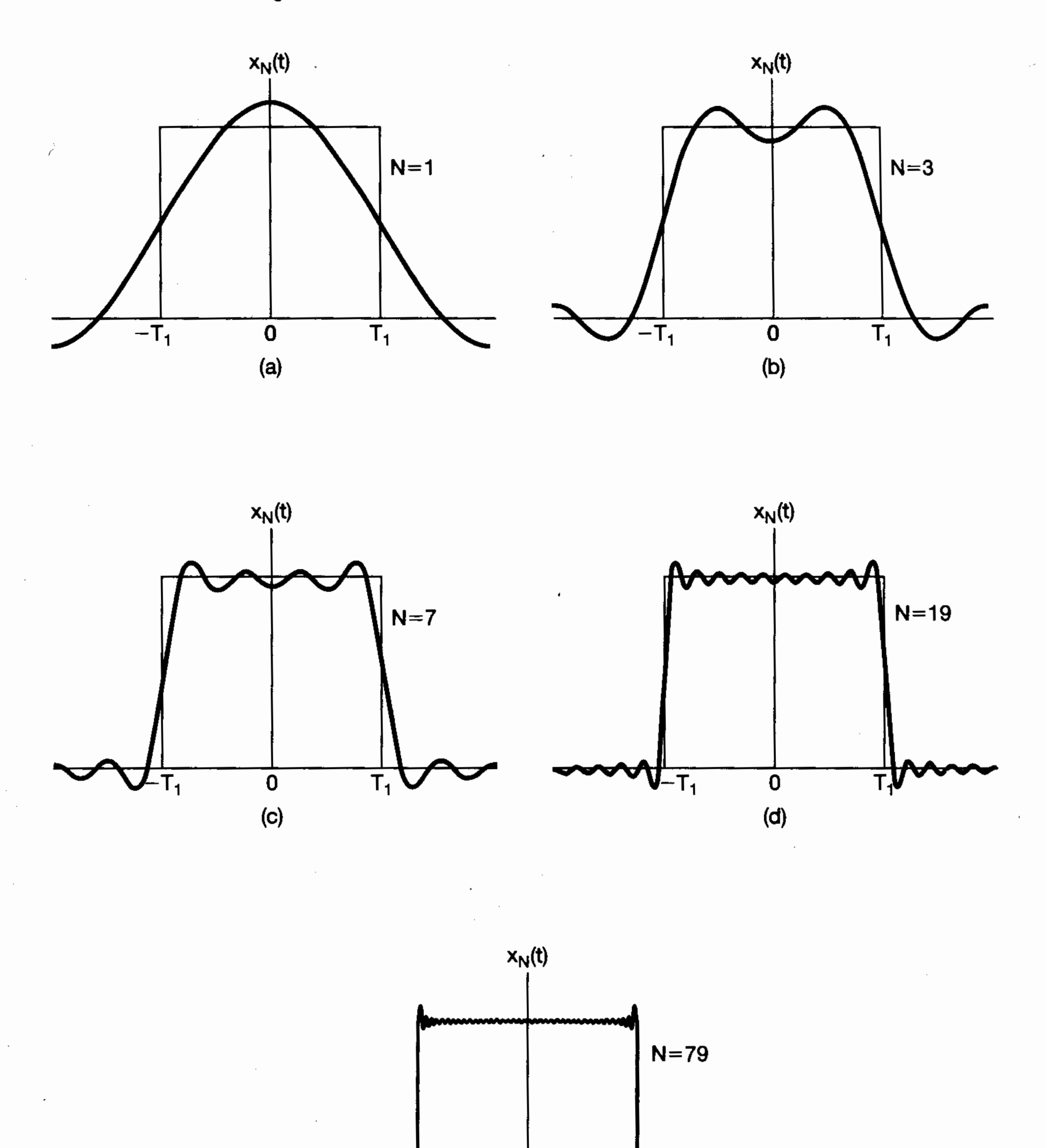


Figura 3.9 Convergencia de la representación de las series de Fourier de una onda cuadrada: una ilustración del fenómeno de Gibbs. Aquí hemos ilustrado la aproximación de la serie finita $x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$ para diversos valores de N.

3.5 PROPIEDADES DE LA SERIE CONTINUA DE FOURIER

Como se mencionó anteriormente, las representaciones en serie de Fourier poseen varias propiedades importantes que son útiles para desarrollar el conocimiento conceptual de dichas representaciones, y además pueden ayudar a reducir la complejidad de la evaluación de las series de Fourier de muchas señales. En la tabla 3.1 hemos resumido estas propiedades, varias de las cuales se examinan en los problemas al final de este capítulo. En el capítulo 4, en el cual desarrollamos la transformada de Fourier, veremos que la mayoría de estas propiedades se pueden deducir a partir de las propiedades correspondientes de la transformada continua de Fourier. En consecuencia, nos limitaremos al análisis de varias de estas propiedades para ilustrar cómo se pueden deducir, interpretar y usar.

A todo lo largo del siguiente análisis de las propiedades seleccionadas de la tabla 3.1, encontraremos conveniente usar una notación taquigráfica para indicar la relación entre una señal periódica y sus coeficientes en serie de Fourier. De manera específica, suponga que $x(t)$ es una señal periódica con periodo T y frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$. Entonces, si los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$ se denotan como a_k, usaremos la notación

$$x(t) \stackrel{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$$

para indicar la correspondencia de una señal periódica con sus coeficientes de la serie de Fourier.

3.5.1 Linealidad

Sean $x(t)$ y $y(t)$ dos señales periódicas con periodo T que tienen coeficientes de la serie de Fourier denotados por a_k y b_k, respectivamente. Esto es

$$x(t) \stackrel{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$$
$$y(t) \stackrel{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k.$$

Puesto que $x(t)$ y $y(t)$ tienen el mismo periodo T, fácilmente se desprende que cualquier combinación lineal de las dos señales también será periódica con periodo T. Además, los coeficientes de la serie de Fourier c_k de la combinación lineal de $x(t)$ y $y(t)$, $z(t) = Ax(t) + By(t)$, están dados por la misma combinación lineal de los coeficientes de la serie de Fourier para $x(t)$ y $y(t)$. Es decir,

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \stackrel{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k. \tag{3.58}$$

La prueba de esto surge directamente de la aplicación de la ecuación (3.39). También observamos que la propiedad de linealidad se extiende con facilidad a una combinación lineal de un número arbitrario de señales con periodo T.

3.5.2 Desplazamiento de tiempo

Cuando se aplica un desplazamiento de tiempo a una señal periódica $x(t)$, se conserva el periodo T de la señal. Los coeficientes de la serie de Fourier b_k de la señal resultante $y(t) = x(t - t_0)$ se pueden expresar como

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(t - t_0)e^{-jk\omega_0 t}\,dt. \tag{3.59}$$

Permitiendo $\tau = t - t_0$ en la integral, y observando que la nueva variable τ también fluctúa sobre un intervalo de duración T, obtenemos

$$\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0(\tau+t_0)}d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0}\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$
$$= e^{-jk\omega_0 t_0}a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0}a_k, \tag{3.60}$$

donde a_k es el $k$ésimo (léase kaésimo) coeficiente de la serie de Fourier para $x(t)$. Esto es, si

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$$

entonces

$$x(t - t_0) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0}a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0}a_k.$$

Una consecuencia de esta propiedad es que, cuando una señal periódica se desplaza en el tiempo, las *magnitudes* de sus coeficientes de la serie de Fourier no se alteran. Es decir, $|b_k| = |a_k|$.

3.5.3 Inversión de tiempo

El periodo T de una señal periódica $x(t)$ también permanece sin cambio cuando la señal sufre una inversión en el tiempo. Para determinar los coeficientes de la serie de Fourier de $y(t) = x(-t)$, consideremos el efecto de la inversión de tiempo en la ecuación de síntesis (3.38):

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk2\pi/T}. \tag{3.61}$$

Haciendo la sustitución $k = -m$, obtenemos

$$y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m}e^{jm2\pi t/T}. \tag{3.62}$$

Observamos que el miembro derecho de esta ecuación tiene la forma de la ecuación de síntesis de la serie de Fourier para $x(-t)$, donde los coeficientes de la serie de Fourier b_k son

$$b_k = a_{-k}. \tag{3.63}$$

Esto es, si

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$$

entonces

$$x(-t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_{-k}.$$

En otras palabras, la inversión de tiempo que se aplica a una señal continua da como resultado una inversión de tiempo de la secuencia correspondiente de los coeficientes de la serie de Fourier. Una consecuencia interesante de la propiedad de inversión de tiempo es que si $x(t)$ es par, esto es, si $x(-t) = x(t)$, entonces sus coeficientes de la serie de Fourier también son par, es decir, $a_{-k} = a_k$. De forma similar, si $x(t)$ es impar, de manera que $x(-t) = -x(t)$, entonces también lo serán sus coeficientes de la serie de Fourier, es decir, $a_{-k} = -a_k$.

3.5.4 Escalamiento de tiempo

El escalamiento de tiempo es una operación que, en general, cambia el periodo de la señal principal. En concreto, si $x(t)$ es periódica con periodo T y frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$, entonces $x(\alpha t)$, donde α es un número real positivo, es periódica con periodo T/α y frecuencia fundamental $\alpha\omega_0$. Debido a que la operación de escalamiento de tiempo se aplica directamente a cada una de las componentes armónicas de $x(t)$, podemos con facilidad concluir que los coeficiente de Fourier para cada una de esas componentes siguen siendo los mismos. Esto es, si $x(t)$ tiene la representación en serie de Fourier de la ecuación (3.38), entonces

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

es la representación en serie de Fourier de $x(\alpha t)$. Debemos enfatizar que, mientras que los coeficientes de Fourier no sufren cambio, la representación en serie de Fourier *sí cambia* debido a la variación de la frecuencia fundamental.

3.5.5 Multiplicación

Suponga que $x(t)$ y $y(t)$ son periódicas con periodo T y que

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$$

$$y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k.$$

Puesto que el producto $x(t)y(t)$ también es periódico con periodo T, podemos expandir esto en una serie de Fourier con coeficientes de la serie de Fourier h_k expresados en términos de aquellos para $x(t)$ y $y(t)$. El resultado es

$$x(t)y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}. \tag{3.64}$$

Una forma de deducir esta relación (vea el problema 3.46) es multiplicar las representaciones en series de Fourier de $x(t)$ y $y(t)$ y observar que la $k$ésima componente armónica del producto tendrá un coeficiente que es la suma de los términos de la forma $a_l b_{k-l}$. Observe que la suma del miembro derecho de la ecuación (3.64) se puede interpretar como la convolución discreta de las secuencias que representan los coeficientes de Fourier de $x(t)$ y $y(t)$.

3.5.6 Conjugación y simetría conjugada

Si tomamos el conjugado complejo de una señal periódica $x(t)$ tiene el efecto de invertir el tiempo y dejar los conjugados complejos de los correspondientes coeficientes de la serie de Fourier. Esto es, si

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$$

entonces

$$x^*(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}. \tag{3.65}$$

Esta propiedad se prueba con facilidad al aplicar el conjugado complejo a ambos miembros de la ecuación (3.38) y reemplazar la variable k en la sumatoria por su negativo.

Se pueden derivar algunas consecuencias interesantes de esta propiedad para $x(t)$ real, esto es, cuando $x(t) = x^*(t)$. En este caso en particular, vemos de la ecuación (3.65) que los coeficientes de la serie de Fourier serán *simétricos conjugados*, es decir,

$$a_{-k} = a_k^*, \tag{3.66}$$

como vimos con anterioridad en la ecuación (3.29). Esto, a su vez, implica varias propiedades de simetría (enumeradas en la tabla 3.1) para las magnitudes, las fases, partes reales y partes imaginarias de los coeficientes de la serie de Fourier de las señales reales. Por ejemplo, de la ecuación (3.66) vemos que si $x(t)$ es real, entonces a_0 es real y

$$|a_k| = |a_{-k}|.$$

También, si $x(t)$ es real y par, entonces, como vimos en la sección 3.5.3, $a_k = a_{-k}$. Sin embargo, de la ecuación (3.66) vemos que $a_k^* = a_{-k}$, de manera que $a_k = a_k^*$. Esto es, si $x(t)$ es real y par, entonces también lo serán sus coeficientes de la serie de Fourier. De manera similar, se puede mostrar que si $x(t)$ es real e impar, entonces sus coeficientes de la serie de Fourier son sólo imaginarios e impares. Entonces, por ejemplo, $a_0 = 0$ si $x(t)$ es real e impar. Ésta y otras propiedades de simetría de las series de Fourier son analizadas con mayor detalle en el problema 3.42.

3.5.7 Relación de Parseval para las señales periódicas continuas

Como se muestra en el problema 3.46, la relación de Parseval para señales periódicas continuas es

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2, \tag{3.67}$$

donde los a_k son los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$ y T es el periodo de la señal.

Observe que el miembro izquierdo de la ecuación (3.67) es la potencia promedio (es decir, la energía por unidad de tiempo) en un periodo de la señal periódica $x(t)$. También,

$$\frac{1}{T}\int_T \left|a_k e^{jk\omega_0 t}\right|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T |a_k|^2 dt = |a_k|^2, \tag{3.68}$$

de manera que $|a_k|^2$ es la potencia promedio en la $k$ésima componente armónica de $x(t)$. De esta forma, lo que establece la relación de Parseval es que la potencia promedio total en una señal periódica es igual a la suma de las potencias promedio en todas sus componentes armónicas.

3.5.8 Resumen de las propiedades de la serie continua de Fourier

En la tabla 3.1 resumimos estas y otras importantes propiedades de la serie continua de Fourier.

3.5.9 Ejemplos

Las propiedades de la serie de Fourier, mostradas en la tabla 3.1, se pueden usar para evitar algo del álgebra involucrada en la determinación de los coeficientes de Fourier de una

TABLA 3.1 PROPIEDADES DE LA SERIE CONTINUA DE FOURIER

Propiedad	Sección	Señal periódica	Coeficientes de la serie de Fourier
		$\left.\begin{array}{l}x(t)\\y(t)\end{array}\right\}$ Periódicas con periodo T y frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Linealidad	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Desplazamiento de tiempo	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Desplazamiento en frecuencia		$e^{jM\omega_0 t} = e^{jM(2\pi/T)t}x(t)$	a_{k-M}
Conjugación	3.5.6	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Inversión de tiempo	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Escalamiento en tiempo	3.5.4	$x(\alpha t), \alpha > 0$ (periódica con periodo T/α)	a_k
Convolución periódica		$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
Multiplicación	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
Diferenciación		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$
Integración		$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$ (de valor finito y periódica sólo si $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
Simetría conjugada para señales reales	3.5.6	$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \mathcal{R}e\{a_k\} = \mathcal{R}e\{a_{-k}\} \\ \mathcal{I}m\{a_k\} = -\mathcal{I}m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Señales real y par	3.5.6	$x(t)$ real y par	a_k real y par
Señales real e impar	3.5.6	$x(t)$ real e impar	a_k sólo imaginaria e impar
Descomposición par e impar de señales reales		$\begin{cases} x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \\ x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \end{cases}$	$\mathcal{R}e\{a_k\}$ $j\mathcal{I}m\{a_k\}$

Relación de Parseval para señales periódicas

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

señal determinada. En los siguientes tres ejemplos ilustramos lo anterior. El último ejemplo de esta sección demuestra, por consiguiente, cómo se pueden usar las propiedades de una señal para caracterizar la señal con gran detalle.

Ejemplo 3.6

Considere la señal $g(t)$ con un periodo fundamental de 4, la cual se muestra en la figura 3.10. Podemos determinar la representación en serie de Fourier de $g(t)$ de manera directa a partir de la ecuación de análisis (3.39). Sin embargo, usaremos en su lugar la relación de $g(t)$ con la onda cuadrada periódica simétrica $x(t)$ del ejemplo 3.5. Si nos remitimos a ese ejemplo, vemos que, con $T = 4$ y $T_1 = 1$,

$$g(t) = x(t-1) - 1/2. \tag{3.69}$$

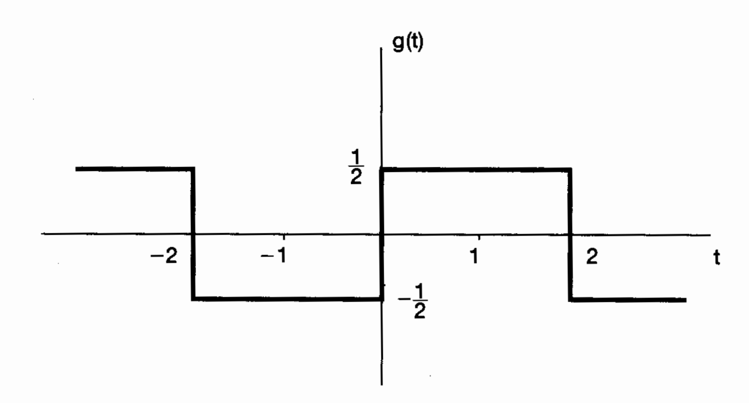


Figura 3.10 Señal periódica para el ejemplo 3.6.

La propiedad de desplazamiento de tiempo en la tabla 3.1 indica que, si los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$ se denotan como a_k, los coeficientes de Fourier de $x(t-1)$ se pueden expresar como

$$b_k = a_k e^{-jk\pi/2}. \tag{3.70}$$

Los coeficientes de Fourier del *nivel* de *cd* en $g(t)$, es decir, los términos de $-1/2$ del miembro derecho de la ecuación (3.69), están dados por

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{para } k \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{para } k = 0 \end{cases}. \tag{3.71}$$

Aplicando la propiedad de linealidad de la tabla 3.1, concluimos que los coeficientes para $g(t)$ se pueden expresar como

$$d_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2}, & \text{para } k \neq 0 \\ a_0 - \frac{1}{2}, & \text{para } k = 0 \end{cases},$$

donde cada a_k se puede reemplazar ahora por la expresión correspondiente de las ecuaciones (3.45) y (3.46), lo que produce

$$d_k = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\pi k/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2}, & \text{para } k \neq 0 \\ 0, & \text{para } k = 0 \end{cases}. \tag{3.72}$$

Ejemplo 3.7

Considere la señal de onda triangular $x(t)$ con periodo $T = 4$ y frecuencia fundamental $\omega_0 = \pi/2$ mostrada en la figura 3.11. La derivada de esta señal es la señal $g(t)$ del ejem-

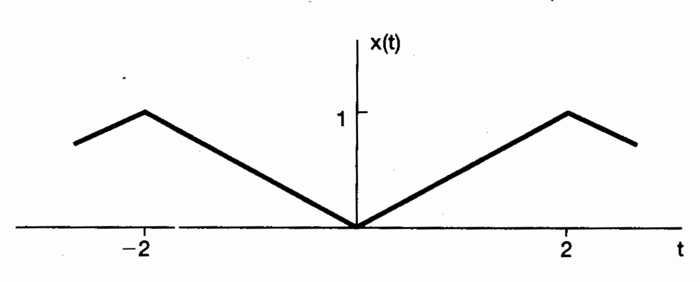


Figura 3.11 Señal de onda triangular del ejemplo 3.7.

plo 3.6. Denotando los coeficientes de Fourier de $g(t)$ mediante d_k y los de $x(t)$ mediante e_k, vemos que la propiedad de diferenciación de la tabla 3.1 indica que

$$d_k = jk(\pi/2)e_k. \tag{3.73}$$

Esta ecuación se puede usar para expresar e_k en términos de d_k, excepto cuando $k = 0$. Específicamente, de la ecuación (3.72),

$$e_k = \frac{2d_k}{jk\pi} = \frac{2\,\text{sen}(\pi k/2)}{j(k\pi)^2}e^{-jk\pi/2}, \quad k \neq 0. \tag{3.74}$$

Para $k = 0$, e_0 se puede determinar encontrando el área bajo un periodo de $x(t)$ y dividiendo entre la longitud del periodo:

$$e_0 = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.8

Examinemos algunas propiedades de la representación en serie de Fourier de un tren periódico de impulsos, o *tren de impulsos*. Esta señal y su representación en términos de exponenciales complejas jugará un papel importante cuando analicemos el tema de muestreo en el capítulo 7. El tren de impulsos con periodo T se puede expresar como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT); \tag{3.75}$$

el cual se ilustra en la figura 3.12(a). Para determinar los coeficientes a_k de la serie de Fourier, usamos la ecuación (3.39) y elegimos que el intervalo de integración sea $-T/2 \leq t \leq T/2$, evitando poner los impulsos en los límites de integración. Dentro de este intervalo, $x(t)$ es la misma que $\delta(t)$ y se sigue que

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-jk2\pi t/T}dt = \frac{1}{T}. \tag{3.76}$$

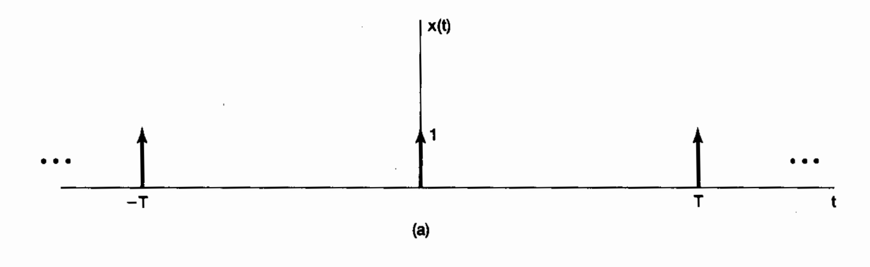
En otras palabras, todos los coeficientes de la serie de Fourier del tren de impulsos son idénticos. Estos coeficientes también son de valor real y par (con respecto al índice k). Esto era de esperarse, ya que, de acuerdo con la tabla 3.1, cualquier señal real y par (como la del tren de impulsos) debe tener coeficientes de Fourier reales y pares.

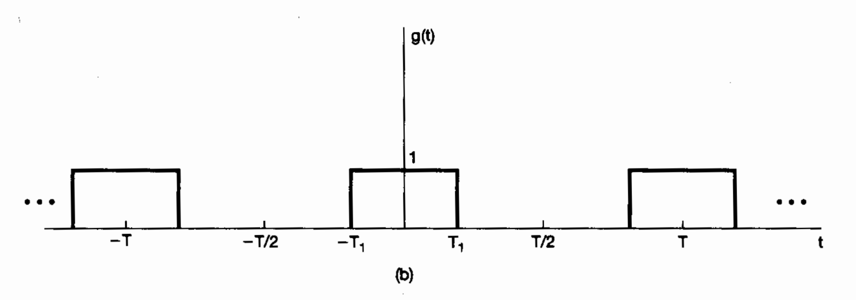
El tren de impulsos también tiene una relación directa con las señales de onda cuadrada como la de $g(t)$ en la figura 3.6, la cual repetimos en la figura 3.12(b). La derivada de $g(t)$ es la señal $q(t)$ ilustrada en la figura 3.12(c). Podemos interpretar a $q(t)$ como la diferencia de dos versiones desplazadas del tren de impulsos $x(t)$. Esto es,

$$q(t) = x(t + T_1) - x(t - T_1). \tag{3.77}$$

Usando las propiedades de la serie de Fourier, podemos calcular los coeficientes de la serie de Fourier de $q(t)$ y $g(t)$ sin ninguna evaluación directa de la ecuación de análisis de la serie de Fourier. Primero, de las propiedades de desplazamiento de tiempo y linealidad, vemos de la ecuación (3.77) que los coeficientes de la serie de Fourier b_k de $q(t)$ se pueden expresar en términos de los coeficientes de la serie de Fourier a_k de $x(t)$; esto es,

$$b_k = e^{jk\omega_0 T_1}a_k - e^{-jk\omega_0 T_1}a_k,$$





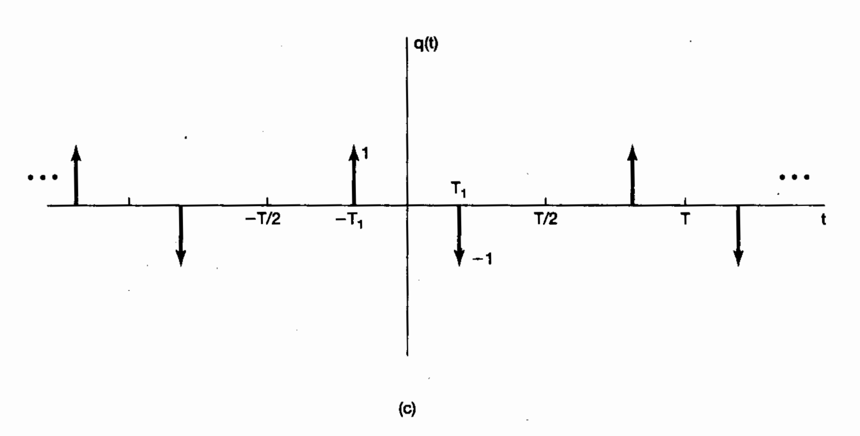


Figura 3.12 (a) Tren de impulsos periódico; (b) onda cuadrada periódica; (c) derivada de la onda cuadrada periódica en (b).

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. Usando la ecuación (3.76), tenemos entonces

$$b_k = \frac{1}{T}[e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}] = \frac{2j\,\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{T}.$$

Por último, ya que $q(t)$ es la derivada de $g(t)$, podemos usar la propiedad de diferenciación de la tabla 3.1 y escribir

$$b_k = jk\omega_0 c_k, \tag{3.78}$$

donde c_k son los coeficientes de la serie de Fourier de $g(t)$. Así,

$$c_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{2j\,\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{jk\omega_0 T} = \frac{\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \qquad k \neq 0, \tag{3.79}$$

donde nos hemos valido del hecho de que $\omega_0 T = 2\pi$. Observe que la ecuación (3.79) es válida para $k \neq 0$, ya que no podemos resolver para c_0 de la ecuación (3.78) con $k = 0$. Sin embargo, ya que c_0 es justo el valor promedio de $g(t)$ en un periodo, podemos determinarlo mediante inspección de la figura 3.12(b):

$$c_0 = \frac{2T_1}{T}. \tag{3.80}$$

Las ecuaciones (3.80) y (3.79) son idénticas a las ecuaciones (3.42) y (3.44), respectivamente, para los coeficientes de la serie de Fourier de la onda cuadrada deducida en el ejemplo 3.5.

El siguiente ejemplo se seleccionó para ilustrar el uso de muchas de las propiedades de la tabla 3.1.

Ejemplo 3.9

Suponga que se nos dan los siguientes datos sobre la señal $x(t)$:

1. $x(t)$ es una señal real.
2. $x(t)$ es periódica con periodo $T = 4$, y tiene coeficientes de la serie de Fourier a_k.
3. $a_k = 0$ para $|k| > 1$.
4. La señal con coeficientes de Fourier $b_k = e^{-j\pi k/2}a_{-k}$ es impar.
5. $\frac{1}{4}\int_4 |x(t)|^2 dt = 1/2$.

Mostraremos ahora que esta información es suficiente para determinar la señal $x(t)$ hasta quedar solamente la incertidumbre del signo de un factor. De acuerdo con el punto 3, $x(t)$ tiene cuando mucho tres coeficientes a_k de la serie de Fourier diferentes de cero: a_0, a_1 y a_{-1}. Entonces, puesto que $x(t)$ tiene frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$, se sigue a que

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + a_{-1}e^{-j\pi t/2}.$$

Ya que $x(t)$ es real (punto 1), podemos usar las propiedades de simetría de la tabla 3.1 para concluir que a_0 es real y $a_1 = a^*_{-1}$. En consecuencia,

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + (a_1 e^{j\pi t/2})^* = a_0 + 2\Re e\{a_1 e^{j\pi t/2}\}. \tag{3.81}$$

Determinemos ahora la señal correspondiente a los coeficientes de Fourier b_k dados por el punto 4. Usando la propiedad de inversión del tiempo de la tabla 3.1, observamos que a_{-k} corresponde a la señal $x(-t)$. Asimismo, de la propiedad de desplazamiento en el tiempo en la tabla indica que la multiplicación del $k$ésimo coeficiente de Fourier por $e^{-jk\pi/2} = e^{-jk\omega_0}$ corresponde a la señal en cuestión siendo desplazada en 1 a la derecha (es decir, con $t - 1$ reemplazando a t). Concluimos que los coeficientes b_k corresponden a la señal $x(-(t-1)) = x(-t+1)$, la cual, de acuerdo con el punto 4, debe ser impar. Ya que $x(t)$ es real, $x(-t+1)$ también debe ser real. De la tabla 3.1, se desprende que los coeficientes de Fourier de $x(-t+1)$ deben ser puramente imaginarios e impares. Entonces, $b_0 = 0$ y $b_{-1} = -b_1$. En vista de que las operaciones de inversión del tiempo y desplazamiento en el tiempo no pueden cambiar la potencia promedio por periodo, el punto 5 se cumple aun si $x(t)$ es reemplazada por $x(-t+1)$. Esto es,

$$\frac{1}{4}\int_4 |x(-t+1)|^2 dt = 1/2. \tag{3.82}$$

Ahora podemos usar la relación de Parseval para concluir que

$$|b_1|^2 + |b_{-1}|^2 = 1/2. \quad (3.83)$$

Sustituyendo $b_1 = -b_{-1}$ en esta ecuación, obtenemos $|b_1| = 1/2$. Puesto que sabemos que b_1 también es sólo imaginaria, debe ser $j/2$ o $-j/2$.

Ahora podemos trasladar estas condiciones en b_0 y b_1 a los equivalentes de a_0 y a_1. Primero, como $b_0 = 0$, el punto 4 implica que $a_0 = 0$. Con $k = 1$, esta condición implica que $a_1 = e^{-j\pi/2}b_{-1} = -jb_{-1} = jb_1$. Así pues, si tomamos $b_1 = j/2$, entonces $a_1 = -1/2$, y por tanto, de la ecuación (3.81), $x(t) = -\cos(\pi t/2)$. De forma alternativa, si tomamos $b_1 = -j/2$, entonces $a_1 = 1/2$ y, por tanto, $x(t) = \cos(\pi t/2)$.

3.6 REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS DISCRETAS

En esta sección consideramos la representación en series de Fourier de señales discretas. Si bien el análisis resulta muy semejante al de la sección 3.3, hay algunas diferencias importantes. En particular, la representación en serie de Fourier de una señal periódica discreta es una serie *finita*, opuesta a la representación de la serie infinita requerida para señales periódicas continuas. Como consecuencia de ello, no se incluyen temas matemáticos sobre convergencia como los analizados en la sección 3.4.

3.6.1 Combinaciones lineales de exponenciales complejas relacionadas armónicamente

Como se definió en el capítulo 1, una señal discreta $x[n]$ es periódica con periodo N si

$$x[n] = x[n + N]. \quad (3.84)$$

El periodo fundamental es el entero positivo N más pequeño para el cual la ecuación (3.84) se cumple, y $\omega_0 = 2\pi/N$ es la frecuencia fundamental. Por ejemplo, la exponencial compleja $e^{j(2\pi/N)n}$ es periódica con periodo N. Además, el conjunto total de las señales exponenciales complejas discretas que son periódicas con periodo N está dado por

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \quad (3.85)$$

Todas estas señales tienen frecuencias fundamentales que son múltiplos de $2\pi/N$ y por tanto están relacionadas armónicamente.

Como se mencionó en la sección 1.3.3, hay sólo N señales distintas en el conjunto dado por la ecuación (3.85). Esto es una consecuencia del hecho de que las exponenciales complejas discretas que difieren en frecuencia por un múltiplo de 2π son idénticas. En forma específica, $\phi_0[n] = \phi_N[n]$, $\phi_1[n] = \phi_{N+1}[n]$ y, en general,

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n]. \quad (3.86)$$

Es decir, cuando k se cambia por cualquier múltiplo entero de N, generamos la secuencia idéntica. Esto difiere de lo que ocurre en el caso continuo, en donde las señales $\phi_k(t)$ definidas en la ecuación (3.24) son todas diferentes.

Ahora deseamos considerar la representación de secuencias periódicas más generales en términos de combinaciones lineales de las secuencias $\phi_k[n]$ en la ecuación (3.85). Tal combinación lineal tiene la forma

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_k a_k e^{jk(2\pi/N)n}. \tag{3.87}$$

En vista de que las secuencias $\phi_k[n]$ son distintas sólo sobre un rango de N valores sucesivos de k, la sumatoria en la ecuación (3.87) necesita incluir sólo términos en este rango. Entonces, la sumatoria es sobre k, a medida que k varía sobre un rango de N enteros sucesivos, empezando con cualquier valor de k. Indicamos esto expresando los límites de la sumatoria como $k = \langle N \rangle$. Es decir,

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}. \tag{3.88}$$

Por ejemplo, k podría asumir los valores $k = 0, 1, \ldots, N-1$ o $k = 3, 4, \ldots, N+2$. En cualquier caso, en virtud de la ecuación (3.86), exactamente el mismo conjunto de secuencias exponenciales complejas aparecen en la sumatoria del miembro derecho de la ecuación (3.88). Esta ecuación se conoce como la *serie discreta de Fourier* y los coeficientes a_k como los *coeficientes de la serie de Fourier.*

3.6.2 Determinación de la representación en serie de Fourier de una señal periódica

Suponga ahora que se nos da una secuencia $x[n]$ la cual es periódica con periodo fundamental N. Nos gustaría determinar si existe una representación de $x[n]$ en la forma dada en la ecuación (3.88) y, de ser así, cuáles son los valores de los coeficientes a_k. Esta pregunta puede expresarse en otros términos, es decir, encontrar una solución para un conjunto de ecuaciones lineales. En concreto, si evaluamos la ecuación (3.88) para N valores sucesivos de n que corresponden a un periodo de $x[n]$, obtenemos

$$\begin{aligned} x[0] &= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k, \\ x[1] &= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j2\pi k/N}, \\ &\vdots \\ x[N-1] &= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j2\pi k(N-1)/N}. \end{aligned} \tag{3.89}$$

Así, la ecuación (3.89) representa un conjunto de N ecuaciones lineales para los N coeficientes desconocidos a_k conforme k varía sobre un conjunto de N enteros sucesivos. También se puede demostrar que este conjunto de ecuaciones es linealmente independiente y, en consecuencia, se puede resolver para obtener los coeficientes a_k en términos de los valores dados de $x[n]$. En el problema 3.32 consideramos un ejemplo en el cual los coeficientes de la serie de Fourier se obtienen resolviendo explícitamente el conjunto de N ecuaciones dadas en la ecuación (3.89). Sin embargo, siguiendo los pasos paralelos a los usados en el caso continuo, es posible obtener una expresión de forma cerrada para los coeficientes a_k en términos de los valores de la secuencia $x[n]$.

La base para este resultado es el hecho, mostrado en el problema 3.54, de que

$$\sum_{n=\langle N\rangle} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{cualquier otro valor} \end{cases}. \tag{3.90}$$

La ecuación (3.90) establece que la suma sobre un periodo de los valores de una exponencial compleja periódica es cero, a menos que la exponencial compleja sea una constante.

Ahora consideremos la representación en serie de Fourier de la ecuación (3.88). Al multiplicar ambos miembros por $e^{-jr(2\pi/N)n}$ y sumando los N términos obtenemos

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N\rangle}\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n}. \tag{3.91}$$

Intercambiando el orden de la sumatoria en el miembro derecho de la ecuación, tenemos

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n}. \tag{3.92}$$

A partir de la identidad en la ecuación (3.90), la suma interior en n sobre el miembro derecho de la ecuación (3.92) es cero, a menos que $k - r$ sea cero o un múltiplo entero de N. Por tanto, si escogemos valores de r sobre la misma escala sobre la cual k varía en la sumatoria exterior, la suma interior en el miembro derecho de la ecuación (3.92) es igual a N si $k = r$ y 0 si $k \neq r$. Entonces, el miembro derecho de la ecuación (3.92) se reduce a Na_r, y tenemos

$$a_r = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n}. \tag{3.93}$$

Esto proporciona una expresión cerrada para obtener los coeficientes de la serie de Fourier, y tenemos el *par de la serie discreta de Fourier*:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}, \tag{3.94}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}. \tag{3.95}$$

Estas ecuaciones juegan el mismo papel para las señales periódicas discretas que el que juegan las ecuaciones (3.38) y (3.39) para las señales periódicas continuas, siendo la ecuación (3.94) la que representa la ecuación de *síntesis* y la ecuación (3.95) la de *análisis*. Al igual que en el caso continuo, los coeficientes de la serie discreta de Fourier a_k son a menudo llamados los *coeficientes espectrales* de $x[n]$. Estos coeficientes especifican una descomposición de $x[n]$ en una suma de N exponenciales complejas relacionadas armónicamente.

Remitiéndonos a la ecuación (3.88) vemos que si tomamos k en la escala de 0 a $N - 1$ tenemos

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + \ldots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n]. \tag{3.96}$$

De manera similar, si k fluctúa de 1 a N, obtenemos

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + a_2\phi_2[n] + \ldots + a_N\phi_N[n]. \tag{3.97}$$

A partir de la ecuación (3.86), $\phi_0[n] = \phi_N[n]$ y entonces, basándonos en la comparación de las ecuaciones (3.96) y (3.97), debemos concluir que $a_0 = a_N$. En forma similar, haciendo que k fluctúe sobre cualquier conjunto de N enteros consecutivos y usando la ecuación (3.86) podemos concluir que

$$a_k = a_{k+N}. \tag{3.98}$$

Esto es, si consideramos más de N valores secuenciales de k, los valores de a_k se repetirán periódicamente con periodo N. Es importante interpretar este hecho cuidadosamente. En particular, ya que hay sólo N distintas exponenciales complejas que son periódicas con periodo N, la representación en serie discreta de Fourier es una serie finita con N términos. Por tanto, si fijamos los N valores consecutivos de k sobre los cuales definimos la serie de Fourier en la ecuación (3.94), obtendremos un conjunto de exactamente N coeficientes de Fourier a partir de la ecuación (3.95). Por otro lado, en algunas ocasiones será conveniente usar diferentes conjuntos de N valores de k y, en consecuencia, resulta útil considerar la ecuación (3.94) como una suma de cualquier conjunto *arbitrario* de N valores sucesivos de k. Por esta razón, algunas veces es conveniente pensar en a_k como una secuencia definida para todos los valores de k, pero sólo N elementos sucesivos en esta secuencia serán usados en la representación en serie de Fourier. Además, ya que $\phi_k[n]$ se repite periódicamente con periodo N conforme variamos k [ecuación (3.86)], también lo debe hacer a_k [ecuación (3.98)]. Este punto de vista se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.10

Considere la señal

$$x[n] = \text{sen}\,\omega_0 n, \tag{3.99}$$

la cual es la contraparte discreta de la señal $x(t) = \text{sen}\,\omega_0 t$ del ejemplo 3.3. $x[n]$ es periódica sólo si $2\pi/\omega_0$ es un entero o una razón de enteros. Para el caso cuando $2\pi/\omega_0$ sea un entero N, esto es, cuando

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N},$$

$x[n]$ es periódica con periodo fundamental N, y obtenemos un resultado que es exactamente análogo al caso continuo. Expandiendo la señal como una suma de dos exponenciales complejas, obtenemos

$$x[n] = \frac{1}{2j}e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j}e^{-j(2\pi/N)n}. \tag{3.100}$$

Comparando la ecuación (3.100) con la (3.94) vemos, por inspección, que

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}, \tag{3.101}$$

y el resto de los coeficientes en el intervalo de la sumatoria es cero. Como se describió anteriormente, estos coeficientes se repiten con periodo N; por tanto, a_{N+1} también es igual a $(1/2j)$ y a_{N-1} es igual a $(-1/2j)$. Los coeficientes de la serie de Fourier para este ejemplo con $N = 5$ se ilustran en la figura 3.13. Se indica el hecho de que se repiten periódicamente. Sin embargo, se utiliza sólo un periodo en la ecuación de síntesis (3.94).

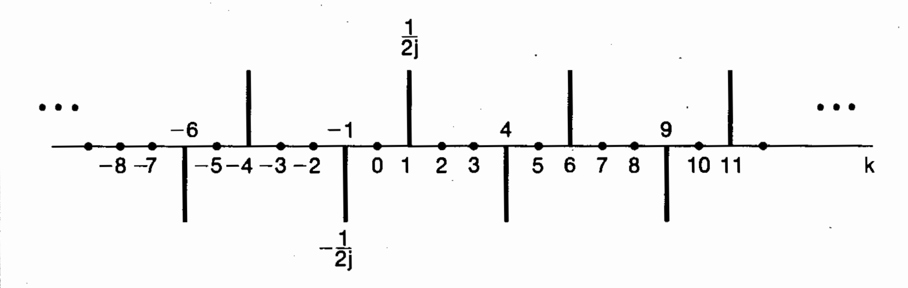


Figura 3.13 Coeficientes de Fourier para $x[n] = \text{sen}(2\pi/5)n$.

Considere ahora el caso cuando $2\pi/\omega_0$ es una relación de enteros, esto es, cuando

$$\omega_0 = \frac{2\pi M}{N}.$$

Suponiendo que M y N no tuvieran factores comunes, $x[n]$ tiene un periodo fundamental de N. De nueva cuenta, expandiendo $x[n]$ como una suma de dos exponenciales complejas, tenemos

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jM(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-jM(2\pi/N)n},$$

a partir de la cual podemos determinar por inspección que $a_M = (1/2j)$, $a_{-M} = (-1/2j)$ y el resto de los coeficientes en un periodo N son cero. Los coeficientes de Fourier para este ejemplo con $M = 3$ y $N = 5$ se han representado en la figura 3.14. Una vez más hemos indicado la periodicidad de los coeficientes. Por ejemplo, para $N = 5, a_2 = a_{-3}$, lo cual en nuestro ejemplo es igual a $(-1/2j)$. Sin embargo, observe que en cualquier periodo de longitud 5 hay sólo dos coeficientes de Fourier diferentes de cero y, por tanto, hay solamente dos términos diferentes de cero en la ecuación de síntesis.

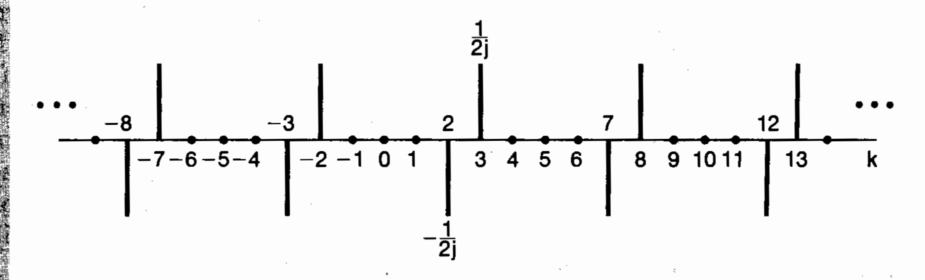


Figura 3.14 Coeficientes de Fourier para $x[n] = \text{sen}3(2\pi/5)n$.

Ejemplo 3.11

Considere la señal

$$x[n] = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N}\right)n + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)n + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right).$$

Esta señal es periódica con periodo N y, como sucedió en el ejemplo 3.10, podemos expandir $x[n]$ directamente en términos de exponenciales complejas para obtener

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2j}[e^{j(2\pi/N)n} - e^{-j(2\pi/N)n}] + \frac{3}{2}[e^{j(2\pi/N)n} + e^{-j(2\pi/N)n}]$$
$$+ \frac{1}{2}[e^{j(4\pi n/N + \pi/2)} + e^{-j(4\pi n/N + \pi/2)}].$$

Agrupando términos, encontramos que

$$x[n] = 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right)e^{j(2\pi/N)n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right)e^{-j(2\pi/N)n}$$
$$+ \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}\right)e^{j2(2\pi/N)n} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}\right)e^{-j2(2\pi/N)n}.$$

Por consiguiente, los coeficientes de la serie de Fourier para este ejemplo son

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j,$$
$$a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j,$$
$$a_2 = \frac{1}{2}j,$$
$$a_{-2} = -\frac{1}{2}j,$$

con $a_k = 0$ para otros valores de k en el intervalo de la sumatoria en la ecuación de síntesis (3.94). De nuevo los coeficientes de Fourier son periódicos con periodo N, así que, por ejemplo, $a_N = 1$, $a_{3N-1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$ y $a_{2-N} = \frac{1}{2}j$. En la figura 3.15(a) hemos dibujado las partes real e imaginaria de estos coeficientes para $N = 10$, mientras que la magnitud y fase de los coeficientes están representados en la figura 3.15(b).

Observe que, en este ejemplo, $a_{-k} = a_k^*$ para todos los valores de k. De hecho, esta igualdad se cumple siempre que $x[n]$ sea real. Esta propiedad es idéntica a la que analizamos en la sección 3.3 para señales periódicas continuas, y al igual que en el caso continuo, una implicación de este hecho es que hay dos formas alternativas para las series discretas de Fourier de las secuencias periódicas reales. Estas formas son análogas a las representaciones en la serie continua de Fourier dadas en las ecuaciones (3.31) y (3.32) y se examinan en el problema 3.52. Para nuestros propósitos, la forma exponencial de la serie de Fourier, como se obtuvo en las ecuaciones (3.94) y (3.95), es en particular conveniente y es la que usaremos exclusivamente.

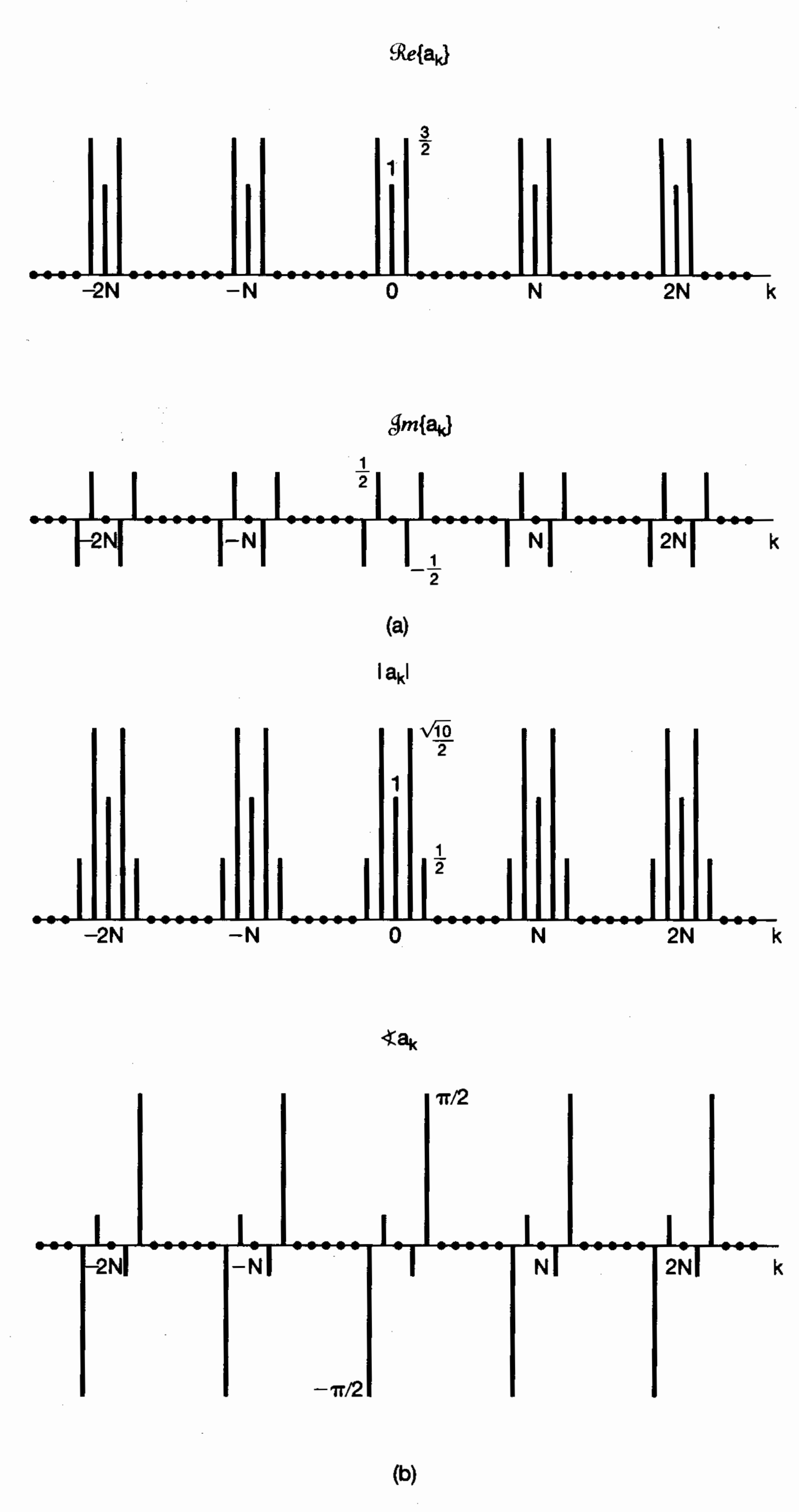


Figura 3.15 (a) Partes real e imaginaria de los coeficientes de la serie de Fourier del ejemplo 3.11; (b) magnitud y fase de los mismos coeficientes.

Ejemplo 3.12

En este ejemplo consideramos la onda cuadrada periódica discreta mostrada en la figura 3.16. Podemos evaluar la serie de Fourier para esta señal usando la ecuación (3.95). Debido a que $x[n] = 1$ para $-N_1 \leq n \leq N_1$, es particularmente conveniente seleccionar el intervalo de longitud N en la sumatoria de la ecuación (3.95) de manera que incluya la escala $-N_1 \leq n \leq N_1$. En este caso, podemos expresar la ecuación (3.95) como

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n}. \tag{3.102}$$

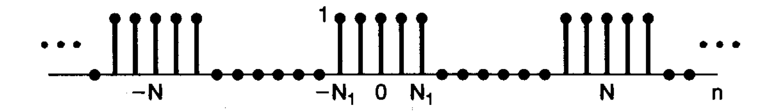


Figura 3.16 Onda cuadrada periódica discreta.

Si permitimos que $m = n + N_1$, observamos que la ecuación (3.102) se vuelve

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m}. \end{aligned} \tag{3.103}$$

La sumatoria en la ecuación (3.103) consiste en la suma de los primeros $2N_1 + 1$ términos en una serie geométrica, la cual se puede evaluar usando el resultado del problema 1.54. Esto produce

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \left(\frac{1 - e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/2N)}[e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}]}{e^{-jk(2\pi/2N)}[e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)}]} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\operatorname{sen}[2\pi k(N_1 + 1/2)/N]}{\operatorname{sen}(\pi k/N)}, \qquad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \end{aligned} \tag{3.104}$$

y

$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \qquad k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots . \tag{3.105}$$

Los coeficientes a_k para $2N_1 + 1 = 5$ están dibujados para $N = 10, 20$ y 40 en la figura 3.17(a), (b) y (c), respectivamente.

Cuando se analizó la convergencia de la serie continua de Fourier en la sección 3.4, consideramos el ejemplo específico de una onda cuadrada simétrica y observamos cómo la suma finita en la ecuación (3.52) converge hacia la onda cuadrada conforme el número de términos se aproxima al infinito. En particular, observamos el fenómeno de Gibbs en

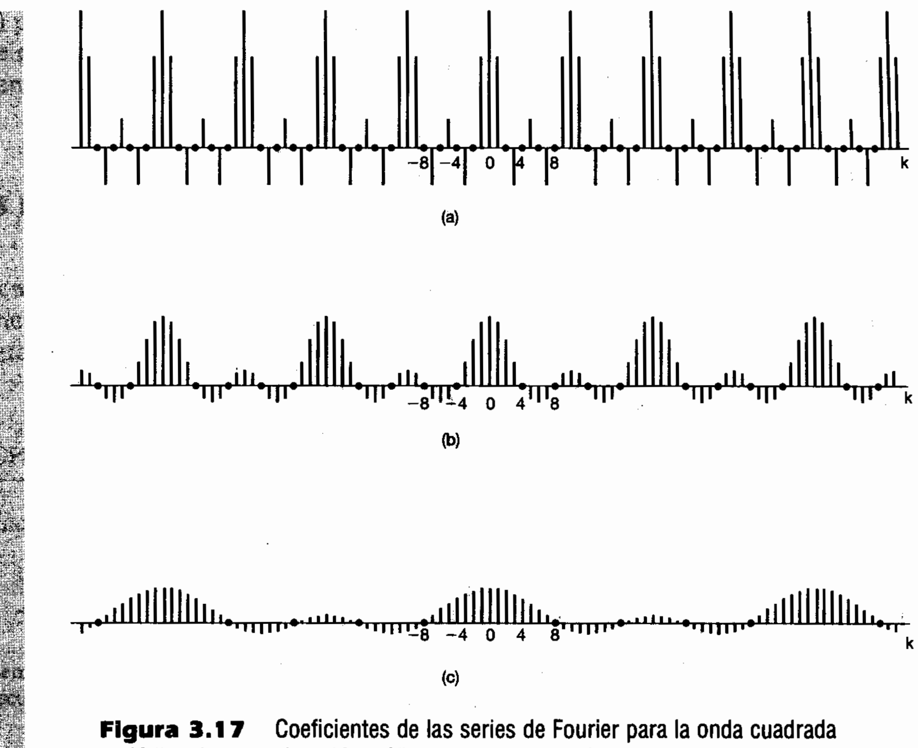


Figura 3.17 Coeficientes de las series de Fourier para la onda cuadrada periódica del ejemplo 3.12; gráficas de Na_k para $2N_1 + 1 = 5$ y (a) $N = 10$; (b) $N = 20$; y (c) $N = 40$.

la discontinuidad, según el cual conforme el número de términos se incrementaba, los rizos en la suma parcial (figura 3.9) llegaban a comprimirse hacia la discontinuidad, permaneciendo constante la amplitud pico de los rizos independientemente del número de términos en la suma parcial. Consideremos ahora la secuencia análoga de las sumas parciales para la onda discreta, donde, para simplificar, supondremos que el periodo N es impar. En la figura 3.18 hemos representado las señales

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M}^{M} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \tag{3.106}$$

para el ejemplo de la figura 3.16 con $N = 9$, $2N_1 + 1 = 5$, y para diversos valores de M. Para $M = 4$, la suma parcial es exactamente igual a $x[n]$. Vemos en particular que, en contraste con el caso continuo, no hay elemento de convergencia y no se presenta el fenómeno de Gibbs. De hecho, en general no hay elementos de convergencia con la serie discreta de Fourier. La razón de esto radica en el hecho de que cualquier secuencia $x[n]$ periódica discreta está completamente especificada por un número *finito* N de parámetros, o sea, los valores de la secuencia sobre un periodo. La ecuación de análisis (3.95) de la serie de Fourier simplemente transforma este conjunto de N parámetros en un conjunto equivalente (los valores de los N coeficientes de Fourier) y la ecuación de síntesis (3.94) nos dice cómo recuperar los valores de la secuencia original en términos de una serie *fini-*

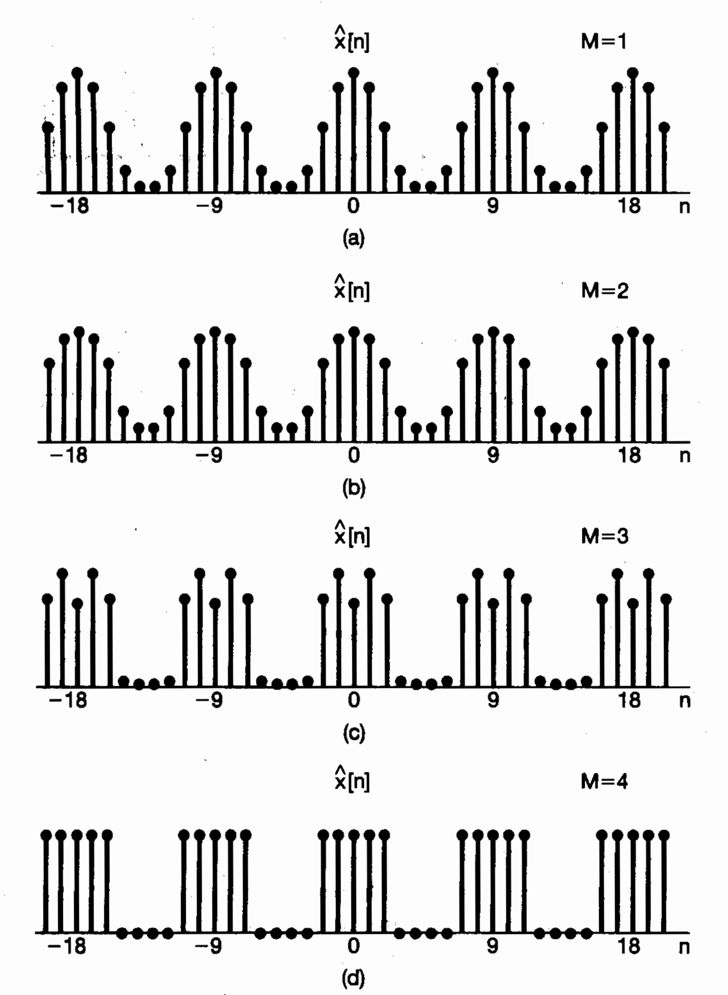


Figura 3.18 Sumas parciales de las ecuaciones (3.106) y (3.107) para las ondas cuadradas periódicas de la figura 3.16 con $N = 9$ y $2N_1 + 1 = 5$: (a) $M = 1$; (b) $M = 2$; (c) $M = 3$; (d) $M = 4$.

ta. Entonces, si N es impar y tomamos $M = (N - 1)/2$ en la ecuación (3.106), esta suma incluye exactamente N términos y, en consecuencia, a partir de la ecuación de síntesis tenemos que $\hat{x}[n] = x[n]$. De manera similar, si N es par y permitimos que

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M+1}^{M} a_k e^{jk(2\pi/N)n}, \tag{3.107}$$

entonces, con $M = N/2$, esta suma consiste de N términos y una vez más podemos concluir, de la ecuación (3.94), que $\hat{x}[n] = x[n]$.

En contraste, una señal periódica continua adopta un continuo de valores sobre un solo periodo y requiere de un número infinito de coeficientes de Fourier para representarla. De esta manera, en general, *ninguna* de las sumas parciales finitas en la ecuación

(3.52) producirá valores exactos de $x(t)$, y cuando tomamos en consideración el problema de evaluar el límite a medida que el número de términos se acerca al infinito, surgen elementos de convergencia como los considerados en la sección 3.4.

3.7 PROPIEDADES DE LA SERIE DISCRETA DE FOURIER

Existen muchas similitudes entre las propiedades de la serie discreta de Fourier y las de la serie continua. Esto se puede ver fácilmente al comparar las propiedades de la serie discreta de Fourier resumidas en la tabla 3.2 con su contraparte continua de la tabla 3.1.

TABLA 3.2 PROPIEDADES DE LAS SERIES DISCRETAS DE FOURIER

Propiedad	Señal periódica	Coeficientes de la serie de Fourier
	$\left.\begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix}\right\}$ Periódicas con periodo N y frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/N$	$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\}$ Periódica con periodo N
Linealidad	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Desplazamiento de tiempo	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{jM(2\pi/N)n}x[n]$	a_{k-M}
Conjugación	$x^*[n]$	a^*_{-k}
Inversión de tiempo	$x[-n]$	a_{-k}
Escalamiento en tiempo	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{si } n \text{ es un múltiplo de } m \\ 0 & \text{si } n \text{ no es un múltiplo de } m \end{cases}$ (periódica con periodo mN)	$\frac{1}{m}a_k$ $\begin{pmatrix}\text{vistas como periódicas} \\ \text{con periodo } mN\end{pmatrix}$
Convolución periódica	$\sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r]$	Na_kb_k
Multiplicación	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$
Primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$
Suma consecutiva	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ $\begin{pmatrix}\text{de valor finito y periódica sólo} \\ \text{si } a_0 = 0\end{pmatrix}$	$\left(\frac{1}{(1 - e^{-jk(2\pi/N)})}\right)a_k$
Simetría conjugada para señales reales	$x[n]$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Señales real y par	$x[n]$ real y par	a_k real y par
Señales real e impar	$x[n]$ real e impar	a_k sólo imaginaria e impar
Descomposición par e impar de señales reales	$\begin{cases} x_e[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \\ x_o[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \end{cases}$	$\Re e\{a_k\}$ $j\Im m\{a_k\}$

Relación de Parseval para señales periódicas

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$

Las deducciones de muchas de estas propiedades son muy similares a las propiedades correspondientes de la serie continua de Fourier, y varias de ellas se consideran en los problemas al final del capítulo. Además, en el capítulo 5 veremos que la mayoría de éstas se pueden inferir a partir de las propiedades que les corresponden de la transformada discreta de Fourier. En consecuencia, en las siguientes subsecciones limitaremos el análisis a sólo algunas de estas propiedades, incluyendo las que muestran diferencias importantes en relación con las continuas. También proporcionamos ejemplos que ilustran la utilidad que varias de las propiedades de la serie discreta de Fourier tienen para el desarrollo de un conocimiento conceptual, y la ayuda que prestan para reducir la complejidad en la evaluación de las series de Fourier de muchas secuencias periódicas.

Al igual que en el caso continuo, a menudo es conveniente usar una notación taquigráfica para indicar la relación entre una señal periódica y sus coeficientes de la serie de Fourier. En concreto, si $x[n]$ es una señal periódica con periodo N y con coeficientes de la serie de Fourier indicados por a_k, entonces escribiremos

$$x[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_k.$$

3.7.1 Multiplicación

La propiedad de multiplicación que la representación en serie de Fourier posee es un ejemplo de propiedad que refleja la diferencia entre el caso continuo y el discreto. De la tabla 3.1, el producto de dos señales de tiempo continuo de periodo T da como resultado una señal periódica con periodo T, cuya secuencia de los coeficientes de la serie de Fourier consiste en la *convolución* de las secuencias de los coeficientes de la serie de Fourier para las dos señales multiplicadas. En el caso discreto, suponga que

$$x[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$$

y

$$y[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} b_k$$

son periódicas con periodo N. Entonces, el producto $x[n]y[n]$ también es periódico con periodo N y, como se muestra en el problema 3.57, sus coeficientes de Fourier d_k están dados por

$$x[n]y[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} d_k = \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}. \tag{3.108}$$

La ecuación (3.108) es análoga a la definición de convolución, excepto que la variable de la sumatoria se restringe ahora a un intervalo de N muestras consecutivas. De acuerdo con el problema 3.57, la sumatoria se puede tomar sobre *cualquier* conjunto de N valores consecutivos de l. Este tipo de operación será considerada como una *convolución periódica* entre las dos secuencias periódicas de los coeficientes de Fourier. La forma común de la suma de convolución (donde la variable de la sumatoria varía de $-\infty$ a ∞) se conoce como la *convolución aperiódica*, para distinguirla de la convolución periódica.

3.7.2 Primera diferencia

El dual de tiempo discreto de la propiedad de diferenciación de la serie continua de Fourier involucra el uso de la operación de primera diferencia, la cual se define como

$x[n] - x[n-1]$. Si $x[n]$ es periódica con periodo N, entonces también lo será $y[n]$, ya que al desplazar $x[n]$ o combinar linealmente $x[n]$ con otra señal periódica cuyo periodo es N siempre dará como resultado una señal periódica con periodo N. Del mismo modo, si

$$x[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$$

entonces los coeficientes de Fourier correspondientes a la primera diferencia de $x[n]$ se pueden expresar como

$$x[n] - x[n-1] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k, \tag{3.109}$$

la cual se obtiene fácilmente aplicando las propiedades de desplazamiento de tiempo y linealidad de la tabla 3.2. Un uso común de esta propiedad se presenta en situaciones donde la evaluación de los coeficientes de la serie de Fourier es más fácil para la primera diferencia que para la secuencia original. (Véase el problema 3.31.)

3.7.3 Relación de Parseval para señales periódicas discretas

Como se muestra en el problema 3.57, la relación de Parseval para señales periódicas discretas está dada por

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2, \tag{3.110}$$

donde a_k son los coeficientes de la serie de Fourier de $x[n]$ y N es el periodo. Al igual que en el caso continuo, el miembro izquierdo de la relación de Parseval es la potencia promedio en un periodo de la señal periódica $x[n]$. De manera similar, $|a_k|^2$ es la potencia promedio en la $k$ésima componente armónica de $x[n]$. Así, de nueva cuenta, la relación de Parseval establece que la potencia promedio en una señal periódica es igual a la suma de las potencias promedio en todas sus componentes armónicas. En el caso discreto, de hecho, hay sólo N componentes armónicas precisas, y ya que los a_k son periódicos con periodo N, la suma del miembro derecho de la ecuación (3.110) se puede hacer sobre cualquier cantidad N de valores consecutivos de k.

3.7.4 Ejemplos

En esta subsección presentamos varios ejemplos que ilustran cómo se pueden usar las propiedades de la serie discreta de Fourier para caracterizar las señales periódicas discretas y calcular sus representaciones en serie de Fourier. De manera específica, las propiedades de la serie de Fourier, como las indicadas en la tabla 3.2, se pueden usar para simplificar el proceso de determinación de los coeficientes de la serie de Fourier de una determinada señal. Esto implica expresar primero la señal dada en términos de otras señales cuyos coeficientes de la serie de Fourier sean ya conocidos o resulten más fáciles de calcular. Entonces, usando la tabla 3.2, podemos expresar los coeficientes de la serie de Fourier de dicha señal en términos de los coeficientes de la serie de Fourier de otras señales. Esto se ilustra en el ejemplo 3.13. El ejemplo 3.14 presenta así la determinación de una secuencia a partir de alguna información parcial. En el ejemplo 3.15 mostramos el uso de la propiedad de convolución periódica de la tabla 3.2.

Ejemplo 3.13

Consideremos el problema de encontrar los coeficientes de la serie de Fourier a_k de la secuencia $x[n]$ mostrada en la figura 3.19(a). Esta secuencia tiene un periodo fundamental de 5. Observamos que $x[n]$ se puede considerar como la suma de la onda cuadrada $x_1[n]$ en la figura 3.19(b) con la *secuencia de cd* $x_2[n]$ en la figura 3.19(c). Señalando los coeficientes de la serie de Fourier de $x_1[n]$ mediante b_k y los de $x_2[n]$ mediante c_k, usamos la propiedad de linealidad de la tabla 3.2 para concluir que

$$a_k = b_k + c_k. \tag{3.111}$$

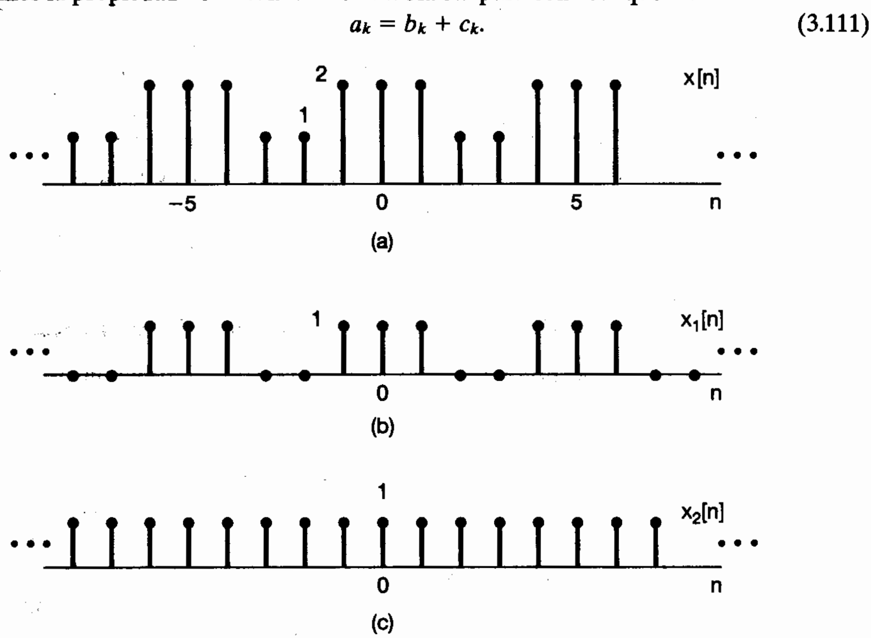


Figura 3.19 (a) Secuencia periódica $x[n]$ para el ejemplo 3.13 y su representación como una suma de (b), la onda cuadrada $x_1[n]$ y (c) la secuencia de cd $x_2[n]$.

Gracias al ejemplo 3.12 (con $N_1 = 1$ y $N = 5$), sabemos que los coeficientes b_k de la serie de Fourier correspondientes a $x_1[n]$ se pueden expresar como

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{5}\dfrac{\text{sen}(3\pi k/5)}{\text{sen}(\pi k/5)}, & \text{para } k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \\ \dfrac{3}{5}, & \text{para } k = 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \end{cases}. \tag{3.112}$$

La secuencia $x_2[n]$ tiene sólo un valor de cd, el cual se determina mediante su coeficiente cero de la serie de Fourier:

$$c_0 = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x_2[n] = 1. \tag{3.113}$$

En vista de que los coeficientes de la serie discreta de Fourier son periódicos, podemos deducir que $c_k = 1$ siempre que k sea un múltiplo entero de 5. Los coeficientes restantes de $x_2[n]$ deben ser cero, ya que $x_2[n]$ contiene sólo una componente de cd. Podemos sustituir ahora las expresiones para b_k y c_k en la ecuación (3.111) para obtener

$$a_k = \begin{cases} b_k = \dfrac{1}{5}\dfrac{\text{sen}(3\pi k/5)}{\text{sen}(\pi k/5)}, & \text{para } k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \\ \dfrac{8}{5}, & \text{para } k = 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \end{cases}. \tag{3.114}$$

Ejemplo 3.14

Suponga que se nos proporcionan los siguientes datos acerca de la secuencia $x[n]$:

1. $x[n]$ es periódica con periodo $N = 6$.
2. $\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2$.
3. $\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x[n] = 1$.
4. Del conjunto de señales que satisfacen las tres condiciones anteriores $x[n]$ tiene la potencia mínima por periodo.

Determinemos la secuencia $x[n]$. Indicamos los coeficientes de la serie de Fourier de $x[n]$ mediante a_k. A partir del punto 2, concluimos que $a_0 = 1/3$. Si observamos que $(-1)^n = e^{-j\pi n} = e^{-j(2\pi/6)3n}$, vemos, gracias al punto 3, que $a_3 = 1/6$. De la relación de Parseval (vea la tabla 3.2), la potencia promedio de $x[n]$ es

$$P = \sum_{k=0}^{5} |a_k|^2. \tag{3.115}$$

Puesto que cada coeficiente diferente de cero aporta una cantidad positiva a P, y en vista de que los valores de a_0 y a_3 se especifican previamente, el valor de P se minimiza al seleccionar $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$. De lo anterior se sigue que

$$x[n] = a_0 + a_3 e^{j\pi n} = (1/3) + (1/6)(-1)^n, \tag{3.116}$$

la cual está dibujada en la figura 3.20.

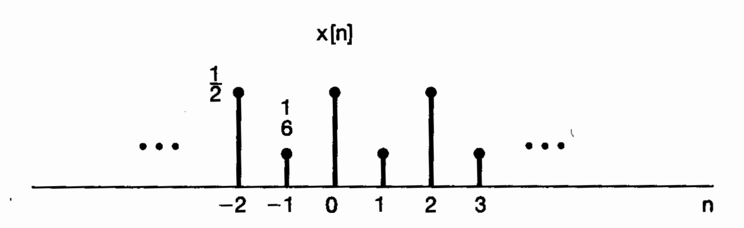


Figura 3.20 Secuencia $x[n]$ que es consistente con las propiedades especificadas en el ejemplo 3.14.

Ejemplo 3.15

En este ejemplo determinamos y dibujamos una secuencia periódica, dada una expresión algebraica de sus coeficientes de la serie de Fourier. En el proceso, también hacemos uso de la propiedad de convolución periódica (véase la tabla 3.2) de la serie discreta de Fourier. En concreto, de acuerdo con lo señalado en la tabla y como se muestra en el problema 3.58, si $x[n]$ y $y[n]$ son periódicas con periodo N, entonces la señal

$$w[n] = \sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r]$$

también es periódica con periodo N. Aquí, la sumatoria se puede tomar sobre cualquier conjunto de N valores consecutivos de r. Más aún, los coeficientes de la serie de Fourier de $w[n]$ son iguales a Na_kb_k, donde a_k y b_k, son los coeficientes de Fourier de $x[n]$ y $y[n]$, respectivamente.

Suponga ahora que se nos dice que una señal $w[n]$ es periódica con periodo fundamental de $N = 7$ y con coeficientes de la serie de Fourier

$$c_k = \frac{\operatorname{sen}^2(3\pi k/7)}{7\operatorname{sen}^2(\pi k/7)}. \tag{3.117}$$

Observamos que $c_k = 7d_k^2$, donde d_k indica la secuencia de los coeficientes de la serie de Fourier de una onda cuadrada $x[n]$, como la del ejemplo 3.12, con $N_1 = 1$ y $N = 7$. Usando la propiedad de convolución, vemos que

$$w[n] = \sum_{r=\langle 7\rangle} x[r]x[n-r] = \sum_{r=-3}^{3} x[r]x[n-r], \tag{3.118}$$

donde en la última igualdad hemos elegido la suma sobre el intervalo $-3 \leq r \leq 3$. Excepto por el hecho de que la suma está limitada a un intervalo finito, el método de producto y suma para evaluar la convolución puede aplicarse aquí. De hecho, podemos convertir la ecuación (3.118) en una convolución ordinaria al definir una señal $\hat{x}[n]$ que es igual a $x[n]$ para $-3 \leq n \leq 3$ y es cero para otro valor. Entonces, de la ecuación (3.118),

$$w[n] = \sum_{r=-3}^{3} \hat{x}[r]x[n-r] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \hat{x}[r]x[n-r].$$

Esto es, $w[n]$ es la convolución aperiódica de las secuencias $\hat{x}[n]$ y $x[n]$.

Las secuencias $x[r]$, $\hat{x}[r]$ y $x[n-r]$ están representadas en la figura 3.21(a)-(c). A partir de la figura podemos calcular $w[n]$ de manera inmediata. En particular, vemos que $w[0] = 3$; $w[-1] = w[1] = 2$; $w[-2] = w[2] = 1$; y $w[-3] = w[3] = 0$. Ya que $w[n]$ es periódica con periodo 7, podemos dibujarla como se muestra en la figura 3.21(d).

3.8 SERIE DE FOURIER Y SISTEMAS LTI

En las secciones anteriores, hemos visto que la representación en serie de Fourier se puede usar para construir cualquier señal periódica discreta y virtualmente todas las señales periódicas continuas de importancia práctica. Además, en la sección 3.2 vimos que la respuesta de un sistema LTI a una combinación lineal de exponenciales complejas toma una forma particularmente sencilla. Específicamente, en el caso continuo, si $x(t) = e^{st}$ es la entrada a un sistema LTI continuo, entonces la salida está dada por $y(t) = H(s)e^{st}$, donde, de la ecuación (3.6),

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau, \tag{3.119}$$

en la cual $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema LTI.

De manera similar, si $x[n] = z^n$ es la entrada a un sistema LTI discreto, entonces la salida está dada por $y[n] = H(z)z^n$, donde de la ecuación (3.10),

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}, \tag{3.120}$$

en la cual $h[n]$ es la respuesta al impulso del sistema LTI.

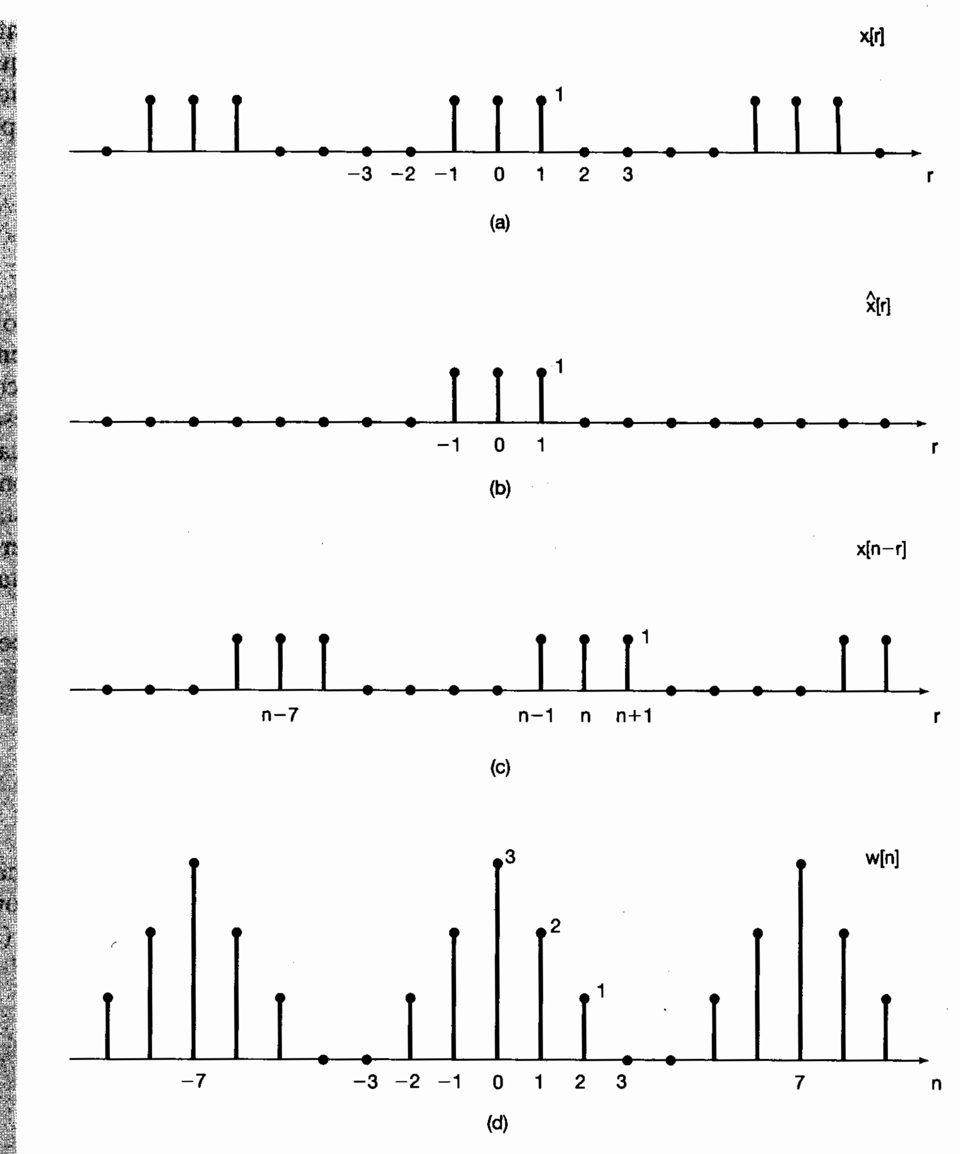


Figura 3.21 (a) La secuencia de onda cuadrada $x[r]$ del ejemplo 3.15; (b) la secuencia $\hat{x}[r]$ igual a $x[r]$ para $-3 \leq r \leq 3$ y cero para otro valor; (c) la secuencia $x[n-r]$; (d) la secuencia $w[n]$ igual a la convolución periódica de $x[n]$ consigo misma y a la convolución aperiódica de $\hat{x}[n]$ con $x[n]$.

Cuando s o z son en general números complejos, $H(s)$ y $H(z)$ se conocen como las *funciones del sistema* de los sistemas correspondientes. Para señales y sistemas continuos, en este capítulo y en el siguiente, nos enfocaremos en el caso específico en el cual $\mathcal{R}e\{s\} = 0$, de modo que $s = j\omega$ y, en consecuencia, e^{st} sea de la forma $e^{j\omega t}$. Esta entrada es una exponencial compleja a la frecuencia ω. La función del sistema de la forma $s = j\omega$ (es decir, $H(j\omega)$ vista como una función de ω) se conoce como la *respuesta en frecuencia* del sistema y está dada por

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{3.121}$$

De manera similar, para señales y sistemas discretos, nos enfocaremos en este capítulo y en el 5 en valores de z para los cuales $|z| = 1$, de manera que $z = e^{j\omega}$ y z^n sea de la forma $e^{j\omega n}$. Entonces la función del sistema $H(z)$ para z restringida a la forma $z = e^{j\omega}$ se conoce como la respuesta en frecuencia del sistema y está dada por

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}. \tag{3.122}$$

La respuesta de un sistema LTI a una señal exponencial compleja de la forma $e^{j\omega t}$ (en el caso continuo) o $e^{j\omega n}$ (en el caso discreto) es particularmente sencilla de expresar en términos de la respuesta en frecuencia del sistema. Además, como un resultado de la propiedad de superposición para sistemas LTI, podemos expresar la respuesta de una señal LTI a una combinación de exponenciales complejas con igual facilidad. En los capítulos 4 y 5 veremos cómo podemos usar estas ideas junto con las transformadas de Fourier continua y de tiempo discreto para analizar la respuesta de los sistema LTI a señales aperiódicas. En el resto de este capítulo, como un primer vistazo a estos importantes conceptos y resultados, nos concentraremos en la interpretación y comprensión de esta noción en el contexto de las señales periódicas.

Considere primero el caso continuo, y sea $x(t)$ una señal periódica cuya representación en serie de Fourier dada por

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}. \tag{3.123}$$

Suponga que aplicamos esta señal como la entrada a un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$. Entonces, ya que cada una de las exponenciales complejas en la ecuación (3.123) es una función propia del sistema, como en la ecuación (3.13) con $s_k = jk\omega_0$, se desprende que la salida es

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 t}. \tag{3.124}$$

Así, $y(t)$ también es periódica con la misma frecuencia fundamental que $x(t)$. Más aún, si $\{a_k\}$ es el conjunto de coeficientes de la serie de Fourier para la entrada $x(t)$, entonces $\{a_k H(jk\omega_0)\}$ es el conjunto de coeficientes para la salida $y(t)$. Esto es, el efecto del sistema LTI es modificar de manera individual cada uno de los coeficientes de Fourier de la entrada mediante la multiplicación por el valor de la respuesta en frecuencia a la frecuencia correspondiente.

Ejemplo 3.16

Suponga que la señal periódica $x(t)$ analizada en el ejemplo 3.2 es la señal de entrada a un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = e^{-t}u(t).$$

Para calcular los coeficientes de la serie de Fourier de la salida $y(t)$, calculamos primero la respuesta en frecuencia:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\tau} e^{-j\omega\tau}\, d\tau \\ &= -\frac{1}{1+j\omega} e^{-\tau} e^{-j\omega\tau}\bigg|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{1+j\omega}. \end{aligned} \tag{3.125}$$

Por tanto, usando las ecuaciones (3.124) y (3.125), junto con el hecho de que $\omega_0 = 2\pi$ en este ejemplo, obtenemos

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{+3} b_k e^{jk2\pi t}, \tag{3.126}$$

con $b_k = a_k H(jk2\pi)$, de modo que

$$\begin{aligned} & b_0 = 1, \\ b_1 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+j2\pi}\right), \qquad b_{-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-j2\pi}\right), \\ b_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+j4\pi}\right), \qquad b_{-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-j4\pi}\right), \\ b_3 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+j6\pi}\right), \qquad b_{-3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-j6\pi}\right). \end{aligned} \tag{3.127}$$

Observe que $y(t)$ debe ser una señal de valor real, ya que es la convolución de $x(t)$ y $h(t)$, las cuales son reales. Esto se puede verificar al examinar la ecuación (3.127) y observando que $b_k^* = b_{-k}$. Por tanto, $y(t)$ también se puede expresar en cualquiera de las formas dadas en las ecuaciones (3.31) y (3.32); esto es,

$$y(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{3} D_k \cos(2\pi kt + \theta_k), \tag{3.128}$$

o

$$y(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{3} [E_k \cos 2\pi kt - F_k \operatorname{sen} 2\pi kt], \tag{3.129}$$

donde

$$b_k = D_k e^{j\theta_k} = E_k + jF_k, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{3.130}$$

Estos coeficientes se pueden evaluar de forma directa a partir de la ecuación (3.127). Por ejemplo,

$$D_1 = |b_1| = \frac{1}{4\sqrt{1+4\pi^2}}, \qquad \theta_1 = \sphericalangle b_1 = -\tan^{-1}(2\pi),$$

$$E_1 = \Re e\{b_1\} = \frac{1}{4(1+4\pi^2)}, \qquad F_1 = \Im m\{b_1\} = -\frac{\pi}{2(1+4\pi^2)}.$$

En el caso discreto, la relación entre los coeficientes de la serie de Fourier de la entrada y la salida de un sistema LTI es exactamente igual a las ecuaciones (3.123) y (3.124). En concreto, sea $x[n]$ una señal periódica cuya representación en serie de Fourier está dada por

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}.$$

Si aplicamos esta señal como la entrada a un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$, entonces, al igual que en la ecuación (3.16) con $z_k = e^{jk(2\pi/N)}$, la salida es

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{j2\pi k/N}) e^{jk(2\pi/N)n}. \tag{3.131}$$

Entonces, $y[n]$ también es periódica con el mismo periodo de $x[n]$, y el $k$ésimo coeficiente de Fourier de $y[n]$ es el producto del $k$ésimo coeficiente de Fourier de la entrada y el valor de la respuesta en frecuencia del sistema LTI, $H(e^{j2\pi k/N})$, a la frecuencia correspondiente.

Ejemplo 3.17

Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n] = \alpha^n u[n]$, $-1 < \alpha < 1$, y con entrada

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right). \tag{3.132}$$

Al igual que en el ejemplo 3.10, $x[n]$ se puede escribir en forma de serie de Fourier como

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi/N)n}.$$

También, de la ecuación (3.122),

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-j\omega}\right)^n. \tag{3.133}$$

Esta serie geométrica se puede evaluar usando el resultado del problema 1.54, lo cual produce

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}. \tag{3.134}$$

Usando la ecuación (3.131), obtenemos entonces la serie de Fourier para la salida:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2} H\left(e^{j2\pi/N}\right) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} H\left(e^{-j2\pi/N}\right) e^{-j(2\pi/N)n} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi/N}}\right) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \alpha e^{j2\pi/N}}\right) e^{-j(2\pi/N)n}. \end{aligned} \tag{3.135}$$

Si escribimos

$$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi/N}} = re^{j\theta},$$

entonces la ecuación (3.135) se reduce a

$$y[n] = r\cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right). \tag{3.136}$$

Por ejemplo, si $N = 4$,

$$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi/4}} = \frac{1}{1 + \alpha j} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} e^{j(-\tan^{-1}(\alpha))},$$

y entonces,

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \cos\left(\frac{\pi n}{2} - \tan^{-1}(\alpha)\right).$$

Podemos observar que, para que expresiones tales como las ecuaciones (3.124) y (3.131) tengan sentido, las respuestas en frecuencia $H(j\omega)$ y $H(e^{j\omega})$ en las ecuaciones (3.121) y (3.122) deben estar bien definidas y ser finitas. Como veremos en los capítulos 4 y 5, éste será el caso si los sistemas LTI bajo estudio son estables. Por ejemplo, el sistema LTI del ejemplo 3.16, cuya respuesta al impulso es $h(t) = e^{-t}u(t)$, es estable y tiene una respuesta en frecuencia bien definida dada por la ecuación (3.125). Por otro lado, el sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = e^{t}u(t)$ es inestable, y es fácil verificar que la integral en la ecuación (3.121) para $H(j\omega)$ difiere para cualquier valor de ω. De manera similar, el sistema LTI del ejemplo 3.17, cuya respuesta al impulso es $h[n] = \alpha^n u[n]$, es estable para $|\alpha| < 1$ y tiene una respuesta en frecuencia dada por la ecuación (3.134). Sin embargo, si $|\alpha| > 1$, el sistema es inestable y la sumatoria en la ecuación (3.133) diverge.

3.9 FILTRADO

En una amplia variedad de aplicaciones, resulta de interés cambiar las amplitudes relativas de las componentes de frecuencia en una señal, o quizás eliminar por completo algunas componentes de frecuencia, proceso conocido como *filtrado*. Los sistemas lineales invariantes en el tiempo que cambian la forma del espectro se conocen como *filtros conformadores de frecuencia*. Los sistemas diseñados para dejar pasar algunas frecuencias esencialmente no distorsionadas y atenuar de manera significativa o eliminar por completo otras se conocen como *filtros selectivos en frecuencia*. Como se indica en las ecuaciones (3.124) y (3.131), los coeficientes de la serie de Fourier de la salida de un sistema LTI son aquellos de la entrada multiplicados por la respuesta en frecuencia del sistema. En consecuencia, el filtrado se puede realizar en forma conveniente mediante el uso de sistema LTI con una respuesta en frecuencia seleccionada adecuadamente, y los métodos en el dominio de la frecuencia proporcionan las herramientas ideales para examinar esta clase tan importante de aplicaciones. En ésta y en las siguientes dos secciones damos un primer vistazo al filtrado mediante algunos ejemplos.

3.9.1 Filtros conformadores de frecuencia

Una aplicación en la cual es fácil encontrar los filtros conformadores de frecuencia es en los sistemas de audio. Por ejemplo, los filtros LTI se incluyen comúnmente en esos sistemas para permitir al oyente modificar las cantidades relativas de energía de baja frecuencia (graves) y energía de alta frecuencia (agudos). Estos filtros corresponden a los sistemas LTI cuya respuesta en frecuencia se puede cambiar manejando los controles de tono. Asimismo, un sistema de audio de alta fidelidad, llamado filtro ecualizador, se incluye a menudo en el preamplificador para compensar las características de respuesta en frecuencia de las bocinas. En conjunto, a estas etapas de filtrado en cascada se les conoce como circuitos ecualizadores para el sistema de audio. La figura 3.22 ilustra las tres etapas de los circuitos ecualizadores para una serie particular de bocinas de audio. En esta figura, la magnitud de la respuesta en frecuencia para cada una de estas etapas se muestra en una gráfica log-log. De manera específica, la magnitud se presenta en unidades de 20 $\log_{10}|H(j\omega)|$ conocidas como decibeles o dB. El eje de frecuencia se denomina en Hertz (es decir, $\omega/2\pi$) a lo largo de la escala logarítmica. Como se analizará con más detalle en la sección 6.2.3, una representación logarítmica de la magnitud de la respuesta en frecuencia en esta forma es muy común y de gran utilidad.

En conjunto, los circuitos ecualizadores de la figura 3.22 están diseñados para compensar la respuesta en frecuencia de las bocinas con la habitación en la que se encuentran y permitir al oyente controlar la respuesta en total frecuencia. En particular, ya que los tres sistemas están conectados en cascada, y puesto que cada sistema modifica una entrada exponencial compleja $Ke^{j\omega t}$ al multiplicarla por la respuesta en frecuencia del sistema a esa frecuencia, se concluye que la respuesta total en frecuencia de la conexión en cascada de los tres sistemas es el producto de las tres respuestas en frecuencia. Los primeros dos filtros, indicados en la figura 3.22(a) y (b), forman la etapa de control del sistema, ya que el comportamiento en frecuencia de estos filtros puede ser ajustado por el oyente. El tercer filtro, mostrado en la figura 3.22(c), es la etapa ecualizadora, la cual tiene la respuesta en frecuencia fija que se indica. El filtro de la figura 3.22(a) es un filtro de baja frecuencia controlado por un interruptor de dos posiciones, para proporcionar una de las dos respuestas en frecuencia indicadas. El segundo filtro en la etapa de control tiene dos interruptores deslizables que se pueden ajustar continuamente para variar la respuesta en frecuencia dentro de los límites indicados en la figura 3.22(b).

Otra clase de filtros conformadores de frecuencia encontrados a menudo son aquellos en los cuales la salida del filtro es la derivada de la entrada al filtro, es decir, $y(t) = dx(t)/dt$. Con una $x(t)$ de la forma $x(t) = e^{j\omega t}$, $y(t)$ será $y(t) = j\omega e^{j\omega t}$, a partir de la cual se concluye que la respuesta en frecuencia es

$$H(j\omega) = j\omega. \tag{3.137}$$

Las características de la respuesta en frecuencia de un filtro diferenciador se muestran en la figura 3.23. Puesto que $H(j\omega)$ es compleja en general, y en este ejemplo en particular, $H(j\omega)$ se presenta a menudo (como en la figura) como las gráficas separadas de $|H(j\omega)|$ y $\sphericalangle H(j\omega)$. La forma de esta respuesta en frecuencia implica que una entrada exponencial compleja $e^{j\omega t}$ recibirá mayor amplificación para valores más grandes de ω. En consecuencia, los filtros diferenciadores se usan para enriquecer variaciones rápidas o transiciones en una señal.

Un propósito para el cual se usan con frecuencia los filtros diferenciadores es para resaltar los bordes en el procesamiento de imágenes. Una imagen en blanco y negro se puede considerar como una señal $x(t_1, t_2)$ "continua" de dos dimensiones , donde t_1 y t_2 son las coordenadas horizontal y vertical respectivamente, y $x(t_1, t_2)$ es la brillantez de la imagen. Si la imagen se repite periódicamente en las direcciones horizontal y vertical, entonces

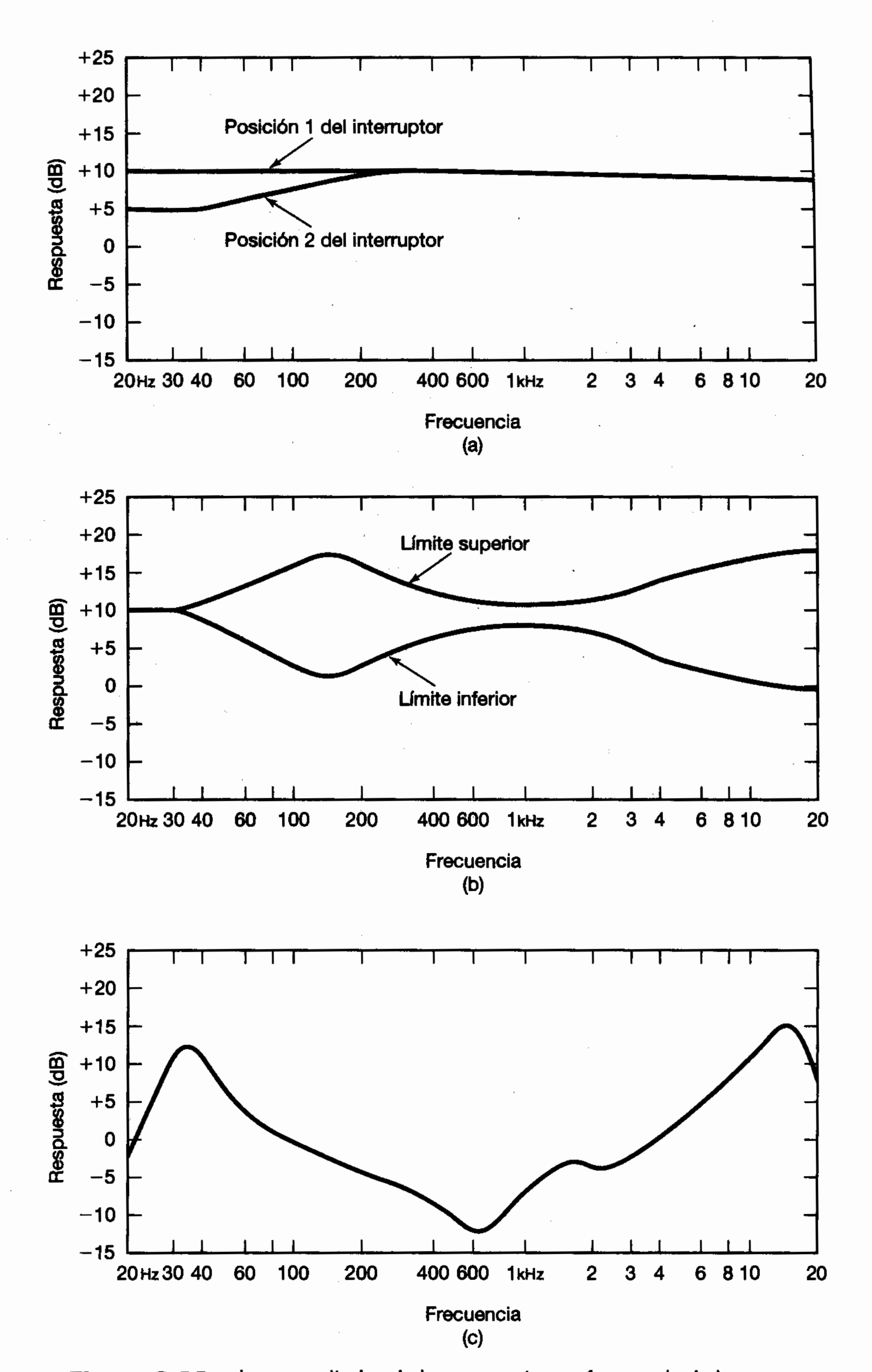


Figura 3.22 Las magnitudes de las respuestas en frecuencia de los circuitos ecualizadores de una serie particular de bocinas de audio, mostradas en una escala de $20 \log_{10}|H(j\omega)|$, la cual se conoce como escala en decibeles (o dB). (a) Filtro de frecuencias bajas controlado mediante un interruptor de dos posiciones; (b) límites de frecuencia superior e inferior en un filtro conformador de ajuste continuo; (c) respuesta en frecuencia fija de la etapa ecualizadora.

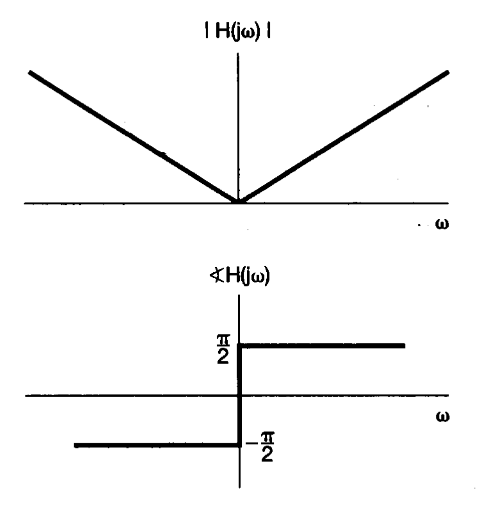


Figura 3.23 Características de la respuesta en frecuencia de un filtro en el cual la salida es la derivada de la entrada.

se puede representar mediante una serie bidimensional de Fourier (véase el problema 3.70) que consiste de sumas de productos de las exponenciales complejas $e^{j\omega_1 t_1}$ y $e^{j\omega_2 t_2}$ que oscilan a frecuencias posiblemente diferentes en cada una de las dos direcciones de las coordenadas. Las variaciones lentas de brillantez en una dirección particular se representan mediante las armónicas más bajas en esa dirección. Por ejemplo, considere el borde correspondiente a una transición abrupta en brillantez que se presenta verticalmente en una imagen. Ya que la brillantez es constante o varía lentamente a lo largo del borde, el contenido de frecuencia del borde en la dirección vertical está concentrado en las frecuencias bajas. En contraste, debido a que hay una variación abrupta de la brillantez a través del borde, el contenido de frecuencia del borde en la dirección horizontal se concentra en frecuencias más altas. La figura 3.24 ilustra el efecto sobre una imagen del equivalente bidimensional de un filtro diferenciador.[11] La figura 3.24(a) muestra dos imágenes originales y la figura 3.24(b) el resultado del procesamiento de esas imágenes con el filtro. Puesto que la derivada en los bordes de una imagen es mayor que en regiones donde la brillantez varía lentamente con la distancia, el efecto del filtro consiste en resaltar los bordes.

Los filtros LTI discretos también tienen una amplia variedad de aplicaciones. Muchas de éstas involucran el uso de sistemas discretos construidos con procesadores digitales de propósito general o especial, para procesar señales continuas, un tema que analizamos más ampliamente en el capítulo 7. Además, el análisis de la información de series de tiempo, incluyendo secuencias de datos demográficos y económicos como el índice promedio del mercado de valores, involucra a menudo el uso de filtros discretos. Con frecuencia, las variaciones de largo plazo (que corresponden a las bajas frecuencias) tienen un significado diferente al de las variaciones en el corto plazo (correspondientes a las altas frecuencias), y resulta útil analizar estas componentes por separado. El conformar nuevamente la ponderación relativa de las componentes se lleva a cabo, por lo general, usando filtros discretos.

Como un ejemplo de un filtro discreto sencillo, considere un sistema LTI que toma sucesivamente un promedio de dos puntos de los siguientes valores de entrada:

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1]). \qquad (3.138)$$

[11]Específicamente cada imagen de la figura 3.24(b) es la magnitud del gradiente bidimensional de su contraparte de la figura 3.24(a) donde el gradiente de $f(x, y)$ se define como

$$\left[\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}.$$



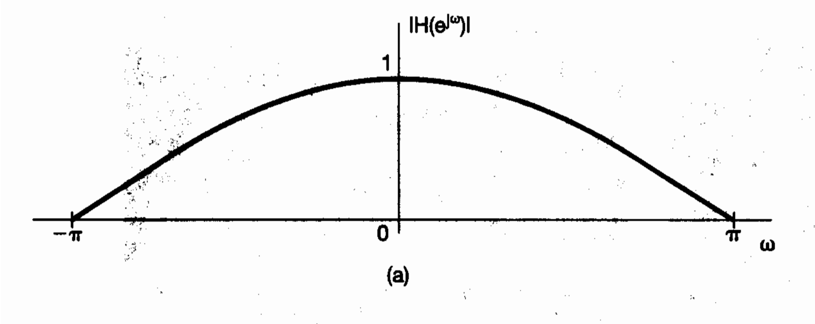
Figura 3.24 Efecto de un filtro diferenciador en una imagen: (a) dos imágenes originales; (b) el resultado del procesamiento de las imágenes originales con un filtro diferenciador.

En este caso, $h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1])$, y gracias a la ecuación (3.122), vemos que la respuesta en frecuencia del sistema es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[1 + e^{-j\omega}] = e^{-j\omega/2}\cos(\omega/2). \tag{3.139}$$

La magnitud de $H(e^{j\omega})$ está graficada en la figura 3.25(a), y $\sphericalangle H(e^{j\omega})$ se muestra en la figura 3.25(b). Como ya se analizó en la sección 1.3.3, las bajas frecuencias para exponenciales complejas discretas ocurren cerca de $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, y las frecuencias altas cerca de $\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Esto resulta del hecho de que $e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n}$, de modo que en el caso discreto necesitamos considerar sólo un intervalo de 2π valores de ω para cubrir un intervalo completo de distintas frecuencias discretas. Como consecuencia, cualquier respuesta en frecuencia discreta $H(e^{j\omega})$ debe ser periódica con periodo 2π, un hecho que se puede deducir de forma directa de la ecuación (3.122).

Para el filtro específico definido en las ecuaciones (3.138) y (3.139), vemos de la figura 3.25(a) que $|H(e^{j\omega})|$ es grande para frecuencias cercanas a $\omega = 0$ y disminuye conforme incrementamos $|\omega|$ hacia π, indicando así que las frecuencias más altas se atenúan más que las más bajas. Por ejemplo, si la entrada a este sistema es constante (es decir, una



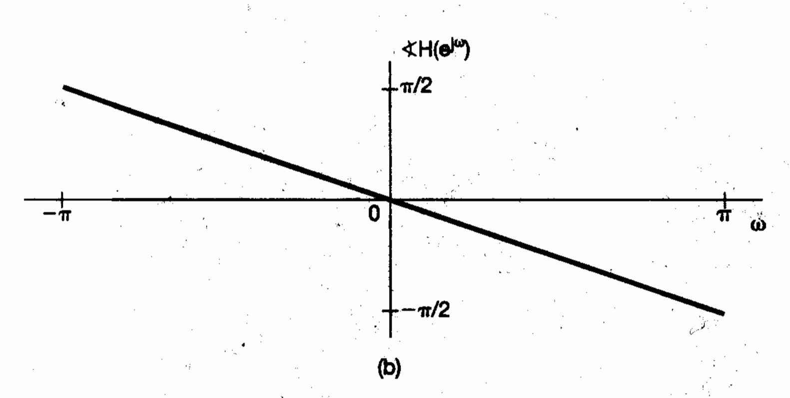


Figura 3.25 (a) Magnitud y (b) fase de la respuesta en frecuencia de un sistema LTI discreto $y[n] = 1/2(x[n] + x[n-1])$.

exponencial compleja de frecuencia cero $x[n] = Ke^{j0\cdot n} = K$) entonces la salida será

$$y[n] = H(e^{j\cdot 0})\, Ke^{j\omega 0\cdot n} = K = x[n].$$

Por otro lado, si la entrada es la señal de alta frecuencia $x[n] = Ke^{j\pi n} = K(-1)^n$, entonces la salida será

$$y[n] = H(e^{j\pi})\, Ke^{j\pi\cdot n} = 0.$$

Así, este sistema separa el valor constante de largo plazo de una señal a partir de sus fluctuaciones de frecuencia y, en consecuencia, representa un primer ejemplo de filtro selectivo en frecuencia, tema que veremos con más calma en la siguiente subsección.

3.9.2 Filtros selectivos en frecuencia

Los filtros selectivos en frecuencia son una clase de filtros específicamente destinados a seleccionar con exactitud o muy aproximadamente algunas bandas de frecuencias y rechazar otras. El uso de filtros selectivos en frecuencia surge en una amplia variedad de situaciones. Por ejemplo, si el ruido en una grabadora de audio está en una banda de frecuencia más alta que la música o la voz en la grabación, se puede eliminar mediante un filtrado selectivo en frecuencia. Otra aplicación importante de filtros selectivos en frecuencia es en sistemas de comunicación. Como veremos en detalle en el capítulo 8, la base para los sistemas de amplitud modulada (AM) es la transmisión de información de muchas fuentes diferentes simultáneas, poniendo la información de cada canal en una banda de frecuencia separada y extrayendo los canales o bandas individuales en el receptor mediante el uso de filtros selectivos en frecuencia. Estos filtros para separar los canales individuales y los filtros conformadores de frecuencia (como el ecualizador

mostrado en la figura 3.22) para el ajuste de la calidad del tono, forman una parte importante de cualquier receptor de radio y televisión domésticos.

Mientras que la selectividad de frecuencia no es el único tema concerniente a las aplicaciones, su gran importancia ha conducido a un conjunto de términos ampliamente aceptados para describir las características de los filtros selectivos en frecuencia. En particular, mientras que la naturaleza de las frecuencias que pasarán por un filtro selectivo en frecuencia varía considerablemente dependiendo de la aplicación, varios tipos de filtros básicos se usan ampliamente y se les han dado nombres para indicar su función. Por ejemplo, un *filtro paso bajas* es aquel que deja pasar bajas frecuencias (es decir, frecuencias alrededor de $\omega = 0$) y atenúa o elimina las frecuencias más altas. Un *filtro paso altas* es aquel que deja pasar las frecuencias altas y atenúa o elimina las bajas, y un *filtro paso banda* es el que deja pasar una banda de frecuencias y atenúa frecuencias tanto más altas como más bajas con respecto a la banda que deja pasar. En cada caso, las *frecuencias de corte* son las frecuencias que definen los límites entre las frecuencias que pasan y las que se eliminan, es decir, las frecuencias en la *banda de paso* y en la *banda de supresión*.

Numerosas preguntas surgen cuando se define y evalúa la calidad de un filtro selectivo en frecuencia. ¿Qué tan efectivo es el filtro al dejar pasar las frecuencias en la banda de paso? ¿Qué tan efectivo es al atenuar frecuencias en la banda de supresión? ¿Qué tan aguda es la transición cerca de la frecuencia de corte, es decir, desde casi libre de distorsión en la banda de paso hasta altamente atenuadas en la banda de supresión? Cada una de estas preguntas involucra una comparación de las características de un filtro real selectivo en frecuencia con las de un filtro con comportamiento idealizado. En forma específica, un *filtro ideal selectivo en frecuencia* es aquel que deja pasar exactamente las exponenciales complejas en un conjunto de frecuencias sin ninguna distorsión, y elimina por completo las señales en las demás frecuencias. Por ejemplo, un *filtro ideal paso bajas* de tiempo continuo con frecuencia de corte ω_c es un sistema LTI que deja pasar las exponenciales complejas $e^{j\omega t}$ para valores de ω en el intervalo de $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$ y elimina señales en las demás frecuencias. Esto es, la respuesta en frecuencia de un filtro ideal paso bajas de tiempo continuo es

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \tag{3.140}$$

como se muestra en la figura 3.26.

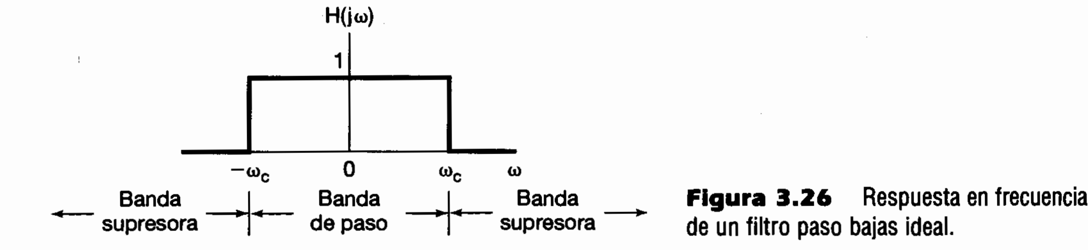


Figura 3.26 Respuesta en frecuencia de un filtro paso bajas ideal.

La figura 3.27(a) representa la respuesta en frecuencia de un filtro ideal paso altas de tiempo continuo con frecuencia de corte ω_c, y la figura 3.27(b) ilustra un filtro ideal paso banda de tiempo continuo con frecuencia de corte inferior ω_{c1} y frecuencia de corte superior ω_{c2}. Observe que cada filtro es simétrico alrededor de $\omega = 0$ y, por tanto, parecería tener dos bandas de paso para los filtros paso altas y paso banda. Ésta es una consecuencia de haber adoptado el uso de la señal exponencial compleja $e^{j\omega t}$, en lugar de las

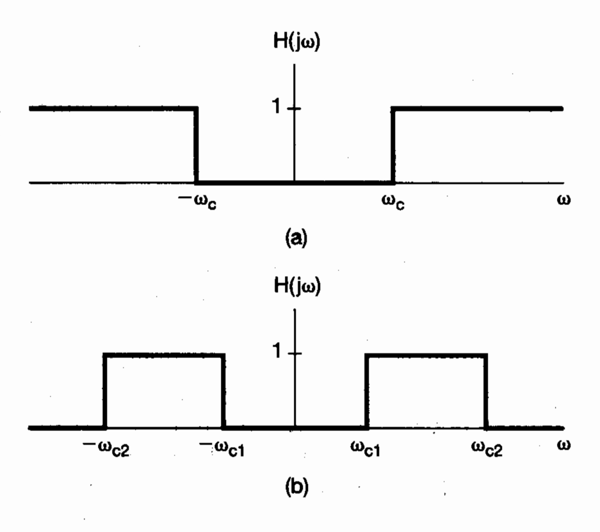
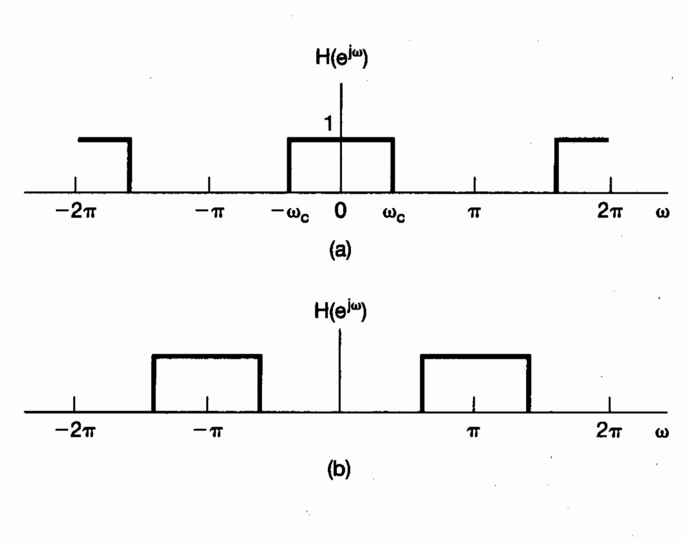


Figura 3.27 (a) Respuesta en frecuencia de un filtro paso altas ideal; (b) respuesta en frecuencia de un filtro paso banda ideal.

señales senoidales sen ωt y cos ωt, a frecuencia ω. Ya que $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t$ y $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t$, ambas exponenciales complejas están compuestas por señales senoidales a la misma frecuencia ω. Por esta razón, es común definir los filtros ideales de manera que tengan el comportamiento de la respuesta a la frecuencia simétrica que se ve en las figuras 3.26 y 3.27.

De una manera similar, podemos definir el conjunto correspondiente de filtros ideales selectivos en frecuencia discretos, cuyas respuestas en frecuencia se ilustran en la figura 3.28. En particular, la figura 3.28(a) representa un filtro ideal paso bajas discreto,



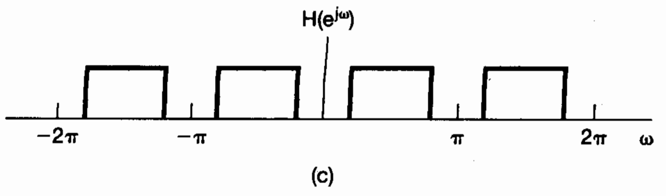


Figura 3.28 Filtros selectivos en frecuencia ideales discretos: (a) paso bajas; (b) paso altas; (c) paso banda.

la figura 3.28(b) es un filtro ideal paso altas y la figura 3.28(c) es un filtro ideal paso banda. Observe que, como se analizó en la sección anterior, las características de los filtros ideales continuos y discretos difieren en virtud del hecho de que, para los filtros discretos, la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ debe ser periódica con periodo 2π, con frecuencias bajas cercanas a múltiplos pares de π y frecuencias altas cercanas a múltiplos impares de π.

Como veremos en muchas ocasiones, los filtros ideales son bastante útiles en la descripción de configuraciones de sistemas idealizados para muchas aplicaciones. Sin embargo, no son realizables en la práctica y sólo se les puede aproximar. Además, aun si se pudieran realizar, algunas características de los filtros ideales podrían hacerlos indeseables para aplicaciones específicas, y de hecho pueden ser preferibles los filtros no ideales.

En detalle, el tema de filtrado comprende muchos aspectos, incluyendo diseño y construcción. Si bien nosotros no profundizaremos en los detalles de las metodologías del diseño de filtros, en el resto de este capítulo y en los siguientes veremos otros ejemplos tanto de filtros continuos como discretos, además de que desarrollaremos los conceptos y técnicas que forman la base de esta disciplina tan importante en ingeniería.

3.10 EJEMPLOS DE FILTROS CONTINUOS DESCRITOS MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES

En muchas aplicaciones, el filtrado selectivo en frecuencia se lleva a cabo mediante el uso de sistemas LTI descritos por ecuaciones lineales con coeficientes constantes diferenciales y de diferencias. Las razones son muchas. Por ejemplo, un gran número de sistemas físicos de los cuales se puede interpretar que realizan operaciones de filtrado son caracterizados por ecuaciones diferenciales y de diferencias. Un buen ejemplo de ello, que examinaremos en el capítulo 6, es el sistema de suspensión de un automóvil, el cual está diseñado en parte para filtrar las sacudidas de alta frecuencia y las irregularidades en la superficie de la carretera. Una segunda razón para el uso de los filtros descritos por ecuaciones diferenciales y de diferencias es que se pueden poner en práctica adecuadamente utilizando circuitos tanto analógicos como digitales. Además, los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales o de diferencias ofrecen una gama extremadamente amplia y flexible de diseños, lo que nos permite, por ejemplo, producir filtros que son casi ideales o que poseen otras características deseables. En ésta y en la siguiente sección, consideramos varios ejemplos que ilustran la construcción de filtros selectivos en frecuencia continuos y discretos mediante el uso de ecuaciones diferenciales y de diferencias. En los capítulos 4 a 6, veremos otros ejemplos de esta clase de filtros y obtendremos nuevos conocimientos sobre las propiedades que los hacen ser de gran utilidad.

3.10.1 Un filtro paso bajas RC sencillo

Los circuitos eléctricos son usados ampliamente en las operaciones de filtrado continuo. Uno de los ejemplos más sencillos lo constituye el circuito RC de primer orden mostrado en la figura 3.29, donde el voltaje de la fuente $v_s(t)$ es la entrada del sistema. Este circuito se puede usar para realizar una operación de filtrado paso bajas o paso altas, dependiendo de qué señal de salida adoptamos. En particular, suponga que consideramos el voltaje del capacitor $v_c(t)$ como la salida. En este caso, el voltaje de salida está relacionado

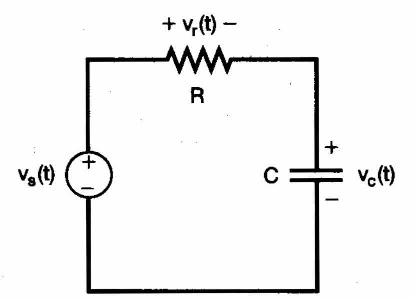


Figura 3.29 Filtro *RC* de primer orden.

con el de entrada a través de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t). \tag{3.141}$$

Si suponemos un reposo inicial, el sistema descrito por la ecuación (3.141) es LTI. Para determinar su respuesta en frecuencia $H(j\omega)$, observamos que, por definición, con el voltaje de entrada $v_s(t) = e^{j\omega t}$, debemos tener el voltaje de salida $v_c(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$. Si sustituimos esta expresión en la ecuación (3.141) obtenemos

$$RC\frac{d}{dt}[H(j\omega)e^{j\omega t}] + H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t}, \tag{3.142}$$

o

$$RC\, j\omega H(j\omega)e^{j\omega t} + H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t}, \tag{3.143}$$

de lo cual se deduce directamente que

$$H(j\omega)e^{j\omega t} = \frac{1}{1 + RC\, j\omega}e^{j\omega t}, \tag{3.144}$$

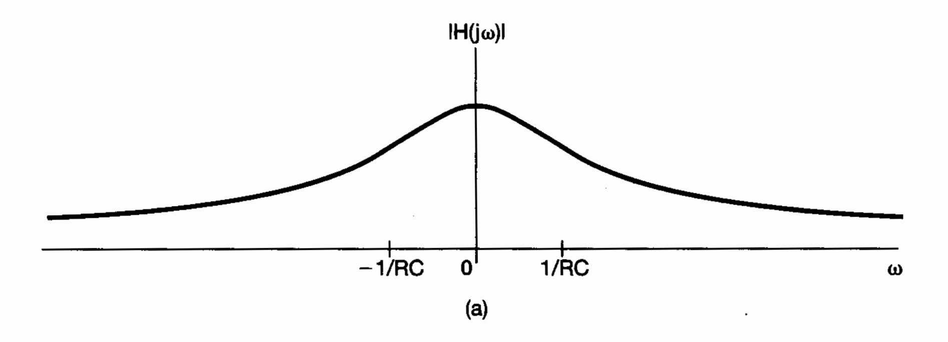
o

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RC\, j\omega}. \tag{3.145}$$

La magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ para este ejemplo se muestran en la figura 3.30. Observe que para frecuencias cercanos a $\omega = 0$, $|H(j\omega)| \approx 1$, mientras que para valores más grandes de ω (positivos o negativos), $|H(j\omega)|$ es considerablemente más pequeña y de hecho disminuye rápidamente conforme $|\omega|$ se incrementa. Por tanto, este sencillo filtro *RC* (con $v_c(t)$ como salida) es un filtro paso bajas no ideal.

Para dar una idea inicial de los compromisos involucrados en el diseño de filtros, consideremos brevemente el comportamiento en el dominio del tiempo del circuito. En particular, la respuesta al impulso del sistema descrito por la ecuación (3.141) es

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t), \tag{3.146}$$



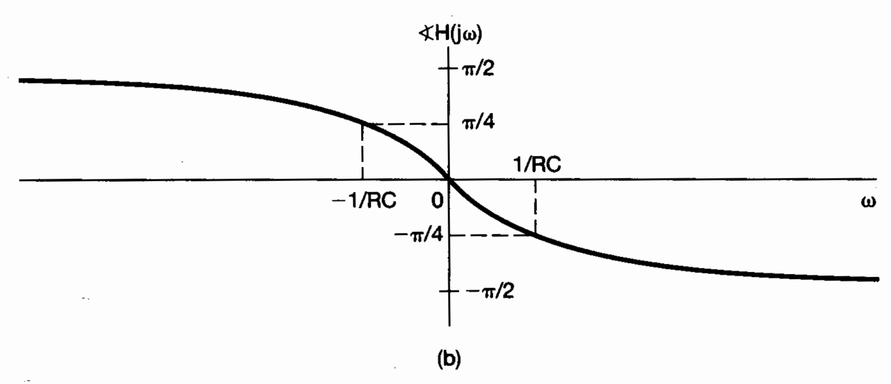


Figura 3.30 Gráficas de (a) magnitud y (b) fase para la respuesta en frecuencia del circuito *RC* de la figura 3.29 con salida $v_c(t)$.

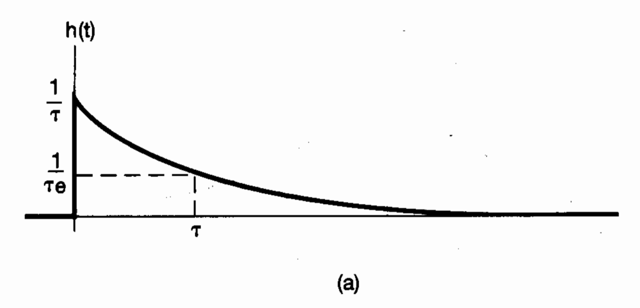
y la respuesta al escalón es

$$s(t) = [1 - e^{-t/RC}]u(t), \tag{3.147}$$

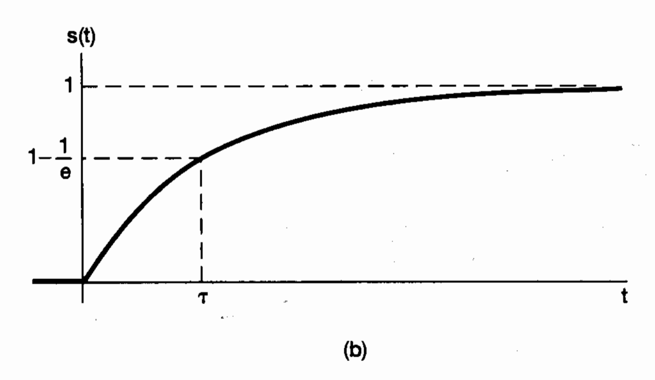
las cuales están graficadas en la figura 3.31 (donde $\tau = RC$). Al comparar las figuras 3.30 y 3.31, vemos un compromiso fundamental. En concreto, suponga que nos gustaría que nuestro filtro dejara pasar sólo frecuencias muy bajas. De la figura 3.30(a), esto implica que $1/RC$ debe ser pequeño, o de manera equivalente, que RC es muy grande, de modo que las frecuencias diferentes a las que nos interesan serán atenuadas lo suficiente. Sin embargo, observando la figura 3.31(b), vemos que si RC es grande, entonces a la respuesta al escalón le tomará un tiempo considerable alcanzar su valor final de 1. Esto es, el sistema responde lentamente a la entrada escalón. Por el contrario, si deseamos tener una respuesta más rápida, necesitamos un valor más pequeño de RC, lo cual a su vez implica que el filtro dejará pasar frecuencias más altas. Este tipo de compromiso entre el comportamiento en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo es típico de los problemas que surgen al diseñar y analizar sistemas y filtros LTI, y constituye un tema que veremos con más detalle en el capítulo 6.

3.10.2 Un filtro paso altas RC sencillo

Como una alternativa para seleccionar el voltaje del capacitor como la salida de nuestro circuito RC, podemos escoger el voltaje a través del resistor. En este caso, la ecuación



(a)



(b)

Figura 3.31 (a) Respuesta al impulso del filtro paso bajas *RC* de primer orden con $\tau = RC$; (b) respuesta al escalón del filtro paso bajas *RC* con $\tau = RC$.

diferencial que relaciona la entrada con la salida es

$$RC\frac{dv_r(t)}{dt} + v_r(t) = RC\frac{dv_s(t)}{dt}. \tag{3.148}$$

Podemos determinar la respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ de este sistema en igual forma a como lo hicimos en el caso anterior: si $v_s(t) = e^{j\omega t}$, entonces debemos tener $v_r(t) = G(j\omega)e^{j\omega t}$; sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.148) y realizando un poco de álgebra, encontramos que

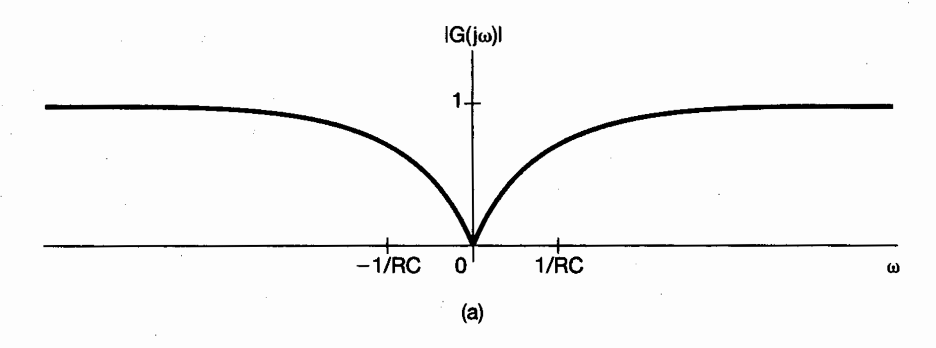
$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}. \tag{3.149}$$

La magnitud y la fase de esta respuesta en frecuencia se muestran en la figura 3.32. De la figura, vemos que el sistema atenúa las frecuencias bajas y deja pasar las frecuencias más altas (es decir, aquellas para las cuales $|\omega| \gg 1/RC$) con una atenuación mínima. Esto es, el sistema actúa como un filtro paso altas no ideal.

Al igual que con el filtro paso bajas, los parámetros del circuito controlan tanto la respuesta en frecuencia del filtro paso altas como sus características de respuesta en el tiempo. Por ejemplo, considere la respuesta al escalón para el filtro. En la figura 3.29 vemos que $v_r(t) = v_s(t) - v_c(t)$. De este modo, si $v_s(t) = u(t)$, $v_c(t)$ debe estar dada por la ecuación (3.147). En consecuencia, la respuesta al escalón del filtro paso altas es

$$v_r(t) = e^{-t/RC}u(t), \tag{3.150}$$

la cual está representada en la figura 3.33. En consecuencia, conforme *RC* se incrementa, la respuesta se vuelve más lenta, es decir, la respuesta al escalón toma un tiempo más largo en alcanzar su valor final de cero. De la figura 3.32 se desprende que al incrementarse *RC*



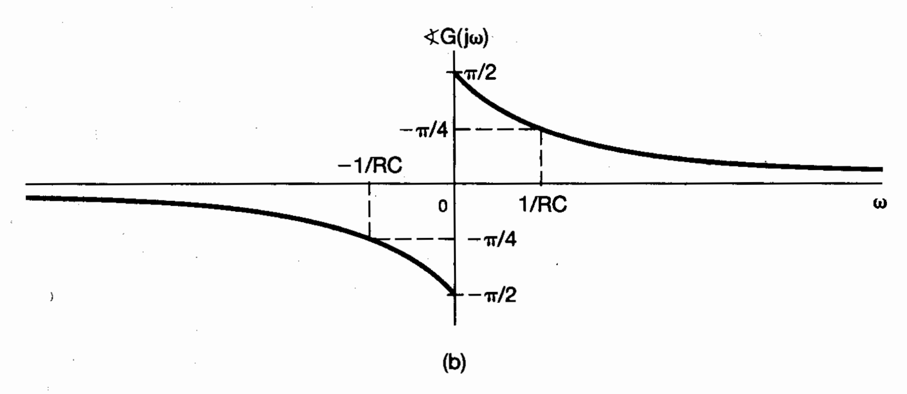


Figura 3.32 Gráficas de (a) magnitud y (b) fase de la respuesta en frecuencia del circuito *RC* de la figura 3.29 con salida $v_r(t)$.

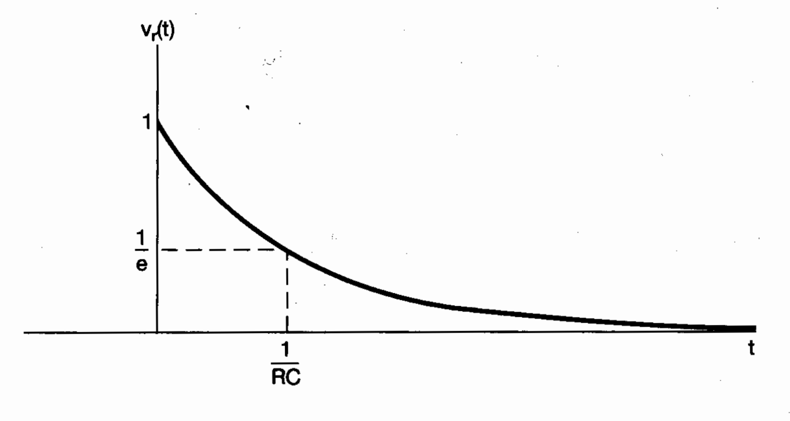


Figura 3.33 Respuesta al escalón del filtro paso altas *RC* de primer orden con $\tau = RC$.

(o, de manera equivalente, al disminuir $1/RC$) también se afecta la respuesta en frecuencia; en concreto, extiende la banda de paso hacia frecuencias más bajas.

Observamos de los dos ejemplos en esta sección, que un circuito *RC* sencillo puede servir como una aproximación burda a un filtro paso altas o a uno paso bajas, dependiendo de la selección de la variable física de salida. Como se ilustra en el problema 3.71, un simple sistema mecánico que usa una masa y un amortiguador mecánico también puede servir como un filtro paso bajas o paso altas descrito mediante ecuaciones diferenciales análogas de primer orden. Debido a su simplicidad, estos ejemplos de filtros eléctricos y mecánicos no tienen una transición aguda de la banda de paso a la banda de

supresión y, de hecho, sólo tienen un parámetro (RC en el caso eléctrico) que controla tanto la respuesta en frecuencia como el comportamiento de la respuesta del sistema en el tiempo. En el diseño de filtros más complejos, construidos con más elementos que almacenan energía (capacitancias e inductancias en filtros eléctricos, y dispositivos de resortes y amortiguadores en los filtros mecánicos), obtenemos filtros descritos por ecuaciones diferenciales de mayor orden. Estos filtros ofrecen mucha más flexibilidad en términos de sus características, lo cual permite, por ejemplo, transiciones más agudas de la banda de paso a la banda de supresión, o más control sobre los compromisos entre respuesta en el tiempo y respuesta en la frecuencia.

3.11 EJEMPLOS DE FILTROS DISCRETOS DESCRITOS MEDIANTE ECUACIONES DE DIFERENCIAS

Al igual que sus contrapartes continuas, los filtros discretos descritos por ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes son de considerable importancia en la práctica. En realidad, ya que se pueden construir con eficiencia en sistemas digitales especiales o de propósito general, los filtros descritos por ecuaciones de diferencias son ampliamente usados en la práctica. Como en casi todos los aspectos del análisis de señales y sistemas, cuando examinamos los filtros discretos descritos mediante ecuaciones de diferencias, encontramos muchas similitudes e importantes diferencias con respecto al caso continuo. En particular, los sistemas LTI discretos descritos por ecuaciones de diferencias pueden ser recursivos y tener respuestas al impulso de duración infinita (sistemas IIR) o ser no recursivos y tener respuesta al impulso de duración finita (sistemas FIR). Los primeros son la contraparte directa de los sistemas continuos descritos por ecuaciones diferenciales mostrados en la sección anterior, mientras que los segundos también son de importancia considerable en sistemas digitales. Estas dos clases tienen distintas ventajas y desventajas en términos de facilidad de construcción y en términos del orden del filtro o de su complejidad para lograr los objetivos particulares de diseño. En esta sección nos limitamos a algunos ejemplos sencillos de filtros recursivos y no recursivos, mientras que en los capítulos 5 y 6 desarrollamos conocimientos y herramientas adicionales que nos permiten analizar y entender las propiedades de estos sistemas con más detalle.

3.11.1 Filtros recursivos discretos de primer orden

La contraparte discreta de cada uno de los filtros examinados en la sección 3.10 es el sistema LTI descrito por la ecuación de diferencias de primer orden

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]. \tag{3.151}$$

A partir de la propiedad de funciones propias de las señales exponenciales complejas, sabemos que si $x[n] = e^{j\omega n}$, entonces $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$, donde $H(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia del sistema. Sustituyendo en la ecuación (3.151), obtenemos

$$H(e^{j\omega})e^{j\omega n} - aH(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)} = e^{j\omega n}, \tag{3.152}$$

o

$$[1 - ae^{-j\omega}]H(e^{j\omega})e^{j\omega n} = e^{j\omega n}, \tag{3.153}$$

de modo que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \tag{3.154}$$

La magnitud y la fase de $H(e^{j\omega})$ se muestran en la figura 3.34(a) para $a = 0.6$ y en la figura 3.34(b) para $a = -0.6$. Observamos que, para el valor positivo de a, la ecuación de diferencias (3.151) se comporta como un filtro paso bajas con atenuación mínima a frecuencias bajas cerca de $\omega = 0$ y aumentando la atenuación conforme ω se incrementa a π. Para el valor negativo de a, el sistema es un filtro paso altas que deja pasar frecuencias cerca de $\omega = \pi$ y atenúa las frecuencias bajas. De hecho, para cualquier valor positivo de $a < 1$, el sistema se aproxima a un filtro paso bajas, y para cualquier valor negativo de $a > -1$, el sistema se aproxima a un filtro paso altas, donde $|a|$ controla el tamaño de la banda de paso, con bandas de paso más amplias conforme $|a|$ se incrementa.

Al igual que con los ejemplos continuos, de nuevo tenemos un compromiso entre las características del dominio del tiempo y del dominio de la frecuencia. En particular, la respuesta al impulso del sistema descrito por la ecuación (3.151) es

$$h[n] = a^n u[n]. \tag{3.155}$$

La respuesta al escalón $s[n] = u[n] * h[n]$ es

$$s[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n]. \tag{3.156}$$

A partir de estas expresiones, vemos que $|a|$ también controla la velocidad con la cual las respuestas al impulso y al escalón se aproximan a sus valores a largo plazo, con respuestas más rápidas, para valores más pequeños de $|a|$ y, por tanto, para filtros con bandas de paso más pequeñas. Al igual que con las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones de diferencias recursivas de mayor orden se pueden usar para proporcionar características más agudas de los filtros y proporcionar mayor flexibilidad al balancear las limitantes del dominio del tiempo y de la frecuencia.

Finalmente, observe, con base en la ecuación (3.155), que el sistema descrito por la ecuación (3.151) es inestable si $|a| \geq 1$ y de este modo no tiene una respuesta finita a entradas exponenciales complejas. Como señalamos anteriormente, los métodos basados en series de Fourier y el análisis en el dominio de la frecuencia se enfocan en sistemas con respuestas finitas a exponenciales complejas; por tanto, para ejemplos como los de la ecuación (3.151), nos limitamos a sistemas estables.

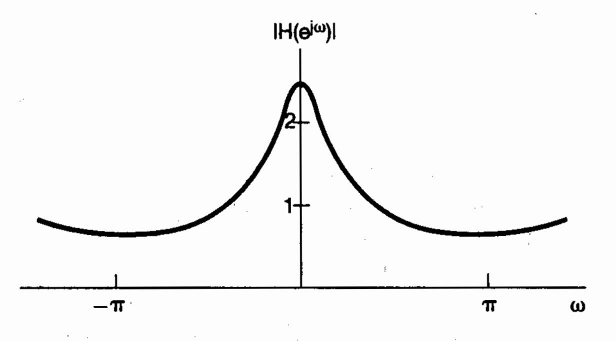
3.11.2 Filtros no recursivos discretos

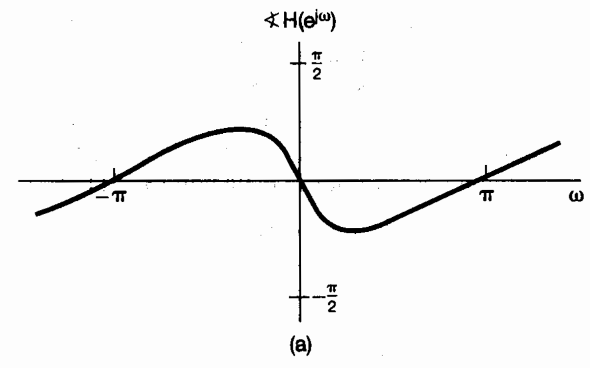
La forma general de una ecuación de diferencias no recursiva FIR es

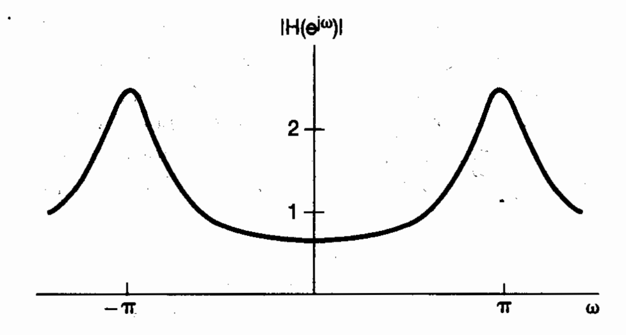
$$y[n] = \sum_{k=-N}^{M} b_k x[n-k]. \tag{3.157}$$

Esto es, la salida $y[n]$ es un *promedio ponderado* de los valores $(N + M + 1)$ de $x[n]$ desde $x[n - M]$ hasta $x[n + N]$, con los pesos dados por los coeficientes b_k. Los sistemas de esta forma se pueden usar para alcanzar los objetivos de una amplia clase de filtros, incluyendo los filtros selectivos en frecuencia.

Un ejemplo utilizado a menudo de estos filtros es un *filtro de promedios móviles*, donde la salida $y[n]$ para cualquier n, digamos n_0, es un promedio de valores de $x[n]$ en la







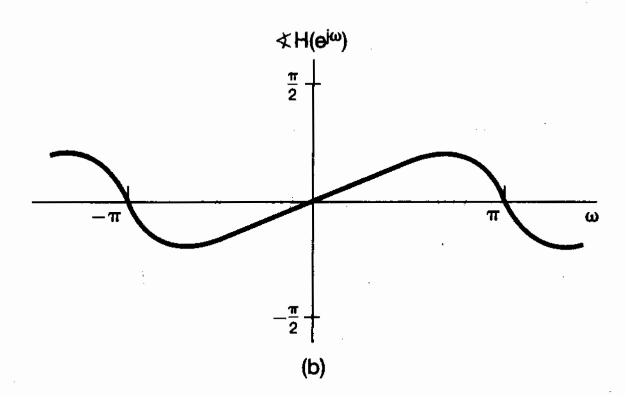


Figura 3.34 Respuesta en frecuencia del filtro recursivo de primer orden discreto de la ecuación (3.151): (a) $a = 0.6$; (b) $a = -0.6$.

vecindad de n_0. La idea básica es que al promediar los valores de forma local, las componentes rápidas de alta frecuencia de la entrada serán promediadas y las variaciones más lentas de frecuencia serán mantenidas, lo cual corresponde a suavizar o filtrar en paso bajas la secuencia original. Un filtro simple de promedio móvil de dos puntos se describió brevemente en la sección 3.9 [ecuación (3.138)]. Un ejemplo ligeramente más complejo es el filtro de promedio móvil de tres puntos, el cual tiene la forma

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n-1] + x[n] + x[n+1]), \tag{3.158}$$

de modo que cada salida $y[n]$ sea el promedio de tres valores consecutivos de entrada. En este caso,

$$h[n] = \frac{1}{3}[\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]]$$

y, por tanto, de la ecuación (3.122), la respuesta en frecuencia correspondiente es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}[e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}] = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\omega). \tag{3.159}$$

La magnitud $H(e^{j\omega})$ está graficada en la figura 3.35. Observamos que el filtro tiene las características generales de un filtro paso bajas aunque, al igual que los filtros recursivos de primer orden, no presenta transiciones agudas de la banda de paso a la banda de supresión.

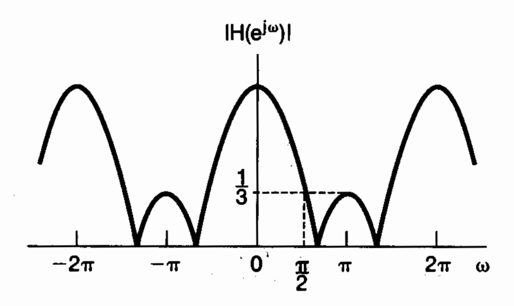


Figura 3.35 Magnitud de la respuesta en frecuencia de un filtro paso bajas de promedio móvil de tres puntos.

El filtro de promedio móvil de tres puntos de la ecuación (3.158) no tiene parámetros que se puedan cambiar para ajustar la frecuencia de corte efectiva. Como una generalización de este filtro de promedio móvil, podemos considerar hacer el promedio sobre $N + M + 1$ puntos vecinos, esto es, usando una ecuación de diferencias de la forma

$$y[n] = \frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M} x[n-k]. \tag{3.160}$$

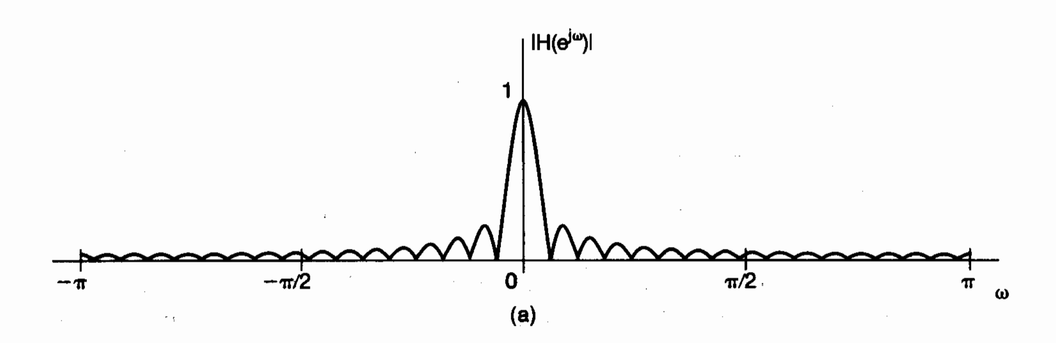
La respuesta al impulso correspondiente es un pulso rectangular (es decir, $h[n] = 1/(N + M + 1)$ para $-N \le n \le M$ y $h[n] = 0$ para otro valor). La respuesta en frecuencia del filtro es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M} e^{-j\omega k}. \tag{3.161}$$

La sumatoria de la ecuación (3.161) se puede evaluar llevando a cabo los cálculos de forma similar a los del ejemplo 3.12, lo que produce

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N + M + 1} e^{j\omega[(N-M)/2]} \frac{\text{sen}[\omega(M + N + 1)/2]}{\text{sen}(\omega/2)}. \tag{3.162}$$

Ajustando el tamaño, $N + M + 1$, de la ventana de promediación podemos variar la frecuencia de corte. Por ejemplo, la magnitud $H(e^{j\omega})$ se muestra en la figura 3.36 para $M + N + 1 = 33$ y para $M + N + 1 = 65$.



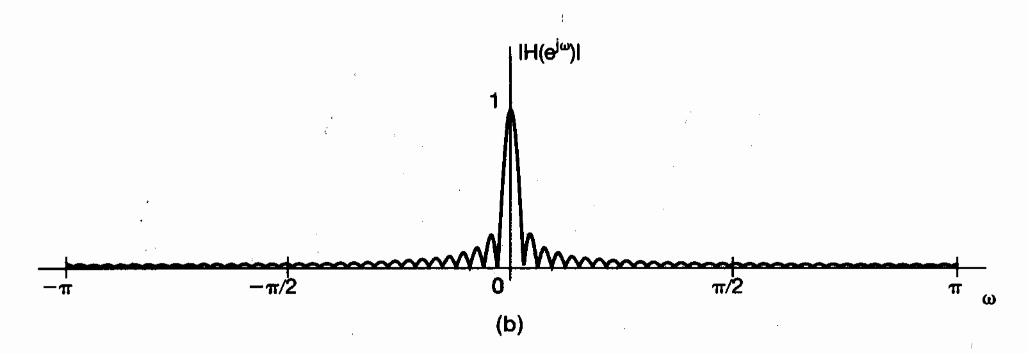


Figura 3.36 Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro de promedio móvil paso bajas de la ecuación (3.162): (a) $M = N = 16$; (b) $M = N = 32$.

Los filtros no recursivos se pueden usar para realizar operaciones de filtrado paso altas. Para ilustrar esto, de nuevo con un sencillo ejemplo, considere la ecuación de diferencias

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2}. \tag{3.163}$$

Para las señales de entrada que son aproximadamente constantes, el valor de $y[n]$ es cercano a cero. Para señales de entrada que varían bastante de una muestra a otra, se puede esperar que los valores de $y[n]$ tengan magnitudes más grandes. Así, el sistema descrito por la ecuación (3.163) se aproxima a una operación de filtrado paso altas, atenuando las

componentes de baja frecuencia que varían lentamente y dejando pasar con poca atenuación las componentes de más alta frecuencia que varían rápidamente. Para observar esto con mayor precisión necesitamos ver la respuesta en frecuencia del sistema. En este caso, $h[n] = \frac{1}{2}\{\delta[n] - \delta[n-1]\}$, de manera que la aplicación directa de la ecuación (3.122) conduce a

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[1 - e^{-j\omega}] = je^{j\omega/2}\,\mathrm{sen}(\omega/2). \tag{3.164}$$

En la figura 3.37 hemos graficado la magnitud de $H(e^{j\omega})$, mostrando que este sistema se aproxima a un filtro paso altas, aunque a uno con una transición muy gradual de la banda de paso a la banda de supresión. Al considerar los filtros no recursivos más generales podemos lograr transiciones mucho más abruptas en filtros paso bajas, paso altas y otros filtros selectivos en frecuencia.

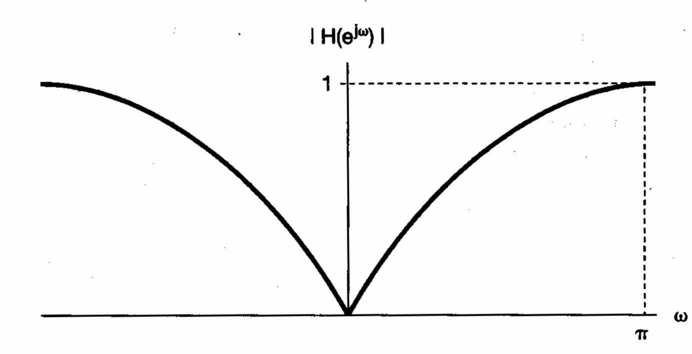


Figura 3.37 Respuesta en frecuencia de un filtro paso altas sencillo.

Observe que, en vista de que la respuesta al impulso de cualquier sistema FIR es de longitud finita [es decir, de la ecuación (3.157), $h[n] = b_n$ para $-N \leq n \leq M$ y 0 para otro valor], es siempre absolutamente sumable para cualquier selección de b_n. Por consiguiente, todos los filtros son estables. Asimismo, si $N > 0$ en la ecuación (3.157), el sistema es no causal, puesto que $y[n]$ depende de valores futuros de la entrada. En algunas aplicaciones, como las que involucran el procesamiento de señales grabadas con anterioridad, la causalidad no necesariamente es una limitante, y entonces podemos usar con confianza los filtros con $N > 0$. En otras aplicaciones, como las que involucran el procesamiento en tiempo real, la causalidad es esencial y en esos casos debemos tomar $N \leq 0$.

3.12 RESUMEN

En este capítulo hemos presentado y desarrollado las representaciones en serie de Fourier tanto continua como discreta y las hemos usado en principio en una de las aplicaciones más importantes de los métodos de análisis de señales y sistemas, esto es, el filtrado. En particular, como se analizó en la sección 3.2, una de las principales motivaciones para el uso de la serie de Fourier es el hecho de que las señales exponenciales complejas son funciones propias de los sistema LTI. También hemos visto, en las secciones 3.3 a 3.7, que cualquier señal periódica de interés práctico se puede representar en una serie de Fourier, es decir, como una suma ponderada de exponenciales complejas relacionadas

armónicamente que comparten un periodo común con la señal que está siendo representada. Además, hemos visto que la representación en serie de Fourier tiene varias propiedades importantes, las cuales describen cómo las diferentes características de las señales se reflejan en sus coeficientes de las series de Fourier.

Una de las propiedades más importantes de las series de Fourier es una consecuencia directa de la propiedad de función propia de las exponenciales complejas. Específicamente, si una señal periódica se aplica a un sistema LTI, entonces la salida será periódica con el mismo periodo y cada uno de los coeficientes de Fourier de la salida corresponde al coeficiente de Fourier de la entrada multiplicado por un número complejo cuyo valor es una función de la frecuencia que corresponde a ese coeficiente de Fourier. Esta función de la frecuencia es característica de los sistemas LTI y se conoce como la respuesta en frecuencia del sistema. El examinar esta respuesta nos condujo directamente a la idea de filtrado de señales usando los sistema LTI, un concepto que tiene numerosas aplicaciones, incluyendo varias de las que hemos descrito. Una clase importante de aplicaciones involucra la noción de filtrado selectivo en frecuencia (es decir, la idea de usar un sistema LTI para dejar pasar determinadas bandas específicas de frecuencias y suprimir o atenuar significativamente otras). Introdujimos el concepto de filtros ideales selectivos en frecuencia y dimos varios ejemplos de éstos descritos mediante ecuaciones lineales con coeficientes constantes diferenciales y de diferencias.

El propósito de este capítulo ha sido iniciar el proceso de desarrollo tanto de las herramientas del análisis de Fourier como de la apreciación de la utilidad de estas herramientas en diversas aplicaciones. En los siguientes capítulos, continuaremos con este orden cuando desarrollemos las representaciones de la transformada de Fourier para señales aperiódicas continuas y discretas, además de que haremos hincapié no sólo en el filtrado, sino en otras importantes aplicaciones de los métodos de Fourier.

Capítulo 3 Problemas

La primera sección de problemas corresponde a la categoría básica y las respuestas se proporcionan al final del libro. Las tres secciones restantes contienen problemas que corresponden a las categorías básica, avanzada y de extensión, respectivamente.

PROBLEMAS BÁSICOS CON RESPUESTAS

3.1. Una señal periódica continua $x(t)$ es de valor real y tiene un periodo fundamental de $T = 8$. Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero para $x(t)$ son

$$a_1 = a_{-1} = 2, a_3 = a^*_{-3} = 4j.$$

Exprese $x(t)$ en la forma

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k).$$

3.2. Una señal periódica discreta $x[n]$ es de valor real y tiene un periodo fundamental de $N = 5$. Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero para $x[n]$ son

$$a_0 = 1, a_2 = a^*_{-2} = e^{j\pi/4}, a_4 = a^*_{-4} = 2e^{j\pi/3}.$$

Exprese $x[n]$ en la forma

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen}(\omega_k n + \phi_k).$$

3.3. Para la señal periódica continua

$$x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}t\right),$$

determine la frecuencia fundamental ω_0 y los coeficientes de la serie de Fourier a_k tales que

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.$$

3.4. Use la ecuación de análisis de la serie de Fourier (3.39) para calcular los coeficientes a_k para la señal periódica continua

$$x(t) = \begin{cases} 1.5, & 0 \le t < 1 \\ -1.5, & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

con frecuencia fundamental $\omega_0 = \pi$.

3.5. Sea $x_1(t)$ una señal periódica continua con una frecuencia fundamental ω_1 y coeficientes de Fourier a_k. Dado que

$$x_2(t) = x_1(1 - t) + x_1(t - 1),$$

¿cómo se relaciona la frecuencia fundamental ω_2 de $x_2(t)$ con ω_1? Encuentre también una relación entre los coeficientes de la serie de Fourier b_k de $x_2(t)$ y los coeficientes a_k. Puede usar las propiedades mostradas en la tabla 3.1.

3.6. Considere tres señales periódicas continuas cuyas representaciones en serie de Fourier sean como sigue:

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{jk\frac{2\pi}{50}t},$$

$$x_2(t) = \sum_{k=-100}^{100} \cos(k\pi) e^{jk\frac{2\pi}{50}t},$$

$$x_3(t) = \sum_{k=-100}^{100} j \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{jk\frac{2\pi}{50}t}.$$

Use las propiedades de la serie de Fourier para poder contestar las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuál(es) de las tres señales es/son de valor real?

(b) ¿Cuál(es) de las tres señales es/son par?

3.7. Suponga que la señal periódica $x(t)$ tiene periodo fundamental T y coeficientes de Fourier a_k. En diversas situaciones, es más fácil calcular los coeficientes de la serie

de Fourier b_k para $g(t) = dx(t)/dt$ en lugar de calcular a_k directamente. Dado que

$$\int_{T}^{2T} x(t)\, dt = 2,$$

encuentre una expresión para a_k en términos de b_k y T. Puede usar cualquiera de las propiedades mostradas en la tabla 3.1.

3.8. Suponga que se nos proporciona la siguiente información acerca de la señal $x(t)$:

1. $x(t)$ es real y par.
2. $x(t)$ es periódica con periodo $T = 2$ y tiene coeficientes de Fourier a_k.
3. $a_k = 0$ para $|k| > 1$.
4. $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$.

Especifique dos señales diferentes que satisfagan estas condiciones.

3.9. Use la ecuación de análisis (3.95) para evaluar los valores numéricos de un periodo de los coeficientes de la serie de Fourier de la señal periódica

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{4\delta[n - 4m] + 8\delta[n - 1 - 4m]\}.$$

3.10. Sea $x[n]$ una señal periódica real e impar con periodo $N = 7$ y coeficientes de Fourier a_k. Dadas

$$a_{15} = j, a_{16} = 2j, a_{17} = 3j,$$

determine los valores de a_0, a_{-1}, a_{-2} y a_{-3}.

3.11. Suponga que nos dan la siguiente información acerca de la señal $x[n]$:

1. $x[n]$ es una señal real y par.
2. $x[n]$ tiene periodo $N = 10$ y coeficientes de Fourier a_k.
3. $a_{11} = 5$.
4. $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2 = 50$.

Demuestre que $x[n] = A\cos(Bn + C)$, y especifique los valores numéricos de las constantes A, B y C.

3.12. Cada una de las dos secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$ tiene un periodo $N = 4$, y los correspondientes coeficientes de la serie de Fourier están especificados como

$$x_1[n] \longleftrightarrow a_k, \quad x_2[n] \longleftrightarrow b_k,$$

donde

$$a_0 = a_3 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_2 = 1 \quad \text{y} \quad b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 1.$$

Usando la propiedad de multiplicación de la tabla 3.1, determine los coeficientes de la serie de Fourier c_k para la señal $g[n] = x_1[n]\, x_2[n]$.

3.13. Considere un sistema LTI de tiempo continuo cuya respuesta en frecuencia es

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt = \frac{\operatorname{sen}(4\omega)}{\omega}.$$

Si la entrada a este sistema es una señal periódica

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 \\ -1, & 4 \le t < 8 \end{cases}$$

con periodo $T = 8$, determine la salida correspondiente del sistema $y(t)$.

3.14. Cuando el tren de impulsos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 4k]$$

es la entrada a un sistema LTI particular con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$, se encuentra que la salida del sistema es

$$y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right).$$

Determine los valores de $H(e^{jk\pi/2})$ para $k = 0, 1, 2$ y 3.

3.15. Considere un filtro S paso bajas ideal cuya respuesta en frecuencia es

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le 100 \\ 0, & |\omega| > 100 \end{cases}.$$

Cuando la entrada a este filtro es una señal $x(t)$ con periodo fundamental $T = \pi/6$ y coeficientes de la serie de Fourier a_k, se encuentra que

$$x(t) \xrightarrow{S} y(t) = x(t).$$

¿Para qué valores de k se garantiza que $a_k = 0$?

3.16. Determine la salida del filtro mostrado en la figura P3.16 para las siguientes entradas periódicas:

(a) $x_1[n] = (-1)^n$
(b) $x_2[n] = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right)$
(c) $x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4k}u[n - 4k]$

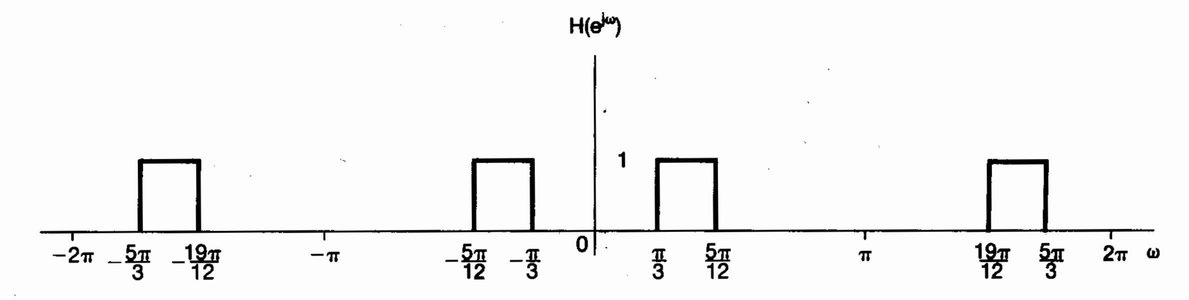


Figura P3.16

3.17. Considere tres sistemas de tiempo continuo S_1, S_2 y S_3 cuyas respuestas a una entrada exponencial compleja e^{j5t} están especificadas como

$$S_1: e^{j5t} \rightarrow te^{j5t},$$
$$S_2: e^{j5t} \rightarrow e^{j5(t-1)},$$
$$S_3: e^{j5t} \rightarrow \cos(5t).$$

Para cada sistema, determine si la información proporcionada es suficiente para concluir que el sistema definitivamente *no* es LTI.

3.18. Considere tres sistemas discretos S_1, S_2 y S_3 cuyas respectivas respuestas a una entrada exponencial compleja $e^{j\pi/2n}$ están especificadas como

$$S_1: e^{j\pi n/2} \rightarrow e^{j\pi n/2}u[n],$$
$$S_2: e^{j\pi n/2} \rightarrow e^{j3\pi n/2},$$
$$S_3: e^{j\pi n/2} \rightarrow 2e^{j5\pi n/2}.$$

Para cada sistema, determine si la información dada es suficiente para concluir que el sistema es definitivamente *no* LTI.

3.19. Considere un sistema LTI causal como el circuito *RL* mostrado en la figura P3.19. Una fuente de corriente produce una corriente de entrada $x(t)$, y la salida del sistema se considera la corriente $y(t)$ que fluye por el inductor.

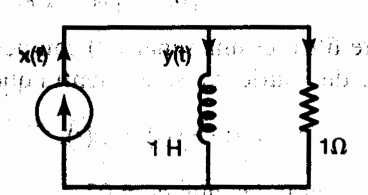


Figura P3.19

(a) Encuentre la ecuación diferencial que relaciona a $x(t)$ con $y(t)$.
(b) Determine la respuesta en frecuencia de este sistema, considerando la salida del sistema ante entradas con forma $x(t) = e^{j\omega t}$.
(c) Determine la salida $y(t)$ si $x(t) = \cos(t)$.

3.20. Considere un sistema LTI causal como el circuito *RLC* que se muestra en la figura P3.20. En este circuito, $x(t)$ es el voltaje de entrada. El voltaje $y(t)$ a través del capacitor se considera como la salida del sistema.

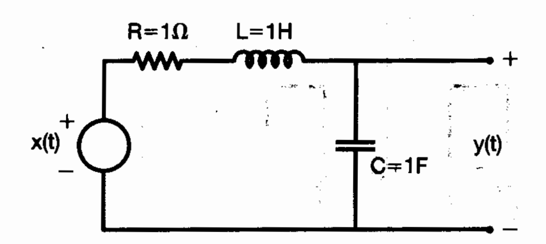


Figura P3.20

(a) Encuentre la ecuación diferencial que relaciona a $x(t)$ con $y(t)$.
(b) Determine la respuesta en frecuencia de este sistema, considerando la salida del sistema ante entradas con forma $x(t) = e^{j\omega t}$.
(c) Determine la salida $y(t)$ si $x(t) = \text{sen}(t)$.

PROBLEMAS BÁSICOS

3.21. Una señal periódica continua $x(t)$ es de valor real y tiene periodo fundamental de $T = 8$. Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero para $x(t)$ se especifican como

$$a_1 = a^*_{-1} = j, a_5 = a_{-5} = 2.$$

Exprese $x(t)$ en la forma

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(w_k t + \phi_k).$$

3.22. Determine las representaciones en serie de Fourier de las siguientes señales:
(a) Cada $x(t)$ mostrada en la figura P3.22(a)-(f).
(b) Una $x(t)$ periódica con periodo 2 y

$$x(t) = e^{-t} \quad \text{para} \quad -1 < t < 1$$

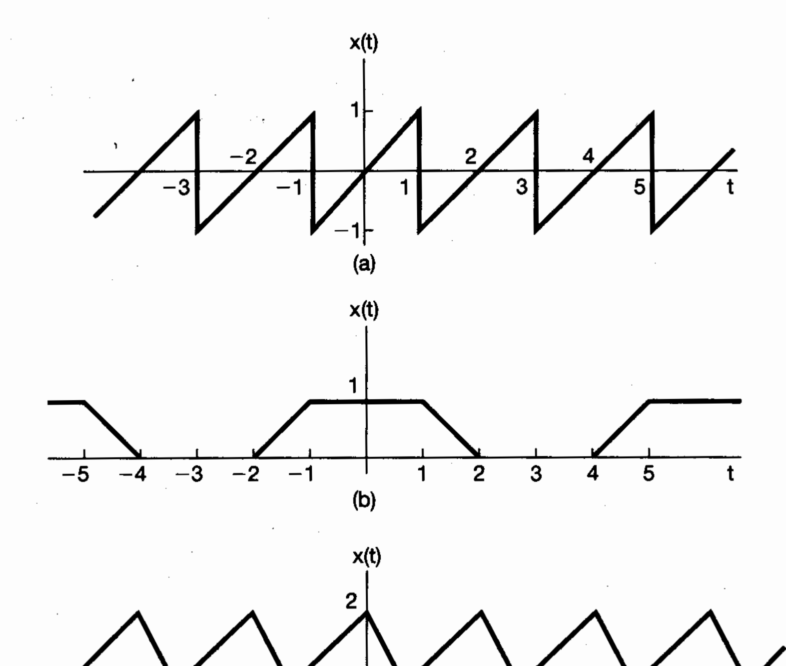


Figura P3.22

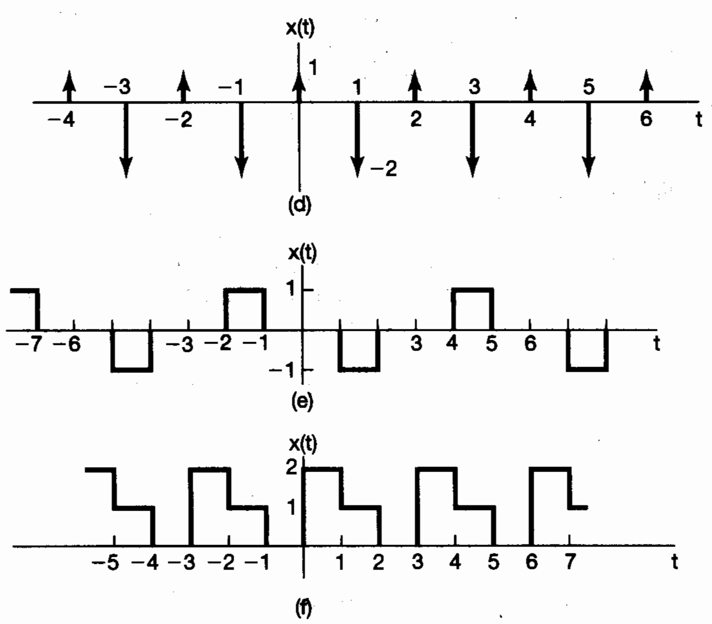


Figura P3.22 *Continuación*

(c) Una $x(t)$ periódica con periodo 4 y

$$x(t) = \begin{cases} \text{sen } \pi t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

3.23. A continuación se especifican los coeficientes de la serie de Fourier de una señal continua que es periódica con periodo 4. Determine la señal $x(t)$ en cada caso.

(a) $a_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ (j)^k \frac{\text{sen } k\pi/4}{k\pi}, & \text{con otro valor} \end{cases}$

(b) $a_k = (-1)^k \frac{\text{sen } k\pi/8}{2k\pi}$

(c) $a_k = \begin{cases} jk, & |k| < 3 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$

(d) $a_k = \begin{cases} 1, & k \text{ par} \\ 2, & k \text{ impar} \end{cases}$

3.24. Sea

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

una señal periódica con periodo fundamental $T = 2$ y coeficientes de Fourier a_k.

(a) Determine el valor de a_0.

(b) Determine la representación en serie de Fourier de $dx(t)/dt$.

(c) Use el resultado de la parte (b) y la propiedad de diferenciación de la serie continua de Fourier para poder determinar los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$.

3.25. Considere las siguientes tres señales continuas con periodo fundamental de $T = 1/2$:

$$x(t) = \cos(4\pi t),$$
$$y(t) = \operatorname{sen}(4\pi t),$$
$$z(t) = x(t)y(t).$$

(a) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$.
(b) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de $y(t)$.
(c) Utilice los resultados de las partes (a) y (b) junto con la propiedad de multiplicación de la serie continua de Fourier para determinar los coeficientes de la serie de Fourier de $z(t) = x(t)y(t)$.
(d) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de $z(t)$ mediante la expansión directa de $z(t)$ en forma trigonométrica, y compare su resultado con el de la parte (c).

3.26. Sea $x(t)$ una señal periódica cuyos coeficientes de la serie de Fourier son

$$a_k = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ j(\frac{1}{2})^{|k|} & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Utilice las propiedades de la serie de Fourier para responder a las siguientes preguntas:
(a) ¿$x(t)$ es real?
(b) ¿$x(t)$ es par?
(c) ¿$dx(t)/dt$ es par?

3.27. Una señal periódica discreta $x[n]$ es de valor real y tiene periodo fundamental $N = 5$. Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero para $x[n]$ son

$$a_0 = 2, a_2 = a^*_{-2} = 2e^{j\pi/6}, \quad a_4 = a^*_{-4} = e^{j\frac{\pi}{3}}.$$

Exprese $x[n]$ en la forma

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen}(\omega_k n + \phi_k).$$

3.28. Determine los coeficientes de la serie de Fourier para cada una de las siguientes señales periódicas discretas. Grafique la magnitud y fase de cada conjunto de coeficientes a_k.
(a) Cada $x[n]$ dibujada en la figura P3.28(a)-(c)
(b) $x[n] = \operatorname{sen}(2\pi n/3)\cos(\pi n/2)$
(c) $x[n]$ periódica con periodo 4 y

$$x[n] = 1 - \operatorname{sen}\frac{\pi n}{4} \quad \text{para } 0 \le n \le 3$$

(d) $x[n]$ periódica con periodo 12 y

$$x[n] = 1 - \operatorname{sen}\frac{\pi n}{4} \quad \text{para } 0 \le n \le 11$$

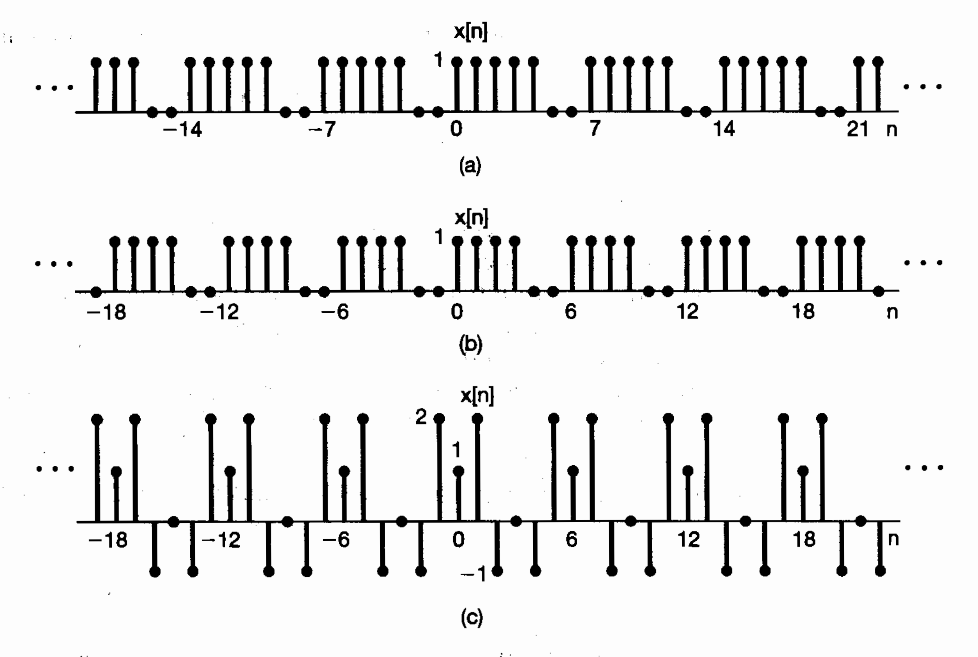


Figura P3.28

3.29. En cada uno de los siguientes incisos especificamos los coeficientes de la serie de Fourier de una señal que es periódica con periodo 8. Determine la señal $x[n]$ en cada caso.

(a) $a_k = \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{3k\pi}{4}\right)$ **(b)** $a_k = \begin{cases} \text{sen}(\frac{k\pi}{3}), & 0 \leq k \leq 6 \\ 0, & k = 7 \end{cases}$

(c) a_k como en la figura P3.29(a) **(d)** a_k como en la figura P3.29(b)

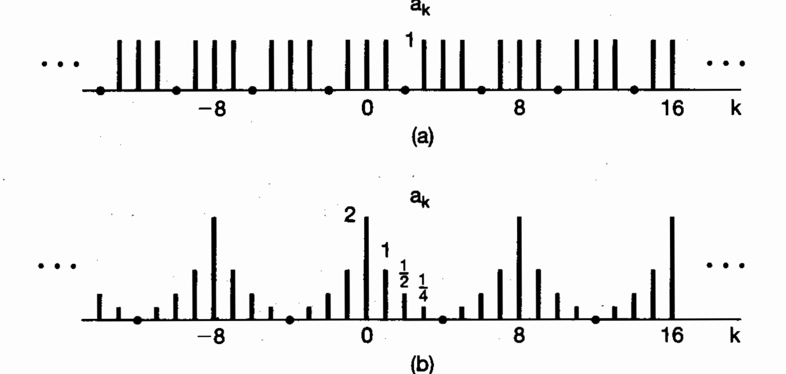


Figura P3.29

3.30. Examine las tres señales discretas con periodo fundamental de 6:

$$x[n] = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right), \qquad y[n] = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{6}n + \frac{\pi}{4}\right), \qquad z[n] = x[n]y[n].$$

(a) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de $x[n]$.
(b) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de $y[n]$.
(c) Utilice los resultados de las partes (a) y (b) junto con la propiedad de multiplicación de la serie discreta de Fourier para determinar los coeficientes de la serie de Fourier de $z[n] = x[n]y[n]$.
(d) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de $z[n]$ mediante la evaluación directa y compare sus resultados con los de la parte (c).

3.31. Sea

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 7 \\ 0, & 8 \leq n \leq 9 \end{cases}$$

una señal periódica con periodo fundamental $N = 10$ y coeficientes de la serie de Fourier a_k. Asimismo, sea

$$g[n] = x[n] - x[n-1].$$

(a) Demuestre que $g[n]$ tiene un periodo fundamental de 10.
(b) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de $g[n]$.
(c) Usando los coeficientes de la serie de Fourier de $g[n]$ y la propiedad de la primera diferencia de la tabla 3.2, determine a_k para $k \neq 0$.

3.32. Considere la señal $x[n]$ representada en la figura P3.32. Esta señal es periódica con periodo $N = 4$. La señal se puede expresar en términos de una serie discreta de Fourier como

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} a_k e^{jk(2\pi/4)n}. \qquad \text{(P3.32-1)}$$

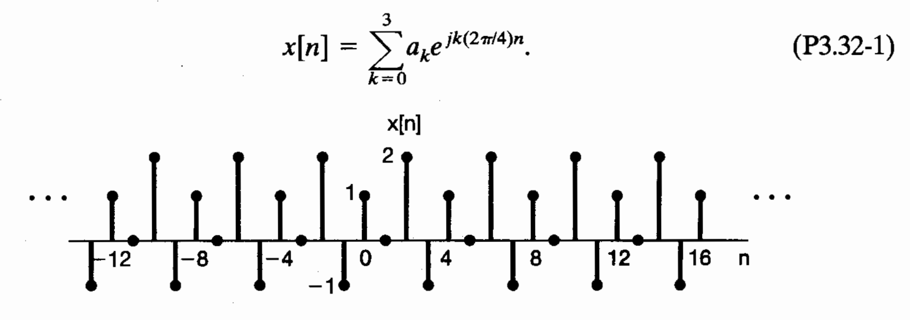


Figura P3.32

Como se mencionó dentro del texto, una forma de determinar los coeficientes de la serie de Fourier es tratar la ecuación (P3.32-1) como un conjunto de cuatro ecuaciones lineales (para $n = 0, 1, 2, 3$) con cuatro incógnitas (a_0, a_1, a_2 y a_3).

(a) Escriba en forma explícita estas cuatro expresiones, y resuélvalas directamente usando cualquier técnica estándar para resolver cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. (Asegúrese primero de reducir las exponenciales complejas a la forma más sencilla.)
(b) Verifique su respuesta al calcular los a_k en forma directa, usando la ecuación de análisis de la serie discreta de Fourier.

$$a_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-jk(2\pi/4)n}.$$

3.33. Considere un sistema LTI causal continuo cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ están relacionadas por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t).$$

Determine la representación en serie de Fourier de la salida $y(t)$ para cada una de las siguientes entradas:

(a) $x(t) = \cos 2\pi t$

(b) $x(t) = \operatorname{sen} 4\pi t + \cos(6\pi t + \pi/4)$

3.34. Considere un sistema LTI de tiempo continuo con respuesta al impulso

$$h(t) = e^{-4|t|}.$$

Encuentre la representación en serie de Fourier de la salida $y(t)$ para cada una de las siguientes entradas:

(a) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)$

(b) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(t-n)$

(c) $x(t)$ es la onda periódica que se representa en la figura P3.34.

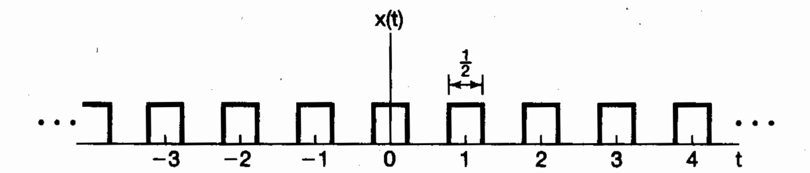


Figura P3.34

3.35. Considere un sistema LTI S continuo cuya respuesta en frecuencia es

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \geq 250 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Cuando la entrada a este sistema es una señal $x(t)$ con periodo fundamental $T = \pi/7$ y coeficientes de la serie de Fourier a_k, se encuentra que la salida $y(t)$ es idéntica a $x(t)$. ¿Para qué valores de k se garantiza que $a_k = 0$?

3.36. Considere un sistema LTI causal discreto cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ estén relacionados por la siguiente ecuación de diferencias:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n].$$

Encuentre la representación en serie de Fourier de la salida y$[n]$ para cada una de las siguientes entradas:

(a) $x[n] = \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4}n)$

(b) $x[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n) + 2\cos(\frac{\pi}{2}n)$

3.37. Considere un sistema LTI discreto con respuesta al impulso

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}.$$

Encuentre la representación en serie de Fourier de la salida $y[n]$ para cada una de las siguientes entradas:
(a) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n - 4k]$
(b) $x[n]$ es periódica con periodo 6 y

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \pm 1 \\ 0, & n = \pm 2, \pm 3 \end{cases}$$

3.38. Considere un sistema LTI discreto con respuesta al impulso

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 2 \\ -1, & -2 \leq n \leq -1. \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

Dado que la entrada a este sistema es

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - 4k],$$

determine los coeficientes de la serie de Fourier de la salida $y[n]$.

3.39. Considere un sistema LTI S discreto cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{8} \\ 0, & \frac{\pi}{8} < |\omega| < \pi \end{cases}.$$

Demuestre que si la entrada $x[n]$ a este sistema tiene un periodo $N = 3$, la salida $y[n]$ tiene sólo un coeficiente de serie de Fourier diferente de cero por periodo.

PROBLEMAS AVANZADOS

3.40. Sea $x(t)$ una señal periódica con periodo fundamental T y coeficientes de la serie de Fourier a_k. Obtenga los coeficientes de la serie de Fourier de las siguientes señales en términos de a_k:
(a) $x(t - t_0) + x(t + t_0)$
(b) $\mathcal{E}v\{x(t)\}$
(c) $\mathcal{R}e\{x(t)\}$
(d) $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$
(e) $x(3t - 1)$ [para este inciso, determine primero el periodo de $x(3t - 1)$]

3.41. Suponga que se nos proporciona la siguiente información acerca de una señal periódica continua con periodo 3 y coeficientes de Fourier a_k:

1. $a_k = a_{k+2}$.
2. $a_k = a_{-k}$.
3. $\int_{-0.5}^{0.5} x(t)dt = 1$.
4. $\int_{0.5}^{1.5} x(t)dt = 2$.

Determine $x(t)$.

3.42. Sea $x(t)$ una señal de valor real con periodo fundamental T y coeficientes de la serie de Fourier a_k.

(a) Demuestre que $a_k = a^*_{-k}$ y a_0 deben ser reales.

(b) Demuestre que si $x(t)$ es impar, los coeficientes de la serie de Fourier deben ser reales y pares.

(c) Demuestre que si $x(t)$ es impar, entonces los coeficientes de la serie de Fourier son imaginarios e impares y $a_0 = 0$.

(d) Demuestre que los coeficientes de Fourier de la parte par de $x(t)$ son iguales a $\mathcal{Re}\{a_k\}$.

(e) Demuestre que los coeficientes de Fourier de la parte impar de $x(t)$ son iguales a $j\mathcal{Im}\{a_k\}$.

3.43. (a) Se dice que una señal periódica $x(t)$ continua con periodo T es *armónica impar* si, en su representación en serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}, \qquad \text{(P3.43-1)}$$

$a_k = 0$ para cada k entero para diferente de cero.

(i) Demuestre que si $x(t)$ es armónica impar, entonces

$$x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right). \qquad \text{(P3.43-2)}$$

(ii) Demuestre que si $x(t)$ satisface la ecuación (P3.43-2), entonces es armónica impar.

(b) Suponga que $x(t)$ es una señal periódica armónica impar con periodo 2 tal que

$$x(t) = t \quad \text{para } 0 < t < 1.$$

Bosqueje $x(t)$ y encuentre sus coeficientes de la serie de Fourier.

(c) De manera análoga a la señal armónica impar, podríamos definir una señal armónica par como aquella para la cual $a_k = 0$ para una k impar en la representación en la ecuación (P3.43-1). ¿Sería posible que T fuera el periodo fundamental para dicha señal? Explique su respuesta.

(d) De manera más general, demuestre que T es el periodo fundamental de $x(t)$ ecuación (P3.43-1) si ocurre una de estos eventos:

(1) Ya sea que a_1 o a_{-1} son diferentes de cero,

o

(2) Hay dos enteros, k y l, que no tienen factores comunes y cuyas características provocan que tanto a_k como a_l sean diferentes de cero.

3.44. Suponga que se nos da la siguiente información acerca de la señal $x(t)$:

1. $x(t)$ es una señal real.

2. $x(t)$ es periódica con periodo $T = 6$ y tiene coeficientes de Fourier a_k.

3. $a_k = 0$ para $k = 0$ y $k > 2$.

4. $x(t) = -x(t-3)$.

5. $\frac{1}{6}\int_{-3}^{3} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$.

6. a_1 es un número positivo real.

Demuestre que $x(t) = A\cos(Bt + C)$ y determine los valores de las constantes A, B y C.

3.45. Sea $x(t)$ una señal periódica real cuya representación en serie de Fourier se muestra en la forma seno-coseno de la ecuación (3.32); es decir,

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}[B_k \cos k\omega_0 t - C_k \operatorname{sen} k\omega_0 t]. \tag{P3.45-1}$$

(a) Determine la representación en serie de Fourier de las partes par e impar de $x(t)$; esto es, encuentre los coeficientes α_k y β_k en términos de los coeficientes en la ecuación (P3.45-1) tales que

$$\mathcal{E}v\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t},$$

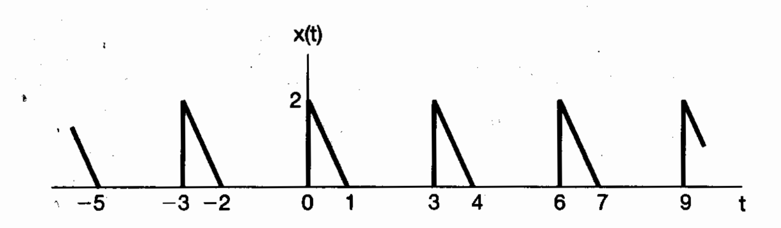
$$\mathcal{O}d\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k e^{jk\omega_0 t}.$$

(b) ¿Cuál es la relación entre α_k y α_{-k} en la parte (a)? Cual es la relación entre β_k y β_{-k}?

(c) Suponga que las señales $x(t)$ y $z(t)$ mostradas en la figura P3.45 tienen las representaciones en series seno-coseno

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right) - C_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right],$$

$$z(t) = d_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[E_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right) - F_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right].$$



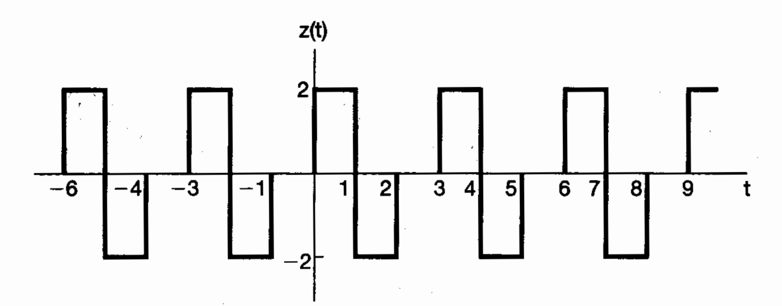


Figura P3.45

Grafique la señal

$$y(t) = 4(a_0 + d_0) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[B_k + \frac{1}{2}E_k\right]\cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right) + F_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right\}.$$

3.46. En este problema, deducimos dos importantes propiedades de la serie continua de Fourier: la propiedad de multiplicación y la relación de Parseval. Sea $x(t)$ y $y(t)$ señales periódicas continuas que tienen periodo T_0 y cuya representación en serie de Fourier está dada por

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}. \qquad \text{(P3.46-1)}$$

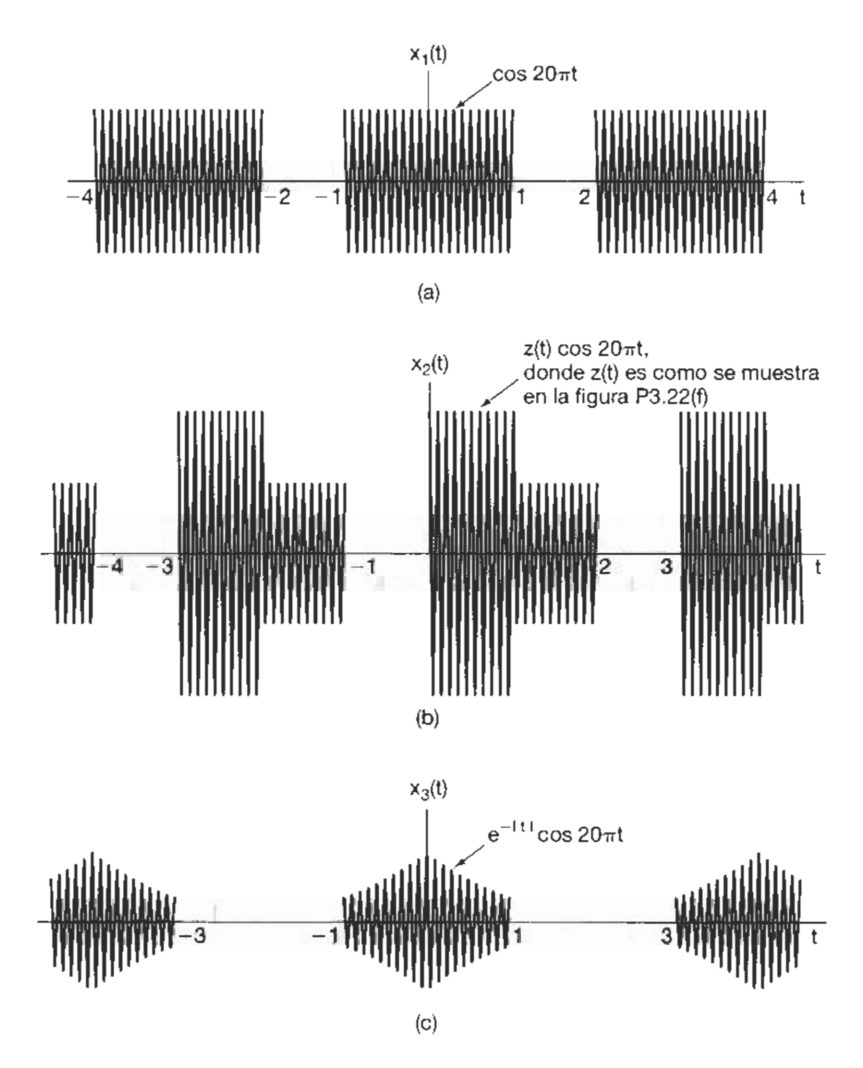


Figura P3.46

(a) Demuestre que los coeficientes de la serie de Fourier de la señal

$$z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

están dados por la convolución discreta

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n}.$$

(b) Utilice el resultado de la parte (a) para calcular los coeficientes de la serie de Fourier de las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ representadas en la figura P3.46.

(c) Suponga que $y(t)$ en la ecuación (P3.46-1) es igual a $x^*(t)$. Expres los b_k de la ecuación en términos de a_k y use el resultado de la parte (a) para probar la relación de Parseval para señales periódicas; esto es

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2.$$

3.47. Considere la señal

$$x(t) = \cos 2\pi t.$$

Ya que $x(t)$ es periódica con periodo fundamental de 1, también es periódica con periodo N donde N es cualquier entero positivo. ¿Cuáles son los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$ si la consideramos como una señal periódica con periodo 3?

3.48. Sea $x[n]$ una secuencia periódica con periodo N y representación en serie de Fourier

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}. \qquad \text{(P3.48-1)}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier para cada una de las siguientes señales se pueden expresar en términos de a_k en la ecuación (P3.48-1). Obtenga las expresiones

(a) $x[n - n_0]$
(b) $x[n] - x[n-1]$
(c) $x[n] - x[n - \frac{N}{2}]$ (suponga que N es par)
(d) $x[n] - x[n + \frac{N}{2}]$ (suponga que N es par; observe que esta señal es periódica con periodo $N/2$)
(e) $x^*[-n]$
(f) $(-1)^n x[n]$ (suponga que N es par)
(g) $(-1)^n x[n]$ (suponga que N es impar; observe que esta señal es periódica con periodo $2N$)
(h) $y[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

3.49. Sea $x[n]$ una secuencia periódica con periodo N y representación en serie de Fourier

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}. \qquad \text{(P3.49-1)}$$

(a) Suponga que N es par y que $x[n]$ en la ecuación (P3.49-1) satisface

$$x[n] = -x\left[n + \frac{N}{2}\right] \text{ para toda } n.$$

Demuestre que $a_k = 0$ para cada valor entero par de k.

(b) Suponga que N es divisible entre 4. Demuestre que si

$$x[n] = -x\left[n + \frac{N}{4}\right] \text{ para toda } n,$$

entonces $a_k = 0$ para cada valor de k que es múltiplo de 4.

(c) En forma general, suponga que N es divisible entre un entero M. Demuestre que si

$$\sum_{r=0}^{(N/M)-1} x\left[n + r\frac{N}{M}\right] = 0 \text{ para toda } n,$$

entonces $a_k = 0$ para cada valor de k que es un múltiplo de M.

3.50. Suponga que se nos da la siguiente información acerca de una señal periódica $x[n]$ con periodo 8 y coeficientes de Fourier a_k:

1. $a_k = -a_{k-4}$.
2. $x[2n + 1] = (-1)^n$.

Dibuje un periodo de $x[n]$.

3.51. Sea $x[n]$ una señal periódica con periodo $N = 8$ y coeficientes de la serie de Fourier $a_k = -a_{k-4}$. Se genera una señal

$$y[n] = \left(\frac{1 + (-1)^n}{2}\right) x[n - 1]$$

con periodo $N = 8$. Si se indican los coeficientes de la serie de Fourier de $y[n]$ mediante b_k, encuentre una función $f[k]$ tal que

$$b_k = f[k]a_k.$$

3.52. $x[n]$ es una señal periódica real con periodo N y coeficientes de la serie de Fourier complejos a_k. La forma cartesiana para a_k se señala como

$$a_k = b_k + jc_k,$$

donde b_k y c_k son reales.

(a) Muestre que $a_{-k} = a_k^*$. ¿Cuál es la relación entre b_k y b_{-k}? ¿Cuál es la relación entre c_k y c_{-k}?

(b) Suponga que N es par. Demuestre que $a_{N/2}$ es real.

(c) Demuestre que $x[n]$ también se puede expresar como una serie trigonométrica de Fourier de la forma

$$x[n] = a_0 + 2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} b_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - c_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

si N es impar o como

$$x[n] = (a_0 + a_{N/2}(-1)^n) + 2\sum_{k=1}^{(N-2)/2} b_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - c_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

si N es impar.

(d) Demuestre que si la forma polar a_k es $A_k e^{j\theta k}$, entonces la representación en serie de Fourier para $x[n]$ se puede escribir como

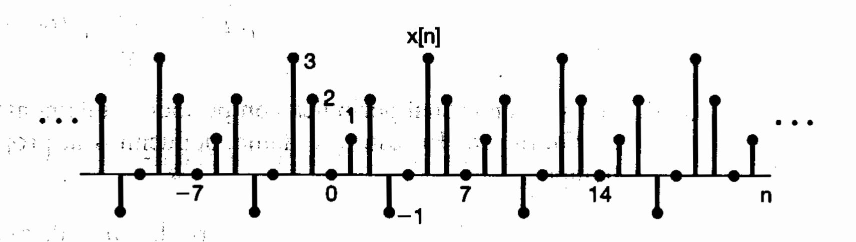
$$x[n] = a_0 + 2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N} + \theta_k\right)$$

si N es impar o como

$$x[n] = (a_0 + a_{N/2}(-1)^n) + 2\sum_{k=1}^{(N/2)-1} A_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N} + \theta_k\right)$$

si N es par.

(e) Suponga que $x[n]$ y $z[n]$, representadas en la figura P3.52, tienen representaciones en series seno-coseno.



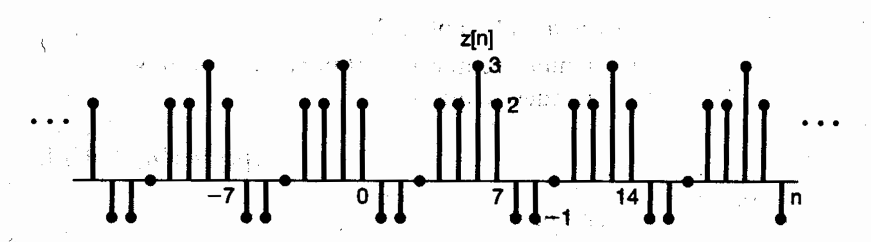


Figura P3.52

$$x[n] = a_0 + 2\sum_{k=1}^{3}\left\{b_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right) - c_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right\},$$

$$z[n] = d_0 + 2\sum_{k=1}^{3}\left\{d_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right) - f_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right\}.$$

Grafique la señal

$$y[n] = a_0 - d_0 + 2\sum_{k=1}^{3}\left\{d_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right) + (f_k + c_k) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right\}.$$

3.53. Sea $x[n]$ una señal periódica real con periodo N y coeficientes de Fourier a_k.

(a) Demuestre que si N es par, al menos dos de los coeficientes de Fourier dentro de un periodo de a_k son reales.

(b) Demuestre que si N es impar, al menos uno de los coeficientes de Fourier dentro de un periodo de a_k es real.

3.54. Considere la función

$$a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}.$$

(a) Demuestre que $a[k] = N$ para $k = 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \ldots$

(b) Demuestre que $a[k] = 0$ siempre que k no sea un múltiplo entero de N. (*Sugerencia:* use la fórmula de suma finita.)

(c) Repita las partes (a) y (b) si

$$a[k] = \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(2\pi/N)kn}.$$

3.55. Sea $x[n]$ una señal periódica con periodo fundamental N y coeficientes de la serie de Fourier a_k. En este problema, deducimos la propiedad de escalamiento en el tiempo

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{m}], & n = 0, \pm m, \pm 2m, \cdots \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}$$

mostrada en la tabla 3.2.

(a) Demuestre que $x_{(m)}[n]$ tiene periodo mN.

(b) Demuestre que si

$$x[n] = v[n] + w[n],$$

entonces

$$x_{(m)}[n] = v_{(m)}[n] + w_{(m)}[n].$$

(c) Suponiendo que $x[n] = e^{j2\pi k_0 n/N}$ para algún entero k_0 verifique que

$$x_{(m)}[n] = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} e^{j2\pi(k_0+lN)n/(mN)}.$$

Esto es, una exponencial compleja en $x[n]$ se vuelve una combinación lineal de m exponenciales complejas en $x_{(m)}[n]$.

(d) Usando los resultados de las partes (a), (b) y (c), demuestre que si $x[n]$ tiene los coeficientes de Fourier a_k, entonces $x_{(m)}[n]$ debe tener coeficientes de Fourier $\frac{1}{m}a_k$.

3.56. Sea $x[n]$ una señal periódica con periodo N y coeficientes de Fourier a_k.

(a) Exprese los coeficientes de Fourier b_k de $|x[n]|^2$ en términos de a_k.

(b) Si los coeficientes a_k son reales, ¿se garantiza que los coeficientes b_k sean también reales?

3.57. **(a)** Sea

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \qquad \text{(P3.57-1)}$$

y

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

una señal periódica. Demuestre que

$$x[n]y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk(2\pi/N)n},$$

donde

$$c_k = \sum_{l=0}^{N-1} a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^{N-1} a_{k-l} b_l.$$

(b) Generalice el resultado de la parte (a) demostrando que

$$c_k = \sum_{l=<N>} a_l b_{k-l} = \sum_{l=<N>} a_{k-l} b_l.$$

(c) Usando el resultado de la parte (b) para encontrar la representación en serie de Fourier de las siguientes señales, donde $x[n]$ está dada por la ecuación (P3.57-1).

(i) $x[n]\cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)$

(ii) $x[n]\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta[n - rN]$

(iii) $x[n]\left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta\left[n - \frac{rN}{3}\right]\right)$(suponga que N es divisible entre 3)

(d) Determine la representación en serie de Fourier para la señal $x[n]y[n]$, donde

$$x[n] = \cos(\pi n/3)$$

y

$$y[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq 3 \\ 0, & 4 \leq |n| \leq 6 \end{cases}$$

es periódica con periodo 12.

(e) Use el resultado de la parte (b) para demostrar que

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]y[n] = N \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{-l},$$

y de esta expresión, obtenga la relación de Parseval para señales periódicas discretas.

3.58. Sean $x[n]$ y $y[n]$ señales periódicas con periodo común N, y sea

$$z[n] = \sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r]$$

su convolución periódica.

(a) Demuestre que $z[n]$ también es periódica con periodo N.

(b) Verifique que si a_k, b_k y c_k son coeficientes de Fourier de $x[n]$, $y[n]$ y $z[n]$ respectivamente, entonces

$$c_k = Na_kb_k.$$

(c) Sea

$$x[n] = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$$

y

$$y[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 7 \end{cases}$$

dos señales que son periódicas con periodo 8. Determine la representación en serie de Fourier para la convolución periódica de estas señales.

(d) Repita la parte (c) para las siguientes dos señales periódicas que también tienen periodo 8.

$$x[n] = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi n}{4}\right), & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 7 \end{cases},$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, 0 \leq n \leq 7.$$

3.59. **(a)** Suponga que $x[n]$ es una señal periódica con periodo N. Demuestre que los coeficientes de la serie de Fourier de la señal periódica

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-kT)$$

son periódicos con periodo N.

(b) Suponga que $x(t)$ es una señal periódica con periodo T y coeficientes de la serie de Fourier a_k con periodo N. Demuestre que debe existir una secuencia periódica $g[n]$ tal que

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\delta(t - kT/N).$$

(c) ¿Puede una señal periódica continua tener coeficientes de Fourier periódicos?

3.60. Considere los siguientes pares de señales $x[n]$ y $y[n]$. Para cada par determine si hay un sistema LTI discreto cuya salida sea $y[n]$ cuando $x[n]$ es la entrada. Si existe tal sistema, determine si es único (es decir, si hay más de un sistema LTI con el par de entrada-salida dado). También determine la respuesta en frecuencia de un sistema LTI con el comportamiento deseado. Si no existe el sistema LTI para el par $x[n]$ y $y[n]$ dados, explique por qué.

(a) $x[n] = (\frac{1}{2}^{n}), y[n] = (\frac{1}{4}^{n})$

(b) $x[n] = (\frac{1}{2}^{n})u[n], y[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$

(c) $x[n] = (\frac{1}{2}^{n})u[n], y[n] = 4^n u[-n]$

(d) $x[n] = e^{jn/8}, y[n] = 2e^{jn/8}$

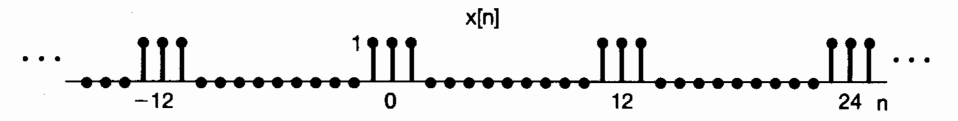
(e) $x[n] = e^{jn/8}u[n], y[n] = 2e^{jn/8}u[n]$

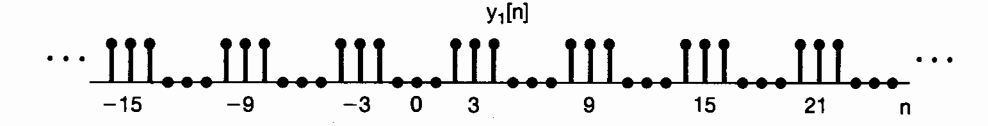
(f) $x[n] = j^n, y[n] = 2j^n(1 - j)$

(g) $x[n] = \cos(\pi n/3), y[n] = \cos(\pi n/3) + \sqrt{3}\,\text{sen}(\pi n/3)$

(h) $x[n]$ y $y_1[n]$ son como en la figura P3.60

(i) $x[n]$ y $y_2[n]$ son como en la figura P3.60





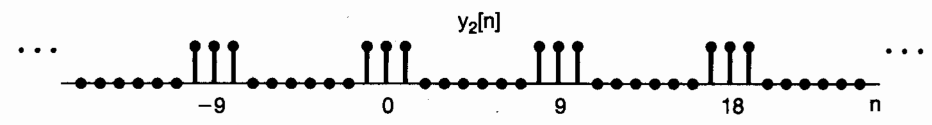


Figura P3.60

3.61. Como hemos visto, las técnicas de análisis de Fourier son de gran valor al examinar los sistema LTI continuos debido a que las exponenciales complejas periódicas son funciones propias de los sistemas LTI. En este problema queremos comprobar el siguiente enunciado: Aunque algunos sistemas LTI pueden tener otras funciones propias, las exponenciales complejas son las *únicas* señales que son funciones propias de *cada* sistema LTI.

(a) ¿Cuáles son las funciones propias del sistema LTI con respuesta al impulso unitario $h(t) = \delta(t)$? ¿Cuáles son los valores propios asociados?

(b) Considere el sistema LTI con respuesta al impulso unitario $h(t) = \delta(t - T)$. Encuentre una señal que no sea de la forma e^{st}, pero que sea una función propia del sistema con valor propio 1. De manera similar, encuentre las funciones propias con valores propios de 1/2 y 2 que no sean exponenciales complejas. (*Sugerencia:* puede encontrar trenes de impulso que cumplan con estos requerimientos.)

(c) Considere un sistema LTI estable con respuesta al impulso $h(t)$ que es real y par. Demuestre que cos ωt y sen ωt son funciones propias de este sistema.

(d) Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = u(t)$. Suponga que $\phi(t)$ es la función propia de este sistema con valor propio λ. Encuentre la ecuación diferencial que $\phi(t)$ debe satisfacer, y resuelva la ecuación. Este resultado, junto con los de las partes (a) a (c), deben probar la validez del enunciado emitido al inicio del problema.

3.62. Una técnica para construir una fuente de alimentación de cd es tomar una señal de ca y rectificarla en onda completa. Esto es, ponemos la señal de ca $x(t)$ a través de un sistema que produce $y(t) = |x(t)|$ como su salida.

(a) Dibuje las formas de onda de la entrada y la salida, si $x(t) = \cos t$. ¿Cuáles son los periodos fundamentales de la entrada y la salida?

(b) Si $x(t) = \cos t$, determine los coeficientes de la serie de Fourier para la salida $y(t)$.

(c) ¿Cuál es la amplitud de la componente de cd de la señal de entrada y de la señal de salida?

3.63. Suponga que una señal periódica continua es la entrada a un sistema LTI. La señal tiene una representación en serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{|k|} e^{jk(\pi/4)t},$$

donde α es un número real entre 0 y 1, y la respuesta en frecuencia del sistema es

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}.$$

¿Qué tan grande debe ser W para que la salida del sistema tenga al menos 90% de la energía promedio por periodo de $x(t)$?

3.64. Como hemos visto en este capítulo, el concepto de una función propia es una herramienta en extremo importante en el estudio de sistema LTI. Lo mismo se puede decir para los sistemas lineales pero variantes en el tiempo. En concreto, considere un sistema de este tipo con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. Decimos que la señal $\phi(t)$ es una *función propia* del sistema si

$$\phi(t) \rightarrow \lambda\phi(t).$$

Esto es, si $x(t) = \phi(t)$, entonces $y(t) = \lambda\phi(t)$, donde la constante compleja λ se conoce como el *valor propio asociado con* $\phi(t)$.

(a) Suponga que podemos representar la entrada $x(t)$ a nuestro sistema como una combinación lineal de las funciones propias $\phi_k(t)$, cada uno de las cuales tiene un valor propio correspondiente λ_k; esto es,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t).$$

Exprese la salida $y(t)$ del sistema en términos de $\{c_k\}$, $\{\phi_k(t)\}$ y $\{\lambda_k\}$.

(b) Considere el sistema caracterizado por la ecuación diferencial

$$y(t) = t^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + t\frac{dx(t)}{dt}.$$

¿El sistema es lineal, o es invariante en el tiempo?

(c) Demuestre que las funciones

$$\phi_k(t) = t^k$$

son funciones propias del sistema en la parte (b). Para cada $\phi_k(t)$, determine el correspondiente valor λ_k.

(d) Determine la salida del sistema si

$$x(t) = 10t^{-10} + 3t + \frac{1}{2}t^4 + \pi.$$

PROBLEMAS DE EXTENSIÓN

3.65. Las funciones $u(t)$ y $v(t)$ se dice que son *ortogonales en el intervalo (a, b)* si

$$\int_a^b u(t)v^*(t)dt = 0. \qquad \text{(P3.65-1)}$$

Si además,

$$\int_a^b |u(t)|^2\, dt = 1 = \int_a^b |u(t)|^2\, dt,$$

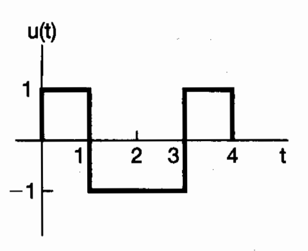
se dice que las funciones son *normalizadas* y se llaman *ortonormales.* Un conjunto de funciones $\{\phi_k(t)\}$ se conoce como *conjunto ortogonal (ortonormal)* si cada par de funciones en el conjunto es ortogonal (ortonormal).

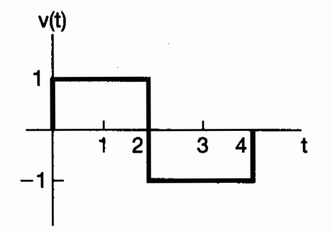
(a) Considere el par de señales $u(t)$ y $v(t)$ mostradas en la figura P3.65. Determine si cada par es ortogonal sobre el intervalo $(0, 4)$.

(b) ¿Las funciones sen $m\omega_0 t$ y sen $n\omega_0 t$ son ortogonales en el intervalo $(0, T)$, donde $T = 2\pi/\omega_0$? ¿También son ortonormales?

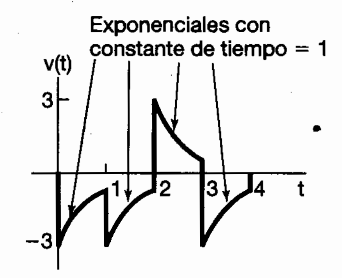
(c) Repita la parte (b) para las funciones $\phi_m(t)$ y $\phi_n(t)$, donde

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}[\cos k\omega_0 t + \text{sen}\, k\omega_0 t].$$

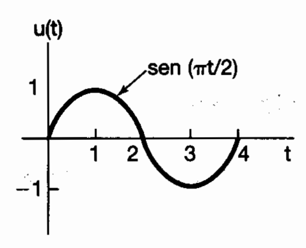


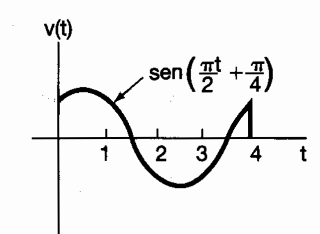


(a)

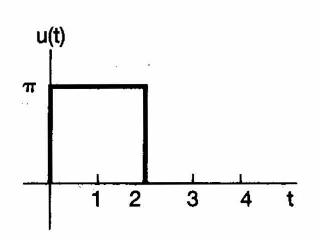


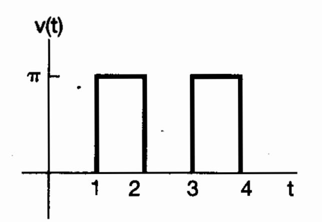
(b)





(c)





(d)

Figura P3.65

(d) Demuestre que las funciones $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ son ortogonales sobre *cualquier* intervalo de longitud $T = 2\pi/\omega_0$. ¿Son ortonormales?

(e) Sea $x(t)$ una señal arbitraria, y sean $x_o(t)$ y $x_e(t)$ las partes impar y par respectivamente de $x(t)$. Demuestre que $x_o(t)$ y $x_e(t)$ son ortogonales sobre el intervalo $(-T, T)$ para cualquier T.

(f) Demuestre que si $\{\phi_k(t)\}$ es un conjunto de señales ortogonales sobre el intervalo (a, b), entonces el conjunto $\{(1/\sqrt{A_k})\phi_k(t)\}$, donde

$$A_k = \int_a^b |\phi_k(t)|^2 dt,$$

es ortonormal.

(g) Sea $\{\phi_i(t)\}$ un conjunto de señales ortonormales en el intervalo (a, b), y considere una señal de la forma

$$x(t) = \sum_i a_i \phi_i(t),$$

donde a_i son constantes complejas. Demuestre que

$$\int_a^b |x(t)|^2 \, dt = \sum_i |a_i|^2.$$

(h) Suponga que $\phi_1(t), \ldots, \phi_N(t)$ son diferentes de cero sólo en el intervalo $0 \leq t \leq T$ y que son ortonormales sobre este intervalo de tiempo. Sea L_i la cual denota el sistema LTI con respuesta al impulso

$$h_i(t) = \phi_i(T - t). \tag{P3.65-2}$$

Demuestre que si $\phi_j(t)$ se aplica a este sistema, entonces la salida en el tiempo T es 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$. El sistema con respuesta al impulso dado en la ecuación (P3.65-2) se mencionó referencia en los problemas 2.66 y 2.67 como el *filtro de acoplamiento* para la señal $\phi_i(t)$.

3.66. El propósito de este problema es mostrar que la representación de una señal periódica arbitraria mediante una serie de Fourier, o de manera más general, como una combinación lineal de cualquier conjunto de funciones ortogonales, es computacionalmente eficiente y, de hecho, muy útil para obtener buenas aproximaciones de las señales.[12]

De manera específica, sea $\{\phi_i(t)\}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo $a \leq t \leq b$, y sea $x(t)$ una señal determinada. Considere la siguiente aproximación de $x(t)$ sobre el intervalo $a \leq t \leq b$:

$$\hat{x}_n(t) = \sum_{i=-N}^{+N} a_i \phi_i(t). \tag{P3.66-1}$$

Aquí, a_i son constantes (en general, complejos). Para medir la desviación entre $x(t)$ y la aproximación $\hat{x}_N(t)$, considere el error $e_N(t)$ definido como

$$e_N(t) = x(t) - \hat{x}_N(t). \tag{P3.66-2}$$

Un criterio razonable y ampliamente usado para medir la calidad de la aproximación es la energía en la señal de error sobre el intervalo de interés, es decir, la

[12] Véase el problema 3.65 para las definiciones de las funciones ortogonales y ortonormales.

integral del cuadrado de la magnitud del error sobre el intervalo $a \leq t \leq b$:

$$E = \int_a^b |e_N(t)|^2 \, dt. \qquad \text{(P3.66-3)}$$

(a) Demuestre que E se minimiza al escoger

$$a_i = \int_a^b x(t)\phi_i^*(t) \, dt. \qquad \text{(P3.66-4)}$$

[*Sugerencia:* Use las ecuaciones (P3.66-1)-(P3.66-3) para expresar E en términos de a_i, $\phi_i(t)$ y $x(t)$. Entonces exprese a_i en coordenadas rectangulares como $a_i = b_i + jc_i$, y demuestre que las ecuaciones

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = 0 \ \text{ y } \ \frac{\partial E}{\partial c_i} = 0, i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, N$$

se satisfacen con los a_i dados por la ecuación (P3.66-4).]

(b) ¿Cómo cambia el resultado de la parte (a) si

$$A_i = \int_a^b |\phi_i(t)|^2 \, dt$$

y las $\{\phi_i(t)\}$ son ortogonales pero no ortonormales?

(c) Sea $\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$, y escoja cualquier intervalo de longitud $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Demuestre que los a_i que minimizan a E son como se muestra en la ecuación (3.50).

(d) El conjunto de *funciones Walsh* es un conjunto de funciones ortonormales que se usan con frecuencia. (Vea el problema 2.66.) El conjunto de cinco funciones Walsh, $\phi_0(t)$ $\phi_1(t), \ldots, \phi_4(t)$ se ilustra en la figura P3.66, donde hemos escalado el tiempo de manera que las $\phi_i(t)$ sean diferentes de cero y ortonormales sobre el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Sea $x(t) = \operatorname{sen} \pi t$. Determine la aproximación de $x(t)$ de la forma

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^{4} a_i \phi_i(t)$$

tal que

$$\int_0^1 |x(t) - \hat{x}(t)|^2 \, dt$$

se minimice.

(e) Demuestre que $\hat{x}_N(t)$ en la ecuación (P3.66-1) y $e_N(t)$ en la ecuación (P3.66-2) son ortogonales si los a_i se escogen como en la ecuación (P3.66-4).

Los resultados de las partes (a) y (b) son en extremo importantes en el sentido que muestran que cada coeficiente a_i es *independiente* de los otros a_j, $i \neq j$. Entonces, si agregamos más términos a la aproximación [es decir, si calculamos la aproximación $\hat{x}_{N+1}(t)$], no cambian los coeficientes de $\phi_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$ que se determinaron previamente. En contraste, considere otro tipo de expan-

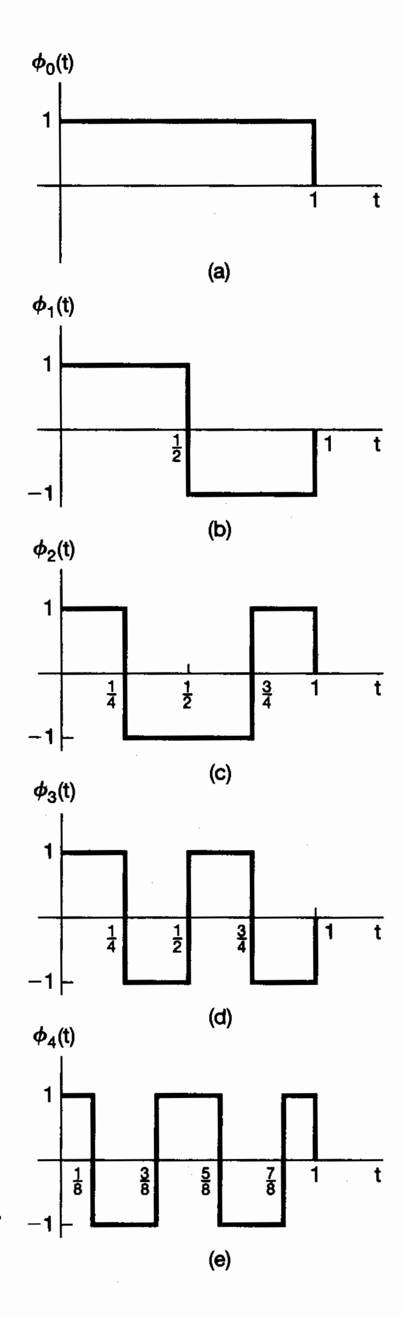


Figura P3.66

sión en series, la serie polinomial de Taylor. La serie de Taylor *infinita* para e^t es $e^t = 1 + t + t^2/2! + \ldots$, pero como mostraremos más adelante, cuando consideramos una serie polinomial *finita* y el criterio del error de la ecuación (P3.66-3), obtenemos un resultado muy diferente.

En concreto, sea $\phi_0(t) = 1$, $\phi_1(t) = t$, $\phi_2(t) = t^2$, y así sucesivamente.

(f) ¿Son ortogonales las $\phi_i(t)$ sobre el intervalo $0 \leq t \leq 1$?

(g) Considere una aproximación $x(t) = e^t$ sobre el intervalo $0 \leq t \leq 1$ de la forma

$$\hat{x}_0(t) = a_0\phi_0(t).$$

Encuentre el valor de a_0 que minimice la energía en la señal de error sobre el intervalo.

(h) Deseamos ahora aproximar e^t mediante una serie de Taylor usando dos términos, es decir, $\hat{x}_1(t) = a_0 + a_1 t$. Determine los valores óptimos de a_0 y a_1. [*Sugerencia:* calcule E en términos de a_0 y a_1, y resuelva las ecuaciones simultáneas

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0.$$

Observe que su respuesta para a_0 ha cambiado de su valor en la parte (g), donde hubo un solo término en la serie. Además, conforme incrementa el número de términos en la serie, ese coeficiente y los otros continuarán cambiando. Podemos entonces ver la ventaja lograda al expandir una función usando los términos ortogonales.]

3.67. Como se analizó en el texto, el origen del análisis de Fourier se encuentra en problemas de física matemática. En particular, el trabajo de Fourier fue motivado por su investigación de la difusión del calor. En este problema mostramos cómo la serie de Fourier se relaciona en la investigación.[13]

Considere el problema de determinar la temperatura a una determinada profundidad de la superficie de la tierra como una función del tiempo, donde consideramos que la temperatura en la superficie es una función dada del tiempo $T(t)$ que es periódica con periodo 1. (La unidad de tiempo es un año.) Sea $T(x, t)$ que denota la temperatura a una profundidad x debajo de la superficie en el tiempo t. Esta función obedece a la ecuación de difusión de calor

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{P3.67-1}$$

con la condición auxiliar

$$T(0,t) = T(t). \tag{P3.67-2}$$

Aquí, k es la constante de difusión de calor para la tierra ($k > 0$). Suponga que expandimos $T(t)$ en una serie de Fourier:

$$T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn2\pi t}. \tag{P3.67-3}$$

De manera similar, busquemos expandir $T(x, t)$ a una profundidad x en una serie de Fourier en t. Obtenemos

$$T(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(x) e^{jn2\pi t}, \tag{P3.67-4}$$

donde los coeficientes de Fourier $b_n(x)$ dependen de la profundidad x.

[13]El problema se adaptó de A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics* (Nueva York: Academic Press, 1949), pp. 68-71.

(a) Use las ecuaciones (P3.67-1) a (P3.67-4) para demostrar que $b_n(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2b_n(x)}{dx^2} = \frac{4\pi jn}{k^2} b_n(x) \qquad \text{(P3.67-5a)}$$

con la condición auxiliar

$$b_n(0) = a_n. \qquad \text{(P3.67-5b)}$$

Puesto que la ecuación (P3.67-5a) es una ecuación de segundo orden, necesitamos una segunda condición auxiliar. Sostenemos, con bases físicas, que muy lejos por debajo de la superficie de la tierra deben desaparecer las variaciones de temperatura debidas a las fluctuaciones en la superficie. Esto es,

$$\lim_{x\to\infty} T(x, t) = \text{una constante.} \qquad \text{(P3.67-5c)}$$

(b) Demuestre que la solución de las ecuaciones (P3.67-5) son

$$b_n(x) = \begin{cases} a_n \exp[-\sqrt{2\pi|n|}(1 + j)x/k], & n \geq 0 \\ a_n \exp[-\sqrt{2\pi|n|}(1 - j)x/k], & n \leq 0 \end{cases}.$$

(c) Entonces, las oscilaciones de temperatura a profundidad x son versiones amortiguadas y desplazadas en fase de las oscilaciones de temperatura en la superficie. Para ver esto con más claridad, sea

$$T(t) = a_0 + a_1 \operatorname{sen} 2\pi t$$

(de manera que a_0 represente la temperatura promedio anual). Dibuje $T(t)$ y $T(x, t)$ sobre el periodo de un año para

$$x = k\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$a_0 = 2$ y $a_1 = 1$. Observe que a esta profundidad las oscilaciones de temperatura no sólo son significativamente amortiguadas, sino que el desplazamiento de fase es tal que se está más caliente en invierno y más frío en verano. ¡Ésta es exactamente la razón por la que son construidos los sótanos de vegetales!

3.68. Considere el contorno cerrado mostrado en la figura P3.68. Como ahí se ilustra, podemos ver esta curva como que es trazada por la punta de un vector giratorio de longitud variable. Sea $r(\theta)$ que denota la longitud del vector como una función del ángulo θ. Entonces $r(\theta)$ es periódica en θ con periodo 2π y tiene una representación en serie de Fourier. Sea $\{a_k\}$ que denota los coeficientes de Fourier de $r(\theta)$.

(a) Considere ahora la proyección $x(\theta)$ del vector $r(\theta)$ en el eje x, como se indica en la figura. Determine los coeficientes de Fourier para $x(\theta)$ en términos de los a_k.

(b) Considere la secuencia de coeficientes

$$b_k = a_k e^{jk\pi/4}.$$

Dibuje la figura en el plano que corresponda a este conjunto de coeficientes.

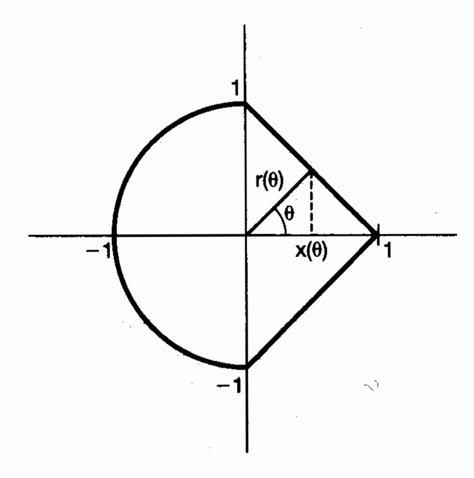


Figura P3.68

(a) Repita la parte (b) con

$$b_k = a_k\delta[k].$$

(b) Dibuje las figuras en el plano, tal que $r(\theta)$ *no* sea constante, pero tiene cada una de las siguientes propiedades:

(i) $r(\theta)$ es par.

(ii) El periodo fundamental de $r(\theta)$ es π.

(iii) El periodo fundamental de $r(\theta)$ es $\pi/2$.

3.69. En este problema, consideramos la contraparte discreta de los conceptos introducidos en los problemas 3.65 y 3.66. En analogía con el caso continuo, dos señales de tiempo discreto $\phi_k[n]$ y $\phi_m[n]$ se dice que son *ortogonales* sobre el intervalo (N_1, N_2) si

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_k[n]\phi_m^*[n] = \begin{cases} A_k, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}. \tag{P3.69-1}$$

Si los valores de las constantes A_k y A_m son 1, entonces se dice que las señales son *ortonormales*.

(a) Considere las señales

$$\phi_k[n] = \delta[n-k], k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N.$$

Demuestre que estas señales son ortonormales sobre el intervalo $(-N, N)$.

(b) Demuestre que las señales

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

son ortogonales sobre cualquier intervalo de longitud N.

(c) Demuestre que si

$$x[n] = \sum_{i=1}^{M} a_i\phi_i[n],$$

donde $\phi_i[n]$ son ortogonales sobre el intervalo (N_1, N_2), entonces

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 = \sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 A_i.$$

(d) Sea $\phi_i[n], i = 0, 1, \ldots, M$, un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo (N_1, N_2), y sea $x[n]$ una señal dada. Suponga que deseamos aproximar $x[n]$ como una combinación lineal de las $\phi_i[n]$; esto es,

$$\hat{x}[n] = \sum_{i=0}^{M} a_i \phi_i[n],$$

donde los coeficientes a_i son constantes. Sea

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n],$$

y demuestre que si deseamos minimizar

$$E = \sum_{n=N_1}^{N_2} |e[n]|^2,$$

entonces los coeficientes a_i están dados por

$$a_i = \frac{1}{A_i} \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\phi_i^*[n]. \qquad \text{(P3.69-2)}$$

[*Sugerencia:* Como en el problema 3.66, exprese E en términos de a_i, $\phi_i[n]$, A_i y $x[n]$, escriba $a_i = b_i + jc_i$, y demuestre que las ecuaciones

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E}{\partial c_i} = 0$$

se satisfacen por los a_i dados por la ecuación (P3.69-2). Observe que al aplicar este resultado cuando las $\phi_i[n]$ son como en la parte (b) se obtiene la ecuación (3.95) para a_k.]

(e) Aplique el resultado de la parte (d) cuando las $\phi_i[n]$ son como en la parte (a) para determinar los coeficientes a_i en términos de $x[n]$.

3.70. (a) En este problema, consideramos la definición de las series de Fourier bidimensionales para señales periódicas con dos variables independientes. En concreto, considere una señal $x(t_1, t_2)$ que satisfaga la ecuación

$$x(t_1, t_2) = x(t_1 + T_1, t_2 + T_2), \text{ para todo } t_1, t_2.$$

Esta señal es periódica con periodo T_1 en la dirección t_1 y con periodo T_2 en la dirección t_2. Estas señales tienen una representación en serie de la forma

$$x(t_1, t_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{mn} e^{j(m\omega_1 t_1 + n\omega_2 t_2)},$$

donde

$$\omega_1 = 2\pi/T_1, \qquad \omega_2 = 2\pi/T_2.$$

Determine una expresión para a_{mn} en términos de $x(t_1, t_2)$.

(b) Determine los coeficientes de la serie de Fourier a_{mn} para las siguientes señales:

(i) $\cos(2\pi t_1 + 2t_2)$

(ii) La señal mostrada en la figura P3.70

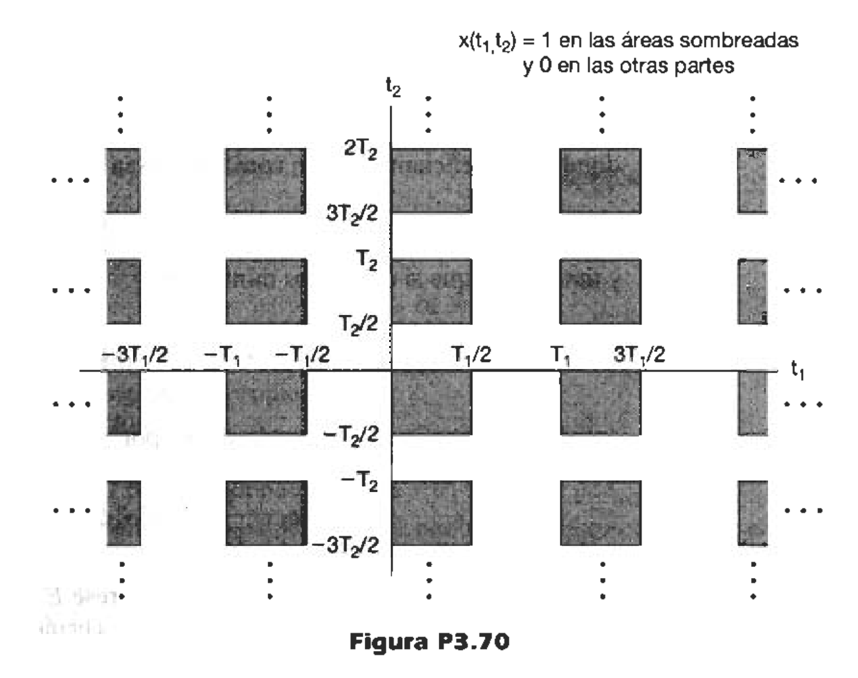


Figura P3.70

3.71. Considere el sistema mecánico mostrado en la figura P3.71. La ecuación diferencial que relaciona la velocidad $v(t)$ con la fuerza de entrada $f(t)$ está dada por

$$Bv(t) + K\int v(t)\,dt = f(t).$$

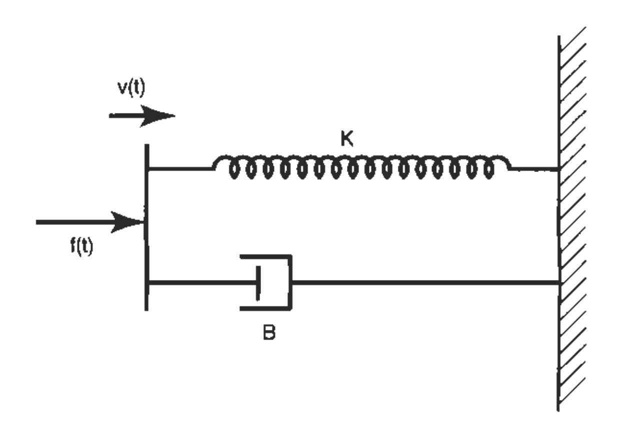


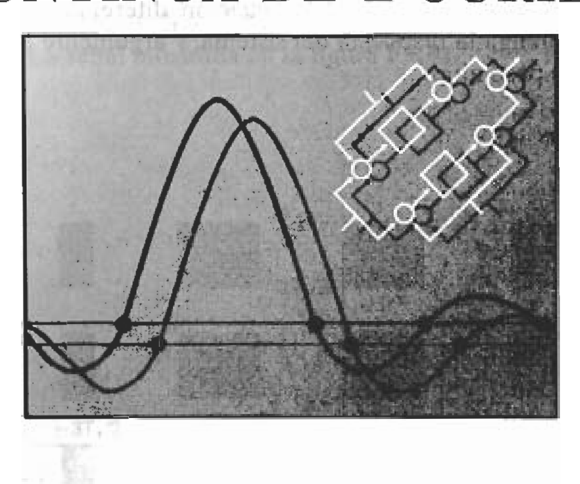
Figura P3.71

(a) Suponiendo que la salida es $f_s(t)$, la fuerza de compresión que actúa sobre el resorte, escriba la ecuación diferencial que relaciona a $f_s(t)$ con $f(t)$. Obtenga la respuesta en frecuencia del sistema, y argumente que se aproxima a la de un filtro paso bajas.

(b) Suponiendo que la salida es $f_d(t)$, la fuerza de compresión que actúa sobre el amortiguador, escriba la ecuación diferencial que relaciona a $f_d(t)$ con $f(t)$. Obtenga la respuesta del sistema, y argumente que se aproxima a la de un filtro paso altas.

4

LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER



4.0 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 3 desarrollamos una representación de señales periódicas como combinaciones lineales de exponenciales complejas. También vimos cómo se puede usar esta representación para describir el efecto de los sistemas LTI en las señales.

En éste y en el siguiente capítulo, extendemos estos conceptos para aplicarlos a señales que no son periódicas. Como veremos más adelante, una clase bastante grande de señales, que incluyen a todas las señales con energía finita, también se puede representar mediante una combinación lineal de exponenciales complejas. Mientras que para las señales periódicas las exponenciales complejas que las constituyen están relacionadas armónicamente, para las señales aperiódicas están infinitesimalmente cercanas en frecuencia, y la representación en términos de una combinación lineal adopta la forma de una integral en lugar de una suma. El espectro de coeficientes resultante en esta representación se conoce como transformada de Fourier, y la integral de síntesis por sí misma, la cual usa estos coeficientes para representar la señal como una combinación lineal de exponenciales complejas, se llama la transformada inversa de Fourier.

El desarrollo de esta representación para las señales aperiódicas continuas es una de las contribuciones más importantes de Fourier, y nuestro desarrollo de la transformada de Fourier es muy similar al que él usó en su trabajo original. En particular, Fourier razonó que una señal aperiódica puede considerarse como una señal periódica con un periodo infinito. De manera más precisa, en la representación en serie de Fourier de una señal periódica, conforme el periodo se incrementa, la frecuencia fundamental disminuye y las componentes relacionadas armónicamente se hacen más cercanas en frecuencia. A medida que el periodo se hace infinito, las componentes de frecuencia forman un continuo y la suma de la serie de Fourier se convierte en una integral. En la siguiente sección desarrollaremos la representación en serie de Fourier para señales aperiódicas continuas, y en las secciones posteriores nos apoyamos en este fundamento conforme exploramos

muchas de las importantes propiedades de la transformada continua de Fourier que conforman la cimentación de los métodos en el dominio de la frecuencia para señales y sistemas continuos. En el capítulo 5 planteamos este desarrollo en forma paralela para las señales discretas.

4.1 REPRESENTACIÓN DE SEÑALES APERIÓDICAS: LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

4.1.1 Desarrollo de la representación de la transformada de Fourier de una señal aperiódica

Para tener una idea sobre la naturaleza de la representación de la transformada de Fourier, comenzaremos por revisar la representación de la serie de Fourier para una onda cuadrada periódica continua, la cual se analizó en el ejemplo 3.5. Específicamente, sobre un periodo,

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

y se repite periódicamente con periodo T, como se muestra en la figura 4.1.

Como se determinó en el ejemplo 3.5, los coeficientes de la serie de Fourier a_k para esta onda cuadrada son

[ecuación (3.44)]
$$a_k = \frac{2\,\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}, \tag{4.1}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. En la figura 3.7, se mostró la gráfica de barras de estos coeficientes para un valor fijo de T_1 y para varios valores diferentes de T.

Una forma alternativa de interpretar la ecuación (4.1) es en forma de muestras de una función envolvente, en concreto,

$$Ta_k = \left.\frac{2\,\text{sen}\,\omega T_1}{\omega}\right|_{\omega = k\omega_0}. \tag{4.2}$$

Esto es, tomando a ω como una variable continua, la función $(2\,\text{sen}\omega T_1)/\omega$ representa la envolvente de Ta_k, y los coeficientes a_k son tan sólo muestras igualmente espaciadas de esta envolvente. También, para un valor fijo de T_1, la envolvente de Ta_k es independiente de T. En la figura 4.2 mostramos de nuevo los coeficientes de la serie de Fourier para la onda cuadrada periódica, pero esta vez como muestras de la envolvente Ta_k, como se especifica en la ecuación (4.2). A partir de la figura, vemos que a medida que T se incrementa, o de manera equivalente, a medida que la frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$ dis-

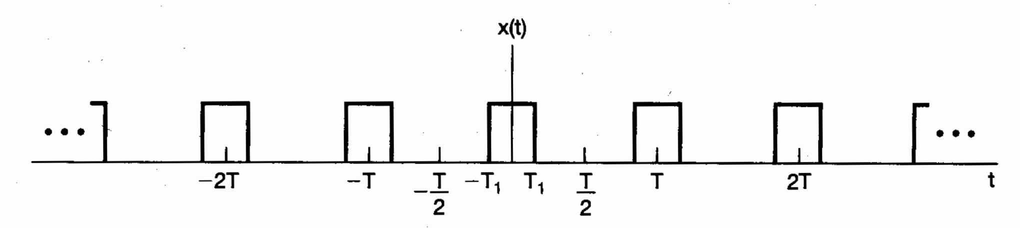


Figura 4.1 Una onda cuadrada periódica continua.

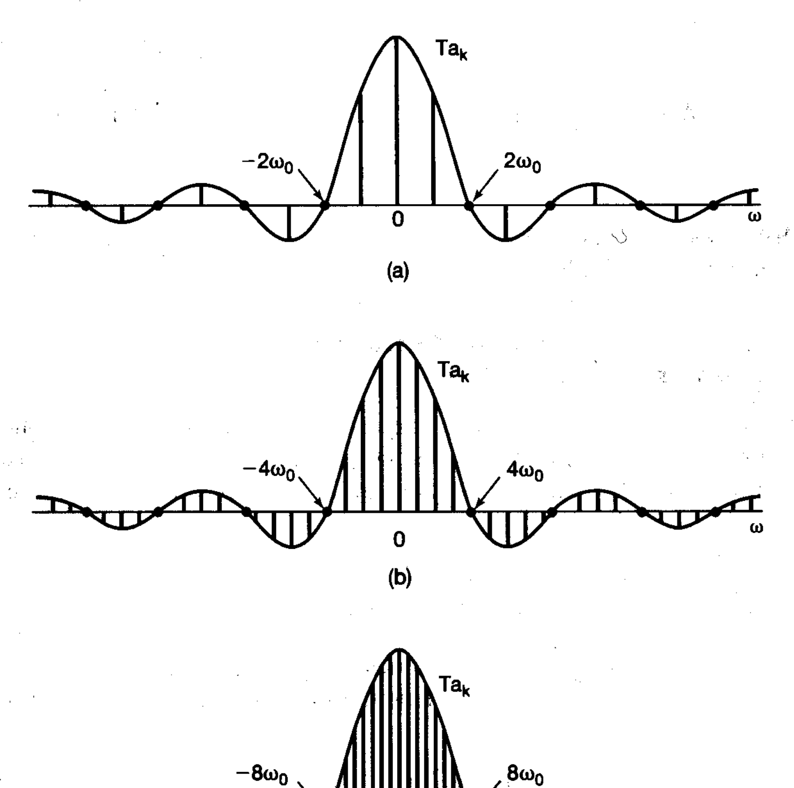
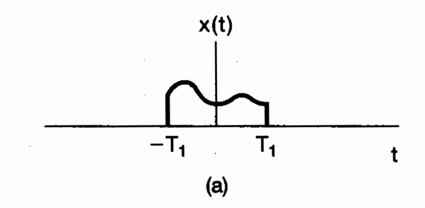


Figura 4.2 Los coeficientes de la serie de Fourier y su envolvente para la onda cuadrada periódica de la figura 4.1 para varios valores de T (con T_1 fijo): (a) $T = 4T_1$; (b) $T = 8T_1$; (c) $T = 16T_1$.

minuye, la envolvente es muestreada con un espaciamiento cada vez más estrecho. Conforme T se vuelve arbitrariamente grande, la onda cuadrada periódica original se aproxima a un pulso rectangular (es decir, todo lo que queda en el dominio del tiempo es una señal aperiódica que corresponde a un periodo de la onda cuadrada). Asimismo, los coeficientes de la serie de Fourier, multiplicados por T, se convierten en muestras de la envolvente con un espaciamiento cada vez más estrecho, de manera que en cierto sentido (el cual especificaremos en breve) el conjunto de coeficientes de la serie de Fourier se aproxima a la función de la envolvente a medida que $T \rightarrow \infty$.

Este ejemplo ilustra la idea básica que permitió a Fourier el desarrollo de una representación para señales aperiódicas. En forma específica, pensamos en un señal aperiódica como el límite de una señal periódica cuando el periodo se hace arbitrariamente grande, y examinamos el comportamiento limitante de la representación de la serie de Fourier para esta señal. En particular, considere una señal $x(t)$ cuya duración es finita. Es decir, para un número de T_1, $x(t) = 0$ si $|t| > T_1$, como se ilustra en la figura 4.3(a). A partir de esta señal aperiódica podemos construir una señal periódica $\tilde{x}(t)$ para la cual $x(t)$ sea un periodo, como se indica en la figura 4.3(b). Como hemos escogido el periodo T de tal manera que sea grande, $\tilde{x}(t)$ es idéntica a $x(t)$ sobre un intervalo largo, y conforme $T \rightarrow \infty$, $\tilde{x}(t)$ es igual a $x(t)$ para cualquier valor finito de t.

Examinemos ahora el efecto de esto sobre la representación en serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$. Rescribiendo por conveniencia las ecuaciones (3.38) y (3.39), con la integral en la



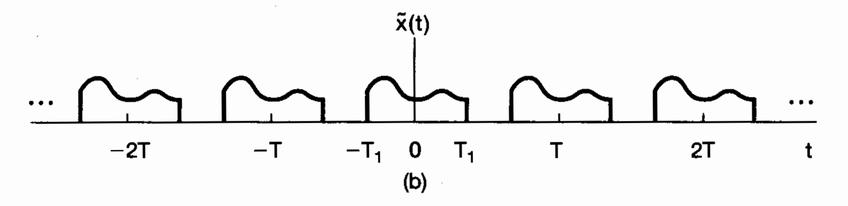


Figura 4.3 (a) Señal aperiódica $x(t)$; (b) señal periódica $\tilde{x}(t)$, construida para que sea igual a $x(t)$ en un periodo.

ecuación (3.39) efectuada sobre el intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$ tenemos

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \tag{4.3}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt, \tag{4.4}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. Ya que $\tilde{x}(t) = x(t)$ para $|t| < T/2$, y también, puesto que $x(t) = 0$ fuera de este intervalo, la ecuación (4.4) se puede rescribir como

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt.$$

Por tanto, definiendo la envolvente $X(j\omega)$ de Ta_k como

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt, \tag{4.5}$$

tenemos, para los coeficientes a_k,

$$a_k = \frac{1}{T}X(jk\omega_0). \tag{4.6}$$

Combinando las ecuaciones (4.6) y (4.3), $\tilde{x}(t)$ se puede expresar en términos de $X(j\omega)$ como

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}X(j\,k\omega_0)e^{jk\omega_0 t},$$

o de manera equivalente, ya que $2\pi/T = \omega_0$,

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0. \tag{4.7}$$

Cuando $T \to \infty$, $\tilde{x}(t)$ se aproxima a $x(t)$ y en consecuencia, la ecuación (4.7) en el límite se convierte en una representación de $x(t)$. Además, $\omega_0 \to 0$ conforme $T \to \infty$, y el miembro derecho de la ecuación (4.7) se vuelve una integral. Esto se puede ver al considerar la interpretación gráfica de la ecuación, la cual se muestra en la figura 4.4. Cada término en la sumatoria en el miembro derecho es el área de un rectángulo de altura $X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$ y ancho ω_0. (Aquí t se considera fijo.) Conforme $\omega_0 \to 0$, la sumatoria converge a la integral de $X(j\omega)e^{j\omega t}$. Por tanto, valiéndonos del hecho de que $\tilde{x}(t) \to x(t)$ conforme $T \to \infty$, vemos que las ecuaciones (4.7) y (4.5) se vuelven respectivamente

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega} \tag{4.8}$$

y

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt.} \tag{4.9}$$

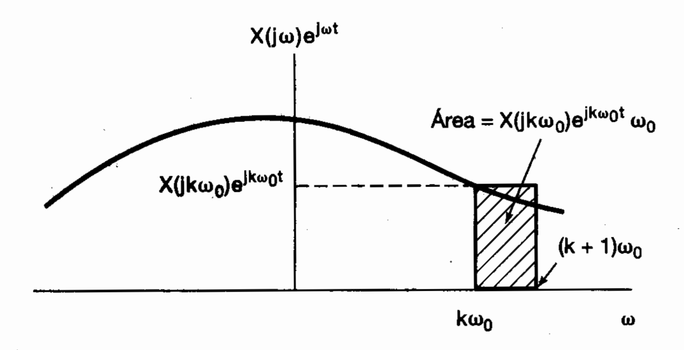


Figura 4.4 Interpretación gráfica de la ecuación (4.7).

Las ecuaciones (4.8) y (4.9) son conocidas como el *par de transformadas de Fourier*, cuya función $X(j\omega)$ se conoce como *transformada de Fourier* o *integral de Fourier* de $x(t)$, y la ecuación (4.8) como la ecuación de la *transformada inversa de Fourier*. La ecuación de *síntesis* (4.8) desempeña un papel, para las señales aperiódicas, similar al de la ecuación (3.38) para las señales periódicas, ya que ambas representan una señal como una combinación lineal de exponenciales complejas. Para señales periódicas, estas exponenciales complejas tienen amplitudes $\{a_k\}$ dadas en la ecuación (3.39), y ocurren en un conjunto discreto de frecuencias relacionadas armónicamente $k\omega_0$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Para señales aperiódicas, las exponenciales complejas ocurren en una sucesión continua de frecuencias y, de acuerdo con la ecuación de síntesis (4.8), tienen "amplitud" $X(j\omega)(d\omega/2\pi)$. En analogía con la terminología usada para los coeficientes de la serie de Fourier de una señal periódica, la transformada $X(j\omega)$ de una señal aperiódica $x(t)$ se conoce comúnmente como el *espectro* de $x(t)$, ya que nos proporciona la información necesaria para describir a $x(t)$ como una combinación lineal (específicamente, una integral) de señales senoidales a diferentes frecuencias.

Con base en el desarrollo anterior, o de forma equivalente, en una comparación de la ecuación (4.9) con la ecuación (3.39), observamos también que los coeficientes de Fourier a_k de una señal periódica $\tilde{x}(t)$ se pueden expresar en términos de *muestras* igualmente espaciadas de la transformada de Fourier de un periodo de $\tilde{x}(t)$. En forma especí-

fica, suponga que $\tilde{x}(t)$ es una señal periódica con periodo T y coeficientes de Fourier a_k. Sea $x(t)$ una señal de duración finita que es igual a $\tilde{x}(t)$ sobre exactamente un periodo (digamos, para $s \leq t \leq s + T$ para algún valor de s) y es cero en otro valor. Entonces, puesto que la ecuación (3.39) nos permite calcular los coeficientes de Fourier de $\tilde{x}(t)$ al integrar sobre cualquier periodo, podemos escribir

$$a_k = \frac{1}{T}\int_s^{s+T} \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_s^{s+T} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt.$$

Ya que $x(t)$ es cero fuera del intervalo $s \leq t \leq s + T$ podemos, de manera equivalente, escribir

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt.$$

Comparándolo con la ecuación (4.9), concluimos que

$$a_k = \frac{1}{T}X(j\omega)\bigg|_{\omega = k\omega_0}, \tag{4.10}$$

donde $X(j\omega)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$. La ecuación (4.10) establece que los coeficientes de Fourier de $\tilde{x}(t)$ son proporcionales a las muestras de la transformada de Fourier de un periodo de $\tilde{x}(t)$. Este hecho, el cual se usa a menudo en la práctica, se analiza aún más en el problema 4.37.

4.1.2 Convergencia de las transformadas de Fourier

Si bien el argumento que empleamos al deducir el par de las transformadas de Fourier suponía que $x(t)$ era de duración arbitraria pero finita, las ecuaciones (4.8) y (4.9) siguen siendo válidas para una clase extremadamente amplia de señales de duración infinita. De hecho, nuestra deducción de la transformada de Fourier sugiere que un conjunto de condiciones como las que se requieren para la convergencia de la serie de Fourier también deberían ser aplicables en este caso, y en efecto es posible demostrar que así es.[1] Específicamente, considere que $X(j\omega)$ se evalúa de acuerdo con la ecuación (4.9) y sea $\hat{x}(t)$ la señal que se obtiene al usar $X(j\omega)$ en el miembro derecho de la ecuación (4.8). Esto es,

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

Lo que nos gustaría saber es bajo qué condiciones la ecuación (4.8) es válida [es decir, ¿cuándo $\hat{x}(t)$ es una representación válida de la señal original $x(t)$?]. Si $x(t)$ tiene energía finita es decir, si es integrable al cuadrado de manera que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty, \tag{4.11}$$

entonces tenemos la garantía de que $X(j\omega)$ es finita [es decir, la ecuación (4.9) converge] y de que, con $e(t)$ denotando el error entre $\hat{x}(t)$ y $x(t)$ [es decir, $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$],

[1]Para un análisis matemáticamente riguroso de la transformada de Fourier, sus propiedades y aplicaciones, vea R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications, 2ª ed.* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1986); A. Papoulis, *The Fourier Integral and Its Applications* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1987); E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford: Clarendon Press, 1948); y el libro de Dym y McKean cuya referencia se proporciona en la nota 2 del capítulo 3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e(t)|^2 dt = 0. \tag{4.12}$$

Las ecuaciones (4.11) y (4.12) son las contrapartes aperiódicas de las ecuaciones (3.51) y (3.54) para señales periódicas. Por tanto, como sucede con las señales periódicas, si $x(t)$ tiene energía finita, entonces, aunque $x(t)$ y su representación de Fourier $\hat{x}(t)$ puedan diferir significativamente para valores individuales de t, no hay energía en su diferencia.

Al igual que con las señales periódicas, hay un conjunto alternativo de condiciones que son suficientes para asegurar que $\hat{x}(t)$ sea igual a $x(t)$ para cualquier t excepto en una discontinuidad, en donde es igual al promedio de los valores en cualquier lado de la discontinuidad. Estas condiciones, a las que nos referiremos también como condiciones de Dirichlet, requieren que:

1. $x(t)$ sea absolutamente integrable, esto es,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty. \tag{4.13}$$

2. $x(t)$ tenga un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito.
3. $x(t)$ tenga un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito. Además, cada una de estas discontinuidades debe ser finita.

Por tanto, las señales absolutamente integrables que son continuas o que tienen un número finito de discontinuidades tienen transformada de Fourier.

Si bien los dos conjuntos alternativos de condiciones que hemos dado son suficientes para garantizar que una señal tenga transformada de Fourier, veremos que en la siguiente sección podremos considerar que las señales periódicas, las cuales no son absolutamente integrables ni integrables al cuadrado sobre un intervalo *finito*, tienen transformadas de Fourier si se permiten funciones impulso en la transformada. Esto tiene la ventaja de que la serie de Fourier y la transformada de Fourier pueden ser incorporadas en un marco de referencia común, que encontraremos muy conveniente en los capítulos subsecuentes. Antes de examinar más este punto en la sección 4.2, consideremos primero varios ejemplos de la transformada de Fourier.

4.1.3 Ejemplos de transformadas continuas de Fourier

Ejemplo 4.1

Considere la señal

$$x(t) = e^{-at} u(t) \quad a > 0.$$

De la ecuación (4.9),

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}.$$

Esto es,

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0.$$

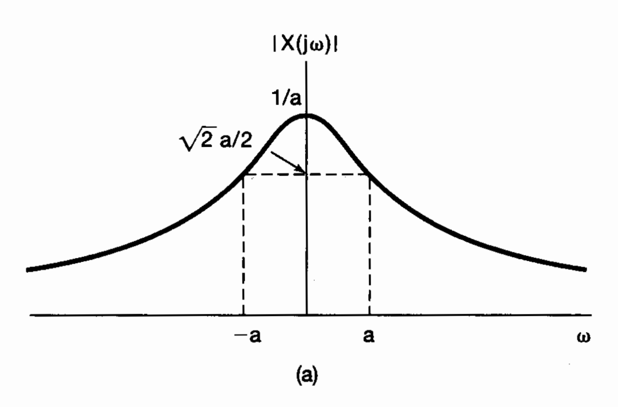
Puesto que esta transformada de Fourier tiene valor complejo, para graficarla en función de ω expresamos $X(j\omega)$ en términos de su magnitud y de su fase:

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \qquad \sphericalangle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

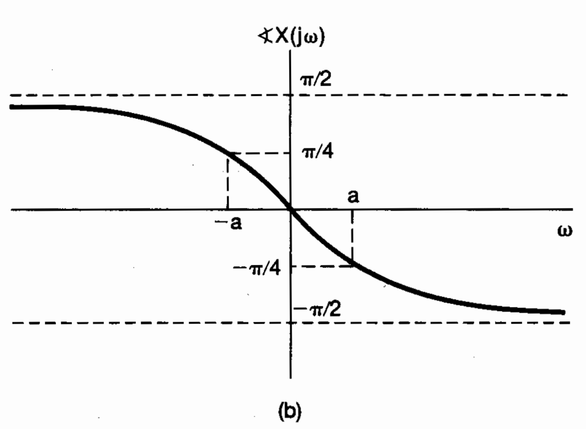
Cada una de esas componentes está bosquejada en la figura 4.5.

Observe que si a es compleja en lugar de real, entonces $x(t)$ es absolutamente integrable en tanto $\mathcal{R}e\{a\} > 0$, y en este caso el cálculo precedente proporciona la misma forma para $X(j\omega)$. Esto es,

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \qquad \mathcal{R}e\{a\} > 0.$$



(a)



(b)

Figura 4.5 transformada de Fourier de la señal $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$, examinada en el ejemplo 4.1.

Ejemplo 4.2



Sea

$$x(t) = e^{-a|t|}, a > 0.$$

Esta señal está representada en la figura 4.6. La transformada de Fourier de esta señal es

$$
\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\,dt \\
&= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \\
&= \frac{2a}{a^2+\omega^2}.
\end{aligned}
$$

En este caso, $X(j\omega)$ es real y se ilustra en la figura 4.7.

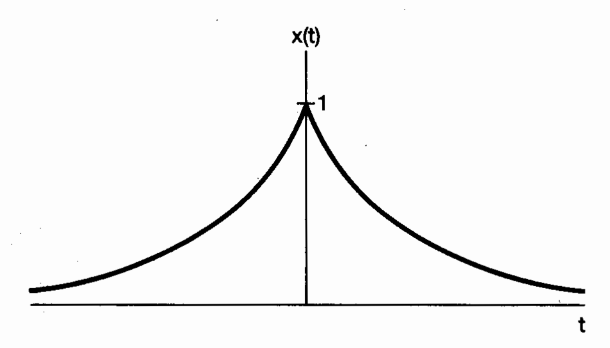


Figura 4.6 Señal $x(t) = e^{-a|t|}$ del ejemplo 4.2.

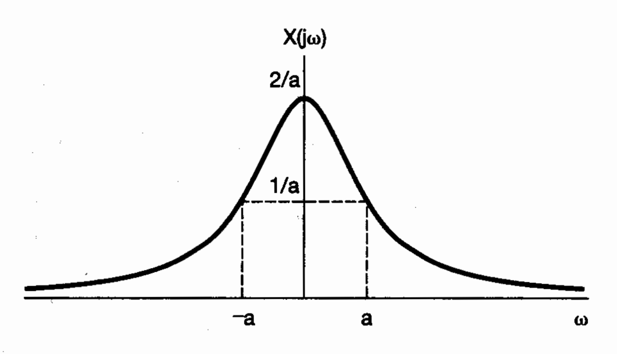


Figura 4.7 Transformada de Fourier de la señal examinada en el ejemplo 4.2 y trazada en la figura 4.6.

Ejemplo 4.3

Determinemos ahora la transformada de Fourier del impulso unitario

$$x(t) = \delta(t). \tag{4.14}$$

Sustituyendo en la ecuación (4.9) obtenemos

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1. \tag{4.15}$$

Esto es, el impulso unitario tiene una transformada de Fourier que consiste de contribuciones iguales en *todas* las frecuencias.

Ejemplo 4.4

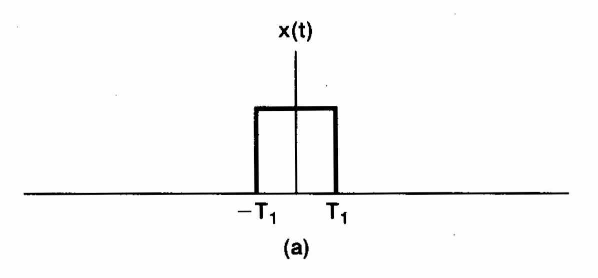
Considere la señal en forma de pulso rectangular

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}, \tag{4.16}$$

como se muestra en la figura 4.8(a). Aplicando la ecuación (4.9) encontramos que la transformada de Fourier de esta señal es

$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2\frac{\text{sen } \omega T_1}{\omega}, \tag{4.17}$$

como se muestra en la figura 4.8(b).



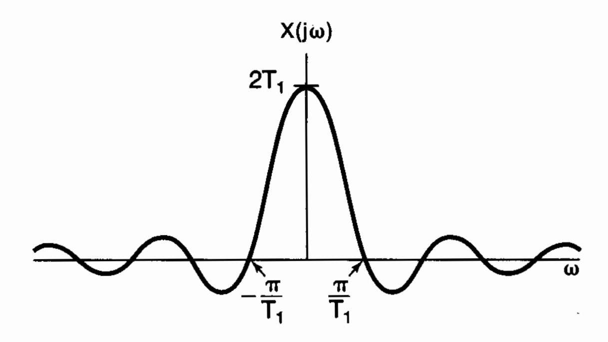


Figura 4.8 (a) Señal de pulso rectangular del ejemplo 4.4 y (b) su transformada de Fourier.

Como mencionamos al inicio de esta sección, la señal dada por la ecuación (4.16) se puede considerar como la forma límite de una onda periódica cuadrada cuando el periodo se hace arbitrariamente grande. Por tanto, podemos esperar que la convergencia de la ecuación de síntesis para esta señal se comporte de manera similar a la observada en el ejemplo 3.5 para la onda cuadrada. Éste es, en efecto, el caso. Específicamente, considere la transformada inversa de Fourier para la señal de pulso rectangular:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\frac{\text{sen } \omega T_1}{\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

Entonces, dado que $x(t)$ es integrable al cuadrado,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 \, dt = 0.$$

Más aún, debido a que $x(t)$ satisface las condiciones de Dirichlet, $\hat{x}(t) = x(t)$, excepto en los puntos de discontinuidad, $t = \pm T_1$, donde $\hat{x}(t)$ converge a 1/2, lo cual es el promedio de los valores de $x(t)$ en ambos lados de la discontinuidad. Adicionalmente, la convergencia de $\hat{x}(t)$ a $x(t)$ presenta el fenómeno de Gibbs, de manera muy semejante a como se mostró para la onda cuadrada periódica en la figura 3.9. Específicamente, en analogía con la aproximación en serie finita de Fourier de la ecuación (3.47), considere la siguiente integral sobre un intervalo de frecuencias de longitud finita:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} 2\,\frac{\operatorname{sen} \omega T_1}{\omega}\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

A medida que $W \to \infty$, esta señal converge a $x(t)$ en todos lados excepto en las discontinuidades. Por otra parte, esta señal presenta rizos cerca de las discontinuidades. La amplitud pico de dichos rizos no disminuye al aumentar W, aunque éstos se comprimen hacia la discontinuidad y su energía converge a cero.

Ejemplo 4.5

Considere la señal $x(t)$ cuya transformada de Fourier es

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}. \tag{4.18}$$

Esta transformada se ilustra en la figura 4.9(a). Usando la ecuación de síntesis (4.8)

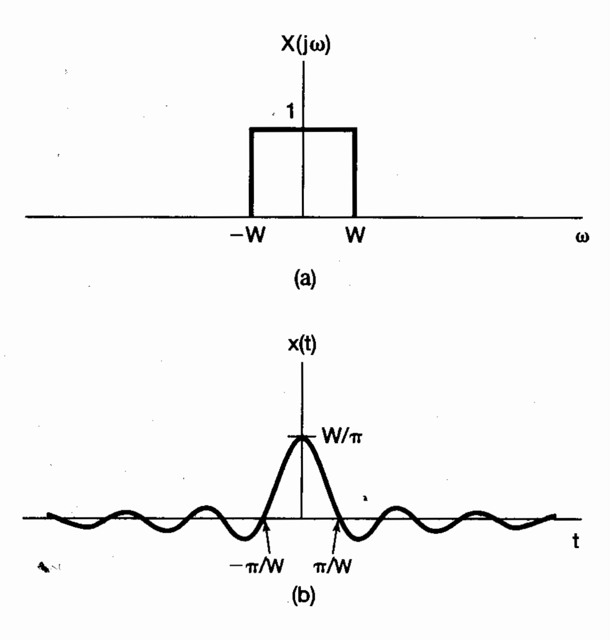


Figura 4.9 Par de transformadas de Fourier del ejemplo 4.5: (a) transformada de Fourier del ejemplo 4.5 y (b) la correspondiente función en el tiempo.

podemos determinar

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t}d\omega = \frac{\text{sen } Wt}{\pi t}, \tag{4.19}$$

la cual está representada en la figura 4.9(b).

Comparando las figuras 4.8 y 4.9 o, de forma equivalente, las ecuaciones (4.16) y (4.17) con las ecuaciones (4.18) y (4.19), vemos una interesante relación. En cada caso, el par de transformadas de Fourier consiste de una función de la forma (sen $a\theta)/b\theta$ y un pulso rectangular. Sin embargo, en el ejemplo 4.4, es la *señal* $x(t)$ la que consiste en un pulso, mientras que en el ejemplo 4.5, es la *transformada* $X(j\omega)$. La relación especial que se hace patente aquí, es una consecuencia directa de la *propiedad de dualidad* de las transformadas de Fourier, la cual analizaremos con detalle en la sección 4.3.6.

Las funciones dadas en las ecuaciones (4.17) y (4.19) surgen con frecuencia en el análisis de Fourier y en el estudio de sistemas LTI, y se conocen como *funciones sinc.* Una forma precisa de uso común para la función sinc es

$$\text{sinc}(\theta) = \frac{\text{sen } \pi\theta}{\pi\theta}. \tag{4.20}$$

La función sinc está trazada en la figura 4.10. Las señales de las ecuaciones (4.17) y (4.19) se pueden expresar en términos de la función sinc:

$$\frac{2 \text{ sen } \omega T_1}{\omega} = 2T_1 \text{ sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$\frac{\text{sen } Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right).$$

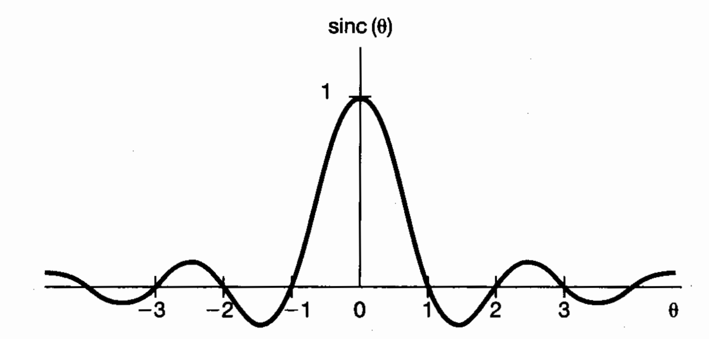


Figura 4.10 La función sinc.

Por último, podemos obtener conocimientos acerca de otra propiedad de la transformada de Fourier examinando la figura 4.9, la cual hemos redibujado como la figura 4.11 para diferentes valores de W. A partir de esta figura podemos ver que conforme W se incrementa, $X(j\omega)$ se vuelve más ancha, en tanto que el pico principal de $x(t)$ en $t = 0$ se hace más alto y el ancho del primer lóbulo de esta señal (es decir, la parte de la señal para $|t| < \pi/W$) se hace más angosto. De hecho, en el límite cuando $W \to \infty$, $X(j\omega) = 1$ para toda W, y en consecuencia, a partir del ejemplo 4.3 vemos que $x(t)$ en la ecuación (4.19) converge a un impulso cuando $W \to \infty$. El comportamiento representado en la figura 4.11 es un ejemplo de la relación inversa que existe entre los dominios del tiempo y de la fre-

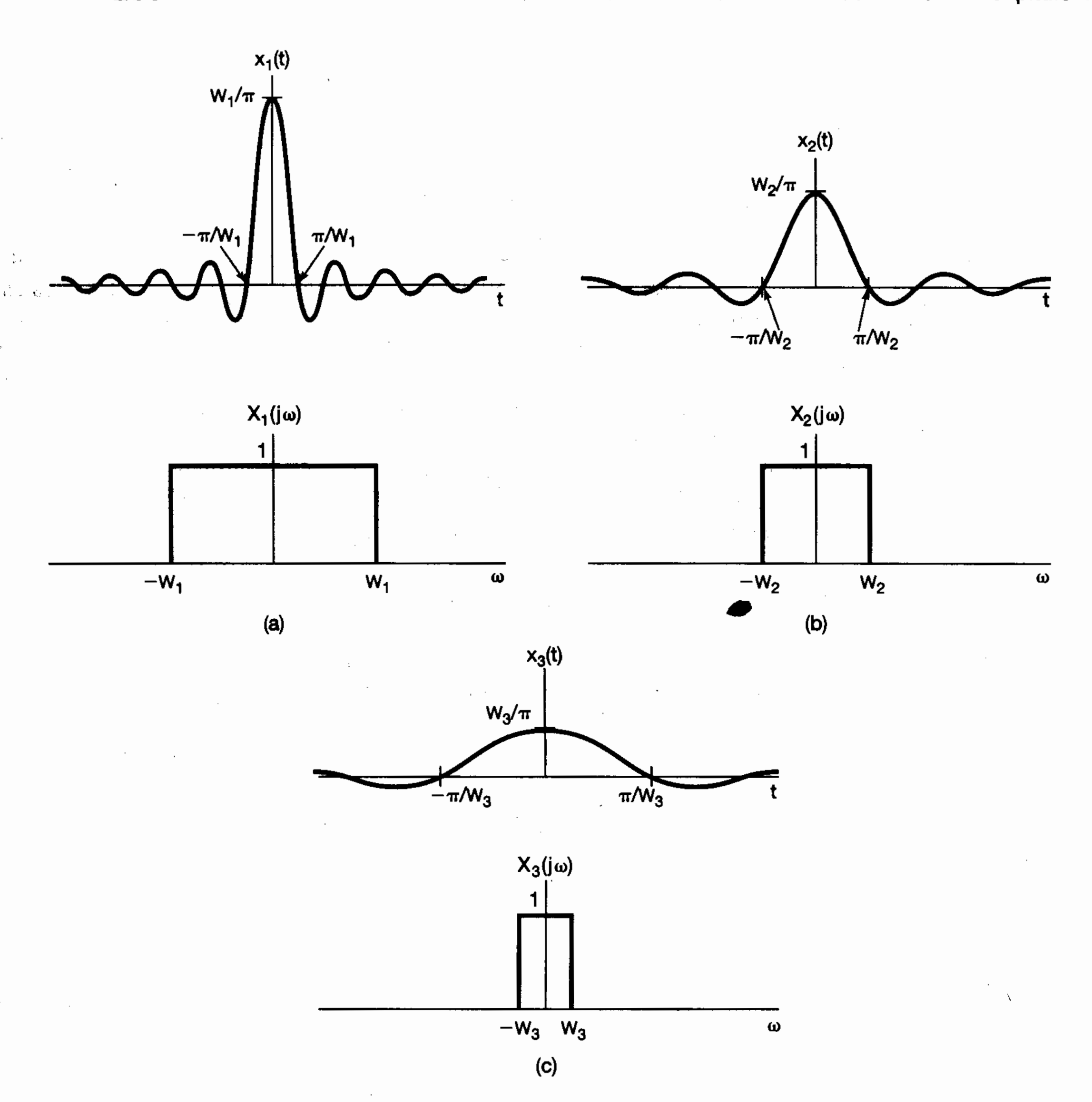


Figura 4.11 Par de transformadas de Fourier de la figura 4.9 para diferentes valores de W.

cuencia, y podemos ver un efecto similar en la figura 4.8, donde un incremento en T_1 ensancha a $x(t)$ pero hace más angosta a $X(j\omega)$. En la sección 4.3.5 proporcionamos una explicación de este comportamiento en el contexto de la propiedad de escalamiento de la transformada de Fourier.

4.2 LA TRANSFORMADA DE FOURIER PARA SEÑALES PERIÓDICAS

En la sección anterior desarrollamos la representación de la transformada de Fourier y dimos varios ejemplos. Si bien nuestra atención se enfocó en las señales aperiódicas, pudimos también desarrollar las representaciones de la transformada de Fourier para señales periódicas, lo cual nos permitió considerar tanto señales periódicas como aperiódicas dentro de un contexto unificado. De hecho, como veremos más adelante, podemos cons-

truir de forma directa la transformada de Fourier de una señal periódica a partir de su representación en serie de Fourier. La transformada resultante consiste en un tren de impulsos en el dominio de la frecuencia, con las áreas de los impulsos proporcionales a los coeficientes de la serie de Fourier. Ésta será una representación muy útil.

Para sugerir el resultado general, consideremos una señal $x(t)$ con transformada de Fourier $X(j\omega)$ que consiste en un solo impulso de área 2π en $\omega = \omega_0$; esto es,

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \tag{4.21}$$

Para determinar la señal $x(t)$ de la cual ésta es la transformada de Fourier, podemos aplicar la relación de la transformada inversa, ecuación (4.8), para obtener

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega \\ &= e^{j\omega_0 t}. \end{aligned}$$

De manera más general, si $X(j\omega)$ es de la forma de una combinación lineal de impulsos igualmente espaciados en frecuencia, esto es,

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\delta(\omega - k\omega_0), \tag{4.22}$$

entonces la aplicación de la ecuación (4.8) nos da

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}. \tag{4.23}$$

Vemos que la ecuación (4.23) corresponde exactamente a la representación de la *serie* de Fourier de una señal periódica, según se especifica en la ecuación (3.38). Por tanto, la transformada de Fourier de una señal periódica con coeficientes de la serie de Fourier $\{a_k\}$ se puede interpretar como un tren de impulsos que ocurren a las frecuencias relacionadas armónicamente y para las cuales el área del impulso en la $k$ésima frecuencia armónica $k\omega_0$ es 2π veces el $k$ésimo coeficiente de la serie de Fourier a_k.

Ejemplo 4.6

Considere de nuevo la onda cuadrada ilustrada en la figura 4.1. Los coeficientes de la serie de Fourier para esta señal son

$$a_k = \frac{\operatorname{sen} k\omega_0 T_1}{\pi k},$$

y su transformada de Fourier es

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\operatorname{sen} k\omega_0 T_1}{k}\delta(\omega - k\omega_0),$$

la cual está representada en la figura 4.12 para $T = 4T_1$. En comparación con la figura 3.7(a), las únicas diferencias son un factor de proporcionalidad de 2π y el uso de impulsos en lugar de una gráfica de barras.

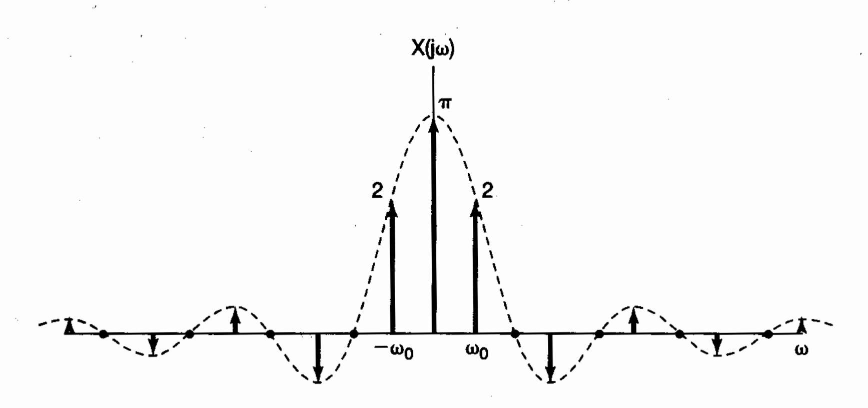


Figura 4.12 Transformada de Fourier de una onda cuadrada periódica simétrica.

Ejemplo 4.7

Sea

$$x(t) = \text{sen}\,\omega_0 t.$$

Los coeficientes de la serie de Fourier para esta señal son

$$a_1 = \frac{1}{2j},$$

$$a_{-1} = -\frac{1}{2j},$$

$$a_k = 0, \qquad k \neq 1 \quad \text{o} \quad -1.$$

De este modo, la transformada de Fourier es como se muestra en la figura 4.13(a). De manera similar, para

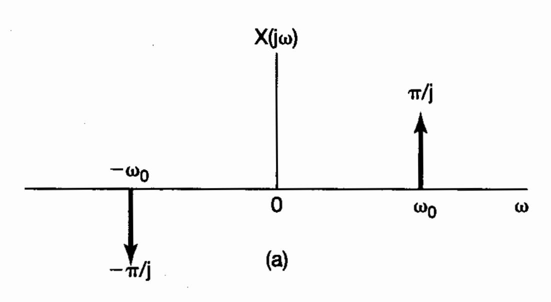
$$x(t) = \cos \omega_0 t,$$

los coeficientes de la serie de Fourier son

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2},$$

$$a_k = 0, \qquad k \neq 1 \quad \text{o} \quad -1.$$

La transformada de Fourier de esta señal está descrita en la figura 4.13(b). Estas dos transformadas serán de gran importancia cuando analicemos sistemas de modulación senoidal en el capítulo 8.



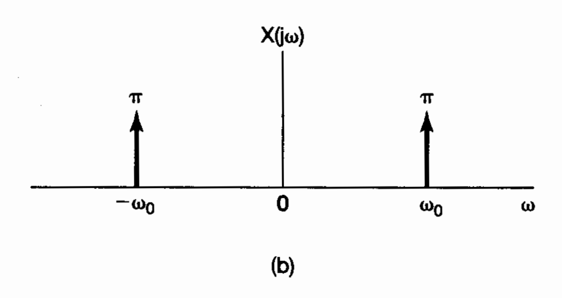


Figura 4.13 Transformadas de Fourier de (a) $x(t)$ = sen $\omega_0 t$; (b) $x(t) = \cos \omega_0 t$.

Ejemplo 4.8

Una señal que será en extremo útil en nuestro análisis de sistemas de muestreo en el capítulo 7 es el tren de impulsos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT),$$

el cual es periódico con periodo T, como se indica en la figura 4.14(a). Los coeficientes de la serie de Fourier para esta señal se calcularon en el ejemplo 3.8 y están dados por

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}.$$

Esto es, cada coeficiente de Fourier del tren de impulsos periódico tiene el mismo valor, $1/T$. Sustituyendo este valor para a_k en la ecuación (4.22) obtenemos

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right).$$

Así, la transformada de Fourier de un tren de impulsos periódico en el dominio del tiempo con periodo T es un tren de impulsos periódico en el dominio de la frecuencia con periodo $2\pi/T$, como se muestra en la figura 4.14(b). Aquí, nuevamente, vemos una ilustración de la relación inversa que hay entre los dominios del tiempo y de la frecuencia. Conforme el espaciamiento entre los impulsos en el dominio del tiempo (es decir, el periodo) se hace más grande, el espaciamiento entre los impulsos en el dominio de la frecuencia (la frecuencia fundamental) se hace más pequeño.

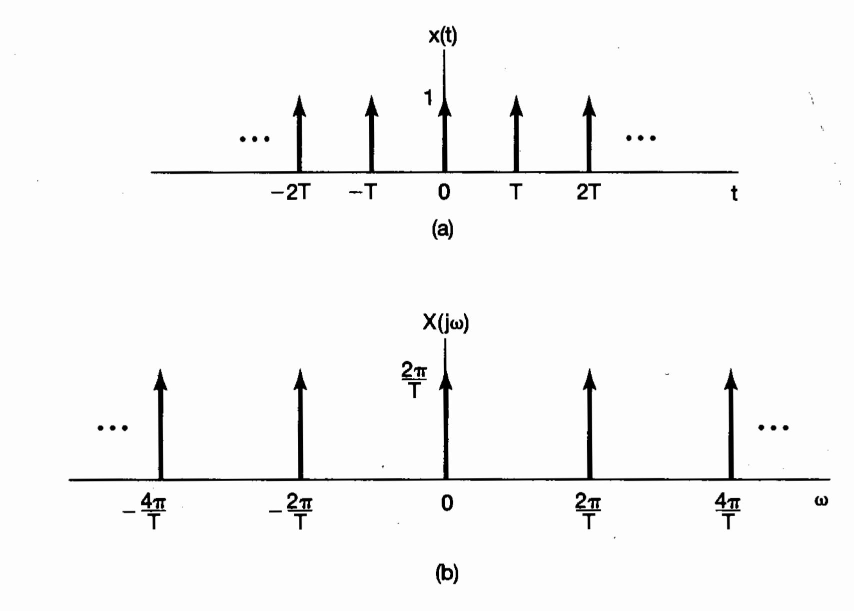


Figura 4.14 (a) Tren de impulsos periódico; (b) su transformada de Fourier.

4.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

En ésta y en las siguientes dos secciones, consideraremos varias propiedades de la transformada de Fourier. En la tabla 4.1 de la sección 4.6 proporcionamos un listado detallado de estas propiedades. Al igual que en el caso de la representación en serie de Fourier de señales periódicas, estas propiedades nos proporcionan un gran conocimiento acerca de la transformada y de la relación que existe entre las descripciones de una señal en los dominios del tiempo y de la frecuencia. Además, muchas de estas propiedades son a menudo útiles para reducir la complejidad en la evaluación de las transformadas o de las transformadas inversas de Fourier. Más aún, como se describió en la sección anterior, existe una relación muy estrecha entre las representaciones de la serie de Fourier y de la transformada de Fourier de una señal periódica, y usando esta relación es posible trasladar muchas de las propiedades de las transformadas de Fourier hacia las propiedades correspondientes de las series de Fourier, las cuales analizamos de manera independiente en el capítulo 3. (Vea, en particular, la sección 3.5 y la tabla 3.1.)

A lo largo del análisis en esta sección, nos remitiremos con frecuencia a funciones de tiempo y sus transformadas de Fourier, por lo cual encontraremos conveniente usar una notación sintética para indicar la relación entre una señal y su transformada. De acuerdo con lo desarrollado en la sección 4.1, una señal $x(t)$ y su transformada de Fourier $X(j\omega)$ están relacionadas mediante las ecuaciones de síntesis y de análisis de la transformada de Fourier

[ecuación (4.8)]
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{4.24}$$

y

[ecuación (4.9)]
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{4.25}$$

En ocasiones resultará conveniente aludir a $X(j\omega)$ mediante la notación $\mathfrak{F}\{x(t)\}$ y a $x(t)$ con la notación $\mathfrak{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$. También nos referiremos a $x(t)$ y $X(j\omega)$ como un par de transformadas de Fourier mediante la notación

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega).$$

Por tanto, en relación con el ejemplo 4.1,

$$\frac{1}{a + j\omega} = \mathfrak{F}\{e^{-at}u(t)\},$$

$$e^{-at}u(t) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a + j\omega}\right\},$$

y

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a + j\omega}.$$

4.3.1 Linealidad

Si

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

y

$$y(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega),$$

entonces

$$\boxed{ax(t) + by(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} aX(j\omega) + bY(j\omega).} \tag{4.26}$$

La prueba de la ecuación (4.26) se obtiene de forma directa aplicando la ecuación de análisis (4.25) a $ax(t) + by(t)$. La propiedad de linealidad se extiende fácilmente a una combinación lineal de un número arbitrario de señales.

4.3.2 Desplazamiento de tiempo

Si

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega),$$

entonces

$$\boxed{x(t - t_0) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0}X(j\omega).} \tag{4.27}$$

Para establecer esta propiedad, considere la ecuación (4.24):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\, d\omega.$$

Reemplazando t con $t - t_0$ en esta ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} x(t - t_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-j\omega t_0}X(j\omega)\right) e^{j\omega t}\, d\omega. \end{aligned}$$

Reconociendo ésta como la ecuación de síntesis para $x(t - t_0)$, concluimos que

$$\mathfrak{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}X(j\omega).$$

Una consecuencia de la propiedad de desplazamiento es que una señal que es desplazada en tiempo no tiene alterada la *magnitud* de su transformada de Fourier. Esto es, si expresamos $X(j\omega)$ en forma polar como

$$\mathfrak{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\sphericalangle X(j\omega)},$$

entonces

$$\mathfrak{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j[\sphericalangle X(j\omega) - \omega t_0]},$$

De esta manera, el efecto de un desplazamiento en el tiempo de una señal es introducir en su transformada un desplazamiento de fase, esto es, $-\omega t_0$, la cual es una función de ω.

Ejemplo 4.9

Para ilustrar la utilidad de las propiedades de linealidad y desplazamiento de tiempo de la transformada de Fourier, consideremos la evaluación de la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ que se muestra en la figura 4.15(a).

Primero, observemos que $x(t)$ se puede expresar como la combinación lineal

$$x(t) = \frac{1}{2}x_1(t - 2.5) + x_2(t - 2.5),$$

donde las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las señales de pulso rectangular mostradas en las figuras 4.15(b) y (c). Entonces, usando el resultado del ejemplo 4.4, obtenemos

$$X_1(j\omega) = \frac{2\,\mathrm{sen}(\omega/2)}{\omega} \quad \text{y} \quad X_2(j\omega) = \frac{2\,\mathrm{sen}(3\omega/2)}{\omega}.$$

Finalmente, utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento de tiempo de la transformada de Fourier obtenemos

$$X(j\omega) = e^{-j5\omega/2}\left\{\frac{\mathrm{sen}(\omega/2) + 2\,\mathrm{sen}(3\omega/2)}{\omega}\right\}.$$

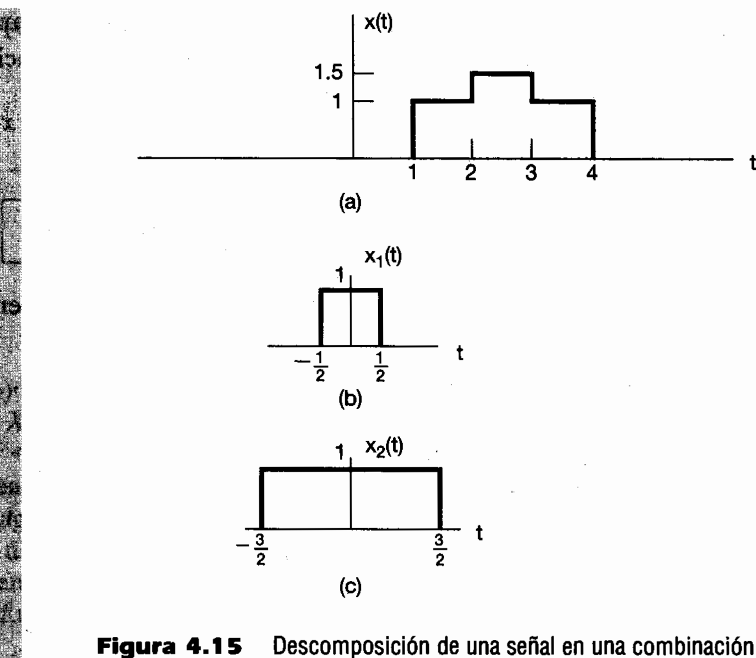


Figura 4.15 Descomposición de una señal en una combinación lineal de dos señales más sencillas. (a) La señal $x(t)$ del ejemplo 4.9; (b) y (c) las dos señales componentes usadas para representar a $x(t)$.

4.3.3 Conjugación y simetría conjugada

La propiedad de conjugación establece que si

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega),$$

entonces

$$\boxed{x^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-j\omega).} \tag{4.28}$$

Esta propiedad resulta de la evaluación del conjugado complejo de la ecuación (4.25):

$$\begin{aligned} X^*(j\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt\right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{j\omega t}\,dt. \end{aligned}$$

Reemplazando ω con $-\omega$, vemos que

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}\,dt. \tag{4.29}$$

Si reconocemos que el miembro derecho de la ecuación (4.29) es la ecuación de análisis de la transformada de Fourier para $x^*(t)$, obtenemos la relación proporcionada por la ecuación (4.28).

La propiedad de conjugación nos permite mostrar que si $x(t)$ es real, entonces $X(j\omega)$ tiene *simetría conjugada*; esto es,

$$\boxed{X(-j\omega) = X^*(j\omega) \quad [x(t) \text{ real}].} \tag{4.30}$$

Específicamente, si $x(t)$ es real de manera que $x^*(t) = x(t)$, tenemos, de la ecuación (4.29),

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\omega t}\,dt = X(j\omega),$$

y se obtiene la ecuación (4.30) al reemplazar ω por $-\omega$.

Del ejemplo 4.1, con $x(t) = e^{-at}u(t)$,

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

y

$$X(-j\omega) = \frac{1}{a - j\omega} = X^*(j\omega).$$

Como una consecuencia de la ecuación (4.30), si expresamos $X(j\omega)$ en forma rectangular como

$$X(j\omega) = \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} + j\mathcal{I}m\{X(j\omega)\},$$

entonces, si $x(t)$ es real,

$$\mathcal{R}e\{X(j\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(-j\omega)\}$$

y

$$\mathcal{I}m\{X(j\omega)\} = -\mathcal{I}m\{X(-j\omega)\}.$$

Esto es, la parte real de la transformada de Fourier es una función *par* de la frecuencia y la parte imaginaria es una función impar de la frecuencia. De manera similar, si expresamos $X(j\omega)$ en forma polar como

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\sphericalangle X(j\omega)}$$

entonces, de la ecuación (4.30), podemos inferir que $|X(j\omega)|$ es una función par de ω y $\sphericalangle X(j\omega)$ es una función impar de ω. Por tanto, cuando se calcula o se despliega la transformada de Fourier de una señal de valor real, las partes real e imaginaria o la magnitud y fase de la transformada sólo necesitan ser especificadas para frecuencias positivas, ya que los valores para frecuencias negativas pueden determinarse directamente a partir de los valores para $\omega > 0$ usando la relación que acabamos de desarrollar.

Como una consecuencia adicional de la ecuación (4.30), si $x(t)$ es tanto real como par, entonces $X(j\omega)$ también será real y par. Para ver esto, escribimos

$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\omega t}\,dt,$$

o, con la sustitución de las variables $\tau = -t$,

$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau.$$

Ya que $x(-\tau) = x(\tau)$, tenemos

$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$
$$= X(j\omega).$$

Así, $X(j\omega)$ es una función par. Esto, junto con la ecuación (4.30), también requiere que $X^*(j\omega) = X(j\omega)$ [es decir, que $X(j\omega)$ sea real]. El ejemplo 4.2 ilustra esta propiedad para la señal $e^{-a|t|}$, la cual es real y par. En forma similar, puede demostrarse que si $x(t)$ es una función real e impar del tiempo, de manera que $x(t) = -x(-t)$, entonces $X(j\omega)$ es puramente imaginaria e impar.

Por último, como vimos en el capítulo 1, una función real $x(t)$ siempre se puede expresar en términos de la suma de una función par $x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ y una función impar $x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$, esto es,

$$X(t) = x_e(t) + x_o(t).$$

A partir de la linealidad de la transformada de Fourier,

$$\mathfrak{F}\{x(t)\} = \mathfrak{F}\{x_e(t)\} + \mathfrak{F}\{x_o(t)\},$$

y a partir del análisis anterior, $\mathfrak{F}\{x_e(t)\}$ es una función real y $\mathfrak{F}\{x_o(t)\}$ es puramente imaginaria. Entonces, podemos concluir que con $x(t)$ real

$$x(t) \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega),$$

$$\mathcal{E}v\{x(t)\} \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \mathcal{R}e\{X(j\omega)\},$$

$$\mathcal{O}d\{x(t)\} \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} j\mathcal{I}m\{X(j\omega)\}.$$

En el siguiente ejemplo mostramos un uso de estas propiedades de simetría.

Ejemplo 4.10

Considere de nuevo la evaluación de la transformada de Fourier del ejemplo 4.2 para la señal $x(t) = e^{-a|t|}$, donde $a > 0$. Esta vez utilizaremos las propiedades de simetría de la transformada de Fourier como ayuda en el proceso de evaluación.

Del ejemplo 4.1, tenemos

$$e^{-at}u(t) \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a + j\omega}.$$

Observe que para $t > 0$, $x(t)$ es igual a $e^{-at}u(t)$, mientras que para $t < 0$, $x(t)$ toma los valores de su reflejo. Esto es,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \\ &= 2\left[\frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2}\right] \\ &= 2\mathcal{E}v\{e^{-at}u(t)\}. \end{aligned}$$

Ya que $e^{-at}u(t)$ es de valor real, las propiedades de simetría de la transformada de Fourier nos llevan a concluir que

$$\mathcal{E}v\{e^{-at}u(t)\} \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \mathcal{R}e\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\}.$$

De lo cual se desprende que

$$X(j\omega) = 2\,\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2},$$

la cual es la misma que la respuesta encontrada en el ejemplo 4.2.

4.3.4 Diferenciación e integración

Sea $x(t)$ una señal con una transformada de Fourier $X(j\omega)$. Entonces, al diferenciar ambos miembros de la ecuación de síntesis (4.24) de la transformada de Fourier, obtenemos

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega\, X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} j\omega\, X(j\omega).} \tag{4.31}$$

Ésta es una propiedad de particular importancia, ya que reemplaza la operación de diferenciación en el dominio del tiempo con la de multiplicación por $j\omega$ en el dominio de la frecuencia. Encontraremos esto de gran utilidad en nuestro análisis en la sección 4.7 en relación con el uso de la transformada de Fourier para el análisis de sistemas LTI descritos mediante ecuaciones diferenciales.

Puesto que la diferenciación en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación por $j\omega$ en el dominio de la frecuencia, uno puede concluir que la integración debería involucrar la división entre $j\omega$ en el dominio de la frecuencia. En efecto, éste es el caso, pero sólo en parte. La relación exacta es

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega).} \tag{4.32}$$

El término del impulso en el miembro derecho de la ecuación (4.32) refleja el valor promedio o de CD que puede resultar de la integración.

El uso de las ecuaciones (4.31) y (4.32) se ilustra en los dos siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.11

Determinemos la transformada de Fourier $X(j\omega)$ del escalón unitario $x(t) = u(t)$, haciendo uso de la ecuación (4.32) y sabiendo que

$$g(t) = \delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G(j\omega) = 1.$$

Si observamos que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau$$

y tomamos la transformada de Fourier de ambos miembros, obtenemos

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega),$$

donde hemos usado la propiedad de integración mencionada en la tabla 4.1. Ya que $G(j\omega) = 1$, concluimos que

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega). \tag{4.33}$$

Observe que podemos aplicar la propiedad de diferenciación de la ecuación (4.31) para recuperar la transformada del impulso. Esto es,

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\omega\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] = 1,$$

donde la última igualdad resulta del hecho de que $\omega\delta(\omega) = 0$.

Ejemplo 4.12

Suponga que deseamos calcular la transformada de Fourier $X(j\omega)$ de la señal $x(t)$ presentada en la figura 4.16(a). En lugar de aplicar directamente la integral de Fourier a $x(t)$, consideramos la señal

$$g(t) = \frac{d}{dt}x(t).$$

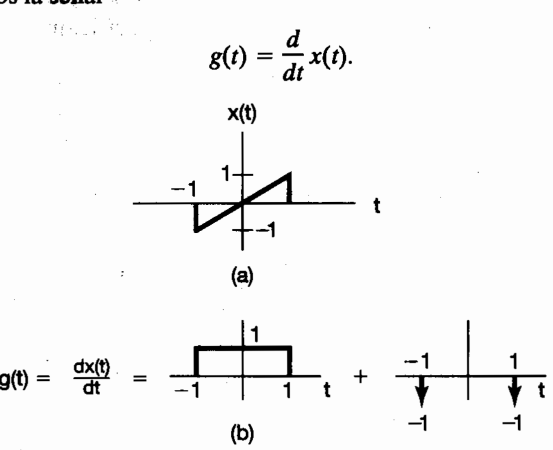


Figura 4.16 (a) Una señal $x(t)$ para la cual se evaluará la transformada de Fourier; (b) representación de la derivada de $x(t)$ como la suma de dos componentes.

Como se muestra en la figura 4.16(b), $g(t)$ es la suma de un pulso rectangular y dos impulsos. Las transformadas de Fourier de cada una de estas señales componentes se puede determinar a partir de la tabla 4.2:

$$G(j\omega) = \left(\frac{2 \operatorname{sen} \omega}{\omega}\right) - e^{j\omega} - e^{-j\omega}.$$

Observe que $G(0) = 0$. Usando la propiedad de integración, obtenemos

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega).$$

Con $G(0) = 0$, esto se convierte en

$$X(j\omega) = \frac{2 \operatorname{sen} \omega}{j\omega^2} - \frac{2 \cos \omega}{j\omega}.$$

La expresión para $X(j\omega)$ es puramente imaginaria e impar, lo cual es consistente con el hecho de que $x(t)$ es real e impar.

4.3.5 Escalamiento de tiempo y de frecuencia

Si

$$x(t) \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega),$$

entonces

$$\boxed{x(at) \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right),} \tag{4.34}$$

donde a es una constante real. Esta propiedad se obtiene directamente de la definición de la transformada de Fourier. Específicamente,

$$\mathfrak{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j\omega t}\, dt.$$

Usando la sustitución de variables $\tau = at$, obtenemos

$$\mathfrak{F}\{x(at)\} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau}\, d\tau, & a > 0 \\ -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau}\, d\tau, & a < 0 \end{cases},$$

la cual corresponde a la ecuación (4.34). Entonces, además del factor de amplitud de $1/|a|$, el escalamiento lineal en tiempo por un factor a corresponde a un escalamiento lineal en frecuencia por un factor $1/a$, y viceversa. Asimismo, considerando que $a = -1$, vemos, de la ecuación (4.34) que

$$\boxed{x(-t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(-j\omega).} \tag{4.35}$$

Esto es, al invertir una señal en el tiempo también se invierte su transformada de Fourier.

Un ejemplo común de la ecuación (4.34) es el efecto en el contenido de la frecuencia que resulta cuando una cinta de audio se graba a una velocidad y se reproduce a diferente velocidad. Si la velocidad de reproducción es mayor que la velocidad de grabación, de manera que corresponda a una compresión en tiempo (es decir, $a > 1$), entonces el espectro se expande en frecuencia (es decir, el efecto audible consiste en que las frecuencias de la reproducción son más altas). De manera inversa, la señal contendrá frecuencias más bajas si la velocidad de reproducción es más lenta que la velocidad de grabación ($0 < a < 1$). Por ejemplo, si la grabación del sonido de una pequeña campana se reproduce a una velocidad reducida, el sonido resultante parecerá como el repique de una campana más grande y de sonido más profundo.

La propiedad de escalamiento es otro ejemplo de la relación inversa entre el tiempo y la frecuencia, con el cual ya nos hemos encontrado en varias ocasiones. Por ejemplo, hemos visto que conforme incrementamos el periodo de una señal senoidal, disminuimos su frecuencia. También, como vimos en el ejemplo 4.5 (vea la figura 4.11), si consideramos la transformada

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases},$$

entonces, conforme incrementamos W, la transformada inversa de $X(j\omega)$ se hace más angosta y más alta y se aproxima a un impulso a medida que $W \to \infty$. Por último, en el ejemplo 4.8 vimos que el espaciamiento en el dominio de la frecuencia entre los impulsos en la transformada de Fourier de un tren periódico de impulsos es inversamente proporcional al espaciamiento en el dominio del tiempo.

La relación inversa entre el dominio del tiempo y de la frecuencia es de gran importancia dentro de una amplia variedad de contextos de señales y sistemas, incluyendo el filtrado y el diseño de filtros, por lo que en varias ocasiones en el resto del libro encontraremos sus consecuencias. Además, el lector podría muy bien enfrentarse a las implicaciones de esta propiedad al enfrascarse en el estudio de una amplia variedad de otros temas en ciencias y en ingeniería. Un ejemplo de ello es el principio de incertidumbre en física; otro caso sería el mostrado en el problema 4.49.

4.3.6 Dualidad

Al comparar las relaciones de la transformada y de la transformada inversa proporcionadas por las ecuaciones (4.24) y (4.25), observamos que estas ecuaciones son similares en forma, pero no totalmente idénticas. Esta simetría conduce a una propiedad de la transformada de Fourier conocida como *dualidad*. En el ejemplo 4.5 aludimos a esta propiedad cuando notamos la relación que existe entre los pares de la transformada de Fourier de los ejemplos 4.4 y 4.5. En el primero de estos ejemplos dedujimos el par de transformadas de Fourier

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(j\omega) = \frac{2 \operatorname{sen} \omega T_1}{\omega}, \tag{4.36}$$

mientras que en el segundo consideramos el par

$$x_2(t) = \frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}. \tag{4.37}$$

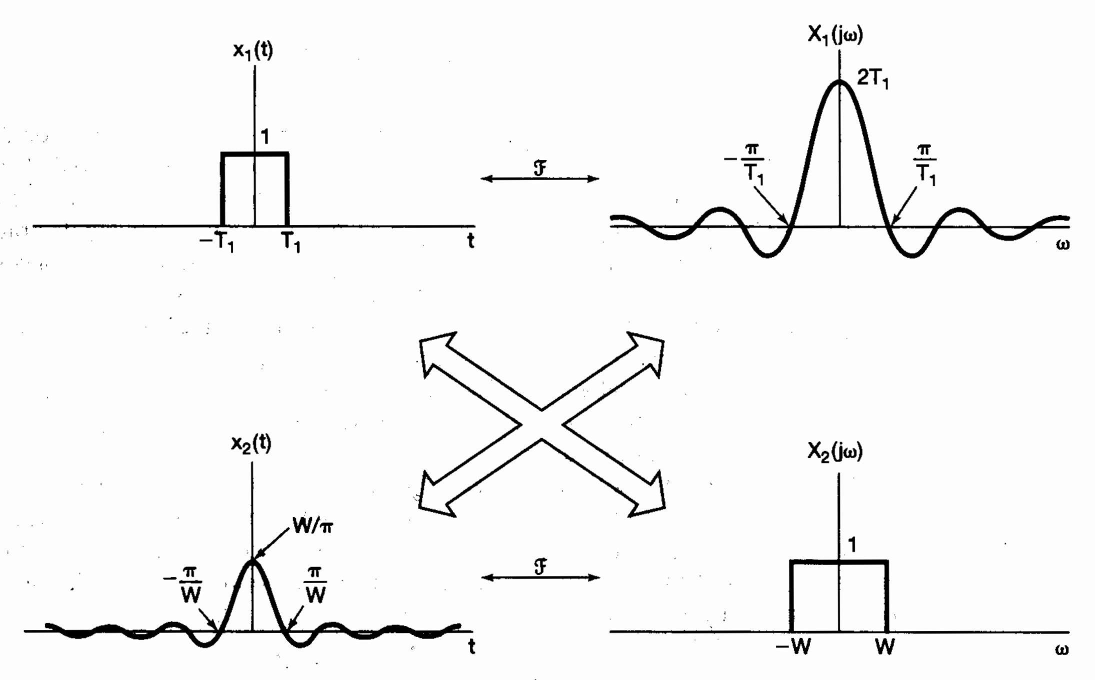


Figura 4.17 Relación entre los pares de transformadas de Fourier de las ecuaciones (4.36) y (4.37).

Estos dos pares de transformadas de Fourier y la relación entre ellos se muestran en la figura 4.17.

La simetría presentada en estos dos ejemplos se extiende a las transformadas de Fourier en general. En forma específica, debido a la simetría entre las ecuaciones (4.24) y (4.25), para cualquier par de transformadas hay un par dual con las variables de tiempo y frecuencia intercambiadas. Esto se ilustra mejor mediante un ejemplo.

Ejemplo 4.13

Suponga que deseamos usar la dualidad para encontrar la transformada de Fourier $G(j\omega)$ de la señal

$$g(t) = \frac{2}{1 + t^2}.$$

En el ejemplo 4.2 encontramos un par de transformadas de Fourier en las cuales la transformada de Fourier, como una función de ω, tenía una forma similar a aquella de la señal original $x(t)$. Específicamente, suponiendo que consideramos una señal $x(t)$ cuya transformada es

$$X(j\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

Entonces, a partir del ejemplo 4.2,

$$x(t) = e^{-2|t|} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

La ecuación de síntesis para este par de transformadas de Fourier es

$$e^{-2|t|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

Multiplicando esta ecuación por 2π y reemplazando t por $-t$, obtenemos

$$2\pi e^{-2|t|} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)e^{-j\omega t}\,d\omega.$$

Ahora, intercambiando las variables t y ω, encontramos que

$$2\pi e^{-2|\omega|} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1+t^2}\right)e^{-j\omega t}\,dt. \tag{4.38}$$

El miembro derecho de la ecuación (4.38) es la ecuación de análisis de la transformada de Fourier para $2/(1 + t^2)$, y entonces concluimos que

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{2}{1+t^2}\right\} = 2\pi e^{-2|\omega|}.$$

La propiedad de dualidad también se puede usar para determinar o sugerir otras propiedades de las transformadas de Fourier. En concreto, si hay características de una función del tiempo que tiene implicaciones en relación con la transformada de Fourier, entonces las mismas características asociadas con una función de la frecuencia tendrán implicaciones *duales* en el dominio del tiempo. Por ejemplo, en la sección 4.3.4 vimos que la diferenciación en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación por $j\omega$ en el dominio de la frecuencia. A partir del análisis anterior, podemos imaginar que la multiplicación por jt en el dominio del tiempo corresponde de modo general a la diferenciación en el dominio de la frecuencia. Para determinar la forma precisa de esta propiedad dual, podemos proceder de una forma exactamente análoga a la usada en la sección 4.3.4. De esta forma, si diferenciamos la ecuación de análisis (4.25) con respecto a ω, obtenemos

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t}\,dt. \tag{4.39}$$

Esto es,

$$-jtx(t) \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}. \tag{4.40}$$

De manera similar, podemos derivar las propiedades duales de las ecuaciones (4.27) y (4.32):

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j(\omega - \omega_0)) \tag{4.41}$$

y

$$-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{\omega} x(\eta)d\eta. \tag{4.42}$$

4.3.7 Relación de Parseval

Si $x(t)$ y $X(j\omega)$ son un par de transformadas de Fourier, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega. \tag{4.43}$$

Esta expresión, conocida como relación de Parseval, de deduce de la aplicación directa de la transformada de Fourier. Específicamente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t}\, d\omega\right] dt.$$

Invirtiendo el orden de integración nos da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt\right] d\omega.$$

Pero el término dentro de los corchetes es simplemente la transformada de Fourier de $x(t)$; por tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega.$$

El término en el miembro izquierdo de la ecuación (4.43) es la energía total en la señal $x(t)$. La relación de Parseval establece que esta energía total se puede determinar ya sea mediante el cálculo de la energía por unidad de tiempo ($|x(t)|^2$) e integrando sobre todo el tiempo, o calculando la energía por unidad de frecuencia ($|X(j\omega)|^2/2\pi$) e integrando sobre todas las frecuencias. Por esta razón, $|X(j\omega)|^2$ es a menudo conocida como el *espectro de densidad de energía* de la señal $x(t)$. (Vea también el problema 4.45.) Observe que la relación de Parseval para señales de energía finita es la contraparte directa de la relación de Parseval para señales periódicas (ecuación 3.67), la cual establece que la *potencia* promedio de una señal periódica es igual a la suma de las potencias promedio de sus componentes armónicas individuales, las cuales a su vez son iguales a las magnitudes al cuadrado de los coeficientes de la serie de Fourier.

La relación de Parseval y otras propiedades de la transformada de Fourier son con frecuencia útiles para determinar algunas características de una señal en el dominio del tiempo directamente de la transformada de Fourier. El siguiente ejemplo ilustra lo anterior.

Ejemplo 4.14

Para cada una de las transformadas de Fourier mostradas en la figura 4.18, deseamos evaluar las siguientes expresiones en el dominio del tiempo:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt$$

$$D = \left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0}$$

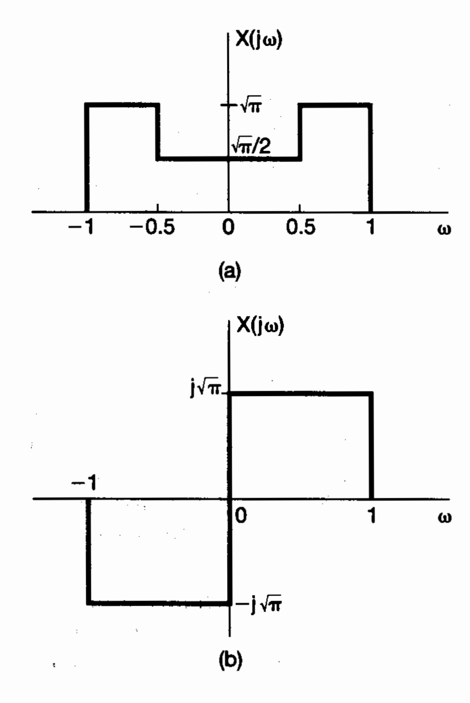


Figura 4.18 Las transformadas de Fourier analizadas en el ejemplo 4.14.

Para evaluar E en el dominio de la frecuencia, podemos usar la relación de Parseval. Esto es,

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega \tag{4.44}$$

la cual consiste en el valor $\frac{5}{8}$ en la figura 4.18(a) y en el valor 1 en la figura 4.18(b).

Para evaluar D en el dominio de la frecuencia, primero usamos la propiedad de diferenciación para observar que

$$g(t) = \frac{d}{dt}x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega) = G(j\omega).$$

Si notamos que

$$D = g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)\, d\omega, \tag{4.45}$$

concluimos que:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega)\, d\omega \tag{4.46}$$

la cual es igual a cero para la figura 4.18(a) y a $-\sqrt{\pi}$ en la figura 4.18(b).

Hay muchas otras propiedades de la transformada de Fourier además de las que ya hemos analizado. En las próximas dos secciones presentaremos dos propiedades específicas que juegan papeles particularmente importantes en el estudio de sistemas LTI y sus

aplicaciones. La primera de éstas, analizada en la sección 4.4, se conoce como la *propiedad de convolución*, la cual es fundamental para muchas aplicaciones de señales y sistemas, incluyendo el filtrado. La segunda propiedad, analizada en la sección 4.5, se conoce como la *propiedad de multiplicación* y proporciona el fundamento para nuestro análisis del muestreo en el capítulo 7 y de la modulación en amplitud en el capítulo 8. En la sección 4.6 resumimos las propiedades de la transformada de Fourier.

4.4 LA PROPIEDAD DE CONVOLUCIÓN

Como ya vimos en el capítulo 3, si una señal periódica se representa en una serie de Fourier, es decir, como una combinación lineal de exponenciales armónicamente relacionadas, como en la ecuación (3.38), entonces la respuesta de un sistema LTI a esta entrada también se puede representar mediante una serie de Fourier. Debido a que las exponenciales complejas son funciones propias de los sistema LTI, los coeficientes de la serie de Fourier de la salida son los mismos de la entrada multiplicados por la respuesta en frecuencia del sistema evaluados a las frecuencias armónicas correspondientes.

En esta sección, extendemos este resultado a la situación en la cual las señales son aperiódicas. Primero, deducimos la propiedad de una manera un tanto informal, basándonos en el conocimiento que obtuvimos en el capítulo 3 para las señales periódicas, y después proporcionamos una deducción breve pero formal, partiendo directamente de la integral de convolución.

Aquí es necesario recordar nuestra interpretación de la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier como una expresión para $x(t)$ como una combinación lineal de exponenciales complejas. En concreto, remitiéndonos a la ecuación (4.7), $x(t)$ está expresada como el límite de una suma; esto es

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \lim_{\omega_0\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\,\omega_0. \tag{4.47}$$

Como se desarrolló en las secciones 3.2 y 3.8, la respuesta de un sistema lineal con respuesta al impulso $h(t)$ a una exponencial compleja $e^{jk\omega_0 t}$ es $H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$, donde

$$H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt. \tag{4.48}$$

Podemos reconocer la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$, definida en la ecuación (3.121), como la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema. En otras palabras, la transformada de Fourier de la respuesta al impulso (evaluada en $\omega = k\omega_0$) es el factor de escalamiento complejo que el sistema LTI aplica a la función propia $e^{jk\omega_0 t}$. De la superposición [vea la ecuación (3.124)], tenemos entonces

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0 \to \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0)H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0,$$

y de este modo, de la ecuación (4.47), la respuesta del sistema lineal a $x(t)$ es

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{\omega_0\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0)H(jk\omega_0)e^{jk\omega t}\omega_0 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega. \end{aligned} \tag{4.49}$$

En vista de que $y(t)$ y su transformada de Fourier $Y(j\omega)$ están relacionadas mediante

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega, \tag{4.50}$$

podemos identificar a $Y(j\omega)$ de la ecuación (4.49), obteniendo

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega). \tag{4.51}$$

Como una deducción más formal, consideremos la integral de convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau. \tag{4.52}$$

Deseamos $Y(j\omega)$, la cual es

$$Y(j\omega) = \mathfrak{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}\,dt. \tag{4.53}$$

Intercambiando el orden de integración y observando que $x(\tau)$ no depende de t, tenemos

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau. \tag{4.54}$$

Por la propiedad de desplazamiento en tiempo, la ecuación (4.27), el término entre corchetes es $e^{-j\omega\tau}H(j\omega)$. Sustituyéndolo en la ecuación (4.54) se obtiene

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}H(j\omega)\,d\tau = H(j\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau. \tag{4.55}$$

La integral es $X(j\omega)$, y entonces,

$$Y(j\omega) = X(j\omega)X(j\omega).$$

Esto es

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega).} \tag{4.56}$$

La ecuación (4.56) es de gran importancia en el análisis de señales y sistemas. Como esta ecuación expresa, en la transformada de Fourier mapea la convolución de dos señales en el producto de sus transformadas de Fourier. $H(j\omega)$, la transformada de Fourier de la respuesta al impulso, es la respuesta en frecuencia como se definió en la ecuación (3.121) y captura el cambio en la amplitud compleja de la transformada de Fourier de la entrada a cada frecuencia ω. Por ejemplo, el filtrado selectivo de frecuencias podemos desear tener $H(j\omega) \approx 1$ sobre un intervalo de frecuencias, de manera que las componentes de frecuencia en esta banda experimenten poca o ninguna atenuación o cambio debido al sistema, mientras que en otros intervalos de frecuencia podríamos desear tener $H(j\omega) \approx 0$, de manera que las componentes en este intervalo sean eliminadas o atenuadas de forma significativa.

La respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ juega un importante papel en el análisis de los sistema LTI, lo mismo que su transformada inversa, la respuesta al impulso unitario. Por una parte, debido a que $h(t)$ caracteriza por completo un sistema LTI, entonces también lo debe hacer $H(j\omega)$. Además, muchas de las propiedades de los sistemas LTI se pueden interpretar de manera conveniente en términos de $H(j\omega)$. Por ejemplo, en la sección 2.3 vimos que la respuesta al impulso de la conexión en cascada de dos sistemas LTI es la convolución de las respuestas al impulso de los sistemas individuales y que la respuesta al impulso total no depende del orden en el cual los sistemas en cascada estén conectados. Usando la ecuación (4.56), podemos replantear esto en términos de las respuestas en frecuencia. Como se ilustra en la figura 4.19, puesto que la respuesta al impulso de la conexión en cascada de dos sistemas LTI es la convolución de las respuestas individuales al impulso, la propiedad de convolución implica entonces que la respuesta en frecuencia total de la conexión en cascada de dos sistemas es simplemente el producto de las respuestas en frecuencia individuales. A partir de esta observación, resulta claro que la respuesta total en frecuencia no depende del orden de la conexión en cascada.

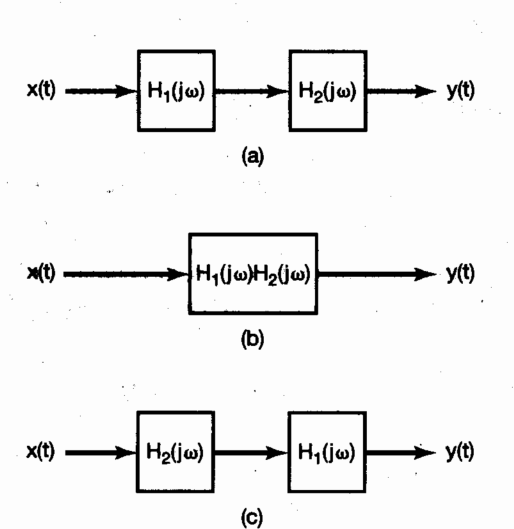


Figura 4.19 Tres sistemas LTI equivalentes. Aquí, cada bloque representa un sistema LTI con la respuesta en frecuencia indicada.

Como se analizó en la sección 4.1.2, la convergencia de la transformada de Fourier se garantiza sólo bajo ciertas condiciones, y en consecuencia, la respuesta en frecuencia no se puede definir para todo sistema LTI. Sin embargo, si un sistema LTI es estable, entonces, como vimos en la sección 2.3.7 y en el problema 2.49, su respuesta al impulso es absolutamente integrable; esto es,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < \infty. \tag{4.57}$$

La ecuación (4.57) es una de las tres condiciones de Dirichlet que en conjunto garantizan la existencia de la transformada de Fourier $H(j\omega)$ o de $h(t)$. Por tanto, suponiendo que $h(t)$ satisface las otras dos condiciones, como en esencia lo hacen todas las señales de importancia física o práctica, podemos ver que un sistema LTI estable tiene una respuesta en frecuencia $H(j\omega)$.

Al usar el análisis de Fourier para estudiar los sistema LTI, nos estaremos restringiendo a sistemas cuyas respuestas al impulso posean transformadas de Fourier. Con

el objeto de utilizar las técnicas de la transformada para examinar sistemas LTI inestables, desarrollaremos una generalización de la transformada continua de Fourier, la transformada de Laplace. Dejaremos este análisis para el capítulo 9, y hasta ese momento consideraremos los problemas y aplicaciones prácticas que podemos analizar utilizando la transformada de Fourier.

4.4.1 Ejemplos

Para ilustrar la propiedad de convolución y sus aplicaciones, consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.15

Considere un sistema continuo LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = \delta(t - t_0). \tag{4.58}$$

La respuesta en frecuencia de este sistema es la transformada de Fourier de $h(t)$ y está dada por

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}. \tag{4.59}$$

Así, para cualquier entrada $x(t)$ con transformada de Fourier $X(j\omega)$, la transformada de Fourier de la salida es

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H(j\omega)X(j\omega) \\ &= e^{-j\omega t_0} X(j\omega). \end{aligned} \tag{4.60}$$

Este resultado, de hecho, es compatible con la propiedad de desplazamiento de la sección 4.3.2. Específicamente, un sistema para el cual la respuesta al impulso es $\delta(t - t_0)$ aplica un desplazamiento en tiempo de t_0 a la señal de entrada; esto es,

$$y(t) = x(t - t_0).$$

Por tanto, la propiedad de desplazamiento dada en la ecuación (4.27) también produce la ecuación (4.60). Observe que, ya sea a partir de nuestra exposición en la sección 4.3.2 o directamente de la ecuación (4.59), la respuesta en frecuencia de un sistema que es un desplazamiento puro en el tiempo tiene una magnitud unitaria en todas las frecuencias (es decir, $|e^{-j\omega t_0}| = 1$) y tiene una característica de fase $-\omega t_0$ la cual es una función lineal de ω.

Ejemplo 4.16

Como un segundo ejemplo, examinemos un diferenciador, es decir, un sistema LTI para el cual la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ están relacionadas por

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

A partir de la propiedad de diferenciación de la sección 4.3.4,

$$Y(j\omega) = j\omega X(j\omega). \tag{4.61}$$

En consecuencia, a partir de la ecuación (4.56) se desprende que la respuesta en frecuencia de un diferenciador es

$$H(j\omega) = j\omega. \tag{4.62}$$

Ejemplo 4.17

Considere ahora un integrador, esto es, un sistema LTI especificado por la ecuación

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau.$$

La respuesta al impulso para este sistema es el escalón unitario $u(t)$ y, por tanto, del ejemplo 4.11 y la ecuación (4.33), la respuesta en frecuencia de este sistema es

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega).$$

Entonces, usando la ecuación (4.56), tenemos

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H(j\omega)\, X(j\omega) \\ &= \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j\omega)\delta(\omega) \\ &= \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega), \end{aligned}$$

lo cual es consistente con la propiedad de integración de la ecuación (4.32).

Ejemplo 4.18

Como lo analizamos en la sección 3.9.2, el filtrado selectivo en frecuencia se lleva a cabo con un sistema LTI cuya respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ deja pasar el intervalo de frecuencias deseado y atenúa de manera significativa las frecuencias fuera de ese intervalo. Por ejemplo, considere el filtro paso bajas ideal presentado en la sección 3.9.2, el cual tiene una respuesta en frecuencia como la ilustrada en la figura 4.20 y dada por

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}. \tag{4.63}$$

Ahora que ya hemos desarrollado la representación de la transformada de Fourier, sabemos que la respuesta al impulso $h(t)$ de este filtro ideal es la transformada inversa de la ecuación (4.63). Usando el resultado del ejemplo 4.5, entonces

$$h(t) = \frac{\operatorname{sen} \omega_c t}{\pi t}, \tag{4.64}$$

la cual está graficada en la figura 4.21.

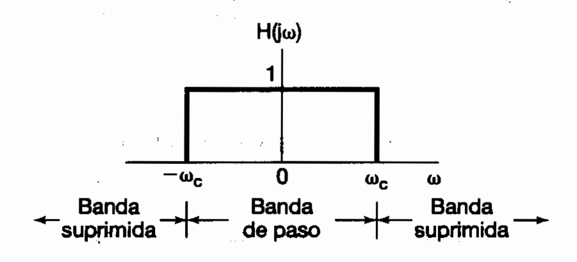


Figura 4.20 Respuesta en frecuencia de un filtro paso bajas ideal.

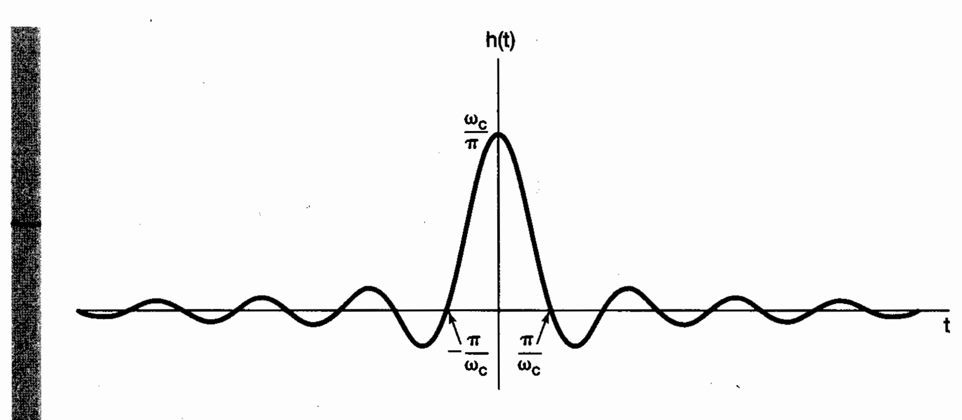


Figura 4.21 Respuesta al impulso de un filtro paso bajas ideal.

Del ejemplo 4.18, podemos empezar a ver algunos de los detalles que surgen al diseñar filtros que involucran aspectos tanto del dominio del tiempo como de la frecuencia. En particular, mientras que el filtro paso bajas ideal presenta selectividad perfecta de frecuencia, su respuesta al impulso muestra algunas características que pueden no ser deseables. Primero, observe que $h(t)$ no es cero para $t < 0$. En consecuencia, el filtro ideal paso bajas no es causal y, por tanto, en aplicaciones en que se requieren sistemas causales, el filtro ideal no es una opción. Además, como analizaremos en el capítulo 6, aun si la causalidad no fuese una restricción esencial, no es fácil aproximarse mucho al filtro ideal, por lo que en general se prefieren los filtros no ideales que se construyen más fácilmente. Además, en algunas aplicaciones (como el sistema de suspensión de un automóvil, analizado en la sección 6.7.1), el comportamiento oscilatorio en la respuesta al impulso de un filtro paso bajas puede ser no deseado. En aplicaciones como ésta, las características en el dominio del tiempo del filtro paso bajas ideal, como se muestra en la figura 4.21, pueden no ser aceptables, lo cual implica que se podría necesitar de un intercambio entre las características en el dominio de la frecuencia, como la selectividad ideal de frecuencia, y las propiedades en el dominio del tiempo.

Por ejemplo, considere un sistema LTI con respuesta al impulso

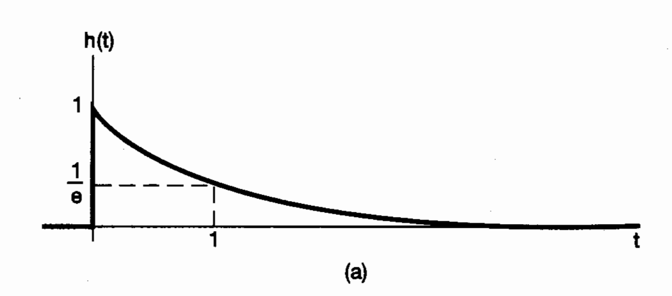
$$h(t) = e^{-t}u(t). \tag{4.65}$$

La respuesta en frecuencia de este sistema es

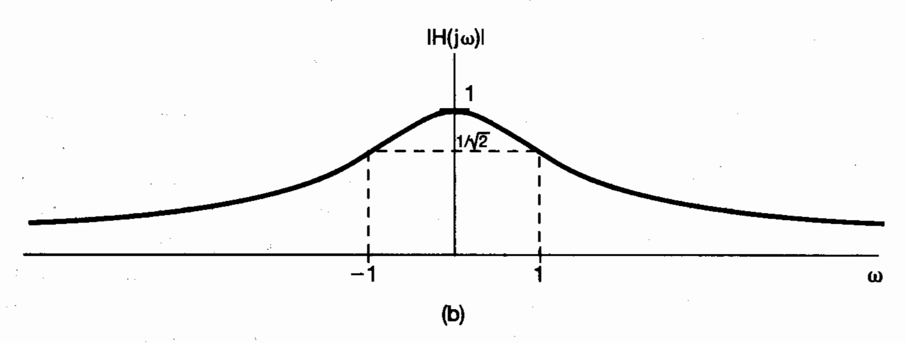
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}. \tag{4.66}$$

Al comparar las ecuaciones (3.145) y (4.66), vemos que este sistema se puede construir con el sencillo circuito RC analizado en la sección 3.10. La respuesta al impulso y la magnitud de la respuesta en frecuencia se muestran en la figura 4.22. Si bien el sistema no tiene la fuerte selectividad en frecuencia del filtro paso bajas ideal, es causal y tiene una respuesta al impulso que decae en forma monótona, es decir, sin oscilaciones. Este filtro, o algunos un poco más complejos, que corresponden a ecuaciones diferenciales de mayor orden a menudo se prefieren a los filtros ideales, debido a su causalidad, su facilidad de construcción y flexibilidad en los compromisos, entre otras consideraciones de diseño tales como la selectividad de frecuencia y el comportamiento oscilatorio en el dominio del tiempo. Muchos de estos elementos se analizan con más detalle en el capítulo 6.

La propiedad de convolución con frecuencia resulta útil al evaluar la integral de convolución, es decir, al calcular la respuesta de los sistema LTI. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.



(a)



(b)

Figura 4.22 (a) Respuesta al impulso del sistema LTI en la ecuación (4.65); (b) la magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema.

Ejemplo 4.19

Considere la respuesta de un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0,$$

a la señal de entrada

$$x(t) = e^{-bt}u(t), \quad b > 0.$$

En lugar de calcular $y(t) = x(t) * h(t)$ directamente, transformemos el problema en el dominio de la frecuencia. Del ejemplo 4.1, las transformadas de Fourier de $x(t)$ y $h(t)$ son

$$X(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega}$$

y

$$H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}.$$

Por tanto,

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)(b + j\omega)}. \tag{4.67}$$

Para determinar la salida $y(t)$, deseamos obtener la transformada inversa de $Y(j\omega)$. Esto se hace con mayor facilidad expandiendo $Y(j\omega)$ en una expansión de fracciones parciales. Dichas expansiones son extremadamente útiles para evaluar las transformadas inversas, y el método general para realizar una expansión en fracciones parciales se desarrolla en el apéndice. Para este ejemplo, suponiendo que $b \neq a$, la expansión en

fracciones parciales para $Y(j\omega)$ toma la forma

$$Y(j\omega) = \frac{A}{a + j\omega} + \frac{B}{b + j\omega}, \tag{4.68}$$

donde A y B son constantes que deberán ser determinadas. Una forma de determinar A y B consiste en igualar los miembros derechos de las ecuaciones (4.67) y (4.68), multiplicar ambos miembros por $(a + j\omega)(b + j\omega)$ y resolver A y B. De forma alternativa, en el apéndice presentamos un método más general y efectivo para calcular los coeficientes en la expansión en fracciones parciales como la ecuación (4.68). Usando cualquiera de las aproximaciones, encontramos que

$$A = \frac{1}{b - a} = -B,$$

y por tanto

$$Y(j\omega) = \frac{1}{b - a}\left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{b + j\omega}\right]. \tag{4.69}$$

La transformada inversa para cada uno de los dos términos en la ecuación (4.69) se puede reconocer por inspección. Usando la propiedad de linealidad de la sección 4.3.1, tenemos

$$y(t) = \frac{1}{b - a}[e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(t)].$$

Cuando $b = a$, la expansión en fracciones parciales de la ecuación (4.69) no es válida. Sin embargo, con $b = a$, la ecuación (4.67) se convierte en

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}.$$

Reconociendo esto como

$$\frac{1}{(a + j\omega)^2} = j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{a + j\omega}\right],$$

podemos usar el dual de la propiedad de diferenciación, la cual se dio en la ecuación (4.40). Entonces,

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a + j\omega}$$

$$te^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{a + j\omega}\right] = \frac{1}{(a + j\omega)^2},$$

y en consecuencia,

$$y(t) = te^{-at}u(t).$$

Ejemplo 4.20

Como otro ejemplo de la utilidad de la propiedad de convolución, consideremos el problema que consiste en determinar la respuesta de un filtro paso bajas ideal a una señal de entrada $x(t)$ que tiene la forma de una función sinc. Esto es,

$$x(t) = \frac{\text{sen}\,\omega_i t}{\pi t}.$$

Por supuesto, la respuesta al impulso del filtro paso bajas ideal tiene una forma similar, esto es,

$$h(t) = \frac{\text{sen}\ \omega_c t}{\pi t}.$$

La salida del filtro $y(t)$ será por tanto la convolución de dos funciones sinc, la cual, como mostraremos en seguida, también será una función sinc. Una forma particularmente conveniente para obtener este resultado es observar primero que

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega),$$

donde

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_i \\ 0 & \text{en otro valor} \end{cases}$$

y

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{en otro valor} \end{cases}.$$

Por tanto,

$$Y(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{en otro valor} \end{cases},$$

donde ω_0 es el menor de los dos números ω_i y ω_c. Por último, la transformada inversa de Fourier de $Y(j\omega)$ está dada por

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\ \omega_c t}{\pi t} & \text{si } \omega_c \leq \omega_i \\[2ex] \dfrac{\text{sen}\ \omega_i t}{\pi t} & \text{si } \omega_i \leq \omega_c \end{cases}.$$

Esto es, dependiendo de qué valor de ω_c y ω_i sea más pequeño, la salida será igual a $x(t)$ o $h(t)$.

4.5 LA PROPIEDAD DE MULTIPLICACIÓN

La propiedad de convolución establece que la convolución en el dominio del *tiempo* corresponde a la multiplicación en el dominio de la *frecuencia*. Debido a la dualidad entre los dominios del tiempo y la frecuencia, esperaríamos que también se satisficiera una propiedad dual de la convolución (es decir, que la multiplicación en el dominio del tiempo corresponda a la convolución en el dominio de la frecuencia). Específicamente,

$$r(t) = s(t)p(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[S(j\omega) * P(j\omega)]. \tag{4.70}$$

Esto puede demostrarse mediante el uso de las relaciones de dualidad analizadas en la sección 4.3.6 junto con la propiedad de convolución, o directamente usando las relaciones de la transformada de Fourier de una manera análoga al procedimiento utilizado en la deducción de la propiedad de convolución.

La multiplicación de una señal por otra puede considerarse como el empleo de una señal para escalar o *modular* la amplitud de la otra, y en consecuencia, a la multiplicación de las dos señales a menudo se le menciona como la *modulación en amplitud.* Por esta razón, la ecuación (4.70) se conoce también como la *propiedad de modulación.* Como ve-

remos en los capítulos 7 y 8, esta propiedad tiene varias aplicaciones muy importantes. Para ilustrar la ecuación (4.70) y sugerir una de las aplicaciones que analizaremos en los capítulos posteriores, consideremos varios ejemplos.

Ejemplo 4.21

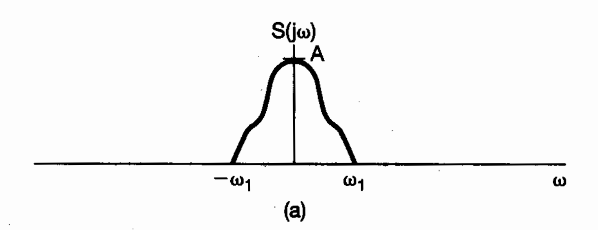
Sea $s(t)$ una señal cuyo espectro $S(j\omega)$ se ha trazado en la figura 4.23(a). También considere la señal

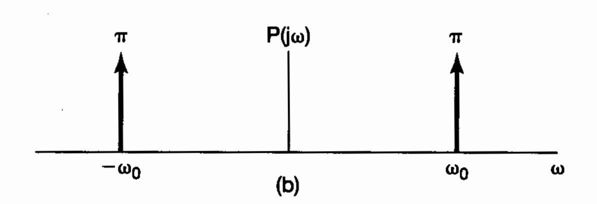
$$p(t) = \cos \omega_0 t.$$

Entonces,

$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0),$$

como se trazó en la figura 4.23(b), y el espectro $R(j\omega)$ de $r(t) = s(t)p(t)$ se obtiene mediante





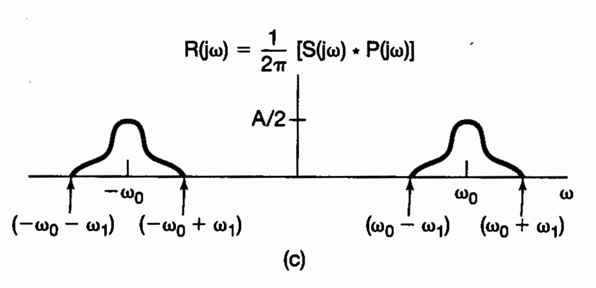


Figura 4.23 Uso de la propiedad de multiplicación del ejemplo 4.21: *(a) la transformada de Fourier de una señal $s(t)$; (b) la transformada de Fourier de $p(t) = \cos \omega_0 t$; (c) la transformada de Fourier de $r(t) = s(t)p(t)$.*

la aplicación de la ecuación (4.70), lo cual produce

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega)$$
$$= \frac{1}{2} S(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} S(j(\omega + \omega_0)), \tag{4.71}$$

la cual se presenta en la figura 4.23(c). Aquí supusimos que $\omega_0 > \omega_1$, de manera que las dos porciones diferentes de cero de $R(j\omega)$ no se traslapan. Claramente vemos que el espectro de $r(t)$ consiste de la suma de dos versiones de $S(j\omega)$ desplazadas y escaladas.

Con base en la ecuación (4.71) y en la figura 4.23, sabemos que toda la información contenida en la señal $s(t)$ es preservada cuando multiplicamos esta señal por una señal senoidal, aunque la información ha sido desplazada a frecuencias más altas. Este hecho conforma la base de los sistemas de modulación senoidal en amplitud para comunicaciones. En el próximo ejemplo veremos cómo podemos recuperar la señal original $s(t)$ a partir de la señal modulada en amplitud $r(t)$.

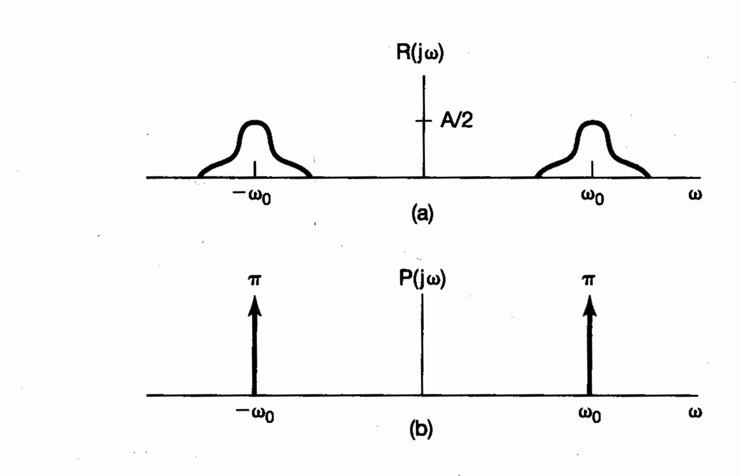
Ejemplo 4.22

Consideremos ahora a $r(t)$ tal como fue obtenida en el ejemplo 4.21, y supongamos que

$$g(t) = r(t)p(t),$$

donde, nuevamente, $p(t) = \cos \omega_0 t$. Entonces, $R(j\omega)$, $P(j\omega)$ y $G(j\omega)$ tienen la forma mostrada en la figura 4.24.

De la figura 4.24(c) y de la linealidad de la transformada de Fourier, se desprende que $g(t)$ es la suma de $(1/2)s(t)$ y de una señal con un espectro que es diferente de cero sólo a frecuencias más altas (centrado alrededor de $\pm 2\omega_0$). Suponga entonces que apli-



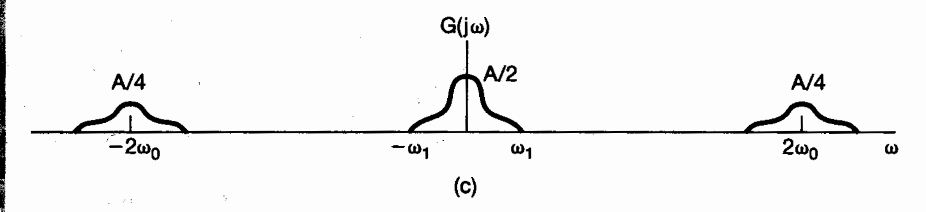


Figura 4.24 Espectro de las señales examinadas en el ejemplo 4.22: (a) $R(j\omega)$; (b) $P(j\omega)$; (c) $G(j\omega)$.

camos la señal $g(t)$ a la entrada de un filtro paso bajas selectivo en frecuencia con respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ el cual es constante a bajas frecuencias (digamos, $|\omega| < \omega_1$) y cero a altas frecuencias (para $|\omega| > \omega_1$). Entonces, la salida de este sistema tendrá como espectro a $H(j\omega)G(j\omega)$ el cual, debido a la particular selección de $H(j\omega)$, será una réplica escalada de $S(j\omega)$. Por tanto, la salida misma será una versión escalada de $s(t)$. En el capítulo 8 ampliaremos significativamente esta idea cuando desarrollemos con detalle los fundamentos de la modulación de amplitud.

Ejemplo 4.23

Otro ejemplo de la utilidad de la propiedad de multiplicación de la transformada de Fourier es proporcionado por el problema de determinar la transformada de Fourier de la señal

$$x(t) = \frac{\text{sen}(t)\,\text{sen}(t/2)}{\pi t^2}.$$

La clave aquí es reconocer a $x(t)$ como el producto de dos funciones sinc:

$$x(t) = \pi\left(\frac{\text{sen}\,(t)}{\pi t}\right)\left(\frac{\text{sen}\,(t/2)}{\pi t}\right).$$

Aplicando la propiedad de multiplicación de la transformada de Fourier, obtenemos

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}\mathfrak{F}\left\{\frac{\text{sen}\,(t)}{\pi t}\right\} * \mathfrak{F}\left\{\frac{\text{sen}\,(t/2)}{\pi t}\right\}.$$

Si observamos que la transformada de Fourier de cada función sinc es un pulso rectangular, podemos proceder a convolucionar esos pulsos para obtener la función $X(j\omega)$ mostrada en la figura 4.25.

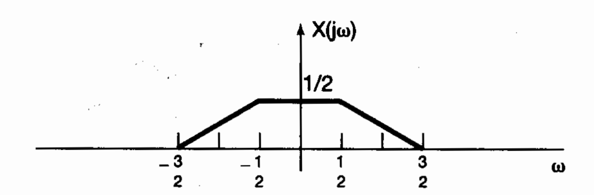


Figura 4.25 La transformada de Fourier de $x(t)$ en el ejemplo 4.23.

4.5.1 Filtrado selectivo en frecuencia con frecuencia central variable

Como se plantea en los ejemplos 4.21 y 4.22 y que desarrollaremos con más amplitud en el capítulo 8, una de las importantes aplicaciones de la propiedad de multiplicación es la modulación en amplitud en los sistemas de comunicaciones. Otra importante aplicación es en la construcción de filtros paso banda selectivos en frecuencia con frecuencia central sintonizable que se puede ajustar simplemente haciendo girar una perilla. En los filtros de este tipo construidos con elementos tales como resistores, amplificadores operacionales y capacitores, la frecuencia central depende de los valores de los elementos, todos los cuales deben variarse de manera simultánea y en la forma correcta si se ajusta directamente la frecuencia central. Por lo general esto es difícil, y un tanto engorroso en comparación con la construcción de un filtro cuyas características sean fijas. Una alter-

nativa para variar en forma directa las características del filtro es usar un filtro fijo selectivo en frecuencia y desplazar el espectro de la señal en forma adecuada, mediante el uso de los principios de la modulación de amplitud senoidal.

Por ejemplo, observe el sistema mostrado en la figura 4.26. En él, una señal de entrada $x(t)$ se multiplica por la señal exponencial compleja $e^{j\omega_c t}$. La señal resultante se pasa entonces a través de un filtro paso bajas con frecuencia de corte ω_0, y la salida se multiplica por $e^{-j\omega_c t}$. Los espectros de las señales $x(t)$, $y(t)$, $w(t)$ y $f(t)$ se muestran en la figura 4.27.

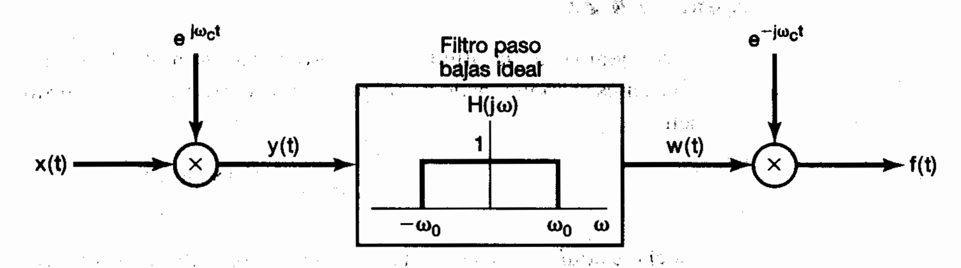


Figura 4.26 Construcción de un filtro paso banda usando una modulación en amplitud con una portadora exponencial compleja.

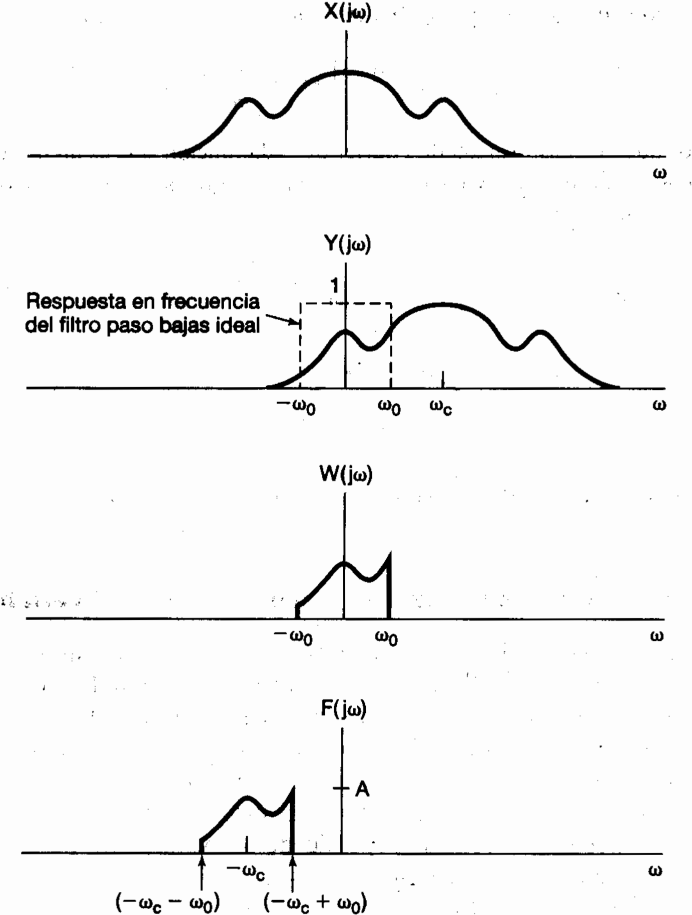


Figura 4.27 Espectros de las señales en el sistema de la figura 4.26.

Específicamente, a partir de la propiedad de multiplicación o de la propiedad de desplazamiento de frecuencia, se desprende que la transformada de Fourier de $y(t) = e^{j\omega_c t}x(t)$ es

$$Y(j\omega) = \delta(\omega - \omega_c) * X(j\omega) = X(j(\omega - \omega_c)),$$

de tal manera que $Y(j\omega)$ es igual a $X(j\omega)$ desplazada a la derecha por ω_c y las frecuencias en $X(j\omega)$ cercanas a $\omega = \omega_c$ se han desplazado en la banda de paso del filtro paso bajas. De manera similar, la transformada de Fourier de $f(t) = e^{j\omega_c t}w(t)$ es

$$F(j\omega) = W(j(\omega + \omega_o)),$$

de modo que la transformada de Fourier de $W(j\omega)$ es $F(j\omega)$ desplazada a la izquierda por ω_c. De la figura 4.27, observamos que el sistema completo de la figura 4.26 es equivalente a un filtro paso banda ideal con frecuencia central $-\omega_c$ y ancho de banda $2\omega_0$, como se ilustra en la figura 4.28. A medida que se varía la frecuencia ω_c del oscilador exponencial complejo, varía la frecuencia central del filtro paso banda.

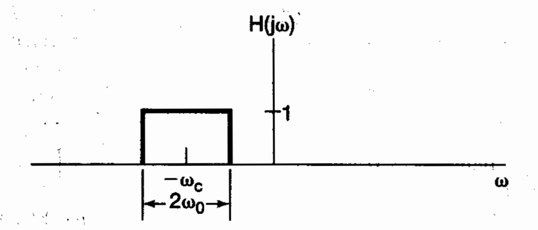


Figura 4.28 Filtro paso banda equivalente al de la figura 4.26.

En el sistema de la figura 4.26 con $x(t)$ real, las señales $y(t)$, $w(t)$ y $f(t)$ son complejas. Si mantenemos sólo la parte real de $f(t)$, el espectro resultante es el que se muestra en la figura 4.29, y el filtro paso banda equivalente deja pasar las bandas de frecuencia centradas alrededor de ω_c y $-\omega_c$, como se indica en la figura 4.30. Bajo ciertas condiciones, también es posible usar la modulación senoidal en lugar de la exponencial compleja para construir el sistema de la figura siguiente. Esto se explora con mayor detalle en el problema 4.46.

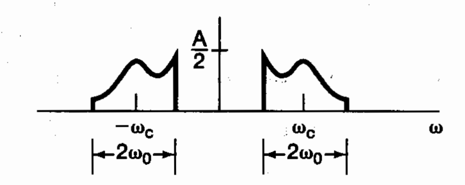


Figura 4.29 Espectro de $\mathcal{R}e\{f(t)\}$ asociado con la figura 4.26.

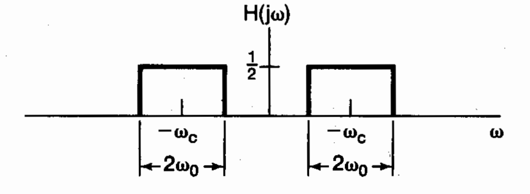


Figura 4.30 Filtro paso banda equivalente para $\mathcal{R}e\{f(t)\}$ en la figura 4.29.

4.6 TABLAS DE LAS PROPIEDADES DE FOURIER Y DE LOS PARES BÁSICOS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

En las secciones anteriores y en los problemas al final del capítulo, hemos tomado en consideración algunas de las propiedades importantes de la transformada de Fourier. Éstas se resumen en la tabla 4.1, en la cual también hemos indicado en qué sección de este capítulo se ha analizada cada propiedad.

En la tabla 4.2 hemos preparado una lista de los pares de transformadas de Fourier que son básicos e importantes. Muchos de éstos los encontraremos en repetidas ocasiones conforme apliquemos las herramientas del análisis de Fourier en el examen de las señales

TABLA 4.1 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Sección	Propiedad	Señal aperiódica	Transformada de Fourier
		$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
4.3.1	Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
4.3.2	Desplazamiento de tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
4.3.6	Desplazamiento de frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
4.3.3	Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
4.3.5	Inversión de tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
4.3.5	Escalamiento de tiempo y de frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4.4	Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)\,Y(j\omega)$
4.5	Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * Y(j\omega)$
4.3.4	Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
4.3.4	Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
4.3.6	Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
4.3.3	Simetría conjugada para señales reales	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(-j\omega)\} \\ \mathcal{I}m\{X(j\omega)\} = -\mathcal{I}m\{X(-j\omega)\} \\ \lvert X(j\omega)\rvert = \lvert X(-j\omega)\rvert \\ \sphericalangle X(j\omega) = -\sphericalangle X(-j\omega) \end{cases}$
4.3.3	Simetría para señales real y par	$x(t)$ real y par	$X(j\omega)$ real y par
4.3.3	Simetría para señales real e impar	$x(t)$ real e impar	$X(j\omega)$ puramente imaginaria e impar
4.3.3	Descomposición par-impar de señales reales	$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ [$x(t)$ real] $x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\mathcal{R}e\{X(j\omega)\}$ $j\mathcal{I}m\{X(j\omega)\}$

4.3.7 Relación de Parseval para señales aperiódicas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega$$

TABLA 4.2 PARES BÁSICOS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Señal	Transformada de Fourier	Coeficientes de la serie de Fourier (si es periódica)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, con otro valor
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, con otro valor
sen $\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, con otro valor
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad k \neq 0$ (Esta es la representación en serie de Fourier para cualquier selección de $T > 0$)
Onda cuadrada periódica $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ y $x(t + T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \,\text{sen}\, k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \,\text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\text{sen}\, k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ para todo k
$x(t) \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2 \,\text{sen}\, \omega T_1}{\omega}$	–
$\frac{\text{sen}\, Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 2, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	–
$\delta(t)$	1	–
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	–
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	–
$e^{-at}u(t), \mathcal{R}e\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	–
$te^{-at}u(t), \mathcal{R}e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	–
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$, $\mathcal{R}e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	–

y los sistemas. Todos los pares de transformadas, excepto el último de la tabla, se han revisado mediante ejemplos en las secciones anteriores. El último par se considera en el problema 4.40. Además, observe que varias de las señales en la tabla 4.2 son periódicas, y para éstas también hemos enumerado los correspondientes coeficientes de la serie de Fourier.

4.7 SISTEMAS CARACTERIZADOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Como ya hemos analizado en varias ocasiones, una clase particularmente importante y útil de sistemas LTI continuos es aquella en la cual la entrada y la salida satisfacen una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \tag{4.72}$$

En esta sección examinamos el problema de determinar la respuesta en frecuencia de esos sistemas LTI. A lo largo de este análisis siempre supondremos que el sistema es estable, de manera que su respuesta en frecuencia exista.

Hay dos métodos relacionadas entre sí con los cuales se puede determinar la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ para un sistema LTI descrito por la ecuación diferencial (4.72). El primero se basa en el hecho de que las señales exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas LTI, y se usó en la sección 3.10 para el análisis de varios filtros no ideales sencillos. Específicamente, si $x(t) = e^{j\omega t}$, entonces la salida debe ser $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$. Al sustituir estas expresiones en la ecuación diferencial (4.72) y realizar algo de álgebra, podemos resolver para $H(j\omega)$. En esta sección usamos un planteamiento alternativo para llegar al mismo resultado, haciendo uso de la propiedad de diferenciación, la ecuación (4.31), de las transformadas de Fourier.

Considere un sistema LTI caracterizado por la ecuación (4.72). Partiendo de la propiedad de convolución,

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega),$$

o, de manera equivalente,

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}, \tag{4.73}$$

donde $X(j\omega)$, $Y(j\omega)$ y $H(j\omega)$ son las transformadas de Fourier de la entrada $x(t)$, la salida $y(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$, respectivamente. En seguida, considere aplicar la transformada de Fourier a ambos miembros de la ecuación (4.72) para obtener

$$\mathfrak{F}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathfrak{F}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}. \tag{4.74}$$

De la propiedad de linealidad, ecuación (4.26), esto se convierte en

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathfrak{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathfrak{F}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}, \tag{4.75}$$

y de la propiedad de diferenciación, la ecuación (4.31),

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega),$$

o, de manera equivalente,

$$Y(j\omega)\left[\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k\right] = X(j\omega)\left[\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k\right].$$

Así, de la ecuación (4.73),

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}. \tag{4.76}$$

Observe que $H(j\omega)$ es entonces una función racional; es decir, es una razón de polinomios en $(j\omega)$. Los coeficientes del polinomio del numerador son los mismos coeficientes que aparecen en el miembro derecho de la ecuación (4.72), y los coeficientes del polinomio del denominador son los mismos que aparecen en el miembro izquierdo de la ecuación (4.72). Por tanto, la respuesta en frecuencia dada en la ecuación (4.76) para el sistema LTI caracterizado por la ecuación (4.72) se puede escribir en forma directa por inspección.

La ecuación diferencial (4.72) se conoce en general como una ecuación diferencial de orden N, ya que la ecuación involucra hasta la Nésima derivada de la salida $y(t)$. Asimismo, el denominador $H(j\omega)$ en la ecuación (4.76) es un polinomio de Nésimo orden en $(j\omega)$.

Ejemplo 4.24

Considere un sistema LTI estable caracterizado por la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t), \tag{4.77}$$

con $a > 0$. De la ecuación (4.76), la respuesta en frecuencia es

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}. \tag{4.78}$$

Comparando esto con el resultado del ejemplo 4.1, vemos que la ecuación (4.78) es la transformada de Fourier de $e^{-at}u(t)$. La respuesta al impulso del sistema se reconoce por tanto como

$$h(t) = e^{-at}u(t).$$

Ejemplo 4.25

Considere un sistema LTI estable caracterizado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t).$$

De la ecuación (4.76), la respuesta en frecuencia es

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}. \tag{4.79}$$

Para determinar la respuesta al impulso correspondiente, requerimos la transformada inversa de Fourier de $H(j\omega)$. Ésta se puede hallar usando la técnica de expansión en fracciones parciales empleada en el ejemplo 4.19 y analizada con detalle en el apéndice. (En particular, vea el ejemplo A.1, en el cual se proporcionan los detalles de los cálculos para la expansión en fracciones parciales de la ecuación (4.79).) Como primer paso, factorizamos el denominador del miembro derecho de la ecuación (4.79) en un producto de términos de menor orden:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)}. \tag{4.80}$$

Entonces, usando el método de expansión en fracciones parciales, encontramos que

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 3}.$$

La transformada inversa de cada término se puede reconocer gracias al ejemplo 4.24, de lo cual resulta que

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t).$$

El procedimiento utilizado en el ejemplo 4.25 para obtener la transformada inversa de Fourier es por lo general útil para invertir transformadas que son razones de polinomios en $j\omega$. En particular, podemos usar la ecuación (4.76) para determinar la respuesta en frecuencia de cualquier sistema LTI descrito por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, y calcular entonces la respuesta al impulso realizando la expansión en fracciones parciales que coloca la respuesta en frecuencia en forma tal que la transformada inversa de cada término se puede reconocer por inspección. Además, si la transformada de Fourier $X(j\omega)$ de la entrada a ese sistema es también una razón de polinomios en $j\omega$, entonces igualmente lo será $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$. En este caso, podemos usar la misma técnica para resolver la ecuación diferencial, es decir, para encontrar la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t)$. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.26

Considere el sistema del ejemplo 4.25, y suponga que la entrada es

$$x(t) = e^{-t}u(t).$$

Entonces, valiéndonos de la ecuación (4.80), tenemos

$$\begin{aligned} Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) &= \left[\frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)}\right]\left[\frac{1}{j\omega + 1}\right] \\ &= \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)}. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Como se analiza en el apéndice, en este caso la expansión en fracciones parciales adopta la forma

$$Y(j\omega) = \frac{A_{11}}{j\omega + 1} + \frac{A_{12}}{(j\omega + 1)^2} + \frac{A_{21}}{j\omega + 3}, \tag{4.82}$$

donde A_{11}, A_{12} y A_{21} son constantes a determinar. En el ejemplo A.2 del apéndice, se usa la técnica de expansión en fracciones parciales para determinar estas constantes. Los valores obtenidos son

$$A_{11} = \frac{1}{4}, \qquad A_{12} = \frac{1}{2}, \qquad A_{21} = -\frac{1}{4}.$$

de modo que

$$Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 3}. \tag{4.83}$$

De nueva cuenta, la transformada inversa de Fourier de cada término en la ecuación (4.83) se puede obtener por inspección. El primer y tercer términos son del mismo tipo que los encontrados en los dos ejemplos anteriores, en tanto que la transformada inversa del segundo término se puede obtener a partir de la tabla 4.2 o, como se hizo en el ejemplo 4.19, aplicando el dual de la propiedad de diferenciación, como se dio en la ecuación (4.40), para $1/(j\omega + 1)$. De esta forma, encontramos que la transformada inversa de la ecuación (4.83) es

$$y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-1} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t).$$

De los ejemplos anteriores podemos ver cómo las técnicas del análisis de Fourier nos permiten reducir a problemas puramente algebraicos aquéllos concernientes a los sistemas LTI caracterizados por ecuaciones diferenciales. Este importante hecho se ilustra aún más en varios problemas al final del capítulo. Además (vea el capítulo 6), la estructura algebraica de las transformadas racionales encontradas en los sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales facilita en gran medida el análisis de sus propiedades en el dominio de la frecuencia y el desarrollo del conocimiento sobre las características en el dominio del tiempo y de la frecuencia de esta importante clase de sistemas.

4.8 RESUMEN

En el presente capítulo hemos desarrollado la representación de la transformada de Fourier para señales continuas y también examinamos muchas de las propiedades que hacen útil a esta transformada. En particular, considerando a una señal aperiódica como el límite de una señal periódica a medida que el periodo se hace arbitrariamente grande, deducimos la representación de la transformada de Fourier para señales aperiódicas a partir de la representación en serie de Fourier para señales periódicas desarrollada en el capítulo 3. Además, las señales periódicas por sí mismas se pueden representar usando transformadas de Fourier que consisten en trenes de impulsos localizados en las frecuencias armónicas de la señal periódica y con áreas proporcionales a los correspondientes coeficientes de la serie de Fourier.

La transformada de Fourier posee una amplia variedad de propiedades importantes que describen cómo las diferentes características de las señales se reflejan en sus trans-

formadas, y en este capítulo hemos deducido y examinado un gran número de dichas propiedades. Entre éstas se encuentran dos de particular significado para nuestro estudio de señales y sistemas. La primera es la propiedad de convolución, la cual es una consecuencia directa de la propiedad de funciones propias de las señales exponenciales complejas y que conduce a la descripción de un sistema LTI en términos de su respuesta en frecuencia. Esta descripción desempeña una función fundamental en el dominio de la frecuencia para el análisis de los sistemas LTI, los cuales continuaremos explorando en los siguientes capítulos. La segunda propiedad de la transformada de Fourier que tiene implicaciones en extremo importantes es la propiedad de multiplicación, la cual proporciona las bases para el análisis en el dominio de la frecuencia de los sistemas de muestreo y modulación. Examinaremos con mayor profundidad estos sistemas en los capítulos 7 y 8.

Hemos visto que las herramientas del análisis de Fourier son particularmente adecuadas para examinar los sistemas LTI caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En concreto, hemos encontrado que la respuesta en frecuencia de este tipo de sistemas se puede determinar por inspección y que la técnica de expansión en fracciones parciales se puede usar para facilitar el cálculo de la respuesta al impulso del sistema. En los capítulos subsecuentes, encontraremos que la oportuna estructura algebraica de las respuestas en frecuencia de estos sistemas nos permite obtener un considerable conocimiento de sus características tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia.

Capítulo 4 Problemas

La primera sección de problemas comprende la categoría básica, cuyas respuestas se proporcionan al final del libro. Las tres secciones restantes contienen problemas que incluyen las categorías básica, avanzada y de extensión, respectivamente.

PROBLEMAS BÁSICOS CON RESPUESTAS

4.1. Use la ecuación de análisis (4.9) de la transformada de Fourier para calcular las transformadas de Fourier de

(a) $e^{-2(t-1)}u(t-1)$ **(b)** $e^{-2|t-1|}$

Dibuje y etiquete la magnitud de cada transformada de Fourier.

4.2. Use la ecuación de análisis (4.9) de la transformada de Fourier para calcular las transformadas de Fourier de

(a) $\delta(t+1)+\delta(t-1)$ **(b)** $\frac{d}{dt}\{u(-2-t)+u(t-2)\}$

Dibuje y etiquete la magnitud de cada transformada de Fourier.

4.3. Determine la transformada de Fourier de cada una de las siguientes señales periódicas:

(a) $\operatorname{sen}(2\pi t+\frac{\pi}{4})$ **(b)** $1+\cos(6\pi t+\frac{\pi}{8})$

4.4. Use la ecuación de síntesis (4.8) de la transformada de Fourier para determinar las transformadas inversas de Fourier de

(a) $X_1(j\omega)=2\pi\,\delta(\omega)+\pi\,\delta(\omega-4\pi)+\pi\,\delta(\omega+4\pi)$

(b) $X_2(j\omega) = \begin{cases} 2, & 0 \leq \omega \leq 2 \\ -2, & -2 \leq \omega \leq 0 \\ 0, & |\omega| > 2 \end{cases}$

4.5. Use la ecuación de síntesis (4.8) de la transformada de Fourier para determinar las transformadas inversas de Fourier de $X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\sphericalangle X(j\omega)}$, donde

$$|X(j\omega)| = 2\{u(\omega + 3) - u(\omega - 3)\},$$

$$\sphericalangle X(j\omega) = -\frac{3}{2}\omega + \pi.$$

Use su respuesta para determinar los valores de t para los cuales $x(t) = 0$.

4.6. Dado que $x(t)$ tiene transformada de Fourier $X(j\omega)$, exprese las transformadas de Fourier de las señales enumeradas a continuación en términos de $X(j\omega)$. Puede encontrar útiles las propiedades de la transformada de Fourier mostradas en la tabla 4.1.

(a) $x_1(t) = x(1 - t) + x(-1 - t)$

(b) $x_2(t) = x(3t - 6)$

(c) $x_3(t) \frac{d^2}{dt^2} x(t - 1)$

4.7. Para cada una de las transformadas de Fourier siguientes, use las propiedades de la transformada de Fourier (tabla 4.1) para determinar si la señal correspondiente en el dominio del tiempo es (i) real, imaginaria o ninguna, y (ii) par, impar o ninguna. Haga esto sin evaluar la inversa de las transformadas dadas.

(a) $X_1(j\omega) = u(\omega) - u(\omega - 2)$

(b) $X_2(j\omega) = \cos(2\omega)\,\text{sen}(\frac{\omega}{2})$

(c) $X_3(j\omega) = A(\omega)e^{jB(\omega)}$, donde $A(\omega) = (\text{sen}\,2\omega)/\omega$ y $B(\omega) = 2\omega + \frac{\pi}{2}$

(d) $X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^{|k|}\,\delta(\omega - \frac{k\pi}{4})$

4.8. Considere la señal

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{1}{2} \\ t + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}. \\ 1, & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(a) Use las propiedades de diferenciación e integración mostradas en la tabla 4.1 y el par de transformadas de Fourier para el pulso rectangular de la tabla 4.2 para encontrar una expresión de forma cerrada para $X(j\omega)$.

(b) ¿Cuál es la transformada de Fourier de $g(t) = x(t) - \frac{1}{2}$?

4.9. Considere la señal

$$x(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1 \\ (t + 1)/2, & -1 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

(a) Con ayuda de las tablas 4.1 y 4.2, determine la expresión para $X(j\omega)$ en forma cerrada.

(b) Tome la parte real de su respuesta en la parte (a) y verifique que sea la transformada de Fourier de la parte par de $x(t)$.

(c) ¿Cuál es la transformada de Fourier de la parte impar de $x(t)$?

4.10. **(a)** Use las tablas 4.1 y 4.2 como ayuda para determinar la transformada de Fourier de la siguiente señal:

$$x(t) = t\left(\frac{\text{sen } t}{\pi t}\right)^2$$

(b) Use la relación de Parseval y el resultado de la parte anterior para determinar el valor numérico de

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{\text{sen } t}{\pi t}\right)^4 dt.$$

4.11. Dadas las relaciones

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

y

$$g(t) = x(3t) * h(3t),$$

y dado que $x(t)$ tiene transformada de Fourier $X(j\omega)$ y $h(t)$ tiene transformada de Fourier $H(j\omega)$, use las propiedades de la transformada de Fourier para demostrar que $g(t)$ tiene la forma

$$g(t) = Ay(Bt).$$

Determine los valores de A y B.

4.12. Considere el par de transformadas de Fourier

$$e^{-|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

(a) Use las propiedades adecuadas de la transformada de Fourier para encontrar la transformada de Fourier de $te^{-|t|}$.

(b) Use el resultado de la parte (a), junto con la propiedad de dualidad, para determinar la transformada de Fourier de

$$\frac{4t}{(1 + t^2)^2}.$$

Sugerencia: Vea el ejemplo 4.13.

4.13. Sea $x(t)$ una señal cuya transformada de Fourier es

$$X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5),$$

y sea

$$h(t) = u(t) - u(t - 2).$$

(a) ¿$x(t)$ es periódica?

(b) ¿$x(t) * h(t)$ es periódica?

(c) ¿Puede ser periódica la convolución de dos señales aperiódicas?

4.14. Considere una señal $x(t)$ con transformada de Fourier $X(j\omega)$. Suponga que se dan los siguientes hechos:

1. $x(t)$ es real y no negativa.
2. $\mathcal{F}^{-1}\{(1 + j\omega)X(j\omega)\} = Ae^{-2t}u(t)$, donde A es independiente de t.
3. $\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2\, d\omega = 2\pi$.

Determine una expresión de forma cerrada para $x(t)$.

4.15. Sea $x(t)$ una señal con transformada de Fourier $X(j\omega)$. Suponga que se dan los siguientes hechos:

1. $x(t)$ es real.
2. $x(t) = 0$ para $t \leq 0$.
3. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{R}e\{X(j\omega)\}e^{j\omega t}d\omega = |t|e^{-|t|}$.

Determine una expresión de forma cerrada para $x(t)$.

4.16. Considere la señal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(k\frac{\pi}{4})}{(k\frac{\pi}{4})}\delta(t - k\tfrac{\pi}{4}).$$

(a) Determine $g(t)$ tal que

$$x(t) = \left(\frac{\text{sen}\, t}{\pi t}\right) g(t).$$

(b) Use la propiedad de multiplicación de la transformada de Fourier para argumentar que $X(j\omega)$ es periódica. Especifique $X(j\omega)$ sobre un periodo.

4.17. Determine si cada uno de los siguientes enunciados son ciertos o falsos. Justifique sus respuestas.

(a) Una señal impar e imaginaria siempre tiene una transformada de Fourier impar e imaginaria.

(b) La convolución de una transformada impar de Fourier con una transformada par de Fourier siempre es impar.

4.18. Encuentre la respuesta al impulso de un sistema con respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \frac{(\text{sen}^2(3\omega))\cos\omega}{\omega^2}.$$

4.19. Considere un sistema LTI causal con respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}.$$

Para una entrada particular $x(t)$, se observa que este sistema produce la salida

$$y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t).$$

Determine $x(t)$.

4.20. Determine la respuesta al impulso del sistema LTI causal representado por el circuito *RLC* examinado en el problema 3.20. Haga esto tomando la transformada inversa de Fourier de la respuesta en frecuencia del circuito. Puede usar las tablas 4.1 y 4.2 como ayuda para evaluar la transformada inversa de Fourier.

PROBLEMAS BÁSICOS

4.21. Calcule la transformada de Fourier de cada una de las siguientes señales:

(a) $[e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t]u(t),\ \alpha > 0$

(b) $e^{-3|t|}\operatorname{sen} 2t$

(c) $x(t) = \begin{cases} 1 + \cos \pi t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\, \delta(t - kT),\ |\alpha| < 1$

(e) $[te^{-2t}\operatorname{sen} 4t]u(t)$

(f) $\left[\frac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi t}\right]\left[\frac{\operatorname{sen}2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]$

(g) $x(t)$ como se muestra en la figura P4.21(a)

(h) $x(t)$ como se muestra en la figura P4.21(b)

(i) $x(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{en otro valor} \end{cases}$

(j) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|t-2n|}$

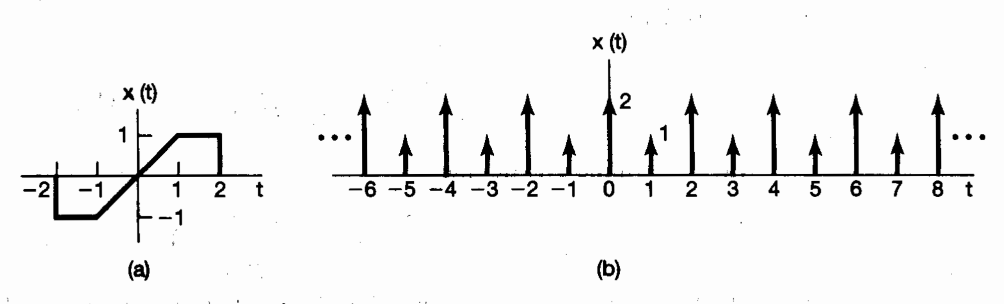


Figura P4.21

4.22. Determine la señal continua correspondiente a cada una de las siguientes transformadas.

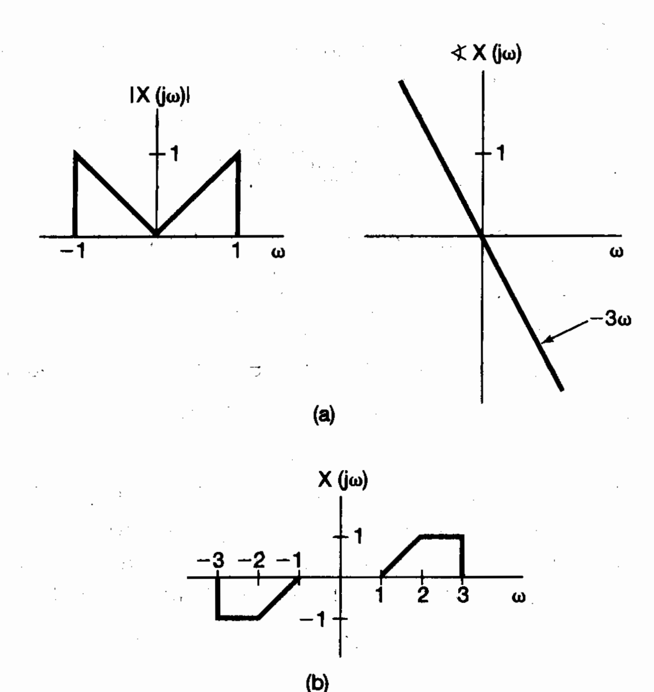


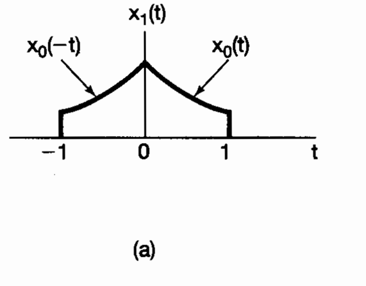
Figura P4.22

(a) $X(j\omega) = \frac{2\,\text{sen}[3(\omega-2\pi)]}{(\omega-2\pi)}$
(b) $X(j\omega) = \cos(4\omega + \pi/3)$
(c) $X(j\omega)$ dada por la magnitud y fase graficada en la figura P4.22(a)
(d) $X(j\omega) = 2[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)] + 3[\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]$
(e) $X(j\omega)$ como en la figura P4.22(b)

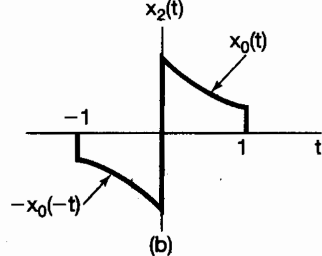
4.23. Considere la señal

$$x_0(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{en otro valor} \end{cases}.$$

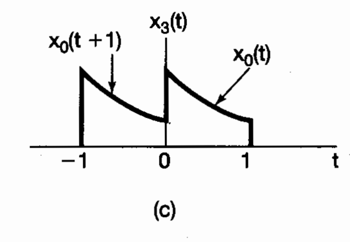
Determine la transformada de Fourier de cada una de las señales mostradas en la figura P4.23. Usted debería ser capaz de hacerlo evaluando explícitamente *sólo* la transformada de $x_0(t)$ y usando entonces las propiedades de la transformada de Fourier.



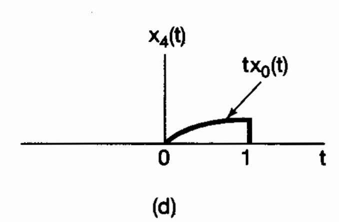
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura P4.23

4.24. **(a)** Determine cuál, si es que alguna, de las señales representadas en la figura P4.24 tiene transformada de Fourier que satisfaga las siguientes condiciones:
(1) $\Re e\{X(j\omega)\} = 0$
(2) $\Im m\{X(j\omega)\} = 0$
(3) Que exista una α real tal que $e^{j\alpha\omega}X(j\omega)$ sea real
(4) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, d\omega = 0$
(5) $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(j\omega)\, d\omega = 0$
(6) Que $X(j\omega)$ sea periódica

(b) Construya una señal que tenga las propiedades (1), (4) y (5) y *no* tenga las demás.

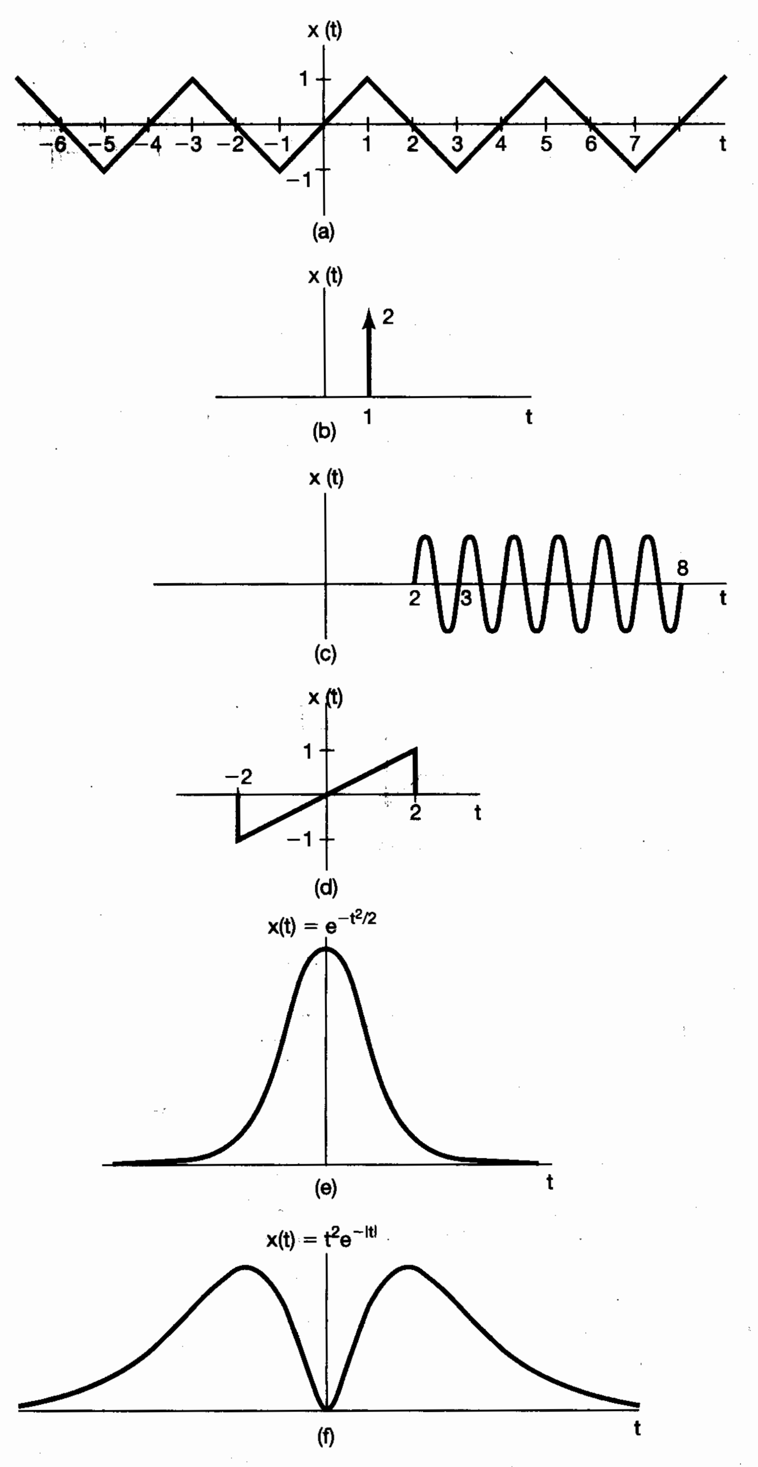

x (t)
1
−1
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 t
(a)
x (t)
2
1
t
(b)
x (t)
8
2 3
t
(c)
x (t)
1
−2
2
t
−1
(d)
x(t) = e^{−t²/2}
t
(e)
x(t) = t²e^{−|t|}
t
(f)

Figura P4.24

4.25. Sea $X(j\omega)$ la cual denota la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ representada en la figura P4.25.

(a) Encuentre $\sphericalangle X(j\omega)$.

(b) Encuentre $X(j0)$.

(c) Encuentre $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, d\omega$.

(d) Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{2 \operatorname{sen} \omega}{\omega} e^{j2\omega}\, d\omega$.

(e) Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega$.

(f) Dibuje la inversa transformada de Fourier de $\mathcal{R}e\{X(j\omega)\}$.

Nota: Debe realizar estos cálculos sin la evaluación explícita de $X(j\omega)$.

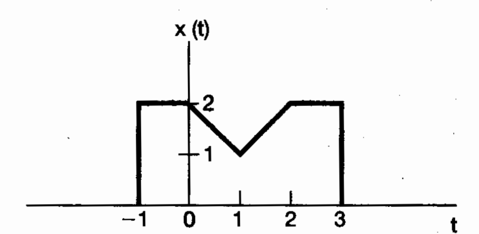


Figura P4.25

4.26. **(a)** Calcule la convolución de cada uno de los siguientes pares de señales $x(t)$ y $h(t)$ mediante el cálculo de $X(j\omega)$ y $H(j\omega)$, usando la propiedad de convolución y haciendo la transformación inversa.

(i) $x(t) = te^{-2t}u(t), h(t) = e^{-4t}u(t)$

(ii) $x(t) = te^{-2t}u(t), h(t) = te^{-4t}u(t)$

(iii) $x(t) = e^{-t}u(t), h(t) = e^{t}u(-t)$

(b) Suponga que $x(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ y $h(t)$ es como en la figura P4.26. Verifique la propiedad de convolución para este par de señales mostrando que la transformada de Fourier de $y(t) = x(t) * h(t)$ es igual a $H(j\omega)X(j\omega)$.

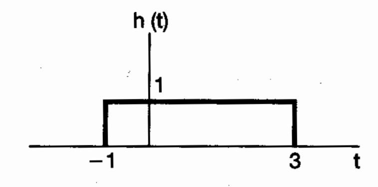


Figura P4.26

4.27. Considere las señales

$$x(t) = u(t-1) - 2u(t-2) + u(t-3)$$

y

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT),$$

donde $T > 0$. Sea que a_k denota los coeficientes de la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$, y sea que $X(j\omega)$ denota la transformada de Fourier de $x(t)$.

(a) Determine una expresión de forma cerrada para $X(j\omega)$.

(b) Determine una expresión para los coeficientes de Fourier a_k y verifique que $a_k = \frac{1}{T}X\left(j\frac{2\pi k}{T}\right)$.

4.28. **(a)** Sea $x(t)$ que tiene la transformada de Fourier $X(j\omega)$ y sea $p(t)$ periódica con periodo fundamental ω_0 y representación en serie de Fourier

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}.$$

Determine una expresión para la transformada de Fourier de

$$y(t) = x(t)p(t). \qquad \text{(P4.28-1)}$$

(b) Suponga que $X(j\omega)$ es como se representa en la figura P4.28(a). Dibuje el espectro de $y(t)$ en la ecuación (P4.28-1) para cada una de las siguientes selecciones de $p(t)$:

(i) $p(t) = \cos(t/2)$

(ii) $p(t) = \cos t$

(iii) $p(t) = \cos 2t$

(iv) $p(t) = (\text{sen } t)(\text{sen } 2t)$

(v) $p(t) = \cos 2t - \cos t$

(vi) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \pi n)$

(vii) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi n)$

(viii) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 4\pi n)$

(ix) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi n) - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \pi n)$

(x) $p(t)$ = la onda cuadrada periódica mostrada en la figura P4.28(b).

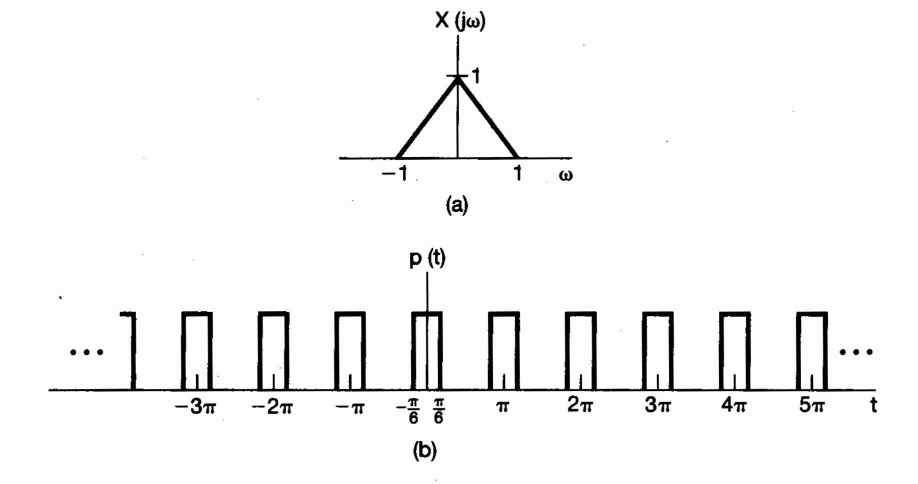
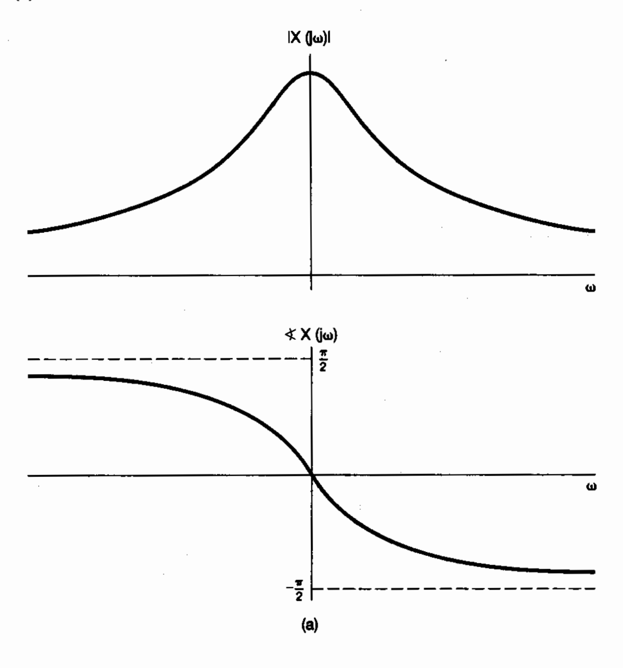


Figura P4.28

4.29. Una función continua $x(t)$ de valor real tiene transformada de Fourier $X(j\omega)$ cuya magnitud y fase son como se ilustra en la figura P4.29(a).

Las funciones $x_a(t)$, $x_b(t)$, $x_c(t)$ y $x_d(t)$ tienen transformadas de Fourier cuyas magnitudes son idénticas a $X(j\omega)$ pero la función de fase difiere, como se muestra en las figuras P4.29(b)-(e). Las funciones de fase $\sphericalangle X_a(j\omega)$ y $\sphericalangle X_b(j\omega)$ se forman agregando una fase lineal a $\sphericalangle X(j\omega)$. La función $\sphericalangle X_c(j\omega)$ se forma al reflejar $\sphericalangle X(j\omega)$ alrededor de $\omega = 0$, y $\sphericalangle X_d(j\omega)$ se obtiene mediante la combinación de un reflejo y una adición de una fase lineal. Usando las propiedades de las transformadas de Fourier, determine las expresiones para $x_a(t), x_b(t), x_c(t)$ y $x_d(t)$ en términos de $x(t)$.



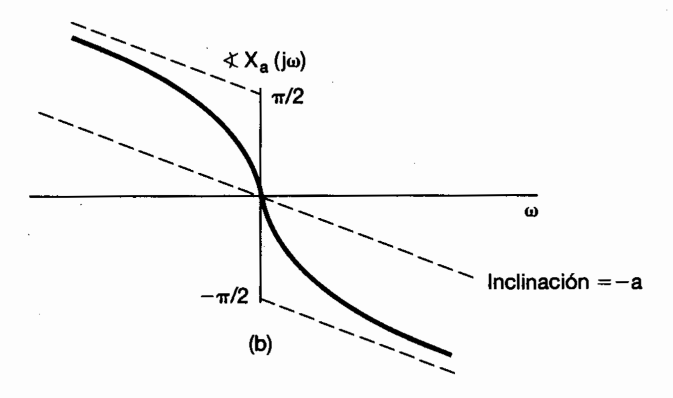
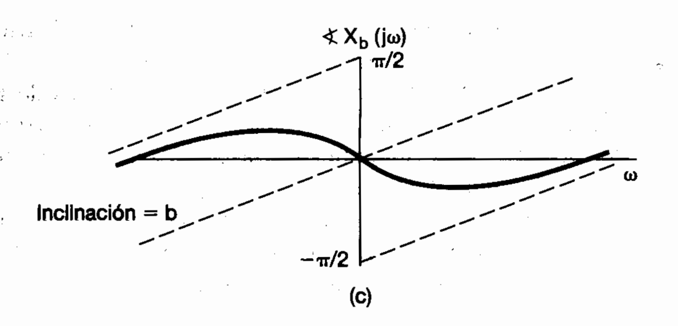
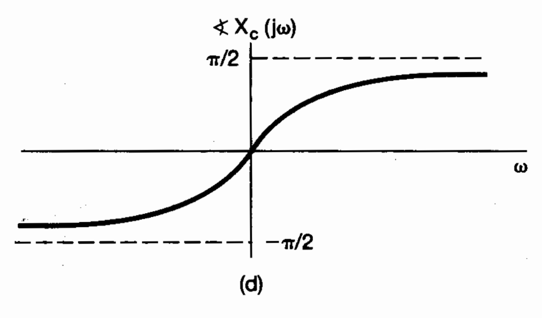


Figura P4.29





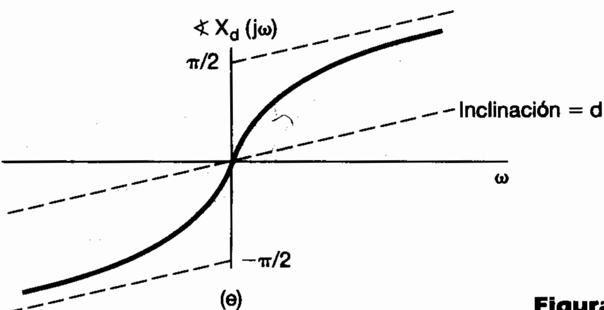


Figura P4.29 *Continuación*

4.30. Suponga que $g(t) = x(t) \cos t$ y que la transformada de Fourier de $g(t)$ es

$$G(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 2 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

(a) Determine $x(t)$.
(b) Especifique la transformada de Fourier $X_1(j\omega)$ de una señal $x_1(t)$ tal que

$$g(t) = x_1(t) \cos\left(\frac{2}{3} t\right).$$

4.31. **(a)** Demuestre que los tres sistemas LTI con respuestas al impulso

$$h_1(t) = u(t),$$

$$h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t),$$

y

$$h_3(t) = 2te^{-t}u(t)$$

tienen todos la misma respuesta a $x(t) = \cos t$.

(b) Determine la respuesta al impulso de otro sistema LTI con la misma respuesta a $\cos t$.

Este problema ilustra el hecho de que la respuesta a $\cos t$ no se puede usar para especificar únicamente un sistema LTI.

4.32. Considere un sistema LTI S con respuesta al impulso

$$h(t) = \frac{\operatorname{sen}(4(t-1))}{\pi(t-1)}.$$

Determine la salida de S para cada una de las siguientes entradas:

(a) $x_1(t) = \cos(6t + \frac{\pi}{2})$

(b) $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k \operatorname{sen}(3kt)$

(c) $x_3(t) = \frac{\operatorname{sen}(4(t+1))}{\pi(t+1)}$

(d) $x_4(t) = (\frac{\operatorname{sen} 2t}{\pi t})^2$

4.33. La entrada y la salida de un sistema LTI causal están relacionadas por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

(a) Encuentre la respuesta de este sistema al impulso.

(b) ¿Cuál es la respuesta de este sistema si $x(t) = te^{-2t}u(t)$?

(c) Repita la parte (a) para al sistema LTI causal descrito por la ecuación

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2x(t)$$

4.34. Un sistema LTI S causal y estable tiene respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 4}{6 - \omega^2 + 5j\omega}.$$

(a) Determine una ecuación diferencial que relacione la entrada $x(t)$ con la salida $y(t)$ de S.
(b) Determine la respuesta al impulso $h(t)$ de S.
(c) ¿Cuál es la salida de S cuando la entrada es

$$x(t) = e^{-4t}u(t) - te^{-4t}u(t)?$$

4.35. En este problema ofrecemos ejemplos de los efectos de cambios no lineales en fase.
(a) Considere un sistema LTI continuo con respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega},$$

donde $a > 0$. ¿Cuál es la magnitud de $H(j\omega)$? ¿Cuál es $\sphericalangle H(j\omega)$? ¿Cuál es la respuesta de este sistema al impulso?
(b) Determine la salida del sistema de la parte (a) con $a = 1$ cuando la entrada es

$$\cos(t/\sqrt{3}) + \cos t + \cos \sqrt{3}t.$$

Bosqueje un borrador tanto de la entrada como de la salida.

4.36. Considere un sistema LTI cuya respuesta a la entrada

$$x(t) = [e^{-t} + e^{-3t}]u(t)$$

es

$$y(t) = [2e^{-t} - 2e^{-4t}]u(t).$$

(a) Encuentre la respuesta en frecuencia de este sistema.
(b) Determine la respuesta del sistema al impulso.
(c) Encuentre la ecuación diferencial que relaciona la entrada y la salida de este sistema.

PROBLEMAS AVANZADOS

4.37. Considere la señal $x(t)$ de la figura P4.37.
(a) Encuentre la transformada de Fourier $X(j\omega)$ de $x(t)$.
(b) Dibuje la señal

$$\tilde{x}(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4k).$$

(c) Encuentre otra señal $g(t)$ que no sea la misma que $x(t)$ y

$$\tilde{x}(t) = g(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4k).$$

(d) Argumente que, aunque $G(j\omega)$ es diferente de $X(j\omega)$, $G(j\frac{\pi k}{2}) = X(j\frac{\pi k}{2})$ para todos los enteros k. No debe evaluar explícitamente $G(j\omega)$ para responder a esta pregunta.

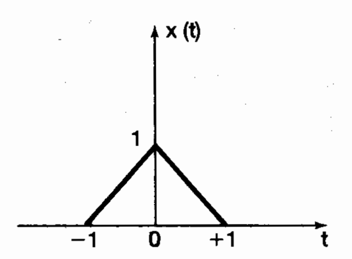


Figura P4.37

4.38. Sea $x(t)$ cualquier señal con transformada de Fourier $X(j\omega)$. La propiedad de desplazamiento de frecuencia de la transformada de Fourier se puede establecer como

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j(\omega - \omega_0)).$$

(a) Pruebe la propiedad de desplazamiento aplicando el desplazamiento de frecuencia a la ecuación de análisis

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt.$$

(b) Pruebe la propiedad de desplazamiento utilizando la transformada de Fourier de $e^{j\omega_0 t}$ junto con la propiedad de multiplicación de la transformada de Fourier.

4.39. Suponga que una señal $x(t)$ tiene transformada de Fourier $X(j\omega)$. Considere ahora otra señal $g(t)$ cuya forma es la misma que la de $X(j\omega)$; esto es,

$$g(t) = X(jt).$$

(a) Demuestre que la transformada de Fourier $G(j\omega)$ de $g(t)$ tiene la misma forma que $2\pi x(-t)$; es decir, demuestre que

$$G(j\omega) = 2\pi x(-\omega).$$

(b) Usando el hecho de que

$$\mathfrak{F}\{\delta(t + B)\} = e^{jB\omega}$$

junto con el resultado de la parte (a), demuestre que

$$\mathfrak{F}\{e^{jBt}\} = 2\pi\, \delta(\omega - B).$$

4.40. Utilice las propiedades de la transformada de Fourier para demostrar por inducción que la transformada de Fourier de

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), a > 0,$$

es

$$\frac{1}{(a+j\omega)^n}.$$

4.41. En este problema, deducimos la propiedad de multiplicación de la transformada continua de Fourier. Sean $x(t)$ y $y(t)$ dos señales continuas con transformada de Fourier $X(j\omega)$ y $Y(j\omega)$, respectivamente. Asimismo, considere $g(t)$ que denota la transformada inversa de Fourier de $\frac{1}{2\pi}\{X(j\omega) * Y(j\omega)\}$.

(a) Demuestre que

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(j(\omega-\theta))e^{j\omega t}\,d\omega\right]d\theta.$$

(b) Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(j(\omega-\theta))\,e^{j\omega t}\,d\omega = e^{j\theta t}y(t).$$

(c) Combine los resultados de las partes (a) y (b) para concluir que

$$g(t) = x(t)y(t).$$

4.42. Sea

$$g_1(t) = \{[\cos(\omega_0 t)]x(t)\} * h(t) \quad \text{y} \quad g_2(t) = \{[\operatorname{sen}(\omega_0 t)]x(t)\} * h(t),$$

donde

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk100t}$$

es una señal periódica de valor real y $h(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema LTI estable.

(a) Especifique un valor para ω_0 y cualquier restricción necesaria sobre $H(j\omega)$ para asegurar que

$$g_1(t) = \mathcal{R}e\{a_5\} \qquad \text{y} \qquad g_2(t) = \mathcal{I}m\{a_5\}.$$

(b) Dé un ejemplo de $h(t)$ tal que $H(j\omega)$ satisfaga las restricciones que usted determinó en la parte (a).

4.43. Sea

$$g(t) = x(t)\cos^2 t * \frac{\operatorname{sen} t}{\pi t}.$$

Suponiendo que $x(t)$ sea real y $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq 1$, demuestre que existe un sistema LTI S tal que

$$x(t) \xrightarrow{S} g(t).$$

4.44. La salida $y(t)$ de un sistema LTI casual está relacionada con la entrada $x(t)$ por la ecuación

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)z(t-\tau)\,d\tau - x(t),$$

donde $z(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t)$.

(a) Encuentre la respuesta en frecuencia $H(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega)$ de este sistema.

(b) Determine la respuesta al impulso del sistema.

4.45. En el análisis de la sección 4.3.7 de la relación de Parseval para señales continuas, vimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega.$$

Esto indica que la energía total de la señal se puede obtener al integrar $|X(j\omega)|^2$ en todas las frecuencias. Ahora considere una señal $x(t)$ de valor real procesada por el filtro ideal paso banda $H(j\omega)$ mostrado en la figura P4.45. Exprese la energía de la señal de salida $y(t)$ como una integración sobre la frecuencia de $|X(j\omega)|^2$. Para una Δ lo suficientemente pequeña de manera que $|X(j\omega)|$ sea aproximadamente constante sobre un intervalo de frecuencias de ancho Δ, demuestre que la energía en la salida $y(t)$ del filtro paso banda es aproximadamente proporcional a $\Delta|X(j\omega_0)|^2$.

Con base en el resultado anterior, $\Delta|X(j\omega_0)|^2$ es proporcional a la energía en la señal en un ancho de banda Δ alrededor de la frecuencia ω_c. Por esta razón, $|X(j\omega)|^2$ se conoce frecuentemente como el *espectro de densidad de energía* de la señal $x(t)$.

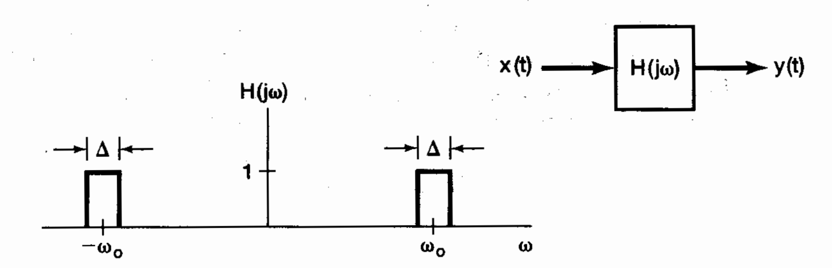


Figura P4.45

4.46. En la sección 4.5.1 analizamos el uso de la modulación en amplitud con una portadora exponencial compleja para construir un filtro paso banda. El sistema específico se muestra en la figura 4.26, y si sólo se mantiene la parte real de $f(t)$, el filtro paso banda equivalente es el que se muestra en la figura 4.30.

En la figura P4.46 mostramos una construcción de un filtro paso banda que utiliza modulación senoidal y filtros paso bajas. Demuestre que la salida $y(t)$ del sistema es idéntica a la que se obtendría si se retuviera solamente $\mathcal{R}e\{f(t)\}$ en la figura 4.26.

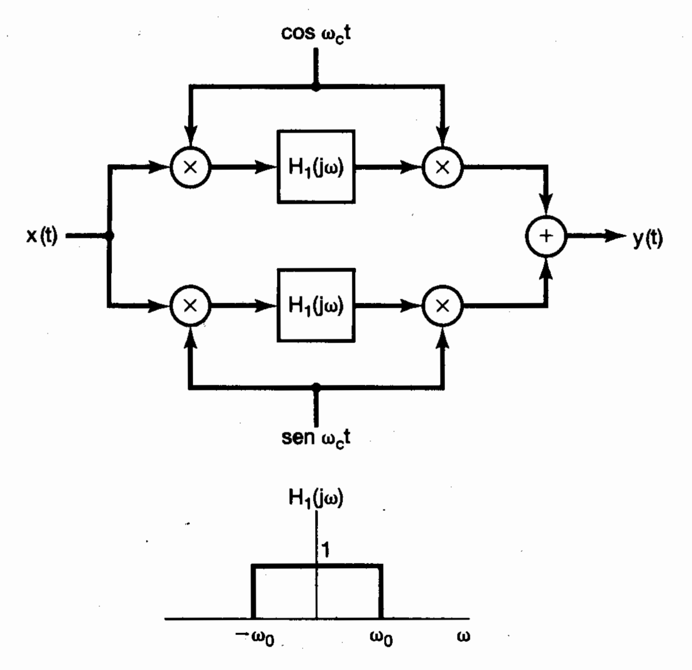


Figura P4.46

4.47. Una propiedad importante de la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ de un sistema LTI continuo con respuesta al impulso $h(t)$ causal y real, es que $H(j\omega)$ se especifica por completo por su parte real $\mathcal{R}e\{H(j\omega)\}$. El problema actual se relaciona con deducir y examinar algunas de las implicaciones de esta propiedad, a la cual por lo general se le conoce como la *suficiencia de la parte real.*

(a) Pruebe la propiedad de la suficiencia de la parte real mediante el examen de la señal $h_e(t)$, la cual es la parte par de $h(t)$. ¿Cuál es la transformada de Fourier de $h_e(t)$? Indique cómo se puede recuperar $h(t)$ a partir de $h_e(t)$.

(b) Si la parte real de la respuesta en frecuencia de un sistema causal es

$$\mathcal{R}e\{H(j\omega)\} = \cos\omega,$$

¿cuál es $h(t)$?

(c) Demuestre que $h(t)$ se puede recuperar de $h_o(t)$, la parte impar de $h(t)$, para cada valor de t excepto $t = 0$. Observe que si $h(t)$ no contiene ninguna singularidad [$\delta(t), u_1(t), u_2(t)$, etc.] en $t = 0$, entonces la respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

no cambiará si $h(t)$ se fija a algún valor finito arbitrario en el punto único de $t = 0$. Entonces, en este caso, demuestre que $H(j\omega)$ también se especifica por completo por su parte imaginaria.

PROBLEMAS DE EXTENSIÓN

4.48. Considere un sistema con una respuesta al impulso $h(t)$ causal y real que no tiene ninguna singularidad en $t = 0$. En el problema 4.47 vimos que ya fuera la parte real o la parte imaginaria de $H(j\omega)$, cualquiera determina por completo a $H(j\omega)$. En este problema deducimos una relación explícita entre $H_R(j\omega)$ y $H_I(j\omega)$, las partes real e imaginaria de $H(j\omega)$.

(a) Para empezar, ya que $h(t)$ es causal,

$$h(t) = h(t)u(t), \tag{P4.48-1}$$

excepto, quizás, en $t = 0$. Ahora, puesto que $h(t)$ no contiene singularidades en $t = 0$, las transformadas de Fourier de ambos miembros de la ecuación (P4.48-1) deben ser idénticas. Use este hecho, junto con la propiedad de multiplicación, para demostrar que

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H(j\eta)}{\omega - \eta}\,d\eta. \tag{P4.48-2}$$

Utilice la ecuación (P4.48-2) para determinar una expresión para $H_R(j\omega)$ en términos de $H_I(j\omega)$ y una para $H_I(j\omega)$ en términos de $H_R(j\omega)$.

(b) La operación

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau)}{t - \tau}\,d\tau \tag{P4.48-3}$$

se llama *transformada de Hilbert*. Acabamos de ver que las partes real e imaginaria de la transformada de una respuesta al impulso $h(t)$ real y causal se pueden determinar una a partir de la otra usando la transformada de Hilbert.

Ahora tome en cuenta la ecuación (P4.48-3), y considere a $y(t)$ como la salida de un sistema LTI con entrada $x(t)$. Demuestre que la respuesta en frecuencia de este sistema es

$$H(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases}.$$

(c) ¿Cuál es la transformada de Hilbert de la señal $x(t) = \cos 3t$?

4.49. Sea $H(j\omega)$ la respuesta en frecuencia de un sistema LTI continuo, y suponga que $H(j\omega)$ es real, par y positiva. También suponga que

$$\max_{\omega}\{H(j\omega)\} = H(0).$$

(a) Demuestre que:

(i) La respuesta al impulso $h(t)$ es real.

(ii) $\text{máx}\{|h(t)|\} = h(0)$.

Sugerencia: Si $f(t, \omega)$ es una función compleja de dos variables, entonces

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,\omega)\,d\omega\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t,\omega)|\,d\omega.$$

(b) Un importante concepto en el análisis de sistemas es el *ancho de banda* de un sistema LTI. Hay muchas formas matemáticas diferentes con las cuales se define el ancho de banda, pero todas ellas están relacionadas con la idea cualitativa e intuitiva de que un sistema con respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ esencialmente "detiene" señales de la forma $e^{j\omega t}$ para valores de ω donde $G(j\omega)$ se desvanece o es pequeña y deja "pasar" aquellas exponenciales complejas en la banda de frecuencia donde $G(j\omega)$ no es pequeña. El ancho de esta banda es el ancho de banda. Estas ideas se expondrán en forma mucho más clara en el capítulo 6, pero por ahora consideraremos una definición especial del ancho de banda para aquellos sistemas con respuesta en frecuencia que tienen las propiedades especificadas previamente para $H(j\omega)$. En concreto, una definición del ancho de banda B_w de tal sistema es el ancho de un rectángulo de altura $H(j0)$, el cual tiene un área igual al área bajo $H(j\omega)$. Esto se ilustra en la figura P4.49(a). Observe que, ya que $H(j0) = \text{máx}_\omega H(j\omega)$, las frecuencias dentro de la banda indicadas en la figura son aquellas para las cuales $H(j\omega)$ es más grande. La selección exacta del ancho en la figura es, por supuesto, un poco arbitraria, pero hemos escogido una definición que nos permite comparar diferentes sistemas y precisar una relación muy importante entre tiempo y frecuencia.

¿Cuál es el ancho de banda del sistema con respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}?$$

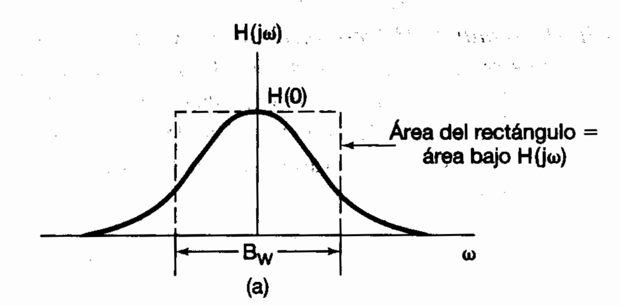


Figura P4.49a

(c) Determine una expresión para el ancho de banda B_w en términos de $H(j\omega)$.

(d) Considere que $s(t)$ denota la respuesta al escalón del sistema establecido en la parte (a). Una medida importante de la velocidad de respuesta de un sistema es el *tiempo de subida*, el cual, como el ancho de banda, tiene una definición cualitativa que conduce a muchas posibles definiciones matemáticas, una de las cuales usaremos nosotros. Intuitivamente, el tiempo de subida de un sistema es una medida de qué tan rápido se eleva la respuesta al escalón desde cero hasta su valor final,

$$s(\infty) = \lim_{t\to\infty} s(t).$$

Por tanto, entre más pequeño sea el tiempo de subida, más rápida será la respuesta del sistema. Para el sistema analizado en este problema, definiremos el tiempo de subida como

$$t_r = \frac{s(\infty)}{h(0)}.$$

Puesto que

$$s'(t) = h(t),$$

y también debido a la propiedad de que $h(0) = \text{máx}_t\, h(t)$, vemos que t_r se puede interpretar como el tiempo que llevaría ir de cero hasta $s(\infty)$ mientras se mantiene la máxima tasa de cambio de $s(t)$. Esto se ilustra en la figura P4.49-(b).

Encuentre una expresión para t_r en términos de $H(j\omega)$.

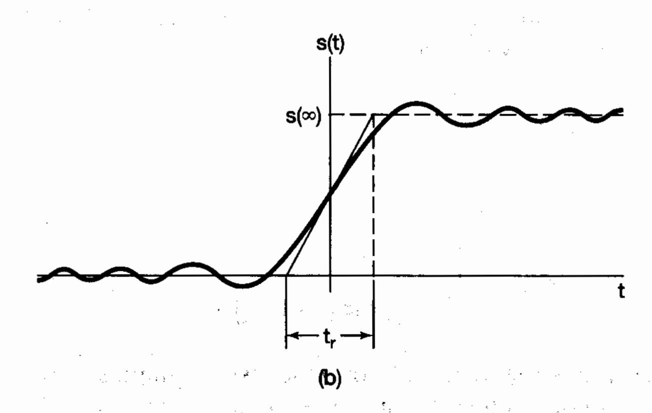


Figura P4.49b

(e) Combine los resultados de las partes (c) y (d) para demostrar que

$$B_w t_r = 2\pi. \qquad \text{(P4.49-1)}$$

Por consiguiente, no podemos especificar independientemente el tiempo de subida como el ancho de banda de nuestro sistema. Por ejemplo, la ecuación (P4.49-1) implica que, si queremos un sistema rápido (t_r pequeño), el sistema debe tener un ancho de banda grande. Esto implica un compromiso fundamental que es de gran importancia en muchos problemas de diseño de sistemas.

4.50. En los problemas 1.45 y 2.67 definimos y examinamos varias de las propiedades y usos de las funciones de correlación. En este problema examinamos las propiedades de dichas funciones en el dominio de la frecuencia. Sean $x(t)$ y $y(t)$ dos señales reales. La función de correlación cruzada de $x(t)$ y $y(t)$ se define como

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)\, y(\tau)\, d\tau.$$

De manera similar, podemos definir $\phi_{yx}(t)$, $\phi_{xx}(t)$ y $\phi_{yy}(t)$. [Las dos últimas son llamadas las funciones de autocorrelación de las señales $x(t)$ y $y(t)$, respectivamente.] Supongamos que $\Phi_{xy}(j\omega)$, $\Phi_{yx}(j\omega)$, $\Phi_{xx}(j\omega)$ y $\Phi_{yy}(j\omega)$ denotan las transformadas de Fourier de $\phi_{xy}(t)$, $\phi_{yx}(t)$, $\phi_{xx}(t)$ y $\phi_{yy}(t)$, respectivamente.

(a) ¿Cuál es la relación entre $\Phi_{xy}(j\omega)$ y $\Phi_{yx}(j\omega)$?

(b) Encuentre una expresión para $\Phi_{xy}(j\omega)$ en términos de $X(j\omega)$ y de $Y(j\omega)$.

(c) Demuestre que $\Phi_{xx}(j\omega)$ es real y no negativa para toda ω.

(d) Suponga ahora que $x(t)$ es la entrada a un sistema LTI con una respuesta al impulso real y con respuesta en frecuencia $H(j\omega)$, y que $y(t)$ es la salida. Encuentre expresiones para $\Phi_{xy}(j\omega)$ y $\Phi_{yy}(j\omega)$ en términos de $\Phi_{xx}(j\omega)$ y $H(j\omega)$.

(e) Sea $x(t)$ como se ilustra en la figura P4.50, y sea $h(t) = e^{-at}u(t)$ la respuesta al impulso del sistema LTI para $a > 0$. Calcule $\Phi_{xx}(j\omega)$, $\Phi_{xy}(j\omega)$ y $\Phi_{yy}(j\omega)$ usando los resultados de las partes (a)-(d).

(f) Suponga que nos da la siguiente transformada de Fourier de una función $\phi(t)$:

$$\Phi(j\omega) = \frac{\omega^2 + 100}{\omega^2 + 25}.$$

Encuentre las respuestas al impulso de *dos* sistemas LTI causales y estables, que tengan ambos funciones de autocorrelación iguales a $\phi(t)$. ¿Cuál de estos tiene un inverso causal y estable?

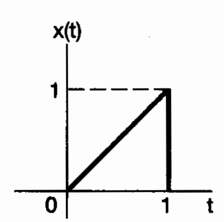


Figura P4.50

4.51. (a) Considere dos sistemas LTI con respuesta al impulso $h(t)$ y $g(t)$, respectivamente, y suponga que estos sistemas son uno el inverso del otro. Suponga también que ambos tienen respuestas en frecuencia denotadas por $H(j\omega)$ y $G(j\omega)$, respectivamente. ¿Cuál es la relación entre $H(j\omega)$ y $G(j\omega)$?

(b) Considere el sistema LTI continuo con respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & 2 < |\omega| < 3 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

(i) ¿Es posible encontrar una entrada $x(t)$ para este sistema de manera que la salida sea como la representada en la figura P4.50? Si es así, encuentre $x(t)$. Si no, explique por qué.

(ii) ¿El sistema es invertible? Explique su respuesta.

(c) Considere un auditorio con un problema de eco. Como se analizó en el problema 2.64, podemos modelar la acústica del auditorio como un sistema LTI con una respuesta al impulso que consista de un tren de impulsos, cuyo *k*ésimo impulso en el tren corresponda al *k*ésimo eco. Suponga que en este caso particular la respuesta al impulso es

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT}\,\delta(t - kT),$$

donde el factor e^{-kT} representa la atenuación del *k*ésimo eco.

Para poder hacer una grabación de alta calidad en el escenario, el efecto de los ecos debe ser eliminado llevándose a cabo algún procesamiento de los sonidos detectados por el equipo de grabación. En el problema 2.64 usamos las técnicas de convolución para considerar un ejemplo del diseño de un procesador de ese tipo (para un modelo de acústica diferente). En este problema usaremos las técnicas del dominio de la frecuencia. Específicamente, considere que $G(j\omega)$ denota la respuesta en frecuencia del sistema LTI que será usado para procesar la señal acústica detectada. Seleccione una $G(j\omega)$ de manera que

los ecos sean completamente eliminados y la señal resultante sea una reproducción fiel de los sonidos originales del escenario.

(d) Encuentre la ecuación diferencial para el inverso del sistema con respuesta al impulso

$$h(t) = 2\delta(t) + u_1(t).$$

(e) Considere el sistema LTI inicialmente en reposo y descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t).$$

El inverso de este sistema también está en reposo inicial y está descrito por una ecuación diferencial. Encuentre la ecuación diferencial que describa el inverso, así como las respuestas al impulso $h(t)$ y $g(t)$ del sistema original y de su inverso.

4.52. Los sistemas inversos con frecuencia encuentran aplicación en problemas que involucran dispositivos de medición imperfectos. Por ejemplo, considere un dispositivo para medir la temperatura de un líquido. Con frecuencia resulta razonable modelar estos dispositivos como un sistema LTI que, debido a las características de respuesta del elemento de medición (por ejemplo, el mercurio en un termómetro), no responda instantáneamente a cambios de temperatura. En particular, suponga que la respuesta de este dispositivo a un escalón unitario de temperatura es

$$s(t) = (1 - e^{-t/2})u(t). \qquad \text{(P4.52-1)}$$

(a) Diseñe un sistema de compensación tal, que cuando registre la salida del dispositivo de medición, produzca una salida igual a la temperatura instantánea del líquido.

(b) Uno de los problemas que con frecuencia surgen al usar sistemas inversos como compensadores para los dispositivos de medición, es que pueden surgir enormes inexactitudes en la temperatura indicada si la salida real del dispositivo de medición produce errores debido a pequeños fenómenos erráticos en el dispositivo. En vista de que siempre existe este tipo de fuentes de error en sistemas reales, uno debe tomarlos en cuenta. Para ilustrar esto, considere un dispositivo de medición cuya salida total se puede modelar como la suma de la respuesta del dispositivo de medición caracterizada por la ecuación (P4.52-1) y una señal $n(t)$ de "ruido" de interferencia. Este modelo se ha representado en la figura P4.52(a), en la cual también hemos incluido el sistema inverso de la parte (a), el cual ahora tiene como su entrada la salida total del dispositivo de medición. Suponga que $n(t) = \text{sen}\, \omega t$. ¿Cuál es la contribución de $n(t)$ a la salida del sistema inverso, y cómo cambia esta salida conforme ω se incrementa?

(c) El tema tratado en la parte (b) es de importancia en muchas aplicaciones del análisis de sistemas LTI. En concreto, nos enfrentamos con el compromiso fundamental entre la velocidad de respuesta del sistema y su capacidad para atenuar interferencias de alta frecuencia. De acuerdo con la parte (b), este intercambio implica que al intentar acelerar la respuesta de un dispositivo de medición (por medio de un sistema inverso), produjimos un sistema que también amplificaría señales senoidales corruptoras. Para ilustrar este concepto, considere un dispositivo de medición que responde instantáneamente a cam-

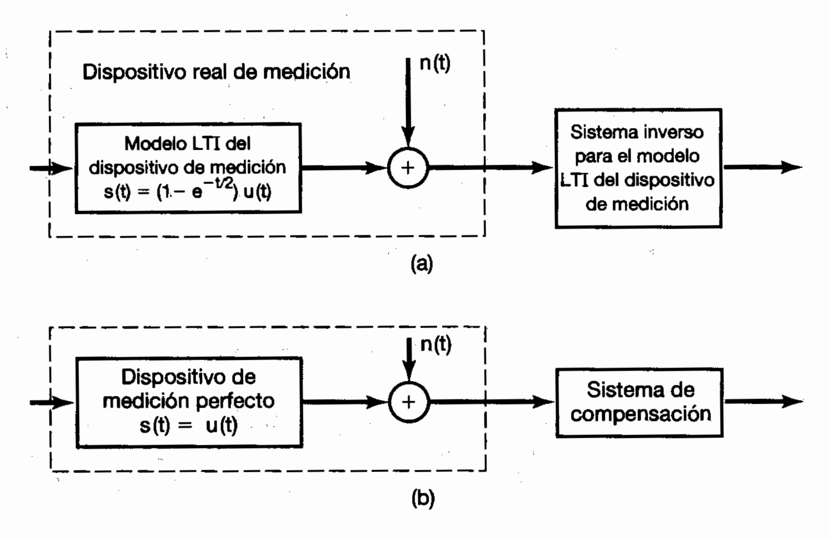


Figura P4.52

bios en temperatura, pero que también tiene interferencia por ruido. La respuesta de tales sistemas se pueden modelar, como podemos ver en la figura P4.52(b), a manera de suma de la respuesta de un dispositivo de medición perfecto con una señal $n(t)$ corruptora. Suponga que deseamos diseñar un sistema de compensación que hará *más lenta* la respuesta a las variaciones reales de la temperatura pero que también atenuará el ruido $n(t)$. Supongamos que la respuesta al impulso del sistema de compensación es

$$h(t) = ae^{-at}u(t).$$

Seleccione a de manera que el sistema total de la figura P4.52(b) responda tan rápido como sea posible a un cambio en escalón de la temperatura, con la condición de que la amplitud de la porción de la salida debida al ruido $n(t) = \text{sen}\, 6t$ sea no mayor que 1/4.

4.53. Como se mencionó en el texto, las técnicas del análisis de Fourier se pueden extender a señales que tienen dos variables independientes. Estas técnicas desempeñan un papel importante en otras aplicaciones, como el procesamiento de imágenes, como sucede con sus contrapartes unidimensionales en algunas aplicaciones. En este problema introducimos algunas de las ideas elementales del análisis de Fourier para dos dimensiones.

Sea $x(t_1, t_2)$ una señal que depende de dos variables independientes t_1 y t_2. La *transformada de Fourier bidimensional* de $x(t_1, t_2)$ se define como

$$X(j\omega_1, j\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1, t_2)e^{-j(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}\, dt_1\, dt_2.$$

(a) Demuestre que esta integral doble se puede realizar a través de dos transformadas sucesivas unidimensionales de Fourier, primero en t_1 considerando a t_2 fija y después en t_2.

(b) Use el resultado de la parte (a) para determinar la transformada inversa, es decir, una expresión para $x(t_1, t_2)$ en términos de $X(j\omega_1, j\omega_2)$.

(c) Determine las transformadas de Fourier bidimensionales de las señales siguientes:

(i) $x(t_1, t_2) = e^{-t_1 + 2t_2}u(t_1 - 1)u(2 - t_2)$

(ii) $x(t_1, t_2) = \begin{cases} e^{-|t_1|-|t_2|}, & \text{si } -1 < t_1 \leq 1 \text{ y } -1 \leq t_2 \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro} \end{cases}$

(iii) $x(t_1, t_2) = \begin{cases} e^{-|t_1|-|t_2|}, & \text{si } 0 \leq t_1 \leq 1 \text{ o } 0 \leq t_2 \leq 1 \text{ (o ambas)} \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$

(iv) $x(t_1, t_2)$ como se muestra en la figura P4.53.

(v) $e^{-|t_1 + t_2|-|t_1 - t_2|}$

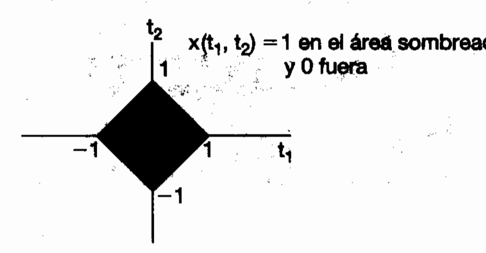


Figura P4.53

(d) Determine la señal $x(t_1, t_2)$ cuya transformada de Fourier bidimensional está dada por

$$X(j\omega_1, j\omega_2) = \frac{2\pi}{4 + j\omega_1}\,\delta(\omega_2 - 2\omega_1).$$

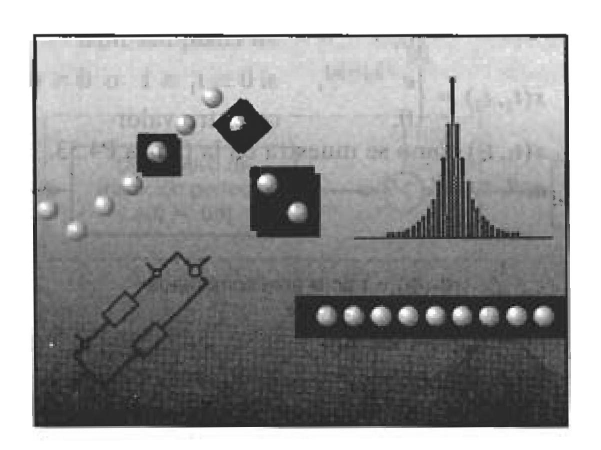
(e) Sean $x(t_1, t_2)$ y $h(t_1, t_2)$ dos señales con transformadas de Fourier bidimensionales $X(j\omega_1, j\omega_2)$ y $H(j\omega_1, j\omega_2)$, respectivamente. Determine las transformadas de las siguientes señales en términos de $X(j\omega_1, j\omega_2)$ y $H(j\omega_1, j\omega_2)$.

(i) $x(t_1 - T_1, t_2 - T_2)$

(ii) $x(at_1, bt_2)$

(iii) $y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau_1, \tau_2)h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)d\tau_1\, d\tau_2.$

5
La transformada de Fourier de tiempo discreto



5.0 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 4 presentamos el método de la transformada continua de Fourier y desarrollamos las diversas características de esa transformada que hacen de los métodos de análisis de Fourier un medio de gran valor para el análisis y la comprensión de las propiedades de las señales y sistemas continuos. En el presente capítulo completamos nuestro desarrollo de las herramientas básicas del análisis de Fourier mediante la introducción y el examen de la transformada de Fourier de tiempo discreto.

En nuestro análisis de la serie de Fourier en el capítulo 3, vimos que hay muchas similitudes y un fuerte paralelismo en el análisis de las señales continuas y discretas. Sin embargo, también hay diferencias importantes. Por ejemplo, como vimos en la sección 3.6, la representación en serie de Fourier de una señal periódica discreta es una serie *finita*, opuesta a la representación en serie infinita requerida para las señales periódicas continuas. Como veremos en este capítulo, existen diferencias que son correspondientes entre las transformadas de Fourier continua y de tiempo discreto.

En el resto del capítulo aprovecharemos las similitudes entre el análisis de Fourier de tiempo continuo y de tiempo discreto siguiendo una estrategia idéntica a la que se usó en el capítulo 4. En particular, comenzaremos extendiendo la descripción de la serie de Fourier de señales periódicas para desarrollar una representación de la transformada de Fourier para señales aperiódicas discretas, y continuaremos con un análisis de las propiedades y las características de la transformada de Fourier de tiempo discreto, semejante al que se desarrolló en el capítulo 4. Al actuar así, no sólo reafirmamos la comprensión de los conceptos básicos del análisis de Fourier, que son comunes tanto al tiempo continuo como al tiempo discreto, sino que contrastamos sus diferencias a fin de profundizar en la comprensión de las distintas características de cada uno.

5.1 REPRESENTACIÓN DE SEÑALES APERIÓDICAS: LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

5.1.1 Desarrollo de la transformada de Fourier de tiempo discreto

En la sección 4.1 [ecuación (4.2) y figura 4.2] vimos que los coeficientes de la serie de Fourier para una onda cuadrada periódica continua pueden considerarse como las muestras de una función envolvente y que, conforme el periodo de la onda cuadrada se incrementa, estas muestras llegan a estar cada vez más cercanas unas de otras. Esta propiedad sugirió la representación para una señal aperiódica $x(t)$ construyendo primero una señal periódica $\tilde{x}(t)$ que igualara a $x(t)$ sobre un periodo. Entonces, conforme este periodo se aproximaba a infinito, $\tilde{x}(t)$ era igual a $x(t)$ sobre intervalos de tiempo cada vez más grandes, y la representación en serie de Fourier para $\tilde{x}(t)$ se aproximaba a la representación de la transformada de Fourier de $x(t)$. En esta sección aplicaremos un procedimiento análogo a las señales discretas para desarrollar la representación de la transformada de Fourier para secuencias aperiódicas discretas.

Considere una secuencia general $x[n]$ que tiene duración finita. Esto es, para algunos enteros N_1 y N_2, $x[n] = 0$ fuera del intervalo $-N_1 \leq n \leq N_2$. En la figura 5.1(a) se muestra una señal de este tipo. A partir de esta señal aperiódica podemos construir una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ para la cual $x[n]$ sea un periodo, como se ilustra en la figura 5.1(b). Cuando hacemos que el periodo sea más grande, $\tilde{x}[n]$ es idéntica a $x[n]$ sobre un intervalo más grande, y conforme $N \to \infty$, $\tilde{x}[n] = x[n]$ para cualquier valor finito de n.

Examinemos ahora la representación en serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$. En concreto, rescribiendo las ecuaciones (3.94) y (3.95), tenemos

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}, \tag{5.1}$$

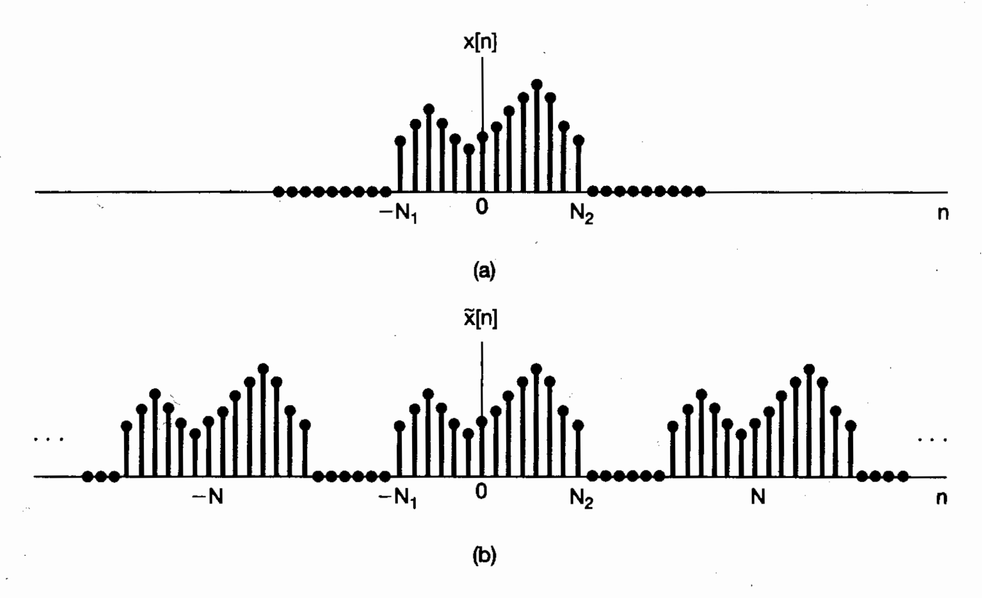


Figura 5.1 (a) Señal $x[n]$ de duración finita; (b) señal periódica $\tilde{x}[n]$ construida para que sea iguad a $x[n]$ en un periodo.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}. \tag{5.2}$$

Puesto que $x[n] = \tilde{x}[n]$ sobre un periodo que incluye el intervalo $-N_1 \leq n \leq N_2$, es conveniente seleccionar un intervalo de la sumatoria en la ecuación (5.2) que incluya este intervalo, de manera que $\tilde{x}[n]$ pueda reemplazarse por $x[n]$ en la sumatoria. Por lo tanto,

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}, \tag{5.3}$$

donde en la segunda igualdad nos hemos valido del hecho de que $x[n]$ es cero fuera del intervalo $-N_1 \leq n \leq N_2$. Definiendo la función

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}, \tag{5.4}$$

vemos que los coeficientes a_k son proporcionales a las muestras de $X(e^{j\omega})$, es decir,

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}), \tag{5.5}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/N$ es el espaciamiento de las muestras en el dominio de la frecuencia. Combinando las ecuaciones (5.1) y (5.5) obtenemos

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})\, e^{jk\omega_0 n}. \tag{5.6}$$

Ya que $\omega_0 = 2\pi/N$ o de manera equivalente, $1/N = \omega_0/2\pi$, la ecuación (5.6) se puede rescribir como

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0})\, e^{jk\omega_0 n}\, \omega_0. \tag{5.7}$$

Al igual que con la ecuación (4.7), conforme N aumenta, ω_0 disminuye, y conforme $N \to \infty$ la ecuación (5.7) se vuelve una integral. Para ver esto más claramente, considere que representamos $X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ como el trazo en la figura 5.2. A partir de la ecuación (5.4), puede verse que $X(e^{j\omega})$ es periódica en ω con periodo 2π y también lo es $e^{j\omega n}$. Entonces,

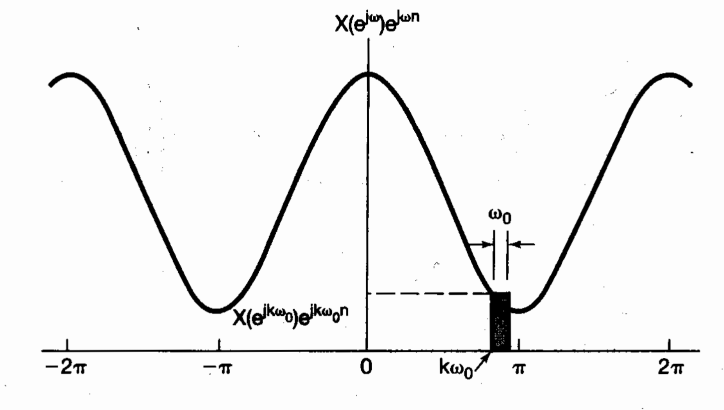


Figura 5.2 Interpretación gráfica de la ecuación (5.7).

el producto $X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ también será periódico. Como hemos representado en la figura, cada término en la sumatoria de la ecuación (5.7) representa el área de un rectángulo de altura $X(e^{jk\omega_0})e^{j\omega_0 n}$ y ancho ω_0. A medida que $\omega_0 \to 0$, la sumatoria se vuelve una integral. Más aún, puesto que la sumatoria se lleva a cabo sobre N intervalos consecutivos de ancho $\omega_0 = 2\pi/N$, el intervalo total de integración siempre tendrá un ancho de 2π. Por lo tanto, a medida que $N \to \infty$, $\tilde{x}[n] = x[n]$, y la ecuación (5.7) se convierte en

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega,$$

donde, debido a que $X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ es periódica con periodo 2π, el intervalo de integración se puede tomar como *cualquier* intervalo de longitud 2π. En consecuencia, tenemos el siguiente par de ecuaciones:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega, \tag{5.8}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}. \tag{5.9}$$

Las ecuaciones (5.8) y (5.9) son la contraparte discreta de las ecuaciones (4.8) y (4.9). La función $X(e^{j\omega})$ se conoce como la *transformada de Fourier de tiempo discreto* y el par de ecuaciones se conoce como el *par de transformada de Fourier*. La ecuación (5.8) es la *ecuación de síntesis* y la (5.9) es la *ecuación de análisis*. Nuestra deducción de estas ecuaciones indica cómo una secuencia aperiódica puede considerarse como una combinación lineal de exponenciales complejas. En particular, la ecuación de síntesis es en efecto una representación de $x[n]$ como una combinación lineal de exponenciales complejas infinitesimalmente cercanas en frecuencia y con amplitudes $X(e^{j\omega})(d\omega/2\pi)$. Por esta razón, al igual que en el caso continuo, a menudo se hace referencia a la transformada $X(e^{j\omega})$ como el *espectro* de $x[n]$, dado que nos proporciona la información acerca de cómo $x[n]$ está compuesta de exponenciales complejas a frecuencias diferentes.

Observe también que, al igual que en tiempo continuo, nuestra deducción de la transformada de Fourier de tiempo discreto nos provee de una importante relación entre la serie y la transformada de Fourier de tiempo discreto. En particular, los coeficientes de la serie de Fourier a_k de una señal periódica $\tilde{x}[n]$ se pueden expresar en términos de *muestras* igualmente espaciadas de la transformada de Fourier de una señal aperiódica $x[n]$ de duración finita, que es igual a $\tilde{x}[n]$ en un periodo y es cero en otro caso. Este hecho es de importancia considerable en el procesamiento y análisis de Fourier de señales prácticas, y profundizaremos en este asunto en el problema 5.41.

Como se indica en nuestra deducción, la transformada de Fourier de tiempo discreto tiene muchas similitudes con el caso de tiempo continuo. Las principales diferencias entre los dos casos son la periodicidad de la transformada de tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ y el intervalo finito de integración en la ecuación de síntesis. Estas diferencias emanan de un hecho que hemos indicado ya varias veces: las exponenciales complejas de tiempo discreto que difieren en frecuencia por un múltiplo de 2π son idénticas. En la sección 3.6 vimos que, para las señales periódicas discretas, las implicaciones de esta afirmación consisten en que los coeficientes de la serie de Fourier son periódicos y que la representación en serie de Fourier es una suma finita. Para señales aperiódicas las implicaciones análogas indican que $X(e^{j\omega})$ es periódica (con periodo 2π) y que la ecuación de síntesis involucra una integración solamente sobre el intervalo de frecuencia que produce distintas

exponenciales complejas (es decir, cualquier intervalo de longitud 2π). En la sección 1.3.3 hicimos notar una consecuencia adicional de la periodicidad de $e^{j\omega n}$ como una función de ω: $\omega = 0$ y $\omega = 2\pi$ producen la misma señal. Las señales a frecuencias cercanas a estos valores o a cualquier otro valor múltiplo par de π varían lentamente y por lo tanto se consideran como señales de baja frecuencia. De manera similar, las altas frecuencias en el caso discreto son los valores de ω cercanos a múltiplos impares de π. De este modo, la señal $x_1[n]$ mostrada en la figura 5.3(a) con la transformada de Fourier representada en la figura 5.3(b) varía más lentamente que la señal $x_2[n]$ de la figura 5.3(c), cuya transformada se muestra en la figura 5.3(d).

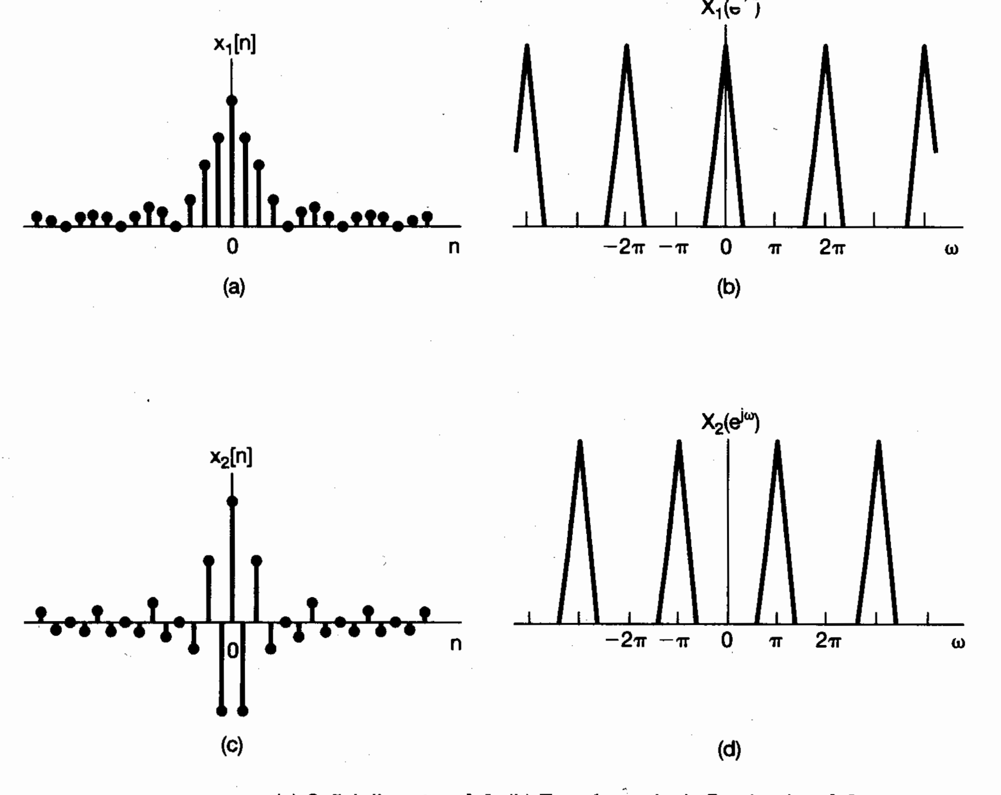


Figura 5.3 (a) Señal discreta $x_1[n]$. (b) Transformada de Fourier de $x_1[n]$. Observe que $X_1(e^{j\omega})$ está concentrada cerca de $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$. (c) Señal discreta $x_2[n]$. (d) Transformada de Fourier de $x_2[n]$. Observe que $X_2(e^{j\omega})$ está concentrada cerca de $\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$.

5.1.2 Ejemplos de transformadas de Fourier de tiempo discreto

Para ilustrar la transformada de Fourier de tiempo discreto, examinemos varios ejemplos.

Ejemplo 5.1



Considere la señal

$$x[n] = a^n u[n], \qquad |a| < 1.$$

En este caso,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

La magnitud y fase de $X(e^{j\omega})$ se muestran en la figura 5.4(a) para $a > 0$ y en la figura 5.4(b) para $a < 0$. Observe que estas funciones son periódicas en ω con periodo 2π.

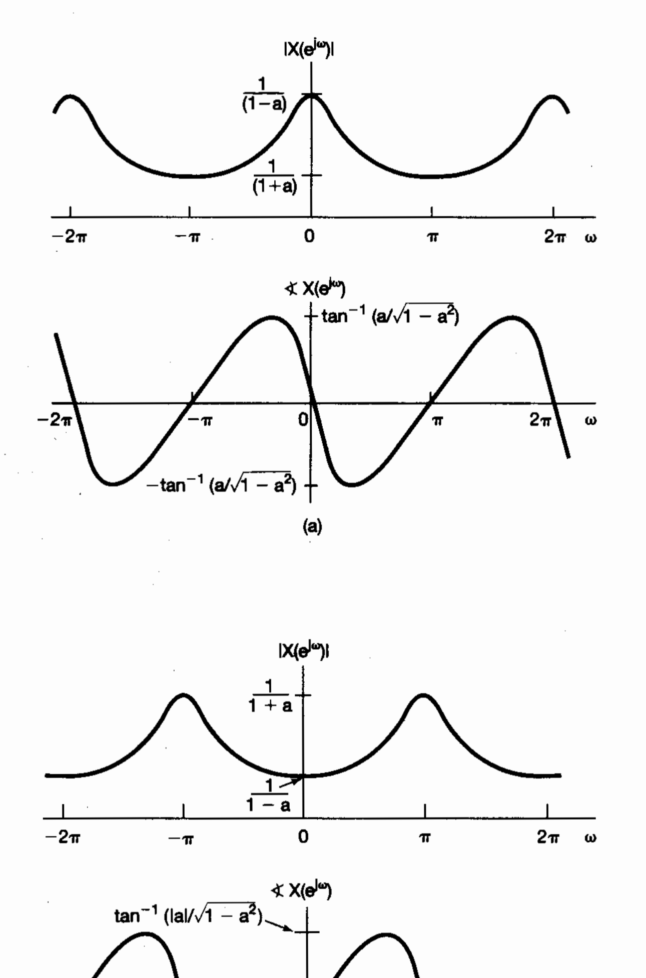


Figura 5.4 Magnitud y fase de la transformada de Fourier del ejemplo 5.1 para (a) $a > 0$ y (b) $a < 0$.

Ejemplo 5.2

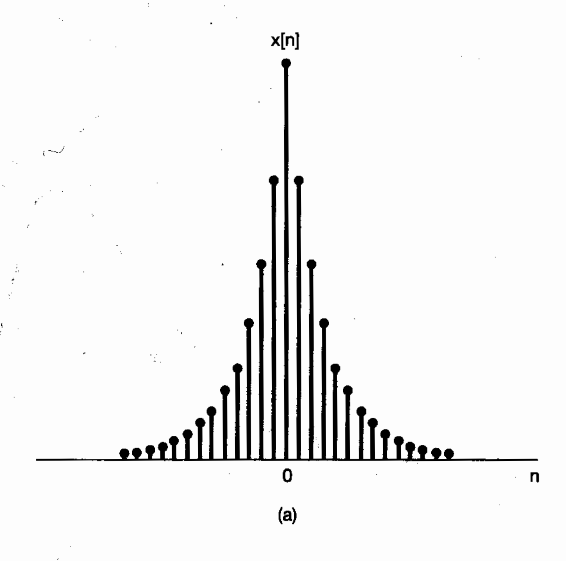
Sea

$$x[n] = a^{|n|}, \qquad |a| < 1.$$

Esta señal está trazada en la figura 5.5(a) para $0 < a < 1$. Su transformada de Fourier se obtiene a partir de la ecuación (5.9) como

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{j\omega n}.$$



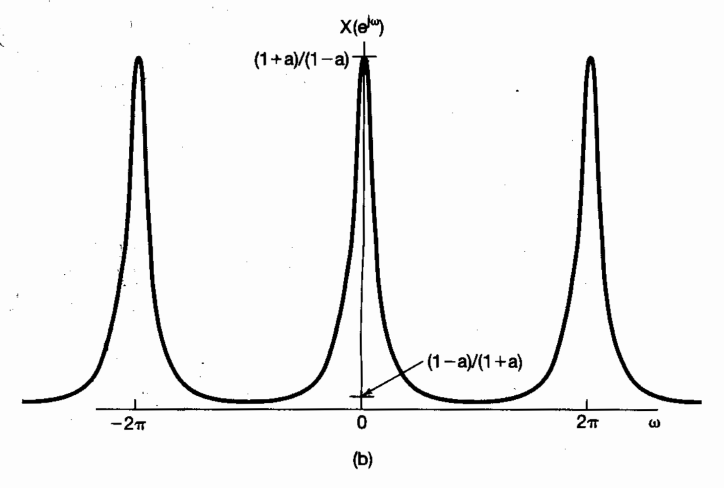


Figura 5.5 (a) Señal $x[n] = a^{|n|}$ del ejemplo 5.2 y (b) su transformada de Fourier ($0 < a < 1$).

Haciendo la sustitución de variables $m = -n$ en la segunda sumatoria, obtenemos

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\omega})^n + \sum_{m=1}^{\infty}(ae^{j\omega})^m.$$

Ambas sumatorias son series geométricas infinitas que se pueden evaluar en forma cerrada, con lo que se obtiene

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}}$$
$$= \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\omega + a^2}.$$

En este caso $X(e^{j\omega})$ es real y se ilustra en la figura 5.5(b), de nuevo para $0 < a < 1$.

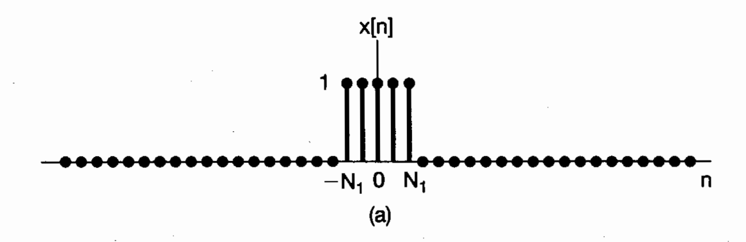
Ejemplo 5.3

Considere el pulso rectangular

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}, \tag{5.10}$$

el cual se ilustra en la figura 5.6(a) para $N_1 = 2$. En este caso,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}. \tag{5.11}$$



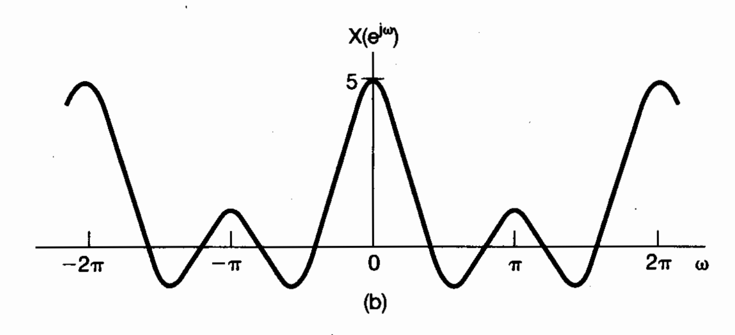


Figura 5.6 (a) Señal de pulso rectangular del ejemplo 5.3 para $N_1 = 2$ y (b) su transformada de Fourier.

Usando el mismo tipo de cálculos que hicimos para obtener la ecuación (3.104) en el ejemplo 3.12, podemos escribir

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\operatorname{sen} \omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}. \tag{5.12}$$

Esta transformada de Fourier está trazada en la figura 5.6(b) para $N_1 = 2$. La función en la ecuación (5.12) es la contraparte de tiempo discreto de la función sinc, la cual aparece en la transformada de Fourier del pulso rectangular continuo (véase el ejemplo 4.4). La diferencia más importante entre estas dos funciones es que la función en la ecuación (5.12) es periódica con periodo 2π, mientras que la función sinc es aperiódica.

5.1.3 Problemas de la convergencia asociados con la transformada de Fourier de tiempo discreto

A pesar de que el argumento utilizado para deducir la transformada de Fourier de tiempo discreto en la sección 5.1.1 se basó suponiendo que $x[n]$ era de duración arbitraria pero finita, las ecuaciones (5.8) y (5.9) siguen siendo válidas para una amplia clase de señales de duración infinita (como las señales en los ejemplos 5.1 y 5.2). En este caso, sin embargo, nuevamente debemos considerar el tema de la convergencia de la sumatoria infinita en la ecuación de análisis (5.9). Las condiciones sobre $x[n]$ que garantizan la convergencia de esta suma son la contraparte directa de las condiciones de convergencia para la transformada continua de Fourier.[1] Específicamente, la ecuación (5.9) convergerá si $x[n]$ es absolutamente sumable, esto es,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty, \tag{5.13}$$

o si la secuencia tiene energía finita, es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty. \tag{5.14}$$

En contraste con la situación para la ecuación de análisis (5.9), por lo general no hay problemas de convergencia asociados con la ecuación de síntesis (5.8), ya que la integral en esta ecuación es sobre un intervalo de integración de duración finita. Ésta es, con mucho, la misma situación que se presenta con la ecuación de síntesis (3.94) de la serie de Fourier de tiempo discreto, la cual involucra una suma finita y en consecuencia no presenta problemas de convergencia asociados con ella. En particular, si aproximamos una señal aperiódica $x[n]$ mediante una integral de exponenciales complejas con frecuencias tomadas sobre el intervalo $|\omega| \leq W$, es decir,

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega, \tag{5.15}$$

[1]Para mayores detalles acerca de los problemas de convergencia de la transformada de Fourier de tiempo discreto, vea A. V. Oppenheim y R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing* (Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, Inc., 1989), y L. R. Rabiner y B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing* (Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall, Inc., 1975).

entonces $\hat{x}[n] = x[n]$ para $W = \pi$. De esta manera, al igual que en la figura 3.18, esperaríamos no poder observar ningún comportamiento como el fenómeno de Gibbs al evaluar la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier de tiempo discreto. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.4

Sea $x[n]$ el impulso unitario; esto es,

$$x[n] = \delta[n].$$

En este caso, la ecuación de análisis (5.9) se evalúa fácilmente, con lo que obtiene

$$X(e^{j\omega}) = 1.$$

En otras palabras, al igual que en el caso continuo, el impulso unitario tiene una representación en transformada de Fourier que consiste de contribuciones iguales en todas las frecuencias. Si aplicamos entonces la ecuación (5.15) a este ejemplo, obtenemos

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{\text{sen } Wn}{\pi n}. \tag{5.16}$$

En la figura 5.7 se ofrece una gráfica de lo anterior para varios valores de W. Como puede verse, la frecuencia de las oscilaciones en la aproximación se incrementa a medida que crece W, lo cual es similar a lo observado en el caso continuo. Por otro lado, en contraste con este caso, la amplitud de dichas oscilaciones disminuye en relación con la magnitud de $\hat{x}[0]$ conforme se incrementa W, y éstas desaparecen por completo cuando $W = \pi$.

5.2 LA TRANSFORMADA DE FOURIER PARA SEÑALES PERIÓDICAS

Al igual que en el caso continuo, las señales periódicas discretas se pueden incorporar dentro del marco de referencia de la transformada de Fourier de tiempo discreto cuando se interpreta la transformada de una señal periódica como un tren de impulsos en el dominio de la frecuencia. Para deducir la forma de esta representación, considere la señal

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}. \tag{5.17}$$

En el caso continuo vimos que la transformada de Fourier de $e^{j\omega_0 t}$ se puede interpretar como un impulso en $\omega = \omega_0$. Por lo tanto, podemos esperar que resulte el mismo tipo de transformada para la señal discreta de la ecuación (5.17). Sin embargo, la transformada de Fourier de tiempo discreto debe ser periódica en ω con periodo 2π. Esto sugiere entonces que la transformada de Fourier de $x[n]$ en la ecuación (5.17) debe tener impulsos en ω_0, $\omega_0 \pm 2\pi$, $\omega_0 \pm 4\pi$ y así sucesivamente. De hecho, la transformada de Fourier de $x[n]$ es el tren de impulsos

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l), \tag{5.18}$$

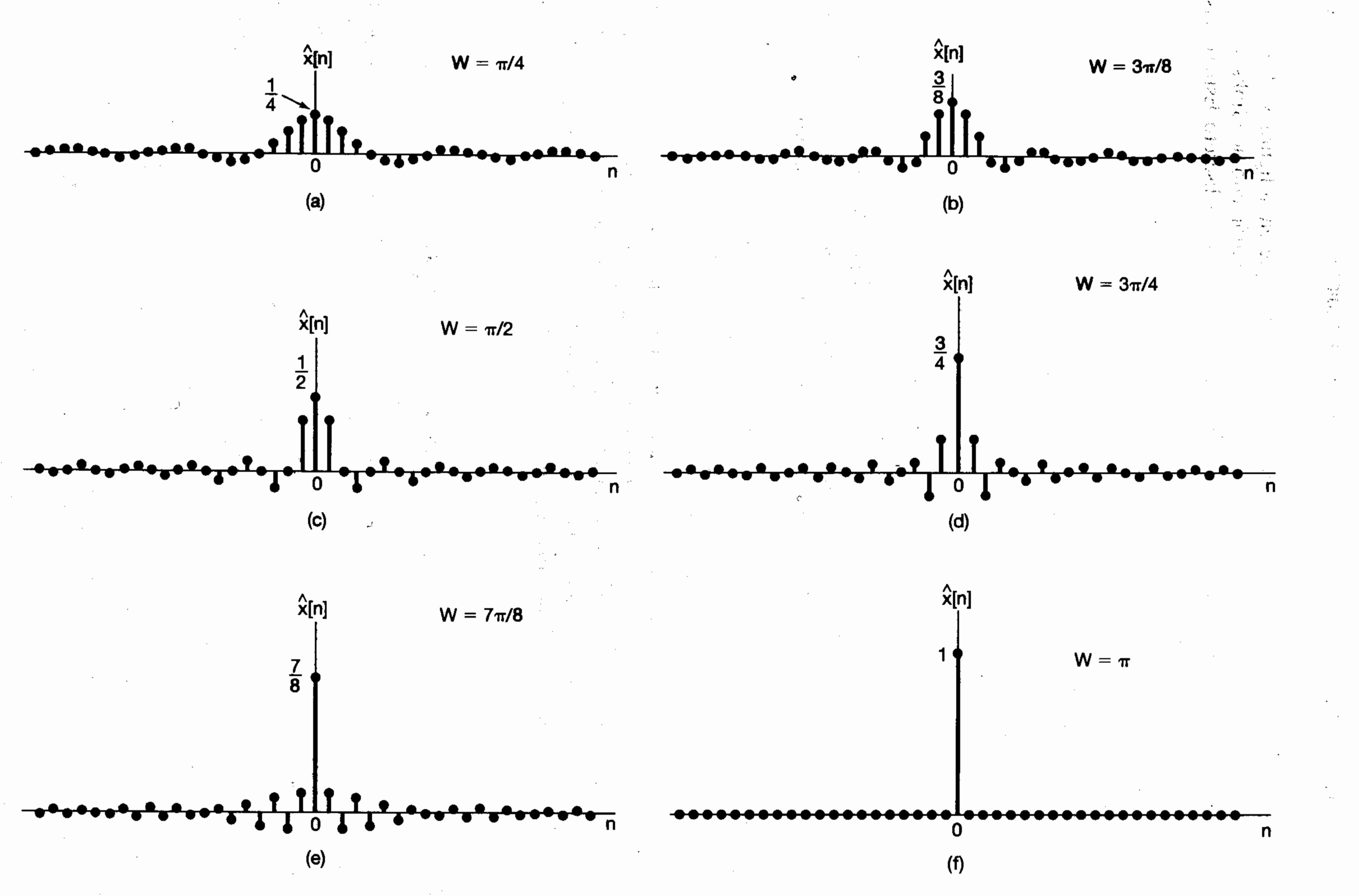


Figura 5.7 Aproximación a la muestra unitaria obtenida como en la ecuación (5.16) usando exponenciales complejas con frecuencias $|\omega| \leq W$: (a) $W = \pi/4$; (b) $W = 3\pi/8$; (c) $W = \pi/2$; (d) $W = 3\pi/4$; (e) $W = 7\pi/8$; (f) $W = \pi$. Observe que para $W = \pi$, $\hat{x}[n] = \delta[n]$.

el cual se ilustra en la figura 5.8. Para verificar la validez de esta expresión, debemos evaluar la transformada inversa. Sustituyendo la ecuación (5.18) en la ecuación de síntesis (5.8), encontramos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) e^{j\omega n}\, d\omega.$$

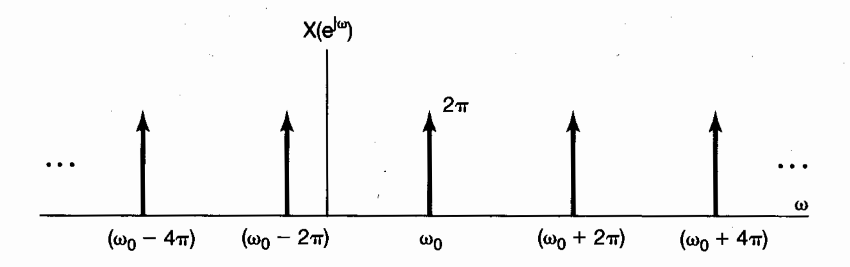


Figura 5.8 Transformada de Fourier de $x[n] = e^{j\omega_0 n}$.

Observe que cualquier intervalo de longitud 2π incluye exactamente un impulso en la sumatoria dada en la ecuación (5.18). Por lo tanto, si el intervalo de integración seleccionado incluye el impulso localizado en $\omega_0 + 2\pi r$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega = e^{j(\omega_0 + 2\pi r)n} = e^{j\omega_0 n}.$$

Ahora considere una secuencia periódica $x[n]$ con periodo N y representación en serie de Fourier

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}. \tag{5.19}$$

En este caso, la transformada de Fourier es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\, \delta\!\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right), \tag{5.20}$$

de modo que la transformada de Fourier de una señal periódica se puede construir de manera directa a partir de sus coeficientes de Fourier.

Para verificar que la ecuación (5.20) es, en efecto, correcta, observe que $x[n]$ en la ecuación (5.19) es una combinación lineal de señales de la forma en la ecuación (5.17), y así la transformada de Fourier de $x[n]$ debe ser una combinación lineal de transformadas de la forma de la ecuación (5.18). En particular, suponga que seleccionamos el intervalo de la sumatoria en la ecuación (5.19) como $k = 0, 1, \ldots, N-1$, de modo que

$$\begin{aligned} x[n] = {} & a_0 + a_1 e^{j(2\pi/N)n} + a_2 e^{j2(2\pi/N)n} \\ & + \cdots + a_{N-1}\, e^{j(N-1)(2\pi/N)n}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

De tal forma, $x[n]$ es una combinación lineal de señales, como en la ecuación (5.17), con $\omega_0 = 0, 2\pi/N, 4\pi/N, \ldots, (N-1)2\pi/N$. La transformada de Fourier resultante se ilustra en la figura 5.9. En la figura 5.9(a) hemos representado la transformada de Fourier del primer término del miembro derecho de la ecuación (5.21): la transformada de Fourier de la señal constante $a_0 = a_0 e^{j0 \cdot n}$ es un tren de impulsos periódicos, como en la ecuación (5.18), con $\omega_0 = 0$ y un escalamiento de $2\pi a_0$ en cada uno de los impulsos. Además, gracias al capítulo 4 sabemos que los coeficientes de la serie de Fourier a_k son periódicos con periodo N, de modo que $2\pi a_0 = 2\pi a_N = 2\pi a_{-N}$. En la figura 5.9(b) hemos ilustrado la transformada de Fourier del segundo término en la ecuación (5.21), donde hemos usado nuevamente la ecuación (5.18), en este caso para $a_1 e^{j(2\pi/N)n}$, y el hecho de que $2\pi a_1 =$

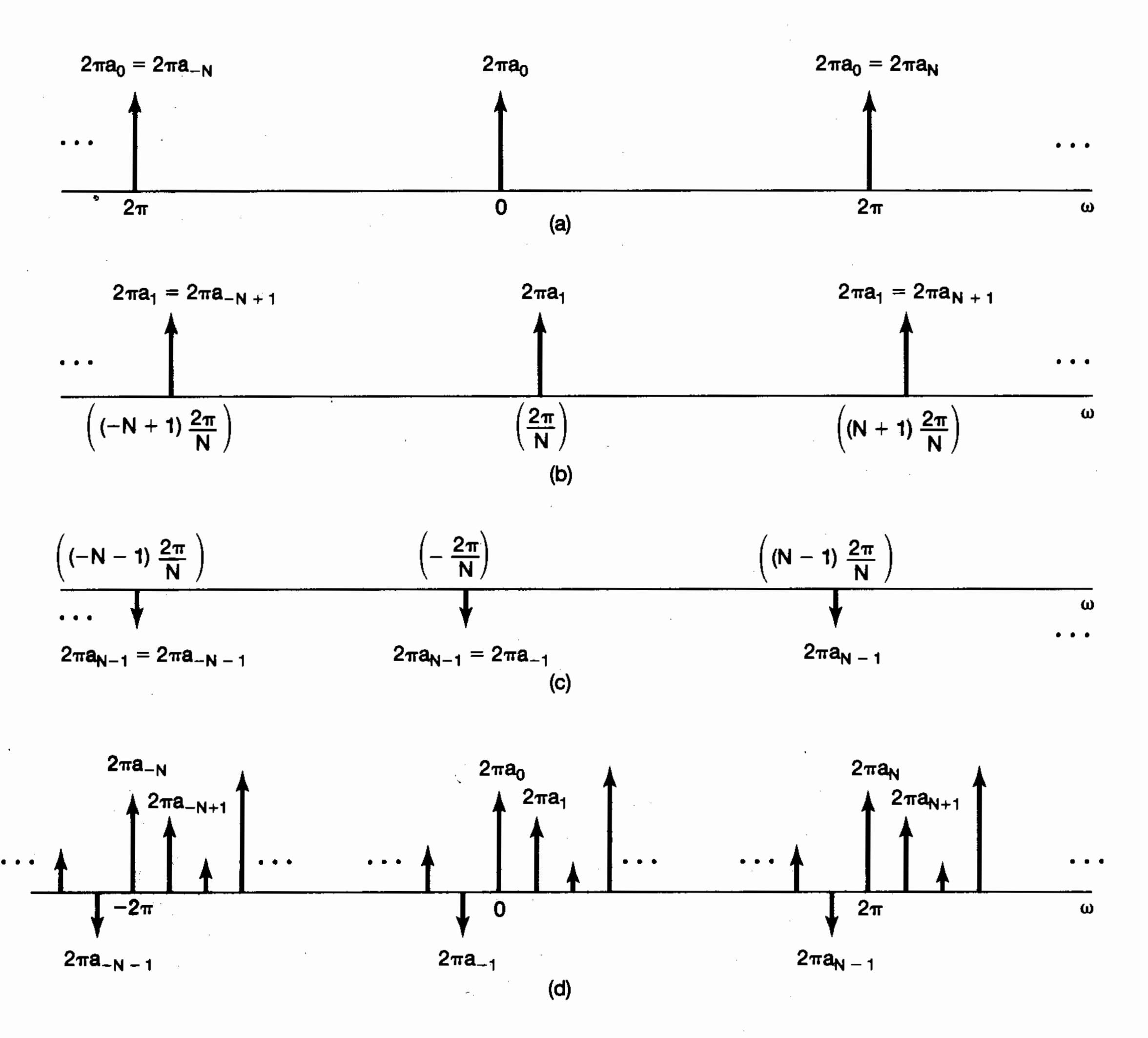


Figura 5.9 Transformada de Fourier de una señal periódica discreta: (a) transformada de Fourier del primer término del miembro derecho de la ecuación (5.21); (b) transformada de Fourier del segundo término en la ecuación (5.21); (c) transformada de Fourier del último término de la ecuación (5.21); (d) transformada de Fourier de $x[n]$ en la ecuación (5.21).

$2\pi a_{N+1} = 2\pi a_{-N+1}$. De manera similar, la figura 5.9(c) muestra el término final. Por último, la figura 5.9(d) ilustra la expresión completa de $X(e^{j\omega})$. Observe que debido a la periodicidad de a_k, $X(e^{j\omega})$ se puede interpretar como un tren de impulsos que ocurren en múltiplos de la frecuencia fundamental $2\pi/N$, con el área $2\pi a_k$ del impulso localizada en $\omega = 2\pi k/N$, siendo $2\pi a_k$ la cual es exactamente la establecida en la ecuación (5.20).

Ejemplo 5.5

Considere la señal periódica

$$x[n] = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}, \qquad \text{con} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{5}. \tag{5.22}$$

De la ecuación (5.18), podemos escribir inmediatamente

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi\,\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right). \tag{5.23}$$

Esto es,

$$X(e^{j\omega}) = \pi\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi\,\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right), \qquad -\pi \le \omega < \pi, \tag{5.24}$$

y $X(e^{j\omega})$ se repite periódicamente con un periodo de 2π, como se ilustra en la figura 5.10.

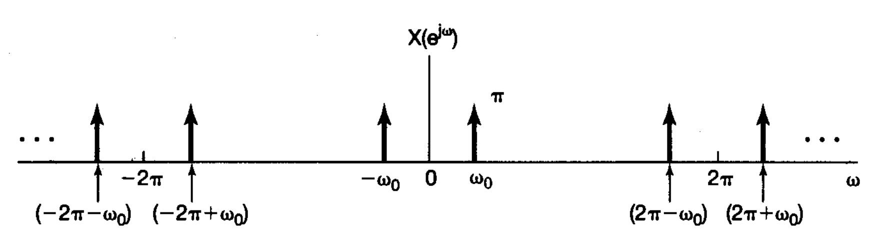


Figura 5.10 Transformada de Fourier de tiempo discreto de $x[n] = \cos \omega_0 n$.

Ejemplo 5.6

La contraparte discreta del tren de impulsos periódicos del ejemplo 4.8 es la secuencia

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN], \tag{5.25}$$

como se ilustra en la figura 5.11(a). Los coeficientes de la serie de Fourier para esta señal se pueden calcular de manera directa a partir de la ecuación (3.95):

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

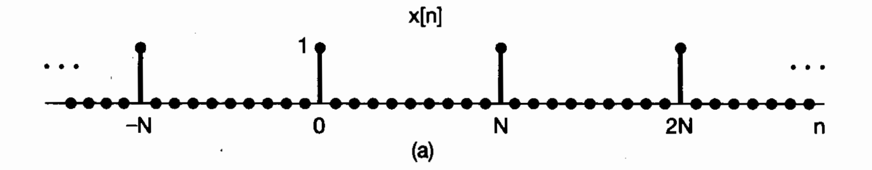
Seleccionando el intervalo de la sumatoria como $0 \le n \le N-1$, tenemos

$$a_k = \frac{1}{N}. \tag{5.26}$$

Usando las ecuaciones (5.26) y (5.20) podemos entonces representar la transformada de Fourier de la señal como

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right), \tag{5.27}$$

la cual se ilustra en la figura 5.11(b).



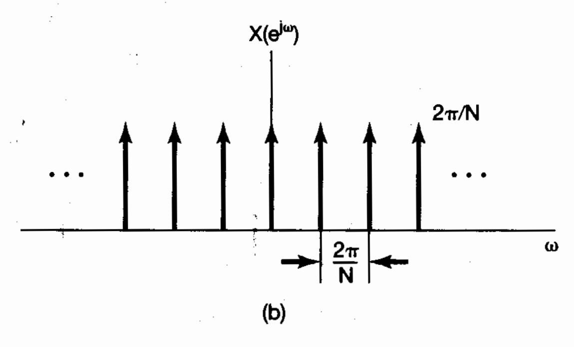


Figura 5.11 (a) Tren de impulsos periódico discreto; (b) su transformada de Fourier.

5.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Al igual que ocurre con la transformada continua de Fourier, hay una gran variedad de propiedades de la transformada de Fourier de tiempo discreto que proporcionan un mayor conocimiento de la transformada y, además, son a menudo útiles para reducir la complejidad de la evaluación de las transformadas y las transformadas inversas. En ésta y en las siguientes dos secciones examinaremos dichas propiedades, y en la tabla 5.1 presentaremos un resumen conciso de ellas. Si comparamos esta tabla con la tabla 4.1, podremos obtener una clara imagen de algunas de las similitudes y diferencias entre las propiedades de la transformada continua de Fourier y la de tiempo discreto. Cuando la deducción y la interpretación de una propiedad de la transformada de Fourier de tiempo discreto es esencialmente idéntica a su contraparte continua, simplemente estableceremos la propiedad. Asimismo debido a la estrecha relación que existe entre la serie de Fourier

y la transformada de Fourier, muchas de las propiedades de la transformada se transfieren directamente a las propiedades correspondientes de la serie de Fourier de tiempo discreto, las cuales resumimos en la tabla 3.2 y analizamos brevemente en la sección 3.7.

En los siguientes análisis será conveniente adoptar una notación similar a la usada en la sección 4.3 para indicar el par de una señal y su transformada. Esto es,

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\},$$
$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\},$$
$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}).$$

5.3.1 Periodicidad de la transformada de Fourier de tiempo discreto

Como analizamos en la sección 5.1, la transformada de Fourier de tiempo discreto *siempre* es periódica en ω con periodo 2π; es decir,

$$\boxed{X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega}).} \tag{5.28}$$

Esta expresión contrasta con la transformada continua de Fourier, la cual en general es no periódica.

5.3.2 Linealidad de la transformada de Fourier

Si

$$x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})$$

y

$$x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\omega}),$$

entonces

$$\boxed{ax_1[n] + bx_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}).} \tag{5.29}$$

5.3.3 Desplazamiento de tiempo y desplazamiento de frecuencia

Si

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}),$$

entonces

$$\boxed{x[n - n_0] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})} \tag{5.30}$$

y

$$e^{j\omega_0 n}x[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)}). \tag{5.31}$$

La ecuación (5.30) se puede obtener mediante la sustitución directa de $x[n - n_0]$ en la ecuación de análisis (5.9), mientras que la ecuación (5.31) se deduce al sustituir $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ en la ecuación de síntesis (5.8).

Como consecuencia de las propiedades de periodicidad y desplazamiento de frecuencia de la transformada de Fourier de tiempo discreto, existe una relación especial entre los filtros ideales de tiempo discreto paso bajas y paso altas. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.7

En la figura 5.12(a) hemos trazado la respuesta en frecuencia de $H_{lp}(e^{j\omega})$ de un filtro paso bajas con frecuencia de corte ω_c, mientras que en la figura 5.12(b) presentamos $H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$ —esto es, la respuesta en frecuencia $H_{lp}(e^{j\omega})$ desplazada medio periodo, es decir, π—. Puesto que en tiempo discreto las altas frecuencias se concentran cerca de π (y otros múltiplos non de π), el filtro en la figura 5.12(b) es un filtro ideal paso altas con frecuencia de corte $\pi - \omega_c$. Esto es,

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}). \tag{5.32}$$

Como podemos deducir de la ecuación (3.122), y como analizaremos de nuevo en la sección 5.4, la respuesta en frecuencia de un sistema LTI es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema. Por lo tanto, si $h_{lp}[n]$ y $h_{hp}[n]$ respectivamente denotan las respuestas al impulso de los filtros paso bajas y paso altas respectivamente,

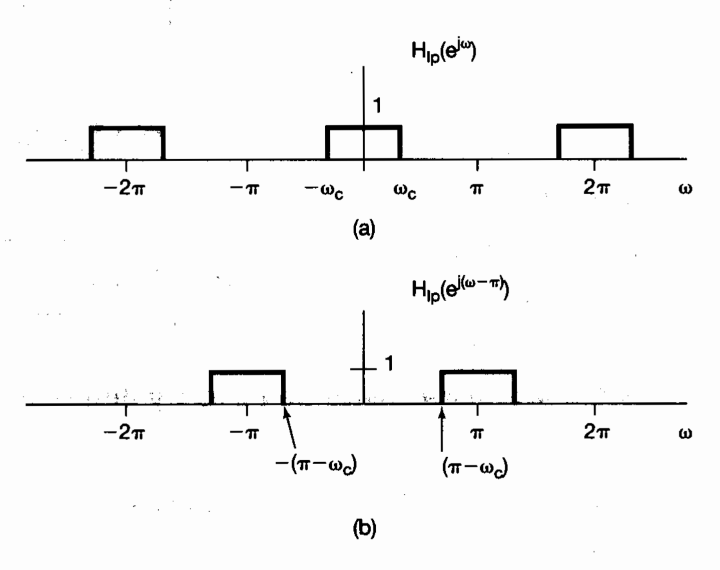


Figura 5.12 (a) Respuesta en frecuencia de un filtro paso bajas; (b) respuesta en frecuencia de un filtro paso altas obtenido al desplazar la respuesta en frecuencia en (a) por $\omega = \pi$ que corresponde a medio periodo.

Por último, la figura 5.12, la ecuación (5.32) y la propiedad de desplazamiento de frecuencia implican que los filtros paso bajas y paso altas están relacionados por

$$h_{\text{hp}}[n] = e^{j\pi n} h_{\text{lp}}[n] \tag{5.33}$$

$$= (-1)^n h_{\text{lp}}[n]. \tag{5.34}$$

5.3.4 Conjugación y simetría conjugada

Si

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}),$$

entonces

$$\boxed{x^*[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(e^{-j\omega}).} \tag{5.35}$$

También, si $x[n]$ es de valor real, su transformada $X(e^{j\omega})$ es el simétrico conjugado. Esto es,

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \qquad [x[n] \text{real}].} \tag{5.36}$$

A partir de esto se deduce que $\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$ es una función par de ω y $\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$ es una función impar de ω. De manera similar, la magnitud de $X(e^{j\omega})$ es una función par y el ángulo de fase es una función impar. Además,

$$\mathcal{E}v\{x[n]\} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$$

y

$$\mathcal{O}d\{x[n]\} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\},$$

donde $\mathcal{E}v$ y $\mathcal{O}d$ denotan las partes par e impar, respectivamente, de $x[n]$. Por ejemplo, si $x[n]$ es real y par, su transformada de Fourier también es real y par. El ejemplo 5.2 ilustra esta simetría para $x[n] = a^{|n|}$.

5.3.5 Diferenciación y acumulación

En esta subsección examinamos la contraparte de tiempo discreto de la integración, es decir, la acumulación, y su inverso, la primera derivada. Sea $x[n]$ una señal con transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$. Entonces, a partir de las propiedades de linealidad y desplazamiento de tiempo tenemos que el par de la transformada de Fourier para la señal de primera diferencia $x[n] - x[n-1]$ está dado por

$$\boxed{x[n] - x[n-1] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega}).} \tag{5.37}$$

A continuación, considere la siguiente señal

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]. \tag{5.38}$$

Ya que $y[n] - y[n-1] = x[n]$, podemos concluir que la transformada de $y[n]$ debería estar relacionada con la transformada de $x[n]$ dividiéndola entre $(1 - e^{-j\omega})$. Esto es parcialmente correcto, pero al igual que con la propiedad de integración continua proporcionada por la ecuación (4.32), hay más elementos involucrados. La relación precisa es

$$\boxed{\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k).} \tag{5.39}$$

El tren de impulsos del miembro derecho de la ecuación (5.39) refleja el valor de dc o promedio que puede resultar de la sumatoria.

Ejemplo 5.8

Deduzcamos la transformada de Fourier de $X(e^{j\omega})$ del escalón unitario $x[n] = u[n]$ haciendo uso de la propiedad de acumulación y sabiendo que

$$g[n] = \delta[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G(e^{j\omega}) = 1.$$

De la sección 1.4.1 sabemos que el escalón unitario es la suma consecutiva del impulso unitario. Esto es,

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} g[m].$$

Tomando la transformada de Fourier de ambos lados y usando la acumulación se obtiene

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{(1-e^{-j\omega})} G(e^{j\omega}) + \pi G(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \\ &= \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k). \end{aligned}$$

5.3.6 Inversión en tiempo

Sea $x[n]$ una señal con espectro $X(e^{j\omega})$, y considere la transformada $Y(e^{j\omega})$ de $y[n] = x[-n]$. De la ecuación (5.9),

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]e^{-j\omega n}. \tag{5.40}$$

Sustituyendo $m = -n$ en la ecuación (5.40), obtenemos

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-j(-\omega)m} = X(e^{-j\omega}). \tag{5.41}$$

Esto es,

$$x[-n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega}). \tag{5.42}$$

5.3.7 Expansión en tiempo

Debido a la naturaleza discreta del índice de tiempo para las señales discretas, la relación entre el escalamiento de tiempo y de frecuencia en tiempo discreto toma una forma algo diferente de su contraparte continua. Específicamente, en la sección 4.3.5 deducimos la propiedad de tiempo continuo

$$x(at) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right). \tag{5.43}$$

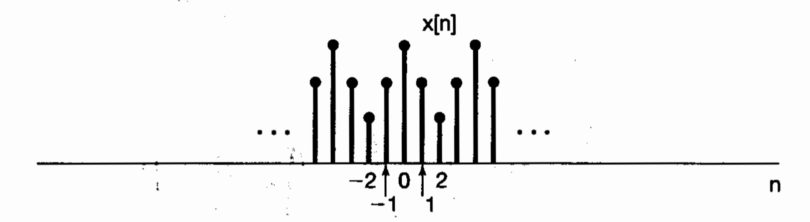
Sin embargo, si tratamos de definir la señal $x[an]$, si a no es un entero nos meteríamos en dificultades. Por lo tanto, no podemos hacer lenta la señal escogiendo $a < 1$. Por otro lado, si hacemos que a sea un entero diferente de ± 1 (por ejemplo, si consideramos $x[2n]$), no necesariamente aceleramos la señal original. Esto es, ya que n puede tomar sólo valores enteros, la señal $x[2n]$ consiste sólo de muestras pares de $x[n]$.

Sin embargo, hay un resultado que es en gran medida paralelo a la ecuación (5.43). Sea k un entero positivo, y definamos la señal

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{si } n \text{ es un múltiplo de } k \\ 0, & \text{si } n \text{ no es un múltiplo de } k. \end{cases} \tag{5.44}$$

Como se muestra en la figura 5.13 para $k = 3$, $x_{(k)}[n]$ se obtiene a partir de $x[n]$ colocando $k - 1$ ceros entre valores sucesivos de la señal original. Intuitivamente, podemos pensar en $x_{(k)}[n]$ como una versión desacelerada de $x[n]$. Puesto que $x_{(k)}[n]$ es igual a 0 a menos que n sea un múltiplo de k, es decir, a menos que $n = rk$, vemos que la transformada de Fourier de $x_{(k)}[n]$ está dada por

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk]e^{-j\omega rk}.$$



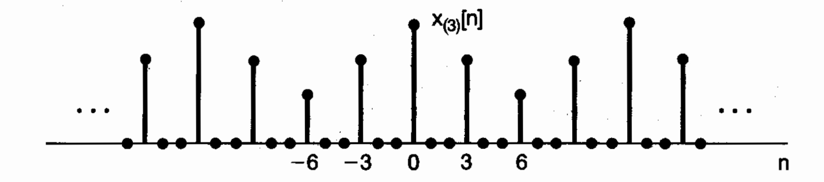


Figura 5.13 La señal $x_{(3)}[n]$ obtenida de $x[n]$ al insertar dos ceros entre valores sucesivos de la señal original.

Además, ya que $x_{(k)}[rk] = x[r]$, encontramos que

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r]e^{-j(k\omega)r} = X(e^{jk\omega}).$$

Esto es,

$$\boxed{x_{(k)}[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{jk\omega}).} \tag{5.45}$$

Observe que, conforme la señal se expande y desacelera en el tiempo al tomar $k > 1$, su transformada de Fourier se comprime. Por ejemplo, puesto que $X(e^{j\omega})$ es periódica con periodo 2π, $X(e^{jk\omega})$ es periódica con periodo $2\pi/k$. Esta propiedad se ilustra en la figura 5.14 para un pulso rectangular.

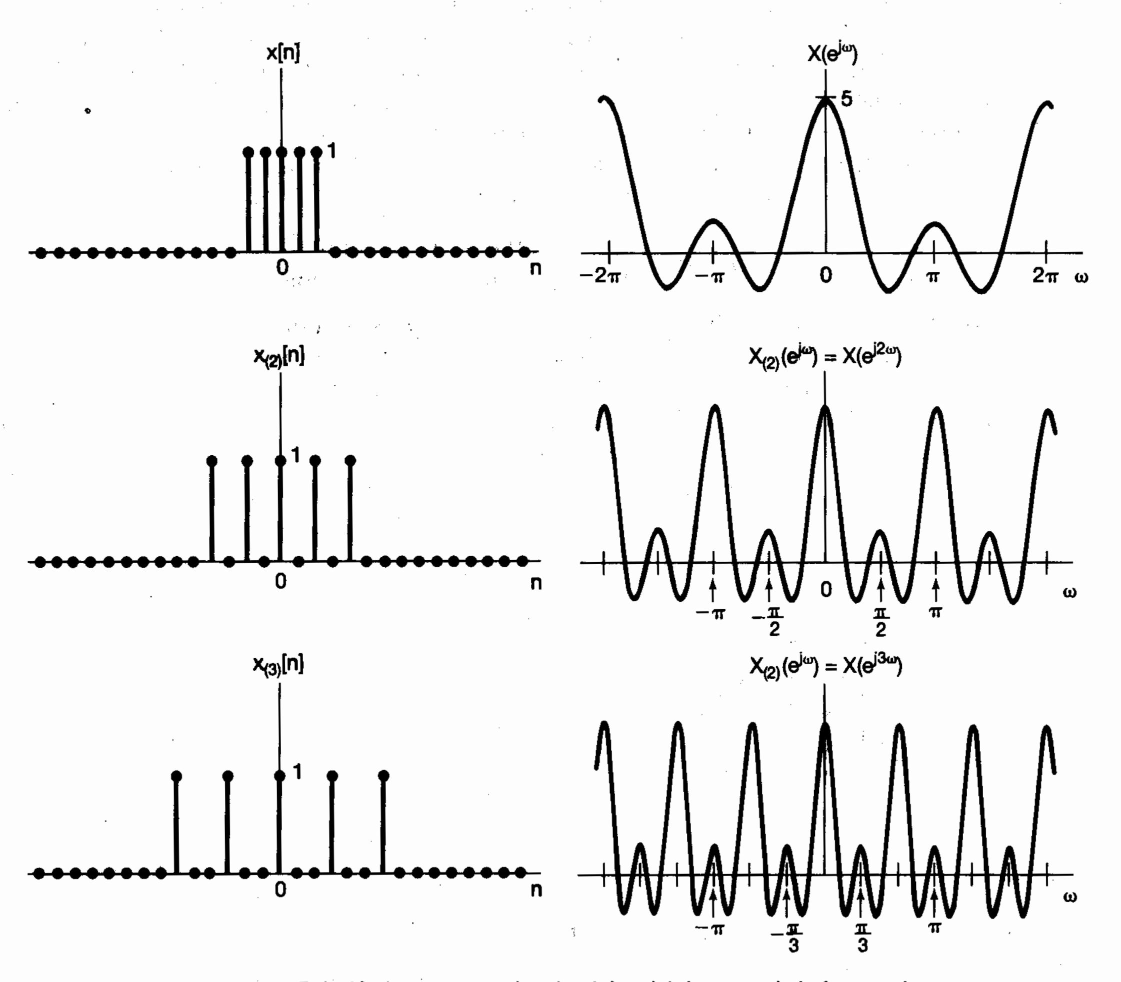


Figura 5.14 Relación inversa entre los dominios del tiempo y de la frecuencia: conforme k se incrementa, $x_{(k)}[n]$ se extiende mientras que su transformada se comprime.

Ejemplo 5.9

Para ilustrar la utilidad que la propiedad de expansión en el tiempo nos presta para determinar las transformadas de Fourier, consideremos la secuencia $x[n]$ presentada en la figura 5.15(a). Esta secuencia se puede relacionar con la secuencia más sencilla $y[n]$ mostrada en la figura 5.15(b). En particular,

$$x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n-1],$$

donde

$$y_{(2)}[n] = \begin{cases} y[n/2], & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{si } n \text{ es non} \end{cases}$$

y $y_{(2)}[n-1]$ representa a $y_{(2)}[n]$ desplazada una unidad a la derecha. Las señales $y_{(2)}[n]$ y $2y_{(2)}[n-1]$ se ilustran en las figuras 5.15(c) y (d), respectivamente.

En seguida, observe que $y[n] = x[n-2]$, donde $g[n]$ es un pulso rectangular como el examinado en el ejemplo 5.3 (con $N_1 = 2$) y como se ilustra en la figura 5.6(a). En consecuencia, del ejemplo 5.3 y la propiedad de desplazamiento de tiempo, vemos que

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\frac{\text{sen}(5\omega/2)}{\text{sen}(\omega/2)}.$$

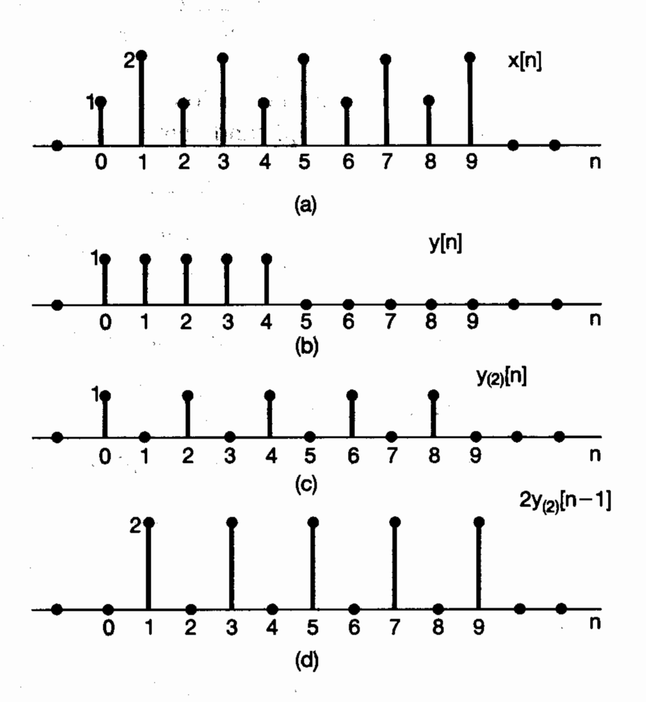


Figura 5.15 (a) La señal $x[n]$ en el ejemplo 5.9; (b) la señal $y[n]$; (c) la señal $y_{(2)}[n]$ obtenida al insertar un cero entre valores sucesivos de $y[n]$; y (d) la señal $2y_{(2)}[n-1]$.

Usando la propiedad de expansión en tiempo, obtenemos entonces

$$y_{(2)}[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j4\omega} \frac{\text{sen}(5\omega)}{\text{sen}(\omega)},$$

y usando las propiedades de linealidad y desplazamiento de tiempo, obtenemos

$$2y_{(2)}[n-1] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} 2e^{-j5\omega} \frac{\text{sen}(5\omega)}{\text{sen}(\omega)}.$$

Combinando ambos resultados, tenemos

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega}(1 + 2e^{-j\omega}) \left(\frac{\text{sen}(5\omega)}{\text{sen}(\omega)}\right).$$

5.3.8 Diferenciación en frecuencia

De nuevo, sea

$$x[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}).$$

Si usamos la definición de $X(e^{j\omega})$ en la ecuación de análisis (5.9) y derivamos ambos lados, obtenemos

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jnx[n]e^{-j\omega n}.$$

El miembro derecho de esta ecuación es nada menos que la transformada de Fourier de $-jnx[n]$. Por lo tanto, multiplicando ambos miembros por j vemos que

$$\boxed{nx[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}.} \tag{5.46}$$

La utilidad de esta propiedad se ilustrará en el ejemplo 5.13 en la sección 5.4.

5.3.9 La relación de Parseval

Si $x[n]$ y $X(e^{j\omega})$ son un par de transformada de Fourier, entonces

$$\boxed{\sum_{n=-8}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega.} \tag{5.47}$$

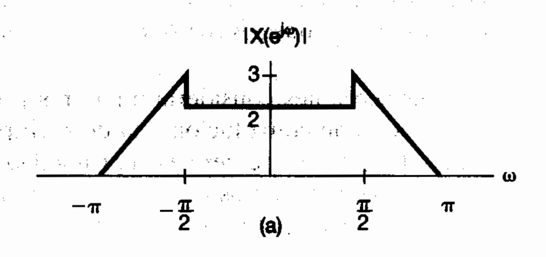
Podemos observar que ésta es similar a la ecuación (4.43) y el proceso de deducción se efectúa en forma similar. La cantidad del miembro izquierdo de la ecuación (5.47) es la energía total en la señal $x[n]$ y la relación de Parseval establece que esta energía también

se puede determinar integrando la energía por unidad de frecuencia, $|X(e^{j\omega})|^2/2\pi$, sobre un intervalo completo 2π de distintas frecuencias de tiempo discreto. En analogía con el caso continuo, $|X(e^{j\omega})|^2$ se conoce como el *espectro de densidad de energía* de la señal $x[n]$. Observe también que la ecuación (5.47) es la contraparte para señales aperiódicas de la relación de Parseval, la ecuación (3.110), para señales periódicas, la cual iguala la potencia promedio en una señal periódica con la suma de las potencias promedio de sus componentes armónicas individuales.

Dada la transformada de Fourier de una secuencia, es posible usar las propiedades de la transformada de Fourier para determinar si una secuencia particular tiene varias propiedades diferentes. Para ilustrar esta idea, presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.10

Considere la secuencia $x[n]$ cuya transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ está dibujada para $-\pi \leq \omega \leq \pi$ en la figura 5.16. Deseamos determinar si $x[n]$, en el dominio del tiempo, es o no periódica, real, par y/o de energía finita.



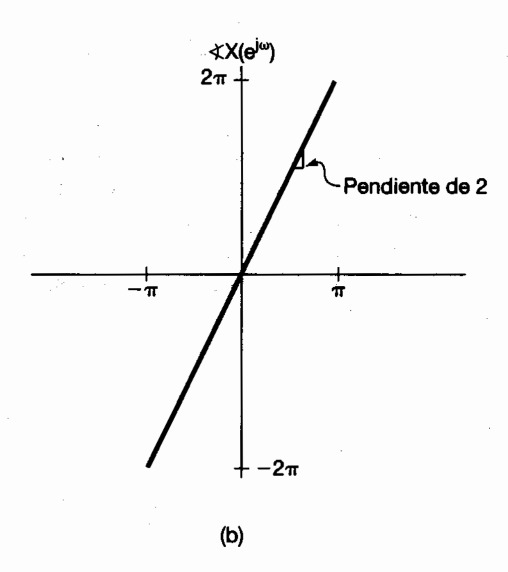


Figura 5.16 Magnitud y fase de la transformada de Fourier del ejemplo 5.10.

De acuerdo con lo anterior, observamos primero que la periodicidad en el dominio del tiempo implica que la transformada de Fourier es cero, excepto posiblemente para impulsos localizados en varios múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Esto no se cumple para $X(e^{j\omega})$. Concluimos, entonces, que $x[n]$ *no* es periódica.

En seguida, a partir de las propiedades de simetría para las transformadas de Fourier, sabemos que una secuencia de valor real debe tener una transformada de Fourier de magnitud par y una función de fase que sea impar. Esto se cumple para $|X(e^{j\omega})|$ y $\sphericalangle X(e^{j\omega})$. Por lo tanto, deducimos que $x[n]$ es real.

En tercer lugar, si $x[n]$ es una función par, entonces, de acuerdo con las propiedades de simetría para las señales reales, $X(e^{j\omega})$ debe ser real y par. Sin embargo, ya que $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{-j2\omega}$, $X(e^{j\omega})$ no es una función de valor real. En consecuencia, $x[n]$ no es par.

Por último, para probar la propiedad de energía finita, podemos usar la relación de Parseval,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega.$$

Gracias a la figura 5.16 resulta claro que al integrar $|X(e^{j\omega})|^2$ de $-\pi$ *a* π se obtendrá una cantidad finita. Podemos concluir que $x[n]$ tiene energía finita.

En las siguientes secciones consideraremos tres propiedades adicionales. Las primeras dos son la propiedad de convolución y la de multiplicación, semejantes a las analizadas en las secciones 4.4 y 4.5. La tercera es la propiedad de dualidad, la cual se examina en la sección 5.7, donde consideramos no sólo la dualidad en el dominio de tiempo discreto, sino también la dualidad que existe entre los dominios de tiempo continuo y de tiempo discreto.

5.4 LA PROPIEDAD DE CONVOLUCIÓN

En la sección 4.4 analizamos la importancia de la transformada continua de Fourier con respecto a su efecto sobre la operación de convolución y su uso en el tratamiento de los sistemas LTI continuos. Una relación idéntica se aplica en tiempo discreto, y ésta es una de las principales razones por las cuales la transformada de Fourier de tiempo discreto resulta de gran valor para representar y analizar los sistemas LTI discretos. En concreto, si $x[n]$, $h[n]$ y $y[n]$ son la entrada, la respuesta al impulso y la salida, respectivamente, de un sistema LTI, tal que

$$y[n] = x[n] * h[n],$$

entonces

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}),} \tag{5.48}$$

donde $X(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ y $Y(e^{j\omega})$ son las transformadas de Fourier de $x[n]$, $h[n]$ y $y[n]$, respectivamente. Además, si comparamos las ecuaciones (3.122) y (5.9), vemos que la respuesta en frecuencia de un sistema LTI discreto, como se definió primero en la sección 3.8, es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema.

La deducción de la ecuación (5.48) es exactamente igual a la que se llevó a cabo en la sección 4.4. En particular, al igual que en el caso continuo, la ecuación de síntesis de

Fourier (5.8) para $x[n]$ se puede interpretar como una descomposición de $x[n]$ en una combinación lineal de exponenciales complejas con amplitudes infinitesimales proporcionales a $X(e^{j\omega})$. Cada una de estas exponenciales es una función propia del sistema. En el capítulo 3 nos valimos de este hecho para mostrar que los coeficientes de la serie de Fourier de la respuesta de un sistema LTI a una entrada periódica son simplemente los coeficientes de Fourier de la entrada multiplicados por la respuesta en frecuencia del sistema evaluados a las frecuencias correspondientes de las armónicas. La propiedad de convolución (5.48) representa la extensión de este resultado para entradas y salidas aperiódicas usando la transformada de Fourier en lugar de la serie de Fourier.

Al igual que en el caso continuo, la ecuación (5.48) mapea la convolución de dos señales a la simple operación algebraica de multiplicar sus transformadas de Fourier, un hecho que tanto facilita el análisis de señales y sistemas como aumenta de manera significativa nuestro conocimiento de la forma en la cual un sistema LTI responde a las señales de entrada que son aplicadas a éste. En particular, de la ecuación (5.48) vemos que la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ captura el cambio en la amplitud compleja de la transformada de Fourier de la entrada a cada frecuencia ω. Por lo tanto, en el filtrado selectivo en frecuencia, por ejemplo, queremos que $H(e^{j\omega})$ sea ≈ 1 sobre el intervalo de frecuencias correspondiente a la banda de paso deseada y $H(e^{j\omega}) \approx 0$ sobre la banda de frecuencias que habrá de eliminarse o atenuarse de manera significativa.

5.4.1 Ejemplos

Para ilustrar la propiedad de convolución, al igual que otras propiedades, examinaremos varios ejemplos en esta sección.

Ejemplo 5.11

Considere un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h[n] = \delta[n - n_0].$$

La respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}.$$

De esta manera, para cualquier entrada $x[n]$ con transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier de la salida es

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega}). \tag{5.49}$$

Podemos observar que, para este ejemplo, $y[n] = x[n - n_0]$ y la ecuación (5.49) es consistente con la propiedad de desplazamiento de tiempo. Observe también que la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$ de un desplazamiento puro de tiempo tiene una magnitud unitaria en todas las frecuencias y una característica de fase $-\omega n_0$ que es lineal con la frecuencia.

Ejemplo 5.12

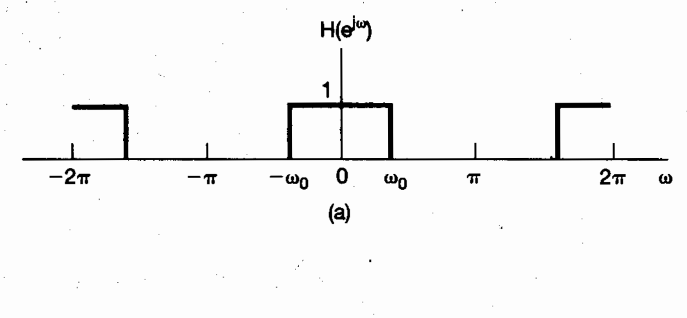
Considere el filtro ideal paso bajas introducido en la sección 3.9.2. Este sistema posee la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ ilustrada en la figura 5.17(a). Puesto que la respuesta al

impulso y la respuesta en frecuencia de un sistema LTI son un par de transformada de Fourier, podemos determinar la respuesta al impulso del filtro ideal paso bajas a partir de la respuesta en frecuencia usando la ecuación de síntesis (5.8) de la transformada de Fourier. En particular, usando $-\pi \leq \omega \leq \pi$ como el intervalo de integración en esa ecuación, deducimos de la figura 5.17(a) que

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega \tag{5.50}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \omega_c n}{\pi n},$$

lo cual se muestra en la figura 5.17(b).



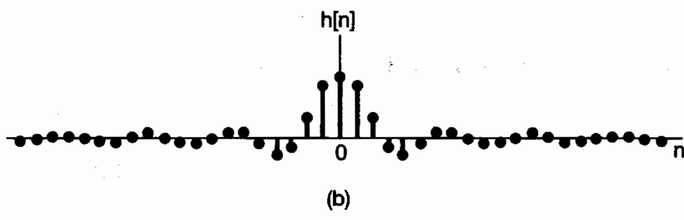


Figura 5.17 (a) Respuesta en frecuencia de un filtro ideal paso bajas discreto; (b) respuesta al impulso del filtro paso bajas ideal.

En la figura 5.17 nos enfrentamos a muchos de los mismos problemas que surgieron con el filtro ideal paso bajas continuo en el ejemplo 4.18. Primero, ya que $h[n]$ no es cero para $n < 0$, el filtro ideal paso bajas no es causal. Segundo, aun si la causalidad no es un problema importante, existen otras razones, incluyendo la facilidad de construcción y sus características preferibles en el dominio del tiempo, por las que los filtros no ideales se usan, por lo general, para realizar el filtrado selectivo en frecuencia. En particular, la respuesta al impulso del filtro ideal paso bajas de la figura 5.17(b) es oscilatorio, una característica que resulta indeseable en algunas aplicaciones. En tales casos, se debe contemplar un compromiso entre los objetivos en el dominio de la frecuencia, como la selectividad en frecuencia, y las propiedades en el dominio del tiempo, como el comportamiento no oscilatorio. En el capítulo 6 analizaremos con más detalle éstas y otras ideas relacionadas.

Como se muestra en los siguientes ejemplos, la propiedad de convolución también puede ser de gran valor cuando se busque facilitar el cálculo de las sumas de convolución.

Ejemplo 5.13

Considere un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h[n] = \alpha^n u[n],$$

con $|\alpha| < 1$, y suponga que la entrada al sistema es

$$x[n] = \beta^n u[n],$$

con $|\beta| < 1$. Evaluando las transformadas de Fourier de $h[n]$ y $x[n]$, tenemos

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \tag{5.51}$$

y

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}}, \tag{5.52}$$

de manera que

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})}. \tag{5.53}$$

Al igual que en el ejemplo 4.19, determinar la transformada inversa de $Y(e^{j\omega})$ se hace con mayor facilidad expandiendo $Y(e^{j\omega})$ mediante el método de fracciones parciales. Específicamente, $Y(e^{j\omega})$ es una razón de polinomios en potencias de $e^{-j\omega}$, y nos gustaría expresar esto como una suma de términos de este tipo más simples, de manera que podamos reconocer por inspección la transformada inversa de cada término (junto, quizás, con el uso de la propiedad de diferenciación en frecuencia de la sección 5.3.8). El procedimiento algebraico general para las transformadas racionales se describe en el apéndice. Para este ejemplo, si $\alpha \neq \beta$, la expansión en fracciones parciales de $Y(e^{j\omega})$ es de la forma

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{(1 - \alpha e^{-j\omega})} + \frac{B}{(1 - \beta e^{-j\omega})}. \tag{5.54}$$

Igualando los miembros derechos de las ecuaciones (5.53) y (5.54), encontramos que

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}, \quad B = -\frac{\beta}{\alpha - \beta}.$$

Por lo que, gracias al ejemplo 5.1 y a la propiedad de linealidad, podremos obtener por inspección la transformada inversa de la ecuación (5.54):

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta}\, \alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha - \beta}\beta^n u[n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta}[\alpha^{n+1}u[n] - \beta^{n+1}u[n]]. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Para $\alpha = \beta$, la expansión en fracciones parciales en la ecuación (5.54) no es válida. Sin embargo, en este caso

$$Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}\right)^2,$$

la cual puede expresarse como

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{j}{a} e^{j\omega} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}\right). \qquad (5.56)$$

Al igual que en el ejemplo 4.19, podemos usar la propiedad de diferenciación en frecuencia, ecuación (5.46), junto con el par de transformada de Fourier

$$a^n u[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}},$$

para concluir que

$$na^n u[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}\right).$$

Para tomar en cuenta el factor $e^{j\omega}$, usaremos la propiedad de desplazamiento de tiempo para obtener

$$(n+1)a^{n+1} u[n+1] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} je^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}\right),$$

y, por último, tomando en cuenta el factor $1/a$ en la ecuación (5.56), obtendremos

$$y[n] = (n+1)a^n u[n+1]. \qquad (5.57)$$

Es importante observar que, aunque el miembro derecho se multiplica por un escalón que empieza en $n = -1$, la secuencia $(n+1)a^n u[n+1]$ todavía es cero antes de $n = 0$, ya que el factor $n + 1$ es cero en $n = -1$. Así, podremos expresar de manera alternativa $y[n]$ como

$$y[n] = (n+1)a^n u[n]. \qquad (5.58)$$

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, la propiedad de convolución, junto con otras propiedades de la transformada de Fourier, son a menudo útiles en el análisis de la interconexión de sistemas.

Ejemplo 5.14

Considere el sistema mostrado en la figura 5.18(a) con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$. Los sistemas LTI con respuesta en frecuencia $H_{lp}(e^{j\omega})$ son filtros ideales paso bajas con frecuencia de corte $\pi/4$ y ganancia unitaria en la banda de paso.

Consideremos primero la trayectoria superior en la figura 5.18(a). La transformada de Fourier de la señal $w_1[n]$ se puede obtener observando que $(-1)^n = e^{j\pi n}$ tal que $w_1[n] = e^{j\pi n}x[n]$. Usando la propiedad de desplazamiento de frecuencia, obtenemos entonces

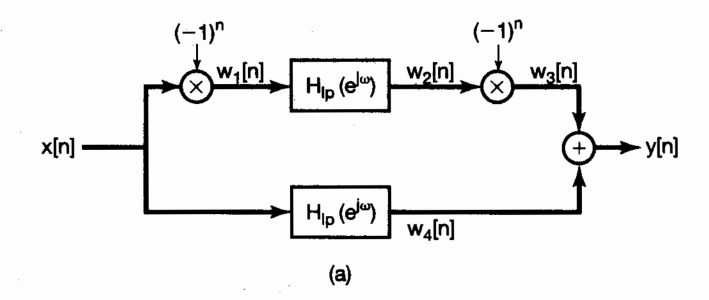
$$W_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)}).$$

La propiedad de convolución conduce a

$$W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j(\omega-\pi)}).$$

Ya que $w_3[n] = e^{j\pi n}w_2[n]$, podemos de nuevo aplicar la propiedad de desplazamiento frecuencia para obtener

$$\begin{aligned} W_3(e^{j\omega}) &= W_2(e^{j(\omega-\pi)}) \\ &= H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j(\omega-2\pi)}). \end{aligned}$$



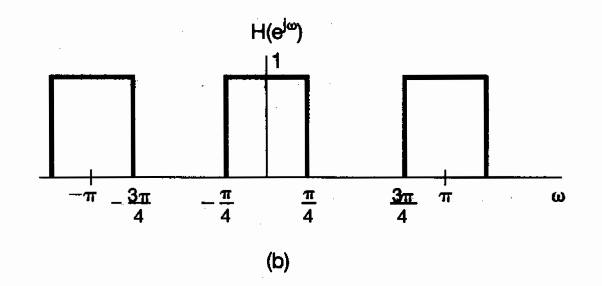


Figura 5.18 (a) Interconexión del sistema del ejemplo 5.14; (b) la respuesta en total frecuencia para este sistema.

Puesto que las transformadas de Fourier de tiempo discreto siempre son periódicas con periodo 2π,

$$W_3(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega}).$$

Aplicando la propiedad de convolución a la trayectoria inferior, obtenemos

$$W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j\omega}).$$

A partir de la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier, obtenemos

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= W_3(e^{j\omega}) + W_4(e^{j\omega}) \\ &= [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

En consecuencia, el sistema total de la figura 5.18(a) tiene respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]$$

la cual se muestra en la figura 5.18(b).

Como vimos en el ejemplo 5.7, $H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$ es la respuesta en frecuencia de un filtro ideal paso altas. De este modo, el sistema total deja pasar tanto frecuencias bajas como altas y rechaza frecuencias entre estas dos bandas de paso. Es decir, el filtro tiene lo que a menudo se conoce como una *característica ideal supresora de banda*, donde la banda suprimida está en la región $\pi/4 < |\omega| < 3\pi/4$.

Es importante hacer notar que, justamente como en el caso continuo, no todos los sistemas LTI discretos tienen una respuesta en frecuencia. Por ejemplo, los sistemas LTI con respuesta al impulso $h[n] = 2^n u[n]$ no tienen una respuesta finita a entradas

senoidales, lo cual se refleja en el hecho de que la ecuación de análisis de la transformada de Fourier para $h[n]$ diverge. Sin embargo, si un sistema LTI es estable, entonces, gracias a la sección 2.3.7 sabemos que su respuesta al impulso es absolutamente sumable; esto es,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty. \tag{5.59}$$

Por lo tanto, la respuesta en frecuencia siempre converge para sistemas estables. Al usar los métodos de Fourier nos tendremos que restringir a sistemas con respuestas al impulso que tienen transformadas de Fourier bien definidas. En el capítulo 10 presentaremos una extensión de la transformada de Fourier conocida como la transformada z, la cual nos permitirá usar las técnicas de transformadas para los sistemas LTI para los cuales la respuesta en frecuencia no converge.

5.5 LA PROPIEDAD DE MULTIPLICACIÓN

En la sección 4.5 presentamos la propiedad de multiplicación para señales continuas e indicamos algunas de sus aplicaciones mediante varios ejemplos. Existe una propiedad análoga para señales discretas que juega un papel similar en las aplicaciones. En esta sección deducimos este resultado directamente y damos un ejemplo de su uso. En los capítulos 7 y 8 usaremos la propiedad de multiplicación en el contexto de nuestro análisis de muestreo en comunicaciones.

Considere una $y[n]$ igual al producto de $x_1[n]$ y $x_2[n]$, denotando con $Y(e^{j\omega})$, $X_1(e^{j\omega})$ y $X_2(e^{j\omega})$ las respectivas transformadas de Fourier. Entonces

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]x_2[n]e^{-j\omega n},$$

o ya que

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n}\,d\theta, \tag{5.60}$$

se desprende que

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n}\,d\theta\right\}e^{-j\omega n}. \tag{5.61}$$

Intercambiando el orden de la sumatoria y la integral, obtenemos

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]e^{-j(\omega-\theta)n}\right]d\theta. \tag{5.62}$$

La sumatoria entre corchetes es $X_2(e^{j(\omega-\theta)})$ y en consecuencia la ecuación (5.62) se vuelve

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})\,X_2(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta.} \tag{5.63}$$

La ecuación (5.63) corresponde a una convolución *periódica* de $X_1(e^{j\omega})$ y $X_2(e^{j\omega})$, y la integral en esta ecuación se puede evaluar sobre cualquier intervalo de longitud 2π. La forma usual de la convolución (en la cual la integral varía de $-\infty$ a $+\infty$) a menudo se conoce como convolución aperiódica, para distinguirla de la convolución periódica. Los mecanismos de la convolución periódica se ilustran con más facilidad mediante un ejemplo.

Ejemplo 5.15

Considere el problema de encontrar la transformada de Fourier de $X(e^{j\omega})$ de una señal $x[n]$ la cual es el producto de dos señales; esto es,

$$x[n] = x_1[n]x_2[n],$$

donde

$$x_1[n] = \frac{\operatorname{sen}(3\pi n/4)}{\pi n}$$

y

$$x_2[n] = \frac{\operatorname{sen}(\pi n/2)}{\pi n}.$$

A partir de la propiedad de multiplicación dada en la ecuación (5.63), sabemos que $X(e^{j\omega})$ es la convolución periódica de $X_1(e^{j\omega})$ y $X_2(e^{j\omega})$, donde la integral en la ecuación (5.63) se puede tomar sobre cualquier intervalo de longitud 2π. Seleccionando el intervalo de $-\pi < \theta < \pi$, obtenemos

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta. \tag{5.64}$$

La ecuación (5.64) se parece a la convolución aperiódica, excepto que la integración está limitada al intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$. Sin embargo, podemos convertir la ecuación en una convolución ordinaria al definir

$$\hat{X}_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} X_1(e^{j\omega}) & \text{para } -\pi < \omega \leq \pi \\ 0 & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Entonces, al reemplazar $X_1(e^{j\theta})$ en la ecuación (5.64) por $\hat{X}_1(e^{j\theta})$, y valiéndonos del hecho de que $\hat{X}_1(e^{j\theta})$ es cero para $|\theta| > \pi$, vemos que

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta. \end{aligned}$$

Así, $X(e^{j\omega})$ es $1/2\pi$ veces la convolución aperiódica del pulso rectangular $\hat{X}_1(e^{j\omega})$ y la onda cuadrada periódica $X_2(e^{j\omega})$, las cuales se muestran en la figura 5.19. El resultado de esta convolución es la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ mostrada en la figura 5.20.

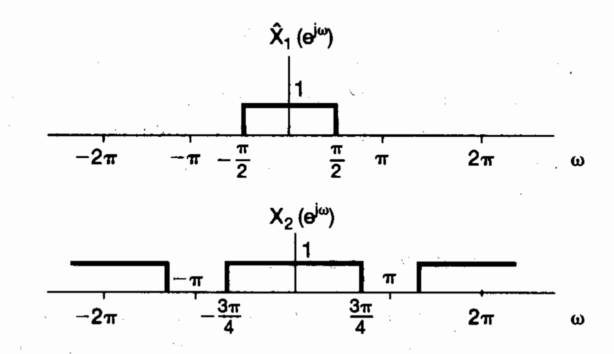


Figura 5.19 $\hat{X}_1(e^{j\omega})$ representa un periodo de $X_1(e^{j\omega})$ y $X_2(e^{j\omega})$. La convolución de $\hat{X}_1(e^{j\omega})$ y $X_2(e^{j\omega})$ corresponde a la convolución de $X_1(e^{j\omega})$ y $X_2(e^{j\omega})$.

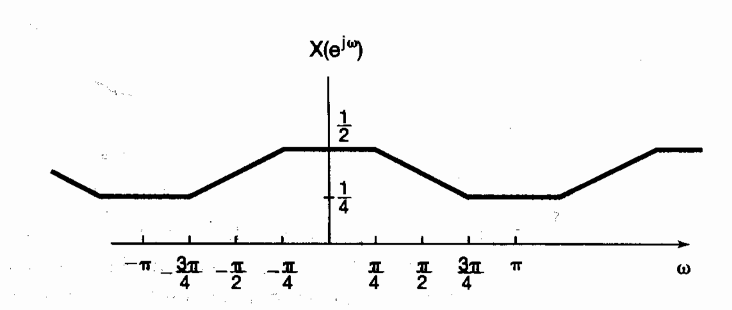


Figura 5.20 Resultado de la convolución periódica en el ejemplo 5.15.

5.6 TABLAS DE LAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y PARES BÁSICOS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En la tabla 5.1 resumimos varias de las propiedades importantes de la transformada de Fourier de tiempo discreto e indicamos la sección del texto en la cual se ha analizado. En la tabla 5.2 resumimos algunos de los pares básicos y más importantes de la transformada de Fourier de tiempo discreto. Muchos de éstos se han deducido mediante ejemplos en el capítulo.

5.7 DUALIDAD

Al considerar la transformada continua de Fourier observamos una simetría o dualidad entre la ecuación de análisis (4.9) y la ecuación de síntesis (4.8). Para la transformada de Fourier de tiempo discreto no existe una dualidad correspondiente entre la ecuación de análisis (5.9) y la ecuación de síntesis (5.8). Sin embargo, *sí hay* una dualidad en las ecuaciones (3.94) y (3.95) de la *serie* de Fourier de tiempo discreto, las cuales desarrollaremos en la sección 5.7.1. Además, hay una relación de dualidad entre la transformada de

TABLA 5.1 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Sección	Propiedad	Señal aperiódica	Transformada de Fourier
		$x[n]$ $y[n]$	$\left.\begin{matrix} X(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega}) \end{matrix}\right\}$ periódica con periodo 2π
5.3.2	Linealidad	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
5.3.3	Desplazamiento de tiempo	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
5.3.3	Desplazamiento de frecuencia	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
5.3.4	Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
5.3.6	Inversión en tiempo	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
5.3.7	Expansión en tiempo	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{si } n = \text{múltiplo de } k \\ 0, & \text{si } n \neq \text{múltiplo de } k \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
5.4	Convolución	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
5.5	Multiplicación	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2p} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$
5.3.5	Diferenciación en tiempo	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$
5.3.5	Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega})$ $+ \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
5.3.8	Diferenciación en frecuencia	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
5.3.4	Simetría conjugada para señales reales	$x[n]$ real	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\} = \mathcal{R}e\{X(e^{-j\omega})\} \\ \mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\} = -\mathcal{I}m\{X(e^{-j\omega})\} \\ \lvert X(e^{j\omega}) \rvert = \lvert X(e^{-j\omega}) \rvert \\ \sphericalangle X(e^{j\omega}) = -\sphericalangle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
5.3.4	Simetría para señales par reales	$x[n]$ real y par	$X(e^{j\omega})$ real y par
5.3.4	Simetría para señales impar reales	$x[n]$ real e impar	$X(e^{j\omega})$ puramente imaginaria e impar
5.3.4	Descomposición de señales reales en par e impar	$x_e[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$ $x_0[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$	$\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$ $j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
5.3.9	Relación de Parseval para señales aperiódicas	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert x[n] \rvert^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \lvert X(e^{j\omega}) \rvert^2 d\omega$	

Fourier de tiempo discreto y la serie continua de Fourier. Esta relación se analiza en la sección 5.7.2.

5.7.1 Dualidad en la serie discreta de Fourier

Debido a que los coeficientes de la serie de Fourier a_k de una señal periódica $x[n]$ son en sí mismos una secuencia periódica, podemos expandir la secuencia a_k en una serie de Fourier. La propiedad de dualidad para la serie de Fourier de tiempo discreto implica que los coeficientes de la serie de Fourier para la secuencia periódica a_k son valores de $(1/N)x[-n]$ (es decir, son proporcionales a los valores de la señal original invertida en

TABLA 5.2 PARES BÁSICOS DE TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Señal	**Transformada de Fourier**	**Coeficientes de la serie de Fourier**
$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ La señal es aperiódica
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ La señal es aperiódica
$\text{sen}\, \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ La señal es aperiódica
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$
Onda cuadrada periódica $x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \leq N_1 \\ 0, & N_1 < \lvert n\rvert \leq N/2 \end{cases}$ y $x[n+N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\text{sen}[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})]}{N\, \text{sen}[2\pi k/2N]}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}$ para toda k
$a^n u[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	—
$x[n] \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \leq N_1 \\ 0, & \lvert n\rvert > N_1 \end{cases}$	$\frac{\text{sen}[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\text{sen}(\omega/2)}$	—
$\frac{\text{sen}\, Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{senc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \lvert\omega\rvert \leq W \\ 0, & W < \lvert\omega\rvert \leq \pi \end{cases}$ $X(\omega)$ periódica con periodo 2π	—
$\delta[n]$	1	—
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k)$	—
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n+1)a^n u[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n + r - 1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$	—

tiempo). Para ver esto con mayor detalle, considere dos secuencias periódicas con periodo N, relacionadas mediante la sumatoria

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r=\langle N \rangle} g[r] e^{-jr(2\pi/N)m}. \tag{5.65}$$

Si hacemos $m = k$ y $r = n$, la ecuación (5.65) se convierte en

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} g[n] e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

Comparando ésta con la ecuación (3.95), vemos que la secuencia $f[k]$ corresponde a los coeficientes de la serie de Fourier de la señal $g[n]$. Esto es, si adoptamos la notación

$$x[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$$

introducida en el capítulo 3 para una señal periódica discreta y su conjunto de coeficientes de Fourier, tenemos que las dos secuencias periódicas relacionadas a través de la ecuación (5.65) satisfacen

$$g[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} f[k]. \tag{5.66}$$

De manera alternativa, si hacemos $m = n$ y $r = -k$, la ecuación (5.65) se convierte en

$$f[n] = \sum_{n=\langle N \rangle} \frac{1}{N} g[-k] e^{jk(2\pi/N)n}.$$

Comparándola con la ecuación (3.94), encontramos que $(1/N)g[-k]$ corresponde a la secuencia de los coeficientes de la serie de Fourier de $f[n]$. Esto es,

$$f[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} g[-k]. \tag{5.67}$$

Al igual que en el caso continuo, esta dualidad implica que cada propiedad de la serie de Fourier de tiempo discreto tiene un dual. Por ejemplo, remitiéndonos a la tabla 3.2, vemos que el par de propiedades

$$x[n - n_0] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0} \tag{5.68}$$

y

$$e^{jm(2\pi/N)n} x[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_{k-m} \tag{5.69}$$

son duales. De manera similar, a partir de esta tabla podemos extraer otro par de propiedades duales:

$$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r] y[n - r] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} N a_k b_k \tag{5.70}$$

y

$$x[n] y[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}. \tag{5.71}$$

Además de sus consecuencias para las propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto, la dualidad a menudo puede ser útil para reducir la complejidad de los cálculos involucrados en la determinación de las representaciones en series de Fourier. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.16

Considere la siguiente señal periódica con periodo $N = 9$:

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{9}\frac{\operatorname{sen}(5\pi n/9)}{\operatorname{sen}(\pi n/9)}, & n \neq \text{múltiplo de } 9 \\ \frac{5}{9}, & n = \text{múltiplo de } 9 \end{cases} \tag{5.72}$$

En el capítulo 3 encontramos que una onda rectangular tiene coeficientes de Fourier en una forma muy similar a como sucede con la ecuación (5.72). Entonces, la dualidad sugiere que los coeficientes para $x[n]$ deben estar en la forma de una onda rectangular. Para ver esto con mayor precisión, sea $g[n]$ una onda rectangular con periodo $N = 9$ tal que

$$g[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq 2 \\ 0, & 2 < |n| \leq 4. \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier b_k para $g[n]$ se pueden determinar del ejemplo 3.12 como

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{9}\frac{\operatorname{sen}(5\pi k/9)}{\operatorname{sen}(\pi k/9)}, & k \neq \text{múltiplo de } 9 \\ \frac{5}{9}, & k = \text{múltiplo de } 9 \end{cases}$$

La ecuación de análisis (3.95) de la serie de Fourier para $g[n]$ se puede escribir ahora como

$$b_k = \frac{1}{9}\sum_{n=-2}^{2}(1)e^{-j2\pi nk/9}.$$

Intercambiando los nombres de las variables k y n y observando que $x[n] = b_n$, encontramos que

$$x[n] = \frac{1}{9}\sum_{k=-2}^{2}(1)e^{-j2\pi nk/9}.$$

Haciendo $k' = -k$ en la suma del miembro derecho, obtenemos

$$x[n] = \frac{1}{9}\sum_{k'=-2}^{2}e^{+j2\pi nk'/9}.$$

Por último, moviendo el factor 1/9 dentro de la sumatoria, vemos que el miembro derecho de esta ecuación tiene la forma de la ecuación de síntesis (3.94) para $x[n]$. Concluimos entonces que los coeficientes de Fourier de $x[n]$ están dados por

$$a_k = \begin{cases} 1/9, & |k| \leq 2 \\ 0, & 2 < |k| \leq 4, \end{cases}$$

y, por supuesto, son periódicos con periodo $N = 9$.

5.7.2 Dualidad entre la transformada de Fourier de tiempo discreto y la serie continua de Fourier

Además de la dualidad para la serie discreta de Fourier, hay una dualidad entre la *transformada de Fourier de tiempo discreto* y la *serie continua de Fourier*. En concreto, comparemos las ecuaciones (3.38) y (3.39) de la serie continua de Fourier con las ecuaciones (5.8) y (5.9) de la transformada de Fourier de tiempo discreto. Por conveniencia repetimos las ecuaciones:

[ecuación (5.8)]
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega, \tag{5.73}$$

[ecuación (5.9)]
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}, \tag{5.74}$$

[ecuación (3.38)]
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \tag{5.75}$$

[ecuación (3.39)]
$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt. \tag{5.76}$$

Observe que las ecuaciones (5.73) y (5.76) son muy similares, así como lo son las ecuaciones (5.74) y (5.75) y, de hecho, podemos interpretar las ecuaciones (5.73) y (5.74) como la representación en *serie de Fourier* de la respuesta en frecuencia periódica $X(e^{j\omega})$. En particular, puesto que $X(e^{j\omega})$ es una función periódica de ω con periodo 2π, tiene una representación en serie de Fourier dada por una suma ponderada de funciones exponenciales periódicas de ω relacionadas armónicamente, todas las cuales tienen un periodo común de 2π. Esto es, $X(e^{j\omega})$ se puede representar en una serie de Fourier como una suma ponderada de las señales $e^{j\omega n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. A partir de la ecuación (5.74), vemos que el coeficiente enésimo de Fourier en esta expansión (es decir, el coeficiente que multiplica a $e^{j\omega n}$) es $x[-n]$. Además, ya que el periodo de $X(e^{j\omega})$ es 2π, la ecuación (5.73) se puede interpretar como la ecuación de análisis de la serie de Fourier para el coeficiente $x[n]$ de la serie de Fourier, es decir, para el coeficiente que multiplica a $e^{-j\omega n}$ en la expresión para $X(e^{j\omega})$ en la ecuación (5.74). El uso de esta relación de dualidad se ilustra mejor con un ejemplo.

Ejemplo 5.17

La dualidad entre la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier de tiempo discreto y la ecuación de análisis de la serie continua de Fourier se puede explotar para determinar la transformada de Fourier de tiempo discreto de la secuencia

$$x[n] = \frac{\operatorname{sen}(\pi n/2)}{\pi n}.$$

Para usar la dualidad, primero debemos identificar una señal continua $g(t)$ con periodo $T = 2\pi$ y coeficientes de Fourier $a_k = x[k]$. Gracias al ejemplo 3.5 sabemos que si $g(t)$ es una onda cuadrada periódica con periodo 2π (o, de manera equivalente, con frecuencia fundamental $\omega_0 = 1$) y con

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le T_1 \\ 0, & T_1 < |t| \le \pi \end{cases},$$

entonces los coeficientes de la serie de Fourier de $g(t)$ son

$$a_k = \frac{\text{sen}(kT_1)}{k\pi}$$

En consecuencia, si tomamos $T_1 = \pi/2$, tendremos $a_k = x[k]$. En este caso la ecuación de análisis para $g(t)$ es

$$\frac{\text{sen}(\pi k/2)}{\pi k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-jkt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1)e^{-jkt}dt.$$

Tomando k como n y t como ω, tenemos

$$\frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1)e^{-jn\omega}\,d\omega. \tag{5.77}$$

Cambiando n por $-n$ en ambos miembros de la ecuación (5.77) y observando que la función sinc es par, obtenemos

$$\frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1)e^{jn\omega}\,d\omega.$$

El miembro derecho de esta ecuación tiene la forma de la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier para $x[n]$, donde

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases}.$$

En la tabla 5.3 presentamos un resumen muy compacto de las expresiones de la serie de Fourier y de la transformada de Fourier para señales continuas y discretas, y también indicamos las relaciones de dualidad que se aplican en cada caso.

TABLA 5.3 RESUMEN DE EXPRESIONES DE LA SERIE Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER

	Tiempo continuo		Tiempo discreto	
	Dominio del tiempo	**Dominio de la frecuencia**	**Dominio del tiempo**	**Dominio de la frecuencia**
Serie de Fourier	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ tiempo continuo periódica en tiempo	$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}$ frecuencia discreta, aperiódica en frecuencia	$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ tiempo discreto, periódica en tiempo	$a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$ frecuencia discreta, periódica en frecuencia
Transformada de Fourier	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ tiempo continuo aperiódica en tiempo	$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ frecuencia continua, aperiódica en frecuencia	$x[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ tiempo discreto, aperiódica en tiempo	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ frecuencia continua, periódica en frecuencia

dualidad (Serie de Fourier, tiempo discreto ↔ frecuencia); dualidad (Serie de Fourier, frecuencia continua ↔ Transformada de Fourier, tiempo discreto); dualidad (Transformada de Fourier, tiempo continuo ↔ frecuencia)

5.8 SISTEMAS CARACTERIZADOS POR ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una ecuación general lineal de diferencias con coeficientes constantes para un sistema LTI con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ tiene la forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]. \tag{5.78}$$

La clase de sistemas descritos por estas ecuaciones de diferencias es bastante importante y útil. En esta sección tomamos ventaja de varias de las propiedades de la transformada de Fourier de tiempo discreto para determinar la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ para un sistema LTI descrito por esta ecuación. El planteamiento que le damos es paralelo al análisis en la sección 4.7 para sistemas LTI continuos descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Hay dos métodos relacionados en los cuales se puede determinar $H(e^{j\omega})$. El primero de éstos, el cual ilustramos en la sección 3.11 para varias ecuaciones sencillas de diferencias, hace uso explícito del hecho de que las exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas LTI. Específicamente, si $x[n] = e^{j\omega n}$ es la entrada a un sistema LTI, entonces la salida debe ser de la forma $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (5.78) y realizando algo de álgebra podemos resolver para $H(e^{j\omega})$. En esta sección, seguimos una segunda aproximación haciendo uso de las propiedades de convolución, linealidad y desplazamiento de tiempo de la transformada de Fourier de tiempo discreto. Sea que $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$ y $H(e^{j\omega})$ denotan las transformadas de Fourier de la entrada $x[n]$, la salida $y[n]$ y la respuesta al impulso $h[n]$, respectivamente. La propiedad de convolución, ecuación (5.48), de la transformada de Fourier de tiempo discreto implica entonces que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}. \tag{5.79}$$

Al aplicar la transformada de Fourier a ambos miembros de la ecuación (5.78) y usando las propiedades de linealidad y desplazamiento de tiempo, obtenemos la expresión

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega}),$$

o, de manera equivalente,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}. \tag{5.80}$$

Comparando la ecuación (5.80) con la (4.76) vemos que, como en el caso continuo, $H(e^{j\omega})$ es una razón de polinomios, pero en tiempo discreto los polinomios están en términos de la variable $e^{-j\omega}$. Los coeficientes del polinomio del numerador son los mismos coeficientes que aparecen en el miembro derecho de la ecuación (5.78), y los coeficientes del polinomio del denominador son los mismos que aparecen en el miembro izquierdo de esa ecuación. Por lo tanto, la respuesta en frecuencia del sistema LTI especificado por la ecuación (5.78) se puede escribir por inspección.

La ecuación de diferencias (5.78) en general se conoce como una ecuación de diferencias de orden N, ya que involucra retardos en la salida $y[n]$ de hasta N escalones de tiempo. Asimismo, el denominador de $H(e^{j\omega})$ en la ecuación (5.80) es un polinomio de orden N en $e^{-j\omega}$.

Ejemplo 5.18



Considere el sistema LTI causal que se caracteriza por la ecuación de diferencias

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \tag{5.81}$$

con $|a| < 1$. De la ecuación (5.80), la respuesta en frecuencia de este sistema es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \tag{5.82}$$

Comparando ésta con el ejemplo 5.1, la reconocemos como la transformada de Fourier de la secuencia $a^n u[n]$. Por lo tanto, la respuesta del sistema al impulso es

$$h[n] = a^n u[n]. \tag{5.83}$$

Ejemplo 5.19

Considere un sistema LTI causal que se caracteriza por la ecuación de diferencias

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]. \tag{5.84}$$

De la ecuación (5.80), la respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}}. \tag{5.85}$$

Como un primer paso en la obtención de la respuesta al impulso, factorizamos el denominador de la ecuación (5.85):

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}. \tag{5.86}$$

$H(e^{j\omega})$ se puede expandir por el método de fracciones parciales, como en el ejemplo A.3 del apéndice. El resultado de esta expansión es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}. \tag{5.87}$$

La transformada inversa de cada término se puede reconocer por inspección, con el resultado de que

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]. \tag{5.88}$$

El procedimiento seguido en el ejemplo 5.19 es idéntico en estilo al que se usó en el caso continuo. Específicamente, después de expandir $H(e^{j\omega})$ utilizando el método de fracciones parciales, podemos encontrar la transformada inversa de cada término por inspección. Se puede aplicar el mismo procedimiento a la respuesta en frecuencia de cualquier sistema LTI descrito por una ecuación lineal de diferencias con coeficientes constantes para determinar la respuesta del sistema al impulso. También, como se ilustra en el siguiente ejemplo, si la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de la entrada a ese sistema es una razón de polinomios en $e^{-j\omega}$, entonces $Y(e^{j\omega})$ también lo será. En este caso, podemos usar la misma técnica para encontrar la respuesta $y[n]$ a la entrada $x[n]$.

Ejemplo 5.20

Considere el sistema LTI del ejemplo 5.19, y sea la entrada a este sistema

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

Entonces, usando la ecuación (5.80) y el ejemplo 5.1 o 5.18, obtenemos

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) &= \left[\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}\right]\left[\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right] \\ &= \frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-e\omega})^2}. \end{aligned} \tag{5.89}$$

Como se describe en el apéndice, la forma de la expansión en fracciones parciales es en este caso

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{B_{11}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B_{12}}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{B_{21}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}, \tag{5.90}$$

donde las constantes B_{11}, B_{12} y B_{21} se pueden determinar usando las técnicas descritas en el apéndice. Esta expansión particular se detalla en el ejemplo A.4, y los valores obtenidos son

$$B_{11} = -4, \qquad B_{12} = -2, \qquad B_{21} = 8,$$

de modo que

$$Y(e^{j\omega}) = -\frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \tag{5.91}$$

El primer y tercer términos son del mismo tipo que los encontrados en el ejemplo 5.19, mientras que el segundo tiene la misma forma que el visto en el ejemplo 5.13. Ya sea de los ejemplos o de la tabla 5.2, podemos invertir cada término en la ecuación (5.91) para obtener la transformada inversa

$$y[n] = \left\{-4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}u[n]. \tag{5.92}$$

5.9 RESUMEN

En este capítulo desarrollamos, en forma paralela a como se hizo en el capítulo 4, la transformada de Fourier para señales discretas y examinamos muchas de sus importantes propiedades. A través de todo el capítulo hemos visto muchas similitudes entre el análisis de Fourier de tiempo continuo y de tiempo discreto, y también hemos visto algunas diferencias importantes. Por ejemplo, la relación entre la serie de Fourier y la transformada de Fourier de tiempo discreto es exactamente análoga a la de tiempo continuo. En particular, nuestra deducción de la transformada de Fourier de tiempo discreto para señales aperiódicas a partir de las representaciones de serie de Fourier es casi igual que la deducción correspondiente en tiempo continuo. Además, muchas de las propiedades de las transformadas de tiempo continuo tienen su contraparte exacta en tiempo discreto. Por otro lado, en contraste con el caso continuo, la transformada de Fourier de tiempo discreto de una señal aperiódica siempre es periódica con periodo 2π. Además de las similitudes y diferencias como éstas, hemos descrito las relaciones de dualidad entre las representaciones de Fourier de señales continuas y discretas.

Las semejanzas más importantes entre el análisis de Fourier de tiempo discreto y continuo se encuentran en sus usos en el análisis y representación de señales y sistema LTI. En concreto, la propiedad de convolución nos proporciona las bases para el análisis en el dominio de la frecuencia de los sistemas LTI. Ya hemos visto que esta aproximación tiene

alguna utilidad en nuestro análisis de filtrado en los capítulos 3 a 5 y en el examen de sistemas descritos por ecuaciones lineales diferenciales y de diferencias con coeficientes constantes, y lograremos una mejor apreciación de su utilidad en el capítulo 6, en el cual examinamos los temas de filtrado y tiempo *versus* frecuencia con más detalle. Además, las propiedades de multiplicación en tiempo continuo y en tiempo discreto son esenciales para nuestro desarrollo sobre el muestreo en el capítulo 7 y las comunicaciones en el capítulo 8.

Capítulo 5 Problemas

La primera sección de problemas comprende la categoría básica y las respuestas se proporcionan al final del libro. Las tres secciones restantes contienen problemas que abarcan las categorías básica avanzada y de extensión respectivamente.

PROBLEMAS BÁSICOS CON RESPUESTAS

5.1. Use la ecuación de análisis (5.9) de la transformada de Fourier para calcular las transformadas de:
(a) $(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$ **(b)** $(\frac{1}{2})^{|n-1|}$
Dibuje y marque un periodo de la magnitud de cada transformada de Fourier.

5.2. Use la ecuación de análisis (5.9) de la transformada de Fourier para calcular las transformadas de:
(a) $\delta[n-1]+\delta[n+1]$ **(b)** $\delta[n+2]-\delta[n-2]$
Dibuje y marque un periodo de la magnitud de cada transformada de Fourier.

5.3. Determine la transformada de Fourier para $-\pi \le \omega < \pi$ en cada caso de las siguientes señales periódicas:
(a) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4})$ **(b)** $2+\cos(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8})$

5.4. Use la ecuación de síntesis (5.8) de la transformada de Fourier para calcular las transformadas inversas de Fourier de:
(a) $X_1(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{2\pi\delta(\omega-2\pi k)+\pi\delta(\omega-\frac{\pi}{2}-2\pi k)+\pi\delta(\omega+\frac{\pi}{2}-2\pi k)\}$
(b) $X_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2j, & 0<\omega\le\pi \\ -2j, & -\pi<\omega\le 0 \end{cases}$

5.5. Use la ecuación de síntesis (5.8) de la transformada de Fourier para calcular las transformadas inversas de Fourier de $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\sphericalangle X(e^{j\omega})}$, donde

$$|X_2(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & 0\le|\omega|<\frac{\pi}{4} \\ 0, & \frac{\pi}{4}\le|\omega|\le\pi \end{cases} \quad \text{y} \quad \sphericalangle X(e^{j\omega}) = -\frac{3\omega}{2}.$$

Use su respuesta para determinar los valores de n para los cuales $x[n]=0$.

5.6. Dado que $x[n]$ tiene transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$, exprese las transformadas de Fourier de las siguientes señales en términos de $X(e^{j\omega})$. Puede usar las propiedades de la transformada de Fourier enumeradas en la tabla 5.1.
(a) $x_1[n] = x[1-n]+x[-1-n]$
(b) $x_2[n] = \frac{x^*[-n]+x[n]}{2}$
(c) $x_3[n] = (n-1)^2x[n]$

5.7. Para cada una de las siguientes transformadas de Fourier, use las propiedades de la transformada de Fourier (tabla 5.1) para determinar si la señal correspondiente en el dominio del tiempo es: (i) real, imaginaria o ni lo uno ni lo otro; (ii) par, impar, o ninguna de las dos. Haga esto sin evaluar la inversa de las transformadas dadas.
(a) $X_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\sum_{k=1}^{10} (\text{sen } k\omega)$
(b) $X_2(e^{j\omega}) = j \text{ sen}(\omega) \cos(5\omega)$
(c) $X_3(e^{j\omega}) = A(\omega) + e^{jB(\omega)}$ donde

$$A(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le \frac{\pi}{8} \\ 0, & \frac{\pi}{8} < |\omega| \le \pi \end{cases} \text{ y } B(\omega) = -\frac{3\omega}{2} + \pi.$$

5.8. Use las tablas 5.1 y 5.2 para determinar $x[n]$ cuando su transformada de Fourier es

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}\left(\frac{\text{sen } \frac{3}{2}\omega}{\text{sen } \frac{\omega}{2}}\right) + 5\pi\delta(\omega), \qquad -\pi < \omega \le \pi$$

5.9. Se dan las siguientes características acerca de una señal particular $x[n]$ con transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$:

1. $x[n] = 0$ para $n > 0$.
2. $x[0] > 0$.
3. $\mathcal{Im}\{X(e^{j\omega})\} = \text{sen } \omega - \text{sen } 2\omega$.
4. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega = 3$.

Determine $x[n]$.

5.10. Use las tablas 5.1 y 5.2 junto con el hecho de que

$$X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

para determinar el valor numérico de

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

5.11. Considere una señal $g[n]$ con transformada de Fourier $G(e^{j\omega})$. Suponga que

$$g[n] = x_{(2)}[n],$$

donde la señal $x[n]$ tiene transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$. Determine un número real α tal que $0 < \alpha < 2\pi$ y $G(e^{j\omega}) = G(e^{j(\omega-\alpha)})$.

5.12. Sea

$$y[n] = \left(\frac{\text{sen } \frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right)^2 * \left(\frac{\text{sen } \omega_c n}{\pi n}\right),$$

donde $*$ denota la convolución y $|\omega_c| \le \pi$. Determine una restricción rigurosa en ω_c

la cual asegure que

$$y[n] = \left(\frac{\text{sen } \frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right)^2.$$

5.13. Un sistema LTI con respuesta al impulso $h_1[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$ se conecta en paralelo con otro sistema LTI causal con respuesta al impulso $h_2[n]$. La interconexión en paralelo que resulta tiene la respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{-12 + 5e^{-j\omega}}{12 - 7e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}.$$

Determine $h_2[n]$.

5.14. Suponga que damos los siguientes hechos acerca de un sistema LTI S con respuesta al impulso $h[n]$ y respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$:

1. $(\frac{1}{4})^n u[n] \rightarrow g[n]$, donde $g[n] = 0$ para $n \geq 2$ y $n < 0$.
2. $H(e^{j\pi/2}) = 1$.
3. $H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega-\pi)})$.

Determine $h[n]$.

5.15. Sea la transformada de Fourier inversa de $Y(e^{j\omega})$

$$y[n] = \left(\frac{\text{sen } \omega_c n}{\pi n}\right)^2,$$

donde $0 < \omega_c < \pi$. Determine el valor de ω_c el cual asegure que

$$Y(e^{j\pi}) = \frac{1}{2}.$$

5.16. La transformada de Fourier de una señal particular es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(1/2)^k}{1 - \frac{1}{4}e^{-j(\omega-\pi/2k)}}.$$

Puede demostrarse que

$$x[n] = g[n]q[n],$$

donde $g[n]$ tenga la forma $\alpha^n u[n]$ y $q[n]$ sea una señal periódica con periodo N.

(a) Determine el valor de α.
(b) Determine el valor de N.
(c) ¿Es $x[n]$ real?

5.17. La señal $x[n] = (-1)^n$ tiene un periodo fundamental de 2 y los coeficientes correspondientes de la serie de Fourier a_k. Use la dualidad para determinar los coeficientes de la serie de Fourier b_k de la señal $g[n] = a_n$ con periodo fundamental de 2.

5.18. Dado el hecho de que

$$a^{|n|} \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \omega + a^2}, \quad |a| < 1,$$

use la dualidad para determinar los coeficientes de la serie de Fourier de la siguiente señal continua con periodo $T = 1$:

$$x(t) = \frac{1}{5 - 4\cos(2\pi t)}.$$

5.19. Considere un sistema LTI S causal y estable cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ estén relacionadas mediante una ecuación de diferencias de segundo orden

$$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n].$$

(a) Determine la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema S.
(b) Determine la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema S.

5.20. Un sistema LTI S causal y estable tiene la propiedad de que

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n] \rightarrow n\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n].$$

(a) Determine la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema S.
(b) Determine una ecuación de diferencias que relacione cualquier entrada $x[n]$ con la correspondiente salida $y[n]$.

PROBLEMAS BÁSICOS

5.21. Calcule la transformada de Fourier de las siguientes señales:
(a) $x[n] = u[n-2] - u[n-6]$
(b) $x[n] = (\frac{1}{2})^{-n}u[-n-1]$
(c) $x[n] = (\frac{1}{3})^{|n|}u[-n-2]$
(d) $x[n] = 2^n \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}n)u[-n]$
(e) $x[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}\cos(\frac{\pi}{8}(n-1))$
(f) $x[n] = \begin{cases} n, & -3 \le n \le 3 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$
(g) $x[n] = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}n) + \cos(n)$
(h) $x[n] = \operatorname{sen}(\frac{5\pi}{3}n) + \cos(\frac{7\pi}{3}n)$
(i) $x[n] = x[n-6]$, y $x[n] = u[n] - u[n-5]$ para $0 \le n \le 5$
(j) $x[n] = (n-1)(\frac{1}{3})^{|n|}$
(k) $x[n] = (\frac{\operatorname{sen}(\pi n/5)}{\pi n})\cos(\frac{7\pi}{2}n)$

5.22. A continuación se muestran las transformadas de Fourier de las señales discretas. Determine la señal correspondiente a cada transformada.
(a) $X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{4} \le |\omega| \le \frac{3\pi}{4} \\ 0, & \frac{3\pi}{4} \le |\omega| \le \pi, 0 \le |\omega| < \frac{\pi}{4} \end{cases}$
(b) $X(e^{j\omega}) = 1 + 3e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega} - 4e^{-j3\omega} + e^{-j10\omega}$
(c) $X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2}$ para $-\pi \le \omega \le \pi$
(d) $X(e^{j\omega}) = \cos^2\omega + \operatorname{sen}^2 3\omega$

(e) $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(\omega - \frac{\pi}{2}k)$

(f) $X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega}}$

(g) $X(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega} - \frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$

(h) $X(e^{j\omega}) = \frac{1 - (\frac{1}{3})^6 e^{-j6\omega}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$

5.23. Sea que $X(e^{j\omega})$ que denota la transformada de Fourier de la señal $x[n]$ representada en la figura P5.23. Realice los siguientes cálculos sin evaluar explícitamente $X(e^{j\omega})$:

(a) Evalúe $X(e^{j0})$.
(b) Encuentre $\sphericalangle X(e^{j\omega})$.
(c) Evalúe $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$.
(d) Encuentre $X(e^{j\pi})$.
(e) Determine y dibuje la señal cuya transformada de Fourier es $\mathcal{Re}\{x(\omega)\}$.
(f) Evalúe
  (i) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$
  (ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega$

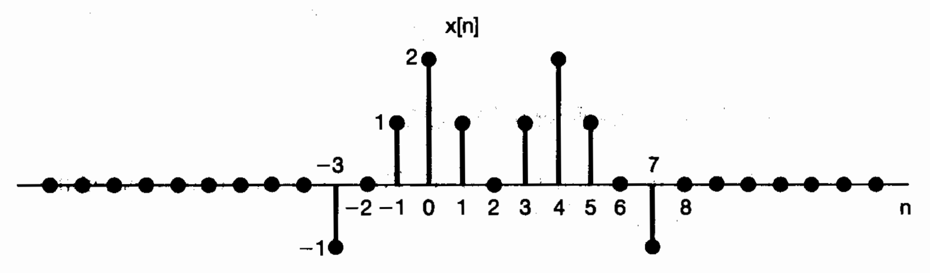
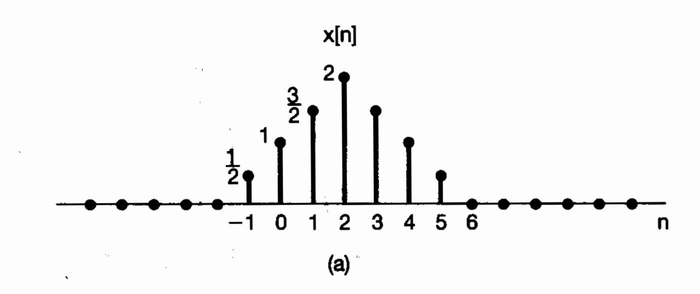


Figura P5.23

5.24. Determine cuál, si la hay, de las siguientes señales tiene transformada de Fourier que satisfaga cada una de las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{Re}\{X(e^{j\omega})\} = 0$.
2. $\mathcal{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0$.
3. Existe una α real tal que $e^{j\alpha\omega}X(e^{j\omega})$ sea real.
4. $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega = 0$.
5. $X(e^{j\omega})$ periódica.
6. $X(e^{j0}) = 0$.

(a) $x[n]$ como en la figura P5.24(a)
(b) $x[n]$ como en la figura P5.24(b)
(c) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$
(d) $x[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}$
(e) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+2]$
(f) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+3]$
(g) $x[n]$ como en la figura P5.24(c)
(h) $x[n]$ como en la figura P5.24(d)
(i) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$



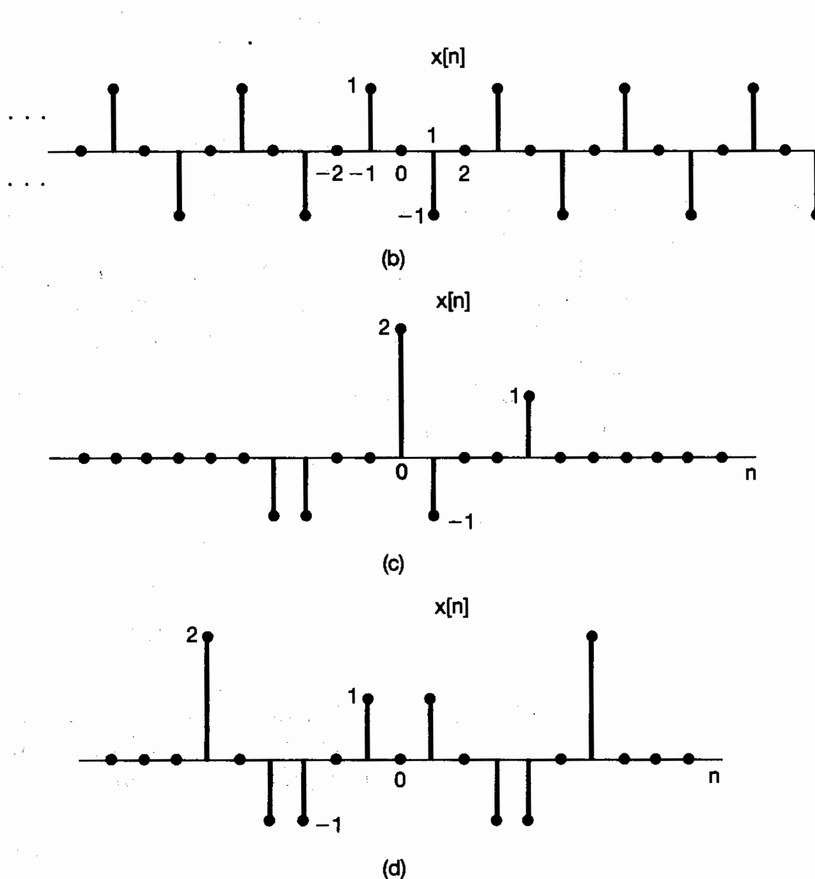


Figura P5.24

5.25. Considere la señal representada en la figura P5.25. Escribamos la transformada de Fourier de esta señal en forma rectangular como

$$X(e^{j\omega}) = A(\omega) + jB(\omega).$$

Dibuje la función en el tiempo correspondiente a la transformada

$$Y(e^{j\omega}) = [B(\omega) + A(\omega)e^{j\omega}].$$

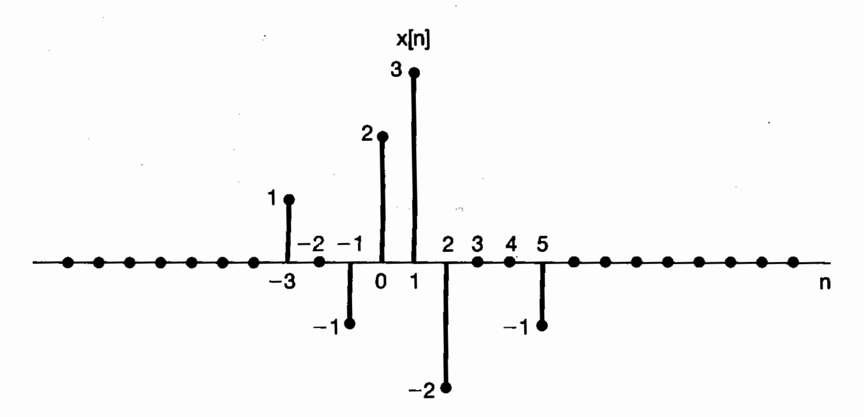


Figura P5.25

5.26. Sea $x_1[n]$ la señal discreta cuya transformada de Fourier $X_1(e^{j\omega})$, está representada en la figura P5.26(a).

(a) Considere la señal $x_2[n]$ con transformada de Fourier $X_2(e^{j\omega})$, como se ilustró en la figura P5.26(b). Exprese $x_2[n]$ en términos de $x_1[n]$. [*Sugerencia*: Primero exprese $X_2(e^{j\omega})$ en términos de $X_1(e^{j\omega})$ y después use las propiedades de la transformada de Fourier.]

(b) Repita la parte (a) para $x_3[n]$ con transformada de Fourier $X_3(e^{j\omega})$ como se mostró en la figura P5.26(c).

(c) Sea

$$\alpha = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n x_1[n]}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]}.$$

Esta cantidad, la cual es el centro de gravedad de la señal $x_1[n]$, en general se conoce como el *tiempo de retardo* de la señal $x_1[n]$. Encuentre α. (Puede hacerlo sin determinar primero $x_1[n]$ en forma explícita.)

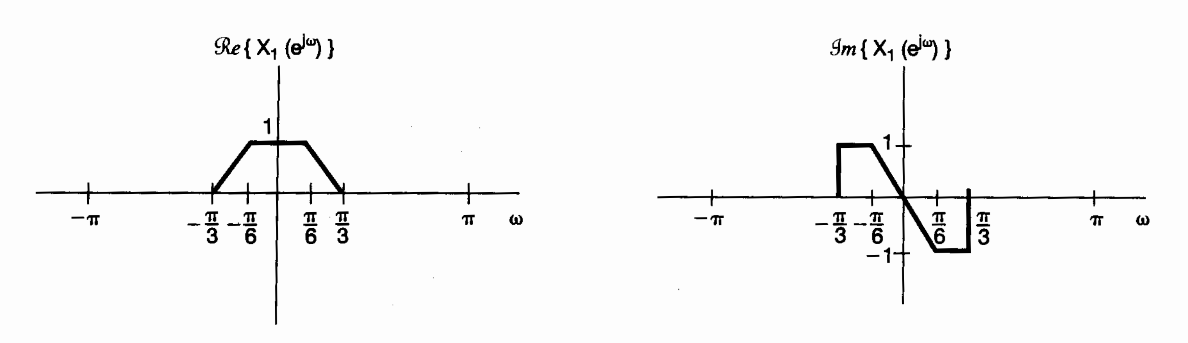
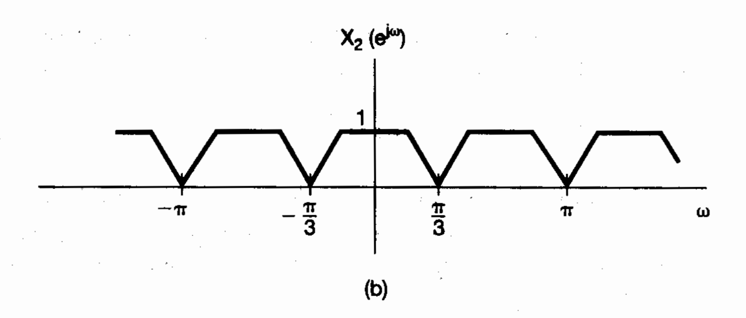


Figura P5.26a



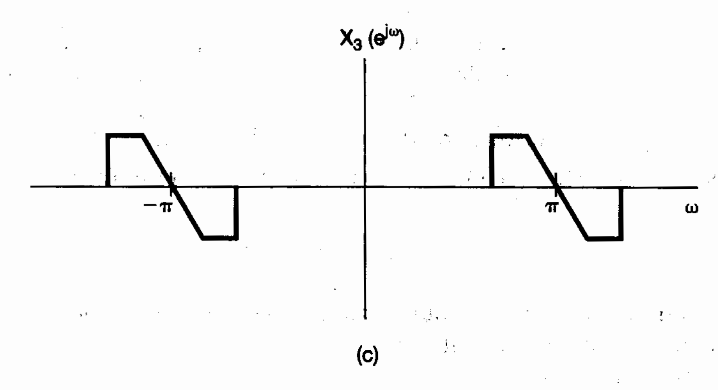


Figura P5.26b,c

(d) Considere la señal $x_4[n] = x_1[n] * h[n]$, donde

$$h[n] = \frac{\operatorname{sen}(\pi n/6)}{\pi n}.$$

Dibuje $X_4(e^{j\omega})$.

5.27. (a) Sea $x[n]$ una señal discreta con transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$, la cual se ilustra en la figura P5.27. Dibuje la transformada de Fourier de

$$w[n] = x[n]p[n]$$

para cada una de las siguientes señales $p[n]$:

(i) $p[n] = \cos \pi n$

(ii) $p[n] = \cos(\pi n/2)$

(iii) $p[n] = \operatorname{sen}(\pi n/2)$

(iv) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 2k]$

(v) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 4k]$

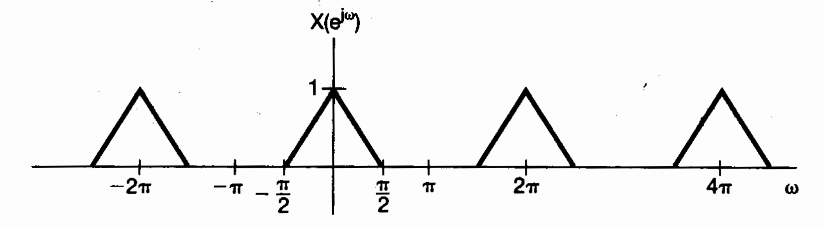


Figura P5.27

(b) Suponga que la señal $w[n]$ de la parte (a) se aplica como entrada a un sistema LTI con respuesta a la muestra unitaria

$$h[n] = \frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n}.$$

Determine la salida $y[n]$ para cada una de las señales $p[n]$ de la parte (a).

5.28. Se sabe que las señales $x[n]$ y $g[n]$ tienen transformadas de Fourier $X(e^{j\omega})$ y $G(e^{j\omega})$, respectivamente. Además, $X(e^{j\omega})$ y $G(e^{j\omega})$ están relacionadas mediante

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\theta})G(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = 1 + e^{-j\omega} \qquad \text{(P5.28-1)}$$

(a) Si $x[n] = (-1)^n$, determine una secuencia $g[n]$ tal que su transformada de Fourier $G(e^{j\omega})$ satisfaga la ecuación (P5.28-1). ¿Existen otras soluciones posibles para $g[n]$?

(b) Repita la parte anterior para $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$.

5.29. **(a)** Considere un sistema LTI discreto con respuesta al impulso

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Use las transformadas de Fourier para determinar la respuesta de cada una de las siguientes señales de entrada:

(i) $x[n] = (\frac{3}{4})^n u[n]$

(ii) $x[n] = (n + 1)(\frac{1}{4})^n u[n]$

(iii) $x[n] = (-1)^n$

(b) Suponga que

$$h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right] u[n].$$

Use las transformadas de Fourier para determinar la respuesta a cada una de las siguientes entradas:

(i) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

(ii) $x[n] = \cos(\pi n/2)$

(c) Sean $x[n]$ y $h[n]$ señales con las siguientes transformadas de Fourier:

$$X(e^{j\omega}) = 3e^{j\omega} + 1 - e^{-j\omega} + 2e^{-j3\omega},$$

$$H(e^{j\omega}) = -e^{j\omega} + 2e^{-2j\omega} + e^{j4\omega}.$$

Determine $y[n] = x[n] * h[n]$.

5.30. En el capítulo 4 indicamos que el sistema LTI continuo con respuesta al impulso

$$h(t) = \frac{W}{\pi}\text{senc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\text{sen } Wt}{\pi t}$$

juega un papel muy importante en el análisis de sistemas LTI. Lo mismo ocurre con el sistema LTI discreto con respuesta al impulso

$$h(n) = \frac{W}{\pi}\text{senc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right) = \frac{\text{sen } Wn}{\pi n}.$$

(a) Determine y dibuje la respuesta en frecuencia para el sistema con respuesta al impulso $h[n]$.

(b) Considere la señal

$$x[n] = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{8}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right).$$

Suponga que esta señal es la entrada a sistemas LTI con las respuestas al impulso dadas abajo. Determine la salida en cada caso.

(i) $h[n] = \frac{\operatorname{sen}(\pi n/6)}{\pi n}$

(ii) $h[n] = \frac{\operatorname{sen}(\pi n/6)}{\pi n} + \frac{\operatorname{sen}(\pi n/2)}{\pi n}$

(iii) $h[n] = \frac{\operatorname{sen}(\pi n/6)\operatorname{sen}(\pi n/3)}{\pi^2 n^2}$

(iv) $h[n] = \frac{\operatorname{sen}(\pi n/6)\operatorname{sen}(\pi n/3)}{\pi n}$

(c) Considere un sistema LTI con respuesta a la muestra unitaria

$$h[n] = \frac{\operatorname{sen}(\pi n/3)}{\pi n}.$$

Determine la salida para cada una de las siguientes entradas:

(i) $x[n]$ = la onda cuadrada representada en la figura P5.30

(ii) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 8k]$

(iii) $x[n] = (-1)^n$ veces la onda cuadrada de la figura P5.30

(iv) $x[n] = \delta[n + 1] + \delta[n - 1]$

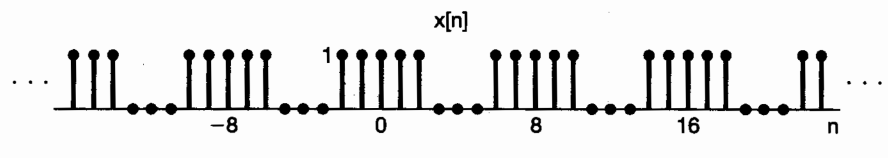


Figura P5.30

5.31. Se sabe que un sistema LTI S con respuesta al impulso $h[n]$ y respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ tiene la propiedad de que, cuando $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$,

$$\cos \omega_0 n \rightarrow \omega_0 \cos \omega_0 n.$$

(a) Determine $H(e^{j\omega})$.

(b) Determine $h[n]$.

5.32. Sean $h_1[n]$ y $h_2[n]$ las respuestas al impulso de sistemas LTI causales, y sean $H_1(e^{j\omega})$ y $H_2(e^{j\omega})$ las respuestas correspondientes en frecuencia. Bajo estas condiciones, ¿es válida, en general, la siguiente ecuación? Justifique su respuesta.

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\omega})\,d\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_2(e^{j\omega})\,d\omega\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})d\omega.$$

5.33. Considere un sistema LTI causal descrito mediante la ecuación de diferencias

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n].$$

(a) Determine la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ de este sistema.
(b) ¿Cuál es la respuesta de este sistema a las siguientes entradas?
(i) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$
(ii) $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$
(iii) $x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$
(iv) $x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$
(c) Encuentre la respuesta a las entradas con las siguientes transformadas de Fourier:
(i) $X(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$
(ii) $X(e^{j\omega}) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$
(iii) $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega})}$
(iv) $X(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-3j\omega}$

5.34. Considere un sistema que consiste en la cascada de dos sistemas LTI con respuestas en frecuencia

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{2 - e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

y

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}}.$$

(a) Encuentre la ecuación de diferencias que describe al sistema completo.
(b) Determine la respuesta al impulso del sistema completo.

5.35. Un sistema LTI causal es descrito mediante la ecuación de diferencias

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n] + x[n-1],$$

donde a es real y menor que 1 en magnitud.
(a) Determine un valor de b tal que la respuesta en frecuencia del sistema satisfaga

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad \text{para toda } \omega.$$

Esta clase de sistemas se llama *sistema paso todo*, ya que no atenúa la entrada $e^{j\omega n}$ en *cualquier* valor de ω. En el que el resto del problema use el valor de b que ha encontrado.
(b) Bosqueje $\sphericalangle H(e^{j\omega}), 0 \leq \omega \leq \pi$, cuando $a = \frac{1}{2}$.
(c) Bosqueje $\sphericalangle H(e^{j\omega}), 0 \leq \omega \leq \pi$, cuando $a = -\frac{1}{2}$.

(d) Encuentre y trace la salida de este sistema con $a = -\frac{1}{2}$ cuando la entrada es

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

A partir de este ejemplo, vemos que un cambio no lineal en la fase puede tener un efecto significativamente diferente sobre una señal que el que tiene el desplazamiento de tiempo resultante de un cambio lineal de fase.

5.36. **(a)** Sean $h[n]$ y $g[n]$ las respuestas al impulso de dos sistemas LTI estables discretos las cuales son inversas una de otra. ¿Cuál es la relación entre las respuestas en frecuencia de estos dos sistemas?

(b) Considere los sistemas LTI causales descritos por las siguientes ecuaciones de diferencias. En cada caso, determine la respuesta al impulso del sistema inverso y la ecuación de diferencias que caracteriza la inversa.

(i) $y[n] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$

(ii) $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$

(iii) $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$

(iv) $y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2]$

(v) $y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$

(vi) $y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$

(c) Examine el sistema LTI causal discreto descrito por la ecuación de diferencias

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2]. \qquad \text{(P5.36-1)}$$

¿Cuál es el inverso de este sistema? Demuestre que el inverso no es causal. Encuentre otro sistema LTI causal que sea un "inverso con retardo" del sistema descrito por la ecuación (P5.36-1). Específicamente, encuentre un sistema LTI causal de manera que la salida $w[n]$, en la figura P5.36, sea igual a $x[n\text{-}1]$.

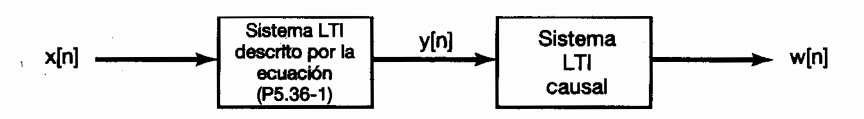


Figura P5.36

PROBLEMAS AVANZADOS

5.37. Sea $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de $x[n]$. Deduzca las expresiones de $X(e^{j\omega})$ para las transformadas de Fourier de las siguientes señales. (No suponga que $x[n]$ es real.)

(a) $\mathcal{R}e\{x[n]\}$

(b) $x^*[-n]$

(c) $\mathcal{E}v\{x[n]\}$

5.38. Sea $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de una señal real $x[n]$. Demuestre que $x[n]$ se puede escribir como

$$x[n] = \int_0^{\pi} \{B(\omega) \cos \omega + C(\omega) \operatorname{sen} \omega\} d\omega$$

encontrando las expresiones para $B(\omega)$ y $C(\omega)$ en términos de $X(e^{j\omega})$.

5.39. Deduzca la propiedad de convolución

$$x[n] * h[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}).$$

5.40. Sean $x[n]$ y $h[n]$ dos señales, y sea $y[n] = x[n] * h[n]$. Escriba dos expresiones para $y[0]$, una (usando directamente la suma de convolución) en términos de $x[n]$ y $h[n]$ y la otra (usando la propiedad de convolución de las transformadas de Fourier) en términos de $X(e^{j\omega})$ y $H(e^{j\omega})$. Entonces, mediante una selección cuidadosa de $h[n]$, use estas dos expresiones para deducir la relación de Parseval; esto es,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega.$$

De una manera semejante, deduzca la siguiente generalización de la relación de Parseval:

$$\sum_{n-\infty}^{+\infty} x[n]z^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Z^*(e^{j\omega})d\omega.$$

5.41. Sea $\tilde{x}[n]$ una señal periódica con periodo N. Una señal $x[n]$ de duración finita está relacionada con $\tilde{x}[n]$ mediante

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & n_0 \leq n \leq n_0 + N - 1 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases},$$

para algún entero n_0. Esto es, $x[n]$ es igual a $\tilde{x}[n]$ sobre un periodo y cero con cualquier otro valor.

(a) Si $\tilde{x}[n]$ tiene coeficientes de la serie de Fourier a_k y $x[n]$ tiene transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$, demuestre que

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j2\pi k/N})$$

sin importar el valor de n_0.

(b) Considere las siguientes dos señales:

$$x[n] = u[n] - u[n-5]$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN]$$

donde N es un entero positivo. Sea que a_k denota los coeficientes de Fourier de $\tilde{x}[n]$ y sea $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de $x[n]$.

(i) Determine la expresión en forma cerrada para $X(e^{j\omega})$.

(ii) Usando el resultado de la parte (i), determine una expresión para los coeficientes a_k de Fourier.

5.42. En este problema, deducimos la propiedad de desplazamiento de frecuencia de la transformada de Fourier de tiempo discreto como un caso especial de la propiedad de multiplicación. Sea $x[n]$ cualquier señal discreta con transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$, y sea

$$g[n] = e^{j\omega_0 n} x[n].$$

(a) Determine y dibuje la transformada de Fourier de

$$p[n] = e^{j\omega_0 n}.$$

(b) La propiedad de multiplicación de la transformada de Fourier nos dice que, puesto que

$$g[n] = p[n]x[n],$$

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X(e^{j\theta})P(e^{j(\omega-\theta)})d\theta.$$

Evalúe esta integral para demostrar que

$$G(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\theta)}).$$

5.43. Sea $x[n]$ una señal con transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$, y sea

$$g[n] = x[2n]$$

una señal cuya transformada de Fourier es $G(e^{j\omega})$. En este problema, deducimos la relación entre $G(e^{j\omega})$ y $X(e^{j\omega})$.

(a) Sea

$$v[n] = \frac{(e^{-j\pi n} x[n]) + x[n]}{2}.$$

Exprese la transformada de Fourier $V(e^{j\omega})$ de $v[n]$ en términos de $X(e^{j\omega})$.

(b) Observando que $v[n] = 0$ para n impar, demuestre que la transformada de Fourier de $v[2n]$ es igual a $V(e^{j\frac{\omega}{2}})$.

(c) Demuestre que

$$x[2n] = v[2n].$$

De lo cual se deriva que

$$G(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega/2}).$$

Ahora, use el resultado de la parte (a) para expresar $G(e^{j\omega})$ en términos de $X(e^{j\omega})$.

5.44. **(a)** Sea

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

una señal y sea que $X_1(e^{j\omega})$ denota la transformada de Fourier de $x_1[n]$. Dibuje $x_1[n]$, junto con las señales que tengan las siguientes transformadas de Fourier:

(i) $X_2(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})e^{j\omega}, \quad |\omega| < \pi$

(ii) $X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})e^{-j3\omega/2}, \quad |\omega| < \pi$

(b) Sea

$$w(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{3T}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$$

una señal continua. Observe que $x_1[n]$ se puede considerar como una secuencia de muestras espaciadas de $w(t)$; esto es,

$$x_1[n] = w(nT).$$

Demuestre que

$$x_2[n] = w(nT - \alpha)$$

y

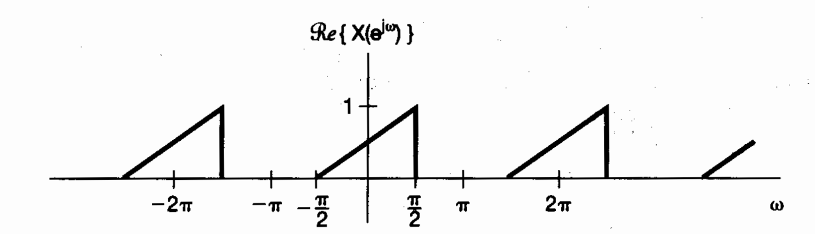
$$x_3[n] = w(nT - \beta)$$

y especifique los valores de α y β. A partir de este resultado podemos concluir que $x_2[n]$ y $x_3[n]$ son también muestras igualmente espaciadas de $w(t)$.

5.45. Considere una señal discreta $x[n]$ con transformada de Fourier como se ilustra en la figura P5.45. Proporcione los dibujos dimensionados de las siguientes señales continuas:

(a) $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j(2\pi/10)nt}$

(b) $x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{j(2\pi/10)nt}$



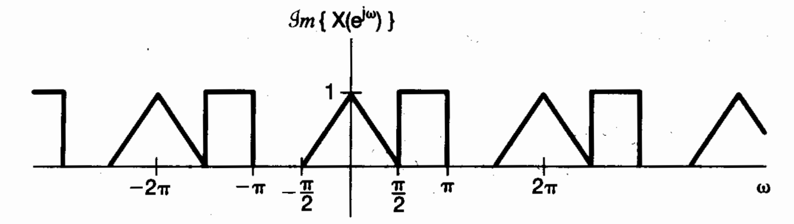


Figura P5.45

(c) $x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{O}d\{x[n]\}e^{j(2\pi/8)nt}$
(d) $x_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}e\{x[n]\}e^{j(2\pi/6)nt}$

5.46. En el ejemplo 5.1 demostramos que para $|\alpha| < 1$,

$$\alpha^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}.$$

(a) Use las propiedades de la transformada de Fourier para demostrar que

$$(n + 1)\alpha^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^2}.$$

(b) Demuestre por inducción que la transformada inversa de Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^r}$$

es

$$x[n] = \frac{(n + r - 1)!}{n!(r - 1)!} \alpha^n u[n].$$

5.47. Determine si cada uno de los siguientes enunciados es falso o verdadero. Justifique sus respuestas. En cada enunciado, la transformada de Fourier de $x[n]$ se denota mediante $X(e^{j\omega})$.
(a) Si $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-1)})$, entonces $x[n] = 0$ para $|n| > 0$.
(b) Si $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$, entonces $x[n] = 0$ para $|n| > 0$.
(c) Si $X(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega/2})$, entonces $x[n] = 0$ para $|n| > 0$.
(d) Si $X(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$, entonces $x[n] = 0$ para $|n| > 0$.

5.48. Se nos ha dado un sistema lineal, invariante en el tiempo, causal, discreto, cuya entrada se denota mediante $x[n]$ y salida se denota con $y[n]$. Este sistema está especificado por el siguiente *par* de ecuaciones de diferencias, que involucra una señal intermedia $w[n]$:

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] + w[n] + \frac{1}{2}w[n-1] = \frac{2}{3}x[n],$$

$$y[n] - \frac{5}{4}y[n-1] + 2w[n] - 2w[n-1] = -\frac{5}{3}x[n].$$

(a) Determine la respuesta en frecuencia y la respuesta a la muestra unitaria del sistema.
(b) Encuentre una sola ecuación de diferencias que relacione a $x[n]$ con $y[n]$ para el sistema.

5.49. **(a)** Un sistema discreto particular tiene entrada $x[n]$ y salida $y[n]$. Las transformadas de Fourier de estas señales están relacionadas por la ecuación

$$Y(e^{j\omega}) = 2X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) - \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}.$$

(i) ¿El sistema es lineal? Justifique claramente su respuesta.
(ii) ¿El sistema es invariante en el tiempo? Justifique claramente su respuesta.
(iii) ¿Qué es $y[n]$ si $x[n] = \delta[n]$?

(b) Considere un sistema discreto para el cual la transformada $Y(e^{j\omega})$ de la salida está relacionada con la transformada de la entrada mediante la relación

$$Y(e^{j\omega}) = \int_{\omega-\pi/4}^{\omega+\pi/4} X(e^{j\omega})\, d\omega.$$

Determine una expresión para $y[n]$ en términos de $x[n]$.

5.50. (a) Queremos diseñar un sistema LTI discreto que tenga la propiedad de que si la entrada es

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1],$$

entonces la salida es

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

(i) Encuentre la respuestas al impulso y la respuesta en frecuencia de un sistema LTI discreto que tenga esta propiedad.

(ii) Encuentre una ecuación de diferencias que relacione a $x[n]$ con $y[n]$ y que caracterice este sistema.

(b) Suponga que un sistema tiene la respuesta $(\frac{1}{4})^n u[n]$ a la entrada $(n+2)(\frac{1}{2})^n u[n]$. Si la salida de este sistema es $\delta[n] - (-\frac{1}{2})^n u[n]$, ¿cuál es la entrada?

5.51. (a) Considere un sistema LTI discreto con respuesta a la muestra unitaria

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

Determine una ecuación lineal de diferencias con coeficientes constantes que relacione la entrada y la salida del sistema.

(b) La figura P5.51 ilustra una construcción en diagrama de bloques de un sistema LTI causal.

(i) Encuentre una ecuación de diferencias que relacione a $x[n]$ con $y[n]$ para este sistema.

(ii) ¿Cuál es la respuesta en frecuencia de este sistema?

(iii) Determine la respuesta al impulso del sistema.

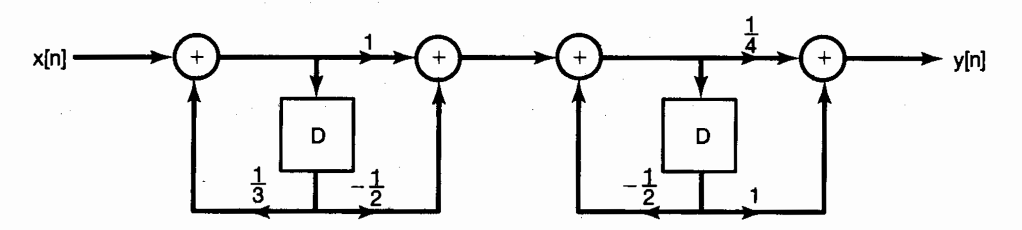


Figura P5.51

5.52. **(a)** Sea $h[n]$ la respuesta al impulso de un sistema LTI real causal discreto. Demuestre que este sistema está completamente especificado por la parte real de su respuesta en frecuencia. (*Sugerencia*: Demuestre cómo $h[n]$ puede recuperarse a partir de $\mathcal{E}v\{h[n]\}$. ¿Cuál es la transformada de Fourier de $\mathcal{E}v\{h[n]\}$?) Ésta es la contraparte de tiempo discreto de la propiedad de *suficiencia de la parte real* de sistemas LTI causales examinada en el problema 4.47 para sistemas continuos.

(b) Sea $h[n]$ real y causal. Si

$$\mathcal{R}e\{H(e^{j\omega})\} = 1 + \alpha \cos 2\omega \; (\alpha \text{ real}),$$

determine $h[n]$ y $H(e^{j\omega})$.

(c) Demuestre que $h[n]$ se puede recuperar por completo a partir del conocimiento de $\mathcal{I}m\{H(e^{j\omega})\}$ y $h[0]$.

(d) Encuentre dos sistemas LTI reales causales cuyas respuestas en frecuencia tengan partes imaginarias iguales a sen ω.

PROBLEMAS DE EXTENSIÓN

5.53. Una de las razones del gran aumento en el uso de métodos de tiempo discreto para el análisis y síntesis de señales y sistemas fue el desarrollo de herramientas sumamente eficientes para realizar el análisis de Fourier de secuencias de tiempo discreto. A la cabeza de estos métodos está una técnica muy relacionada con el análisis de Fourier de tiempo discreto y que resulta ideal para usarla en computadora o ponerla en práctica en circuitos electrónicos digitales de uso específico. Esta técnica es la *transformada discreta de Fourier* (*DFT*, por sus siglas en inglés) para señales de duración finita.

Sea $x[n]$ una señal de duración finita; esto es, hay un entero N_1 tal que

$$x[n] = 0, \qquad \text{fuera del intervalo } 0 \leq n \leq N_1 - 1$$

Además, sea que $X(e^{j\omega})$ denota la transformada de Fourier de $x[n]$. Podemos construir una señal periódica $\tilde{x}[n]$ que sea igual a $x[n]$ en un periodo. En concreto, sea $N \geq N_1$ un entero dado, y sea $\tilde{x}[n]$ periódica con periodo N tal que

$$\tilde{x}[n] = x[n], \qquad 0 \leq n \leq N - 1$$

Los coeficientes de la serie de Fourier para $\tilde{x}[n]$ están dados por

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Seleccionando el intervalo de la sumatoria para que $\tilde{x}[n] = x[n]$, obtenemos

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \qquad \text{(P5.53-1)}$$

El conjunto de coeficientes definidos en la ecuación (P5.53-1) comprenden la DFT de $x[n]$. Específicamente, la DFT de $x[n]$ se denota comúnmente por $\tilde{X}[k]$ y se define como

$$\tilde{X}[k] = a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad \text{(P5.53-2)}$$

La importancia de la DFT emana de varios hechos. Primero, observe que la señal de duración finita se puede recuperar a partir de su DFT. En concreto, tenemos

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]e^{jk(2\pi/N)n}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad \text{(P5.53-3)}$$

Así, la señal de duración finita puede especificarse como el conjunto finito de valores diferentes de cero o por el conjunto finito de valores de $\tilde{X}[k]$ en su DFT. Una segunda característica importante de la DFT es que hay un algoritmo extremadamente rápido, llamado la *transformada rápida de Fourier* (*FFT*, por sus siglas en inglés) para su cálculo (véase el problema 5.54 para una introducción a esta técnica en extremo importante). Además, debido a su cercana relación con la serie y la transformada de Fourier de tiempo discreto, la DFT hereda algunas de sus importantes propiedades.

(a) Suponga que $N \geq N_1$. Demuestre que

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} X\left(e^{j(2\pi k/N)}\right)$$

donde $\tilde{X}[k]$ es la DFT de $x[n]$. Es decir, la DFT corresponde a las muestras de $X(e^{j\omega})$ tomadas cada $2\pi/N$. La ecuación (P5.53-3) nos lleva a concluir que $x[n]$ puede ser representada únicamente por estas muestras de $X(e^{j\omega})$.

(b) Consideremos las muestras de $X(e^{j\omega})$ tomadas cada $2\pi/M$, donde $M < N_1$. Estas muestras corresponden a más de una secuencia de duración N_1. Para ilustrar esto, considere las dos señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$ representadas en la figura P5.53. Demuestre que si escogemos $M = 4$, tenemos

$$X_1(e^{j(2\pi k/4)}) = X_2(e^{j(2\pi k/4)})$$

para todos los valores de k.

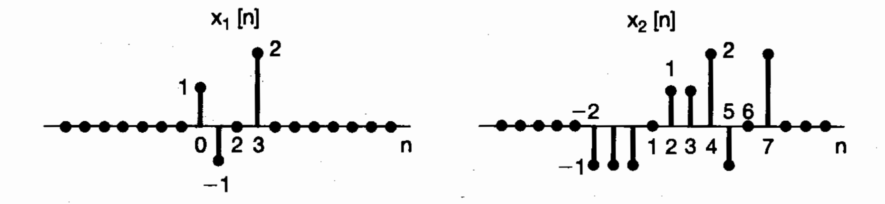


Figura P5.53

5.54. Como se indicó en el problema 5.53, hay muchos problemas de importancia práctica en los cuales uno desea calcular la transformada discreta de Fourier (DFT) de señales de tiempo discreto. A menudo, estas señales son de bastante larga duración, y en tales casos es muy importante usar procedimientos de cálculo eficientes. Una

de las razones para el incremento significativo en el uso de técnicas computarizadas para el análisis de señales fue el desarrollo de una técnica muy eficiente conocida como el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) para el cálculo de la DFT de secuencias de duración finita. En este problema, desarrollamos el principio en el cual se basa la FFT.

Sea $x[n]$ una señal que es 0 fuera del intervalo $0 \leq n \leq N_1 - 1$. Para $N \geq N_1$, la DFT del punto N de $x[n]$ está dada por

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{P5.54-1}$$

Es conveniente rescribir la ecuación (P5.54-1) como

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}, \tag{P5.54-2}$$

donde

$$W_N = e^{-j2\pi/N}.$$

(a) Un método para calcular $\tilde{X}[k]$ es mediante la evaluación directa de la ecuación (P5.54-2). Una medida útil de la complejidad de este cálculo es el número total de multiplicaciones complejas requeridas. Demuestre que el número de multiplicaciones complejas requeridas para evaluar directamente la ecuación (P5.54-2), para $k = 0, 1, \ldots, N-1$, es N^2. Suponga que $x[n]$ es compleja y que los valores requeridos de W_N^{nk} ya han sido calculados y almacenados en una tabla. Por simplicidad, *no* explote el hecho de que, para ciertos valores de n y de k, W_N^{nk} es igual a ± 1 o a $\pm j$ y, por lo tanto, estrictamente hablando, no requiere de una multiplicación compleja total.

(b) Suponga que N es par. Sea que $f[n] = x[2n]$ representa las muestras pares indexadas de $x[n]$, y sea que $g[n] = x[2n+1]$ representa las muestras impares indexadas.

(i) Demuestre que $f[n]$ y $g[n]$ son cero fuera del intervalo $0 \leq n \leq (N/2) - 1$.

(ii) Demuestre que la DFT del punto N $\tilde{X}[k]$ de $x[n]$ se puede expresar como

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n]W_{N/2}^{nk} + \frac{1}{N}W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n]W_{N/2}^{nk} \\ &= \frac{1}{2}\tilde{F}[k] + \frac{1}{2}W_N^k\,\tilde{G}[k], \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1,\end{aligned} \tag{P5.54-3}$$

donde

$$\tilde{F}[k] = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n]W_{N/2}^{nk},$$

$$\tilde{G}[k] = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n]W_{N/2}^{nk}.$$

(iii) Demuestre que, para toda k,

$$\tilde{F}\left[k+\frac{N}{2}\right]=\tilde{F}[k],$$

$$\tilde{G}\left[k+\frac{N}{2}\right]=\tilde{G}[k].$$

Observe que $\tilde{F}[k], k=0,1,\ldots,(N/2)-1$ y $\tilde{G}[k], k=0,1,\ldots,(N/2)-1$ son las DFT del punto $(N/2)$ de $f[n]$ y $g[n]$, respectivamente. Por lo tanto, la ecuación (P5.54-3) indica que la DFT de longitud N de $x[n]$ se puede calcular en términos de las dos DFT de longitud $N/2$.

(iv) Determine el número de multiplicaciones complejas requeridas para calcular $\tilde{X}[k], k=0,1,2,\ldots,N-1$, a partir de la ecuación (P5.54-3), calculando primero $\tilde{F}[k]$ y $\tilde{G}[k]$. [Haga las mismas suposiciones acerca de las multiplicaciones que hizo en la parte (a), y en la ecuación (P5.54-3) ignore las multiplicaciones por la cantidad 1/2.]

(c) Si al igual que N, $N/2$ también es par, entonces $f[n]$ y $g[n]$ pueden descomponerse en secuencias de muestras indexadas pares e impares y, por lo tanto, sus DFT se pueden calcular usando el mismo proceso que en la ecuación (P5.54-3). Además, si N es una potencia entera de 2, podemos continuar iterando este proceso, logrando así una disminución significativa en el tiempo de cálculo. Usando este procedimiento, ¿aproximadamente cuántas multiplicaciones complejas se requieren para $N=32, 256, 1{,}024$ y $4{,}096$? Compare esto con el método directo de cálculo en la parte (a).

5.55. En este problema presentamos el concepto de *selección de ventana*, el cual es de gran importancia tanto en el diseño de sistemas LTI como en el análisis espectral de señales. La selección de ventana es la operación de tomar una señal $x[n]$ y multiplicarla por una *señal de ventana* $w[n]$ de duración finita. Esto es,

$$p[n]=x[n]w[n].$$

Observe que $p[n]$ también es de duración finita.

La importancia de la selección de ventana en el análisis espectral radica en el hecho de que en numerosas aplicaciones uno desea calcular la transformada de Fourier de una señal que ya ha sido medida. Puesto que en la práctica podemos medir una señal $x[n]$ sólo sobre un intervalo de tiempo finito (la *ventana de tiempo*), la señal real disponible para el análisis espectral es

$$p[n]=\begin{cases}x[n], & -M\le n\le M\\ 0, & \text{con otro valor}\end{cases},$$

donde $-M\le n\le M$ es la ventana de tiempo. Por lo tanto,

$$p[n]=x[n]w[n],$$

donde $w[n]$ es la *ventana rectangular*; esto es,

$$w[n]=\begin{cases}1, & -M\le n\le M\\ 0, & \text{con otro valor}\end{cases}. \qquad \text{(P5.55-1)}$$

La selección de ventana también juega un papel en el diseño de los sistemas LTI. En forma específica, por diversas razones (tales como la utilidad potencial del algo-

ritmo de la FFT; vea el problema 5.54), a menudo es ventajoso diseñar un sistema que tenga una respuesta al impulso de duración finita para lograr algún objetivo deseado de procesamiento de señal. Es decir, frecuentemente empezamos con una respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ deseada, cuya transformada inversa $h[n]$ es una respuesta al impulso de duración infinita (o al menos excesivamente larga). Entonces, lo que se requiere es la construcción de una respuesta al impulso $g[n]$ de duración finita cuya transformada $G(e^{j\omega})$ se aproxime adecuadamente a $H(e^{j\omega})$. Una aproximación general para seleccionar $g[n]$ es encontrar una función de ventana $w[n]$ tal que la transformada de $h[n]w[n]$ cumpla con las especificaciones deseadas para $G(e^{j\omega})$.

Claramente, la selección de ventana en una señal tiene un efecto en el espectro resultante. En este problema ilustraremos dicho efecto.

(a) Para un mejor entendimiento del efecto mencionado, considere el efecto de la selección de ventana en la siguiente señal:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]$$

usando la señal de ventana rectangular dada en la ecuación (P5.55-1).

(i) ¿Cuál es $X(e^{j\omega})$?

(ii) Dibuje la transformada de $p[n] = x[n]w[n]$ cuando $M = 1$.

(iii) Haga lo mismo para $M = 10$.

(b) A continuación considere la siguiente señal $x[n]$ cuya transformada de Fourier está especificada por

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/4 \\ 0, & \pi/4 < |\omega| \leq \pi \end{cases}.$$

Sea $p[n] = x[n]w[n]$, donde $w[n]$ es la ventana rectangular de la ecuación (P5.55-1). Bosqueje $P(e^{j\omega})$ para $M = 4, 8$ y 16.

(c) Uno de los problemas con el uso de una ventana rectangular es que introduce rizos en la transformada $P(e^{j\omega})$. (De hecho, esto se encuentra directamente relacionado con el fenómeno de Gibbs.) Por esta razón, han sido desarrolladas una gran variedad de otras señales de ventana. Estas señales son piramidales, esto es, van de 0 a 1 de manera más gradual que la transición abrupta de la ventana rectangular. El resultado es una reducción en la *amplitud* de los rizos en $P(e^{j\omega})$, a costa de añadir una poca de distorsión en términos de un suavizamiento adicional de $X(e^{j\omega})$.

Para ilustrar los puntos mencionados anteriormente, considere la señal $x[n]$ descrita en la parte (b), y sea $p[n] = x[n]w[n]$, donde $w[n]$ es la *ventana triangular* o *de Bartlett*; es decir,

$$w[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{M+1}, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Dibuje en forma general la transformada de Fourier de $p[n] = x[n]w[n]$ para $M = 4, 8$ y 16. [*Sugerencia:* Observe que la señal triangular se puede obtener como una convolución de una señal rectangular consigo misma. Este hecho permite obtener una expresión conveniente para $W(e^{j\omega})$.]

(d) Sea $p[n] = x[n]w[n]$ donde $w[n]$ es una señal coseno elevada conocida como la *ventana de Hanning*; esto es,

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 + \cos(\pi n/M)], & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Dibuje en forma general $P(e^{j\omega})$ para $M = 4, 8$ y 16.

5.56. Sea $x[m, n]$ una señal que es función de dos variables independientes discretas m y n. En analogía con la técnica de una dimensión y con el caso continuo tratado en el problema 4.53, podemos definir la transformada de Fourier bidimensional de $x[m, n]$ como

$$X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m, n]e^{-j(\omega_1 m + \omega_2 n)}. \qquad \text{(P5.56-1)}$$

(a) Demuestre que la ecuación (P5.56-1) se puede calcular como dos transformadas de Fourier unidimensionales sucesivas, primero en m, considerando a n fija, y después en n. Use este resultado para determinar una expresión para $x[m, n]$ en términos de $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$.

(b) Suponga que

$$x[m, n] = a[m]b[n],$$

donde $a[m]$ y $b[n]$ son cada una funciones de sólo una variable independiente. Sea que $A(e^{j\omega})$ y $B(e^{j\omega})$ denotan las transformadas de Fourier de $a[m]$ y $b[n]$, respectivamente. Exprese $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ en términos de $A(e^{j\omega})$ y $B(e^{j\omega})$.

(c) Determine las transformadas bidimensionales de Fourier de las siguientes señales:

(i) $x[m, n] = \delta[m-1]\delta[n+4]$

(ii) $x[m, n] = (\frac{1}{2})^{n-m}u[n-2]u[-m]$

(iii) $x[m, n] = (\frac{1}{2})^n \cos(2\pi m/3)u[n]$

(iv) $x[m, n] = \begin{cases} 1, & -2 < m < 2 \text{ y } -4 < n < 4 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$

(v) $x[m, n] = \begin{cases} 1, & -2 + n < m < 2 + n \text{ y } -4 < n < 4 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$

(vi) $x[m, n] = \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{2\pi m}{5}\right) \right.$

(d) Determine la señal $x[m, n]$ cuya transformada de Fourier es

$$X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \begin{cases} 1, & 0 < |\omega_1| \leq \pi/4 \text{ y } 0 < |\omega_2| \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/4 < |\omega_1| < \pi \text{ o } \pi/2 < |\omega_2| < \pi \end{cases}.$$

(e) Sean $x[m, n]$ y $h[m, n]$ dos señales cuyas transformadas bidimensionales de Fourier están indicadas como $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ y $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$, respectivamente. Determine las transformadas de las siguientes señales en términos de $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ y $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$:

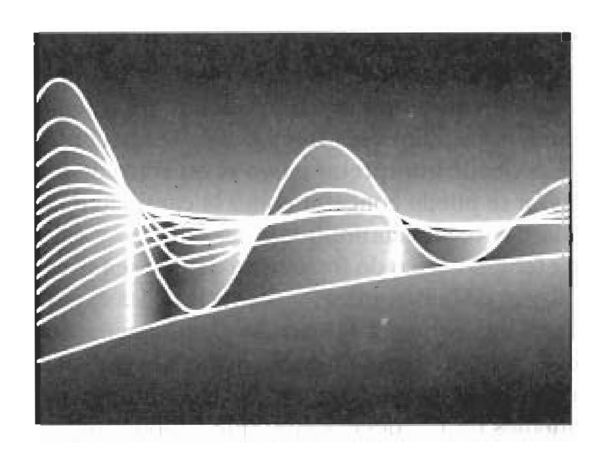
(i) $x[m, n]e^{jW_1 m}e^{jW_2 n}$

(ii) $y[m, n] = \begin{cases} x[k, r], & \text{si } m = 2k \text{ y } n = 2r \\ 0, & \text{si } m \text{ no es un múltiplo de 2 o } n \text{ no es un múltiplo de 3} \end{cases}$

(iii) $y[m, n] = x[m, n]h[m, n]$

6

CARACTERIZACIÓN EN TIEMPO Y FRECUENCIA DE SEÑALES Y SISTEMAS



6.0 INTRODUCCIÓN

La caracterización en el dominio de la frecuencia de un sistema LTI en términos de su respuesta en frecuencia, representa una alternativa a la caracterización en el dominio del tiempo que se logra mediante la convolución. Al analizar los sistemas LTI, a menudo resulta particularmente conveniente utilizar el dominio de la frecuencia debido a que las ecuaciones diferenciales y de diferencias, así como las operaciones de convolución en el dominio del tiempo, se convierten en operaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia. Además, conceptos tales como el filtrado selectivo en frecuencia se visualizan de una manera rápida y sencilla en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, en el diseño de sistemas surgen consideraciones tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, como se analizó brevemente en los ejemplos 4.18 y 5.12, y como ilustraremos con más detalle en este capítulo, puede ser indeseable un comportamiento oscilatorio significativo en la respuesta al impulso de un filtro selectivo en frecuencia, y en consecuencia podríamos desear sacrificar el nivel de selectividad en frecuencia de un filtro con el fin de alcanzar las tolerancias requeridas en el comportamiento de la respuesta al impulso. En la práctica, situaciones como ésta son la regla, más que la excepción, ya que en la mayoría de las aplicaciones nos gustaría especificar o restringir ciertas características de un sistema tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia, lo cual a menudo da lugar a requerimientos que entran en conflicto. Por lo tanto, en el diseño y análisis de sistemas es importante relacionar las características y compromisos en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia. La introducción a estos problemas y sus relaciones es la parte fundamental del capítulo.

6.1 REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En general la transformada de Fourier es compleja y, como hemos analizado, se puede representar en términos de sus componentes real e imaginaria o en términos de su magnitud y fase.

La representación de magnitud-fase de la transformada continua de Fourier $X(j\omega)$ es

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\sphericalangle X(j\omega)}. \tag{6.1}$$

De manera similar, la representación de magnitud-fase de la transformada de Fourier de tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ es

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\sphericalangle X(e^{j\omega})}. \tag{6.2}$$

En el siguiente análisis, nos concentraremos casi por completo en el caso continuo para describir e ilustrar varios puntos relacionados con las representaciones de magnitud-fase. Los puntos esenciales se aplican de igual forma al caso discreto.

A partir de la ecuación de síntesis (4.8) de la transformada de Fourier, podemos considerar a $X(j\omega)$ como una descomposición de la señal $x(t)$ en una "suma" de exponenciales complejas a diferentes frecuencias. De hecho, como analizamos en la sección 4.3.7, $|X(j\omega)|^2$ se puede interpretar como el espectro de densidad de energía de $x(t)$. Esto es, $|X(j\omega)|^2 d\omega/2\pi$ se puede concebir como la cantidad de energía en la señal $x(t)$ que cae sobre la banda de frecuencia infinitesimal entre ω y $\omega + d\omega$. Así, la magnitud $|X(j\omega)|$ describe el contenido básico de frecuencia de una señal, es decir, $|X(j\omega)|$ nos proporciona información acerca de las magnitudes relativas de las exponenciales complejas que forman a $x(t)$. Por ejemplo, si $|X(j\omega)| = 0$ fuera de una pequeña banda de frecuencias centradas en cero, entonces $x(t)$ presentará sólo oscilaciones de relativamente baja frecuencia.

Por otro lado, el ángulo de fase $\sphericalangle X(j\omega)$, no afecta las amplitudes de las componentes individuales de frecuencia, sino que proporciona información concerniente a las fases relativas de dichas exponenciales. Las relaciones de fase capturadas por $\sphericalangle X(j\omega)$ tienen un efecto significativo sobre la naturaleza de la señal $x(t)$ y por consiguiente contienen una cantidad sustancial de información acerca de la señal. En particular, dependiendo de cuál sea esta función de fase, podemos obtener señales con apariencia muy diferente, aun si la función de magnitud permanece sin cambio. Por ejemplo, considere de nuevo el ejemplo ilustrado en la figura 3.3. En este caso, un barco se encuentra con la superposición de tres trenes de onda, cada uno de los cuales se puede modelar como una señal senoidal. Si las magnitudes para estas senoides fueran fijas, la amplitud de su suma puede ser o muy pequeña o muy grande, dependiendo de las fases relativas. Por lo tanto, las implicaciones de la fase para el barco son bastante significativas. Para ilustrar con otro ejemplo el efecto de la fase, considere la señal

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t + \phi_1) + \cos(4\pi t + \phi_2) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t + \phi_3). \tag{6.3}$$

En la figura 3.4 hemos representado $x(t)$ para el caso cuando $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$. En la figura 6.1 también ilustramos $x(t)$ para este caso y para otros valores de la fase de las componentes individuales. Como esta figura demuestra, las señales resultantes pueden diferir de manera significativa para diferentes fases relativas.

En general, los cambios en la función de fase de $X(j\omega)$ conducen a cambios en las características del dominio del tiempo de la señal $x(t)$. En algunos casos la distorsión de fase puede ser importante, mientras que en otros puede no ser así. Por ejemplo, una propiedad bien conocida del sistema auditivo es una relativa insensibilidad a la fase. Específicamente, si la transformada de Fourier de un sonido hablado (como una vocal) se somete a una distorsión de manera que cambie la fase pero no la magnitud, el efecto que se percibe puede ser insignificante, aunque la forma de onda en el dominio del tiempo pueda parecer considerablemente diferente. Si bien las distorsiones moderadas de fase como las que afectan a los sonidos individuales no producen una pérdida de la inte-

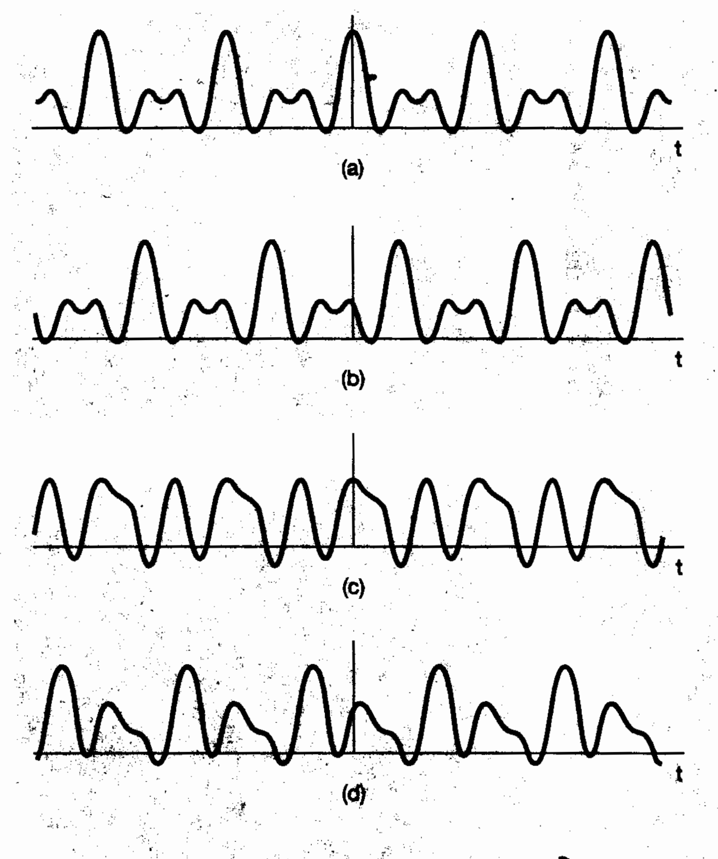


Figura 6.1 La señal $x(t)$ dada en la ecuación (6.3) para varias selecciones de los ángulos de fase ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3: (a) $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$; (b) $\phi_1 = 4$ rad, $\phi_2 = 8$ rad, $\phi_3 = 12$ rad; (c) $\phi_1 = 6$ rad, $\phi_2 = -2.7$ rad, $\phi_3 = 0.93$ rad; (d) $\phi_1 = 1.2$ rad, $\phi_2 = 4.1$ rad, $\phi_3 = -7.02$ rad.

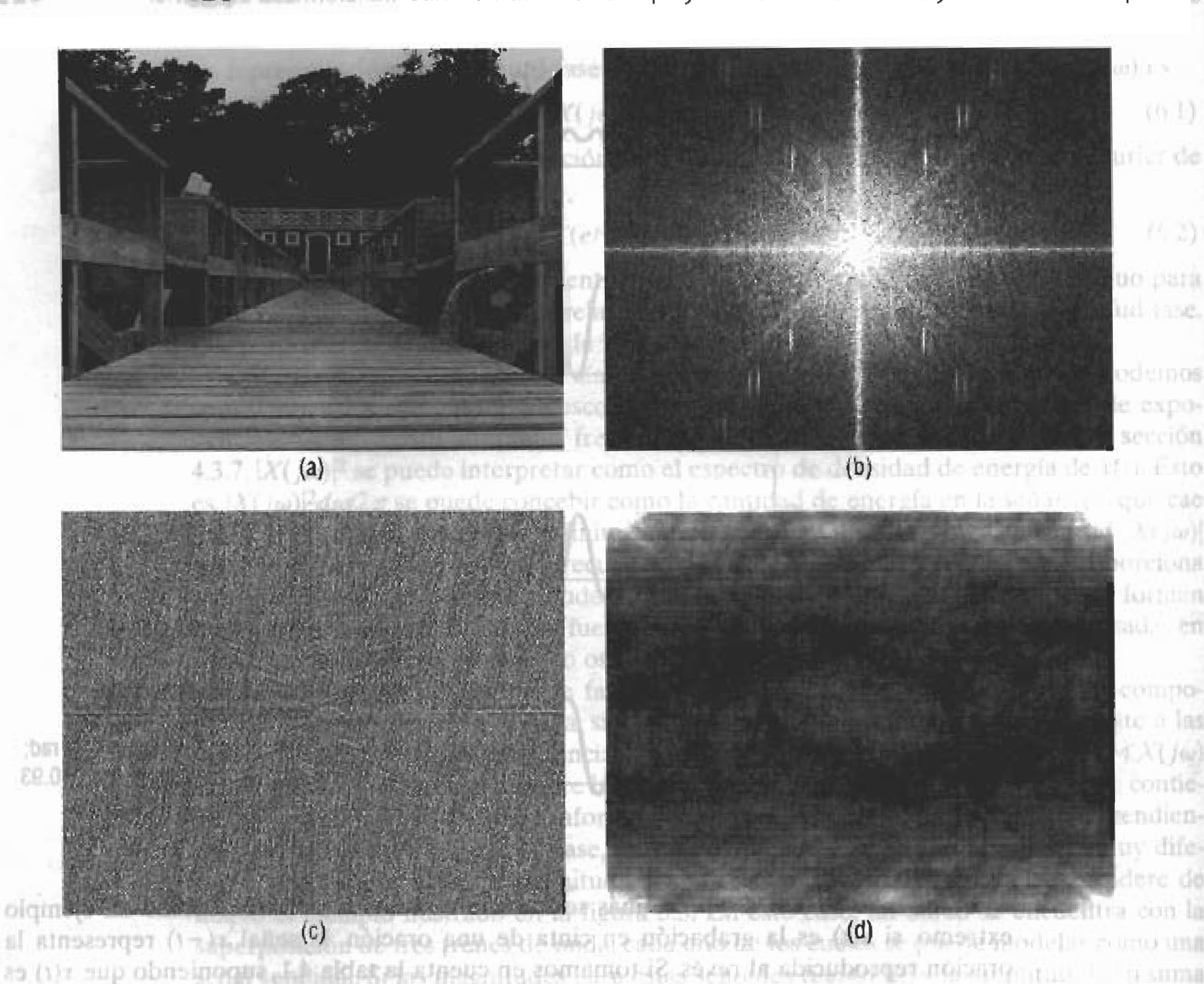
ligibilidad, distorsiones de fase más severas en el habla sí lo hacen. Como un ejemplo extremo, si $x(t)$ es la grabación en cinta de una oración, la señal $x(-t)$ representa la oración reproducida al revés. Si tomamos en cuenta la tabla 4.1, suponiendo que $x(t)$ es de valor real, el efecto correspondiente en el dominio de la frecuencia consiste en reemplazar la fase de la transformada de Fourier con su negativo:

$$\mathfrak{F}\{x(-t)\} = X(-j\omega) = |X(j\omega)|e^{-j\sphericalangle X(j\omega)}.$$

Esto es, el espectro de una oración reproducida en sentido inverso tiene la misma función de magnitud que el espectro de la oración original y difiere de ésta sólo en fase. Resulta claro que este cambio de fase tiene un impacto significativo en la inteligibilidad de la grabación.

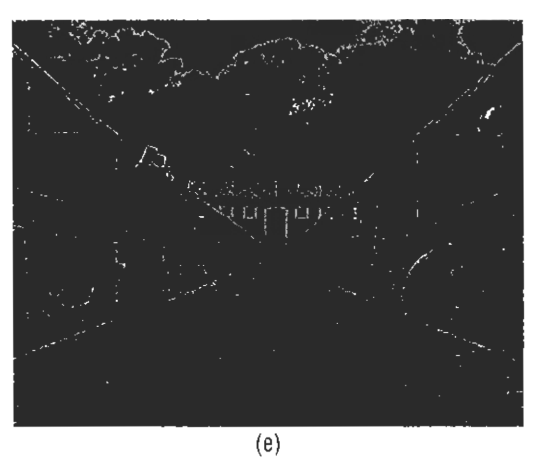
Podemos encontrar un segundo ejemplo que ilustra el efecto y la importancia de la fase en el examen de imágenes. Como analizamos brevemente en el capítulo 3, una foto en blanco y negro puede considerarse como una señal $x(t_1, t_2)$, donde t_1 denota la coordenada horizontal de un punto en la foto, t_2 la coordenada vertical y $x(t_1, t_2)$ la brillantez de la imagen en el punto (t_1, t_2). La transformada de Fourier $X(j\omega_1, j\omega_2)$ de la imagen representa una descomposición de la misma en componentes exponenciales complejas de la forma $e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2}$ que capturan las variaciones espaciales de $x(t_1, t_2)$ a diferentes frecuencias en cada una de las dos direcciones de las coordenadas. En los problemas 4.53 y 5.56 se abordan varios aspectos elementales del análisis bidimensional de Fourier.

Al ver una fotografía, parte de la información visual más importante está contenida en los bordes y en las regiones de alto contraste. Intuitivamente, las regiones de máxima y mínima intensidad en una fotografía son los lugares en los cuales las exponen-

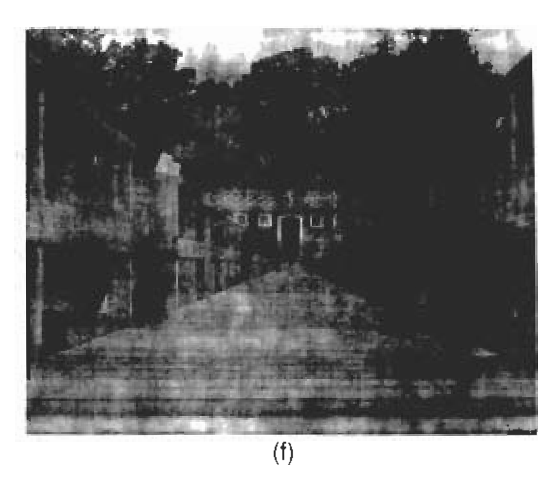


(a) (b) (c) (d)

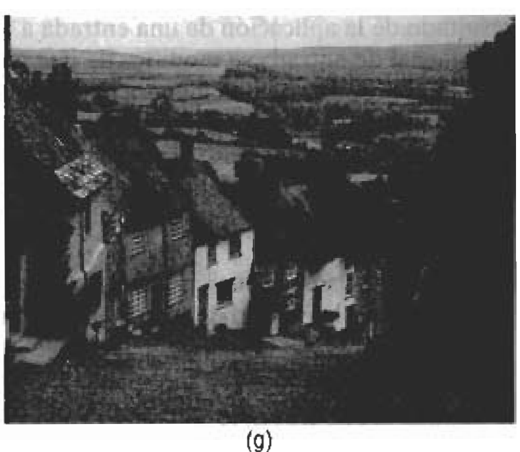
ciales complejas a diferentes frecuencias están en fase. Por lo tanto, parece razonable esperar que la fase de la transformada de Fourier de una imagen contenga mucha información de la propia imagen y, en particular, la fase debería capturar la información de los bordes. Para justificar esta expectativa, en la figura 6.2(a) hemos repetido la imagen mostrada en la figura 1.4. En la figura 6.2(b) hemos representado la magnitud de la transformada bidimensional de Fourier de la imagen en la figura 6.2(a), pero en esta ocasión el eje horizontal es ω_1, el eje vertical es ω_2 y la brillantez en el punto (ω_1, ω_2) es proporcional a la magnitud de la transformada $X(j\omega_1, j\omega_2)$ de la imagen en la figura 6.2(a). De manera similar, la fase de esta transformada se ilustra en la figura 6.2(c). La figura 6.2(d) es el resultado de fijar la fase [figura 6.2(c)] de $X(j\omega_1, j\omega_2)$ en cero (sin cambiar su magnitud) y de invertir la transformación. En la figura 6.2(e) la magnitud de $X(j\omega_1, j\omega_2)$ se fijó en uno, pero la fase se mantuvo sin cambio de como estaba en la figura 6.2(c). Por último, en la figura 6.2(f) mostramos la imagen que obtuvimos al transformar en forma inversa la función usando la fase de la figura 6.2(c) y la magnitud de la transformada de una imagen *completamente diferente*, ¡la fotografía mostrada en la figura 6.2(g)! Estas figuras ilustran con claridad la importancia de la fase en la representación de imágenes.



(e)



(f)



(g)

Figura 6.2 (a) La imagen mostrada en la figura 1.4; (b) la magnitud de la transformada bidimensional de Fourier de (a); (c) la fase de la transformda de Fourier de (a); (d) imagen cuya transformada de Fourier tiene magnitud como en (b) y fase igual a cero; (e) imagen cuya transformada de Fourier tiene magnitud igual a 1 y fase como en (c); (f) imagen cuya transformada de Fourier tiene fase como en (c) y magnitud igual a la de la transformada de la imagen mostrada en (g).

6.2 REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

A partir de la propiedad de convolución de las transformadas continuas de Fourier, la transformada $Y(j\omega)$ de la salida de un sistema LTI está relacionada con la transformada $X(j\omega)$ de la entrada al sistema mediante la ecuación

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega),$$

donde $H(j\omega)$ es la respuesta en frecuencia del sistema, es decir, la transformada de Fourier de la respuesta del sistema al impulso. De manera similar, en el caso discreto, las transformadas de Fourier de la entrada $X(e^{j\omega})$ y la salida $Y(e^{j\omega})$ de un sistema LTI con respuesta a la frecuencia $H(e^{j\omega})$ están relacionadas por

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}). \tag{6.4}$$

Por lo tanto, el efecto que un sistema LTI ejerce sobre la entrada consiste en cambiar la amplitud compleja de cada una de las componentes de frecuencia de la señal. Al examinar este efecto en términos de la representación magnitud-fase, podemos entender

la naturaleza del efecto con más detalle. De manera específica, en el caso continuo,

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)| \tag{6.5}$$

y

$$\sphericalangle Y(j\omega) = \sphericalangle H(j\omega) + \sphericalangle X(j\omega) \tag{6.6}$$

y se cumplen las relaciones exactamente análogas para el caso discreto. Gracias a la ecuación (6.5), vemos que el efecto que tiene un sistema LTI sobre la magnitud de la transformada de Fourier del sistema consiste en escalarlo por la magnitud de la respuesta en frecuencia. Por esta razón, $|H(j\omega)|$ (o $|H(e^{j\omega})|$) se conoce comúnmente como la *ganancia* del sistema. Asimismo, de la ecuación (6.6) vemos que la fase de la entrada $\sphericalangle X(j\omega)$ se modifica por el sistema LTI al adicionar la fase de $\sphericalangle H(j\omega)$ a éste, y $\sphericalangle H(j\omega)$ se le conoce en general como el *desplazamiento de fase* del sistema, el cual puede cambiar las relaciones relativas de fase entre las componentes de la entrada, lo cual resulta posiblemente en modificaciones significativas de las características de la entrada en el dominio del tiempo aun cuando la ganancia del sistema sea constante para todas las frecuencias. Los cambios en la magnitud y fase que son resultado de la aplicación de una entrada a un sistema LTI pueden ser los que se desean, si la señal de entrada se modifica de una manera útil, o bien pueden ser indeseables, si la entrada se cambia de una manera inadecuada. En el último caso, los efectos en las ecuaciones (6.5) y (6.6) se conocen como *distorsiones* de la magnitud y la fase. En las siguientes secciones describiremos varios conceptos y herramientas que nos permitirán entender estos efectos con más detalle.

6.2.1 Fases lineal y no lineal

Cuando el desplazamiento de fase a la frecuencia ω es una función lineal de ω, hay una interpretación particularmente directa del efecto en el dominio del tiempo. Considere el sistema LTI continuo con respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}, \tag{6.7}$$

de manera que el sistema tiene ganancia unitaria y fase lineal; es decir,

$$|H(j\omega)| = 1, \qquad \sphericalangle H(j\omega) = -\omega t_0. \tag{6.8}$$

Como se mostró en el ejemplo 4.15, el sistema con esta característica de respuesta en frecuencia produce una salida que es simplemente un desplazamiento en el tiempo de la entrada, es decir,

$$y(t) = x(t - t_0). \tag{6.9}$$

En el caso discreto, el efecto de la fase lineal es similar al del caso continuo cuando la pendiente de la fase lineal es un entero. En concreto, del ejemplo 5.11 sabemos que el sistema LTI con respuesta en frecuencia $e^{-j\omega n_0}$ con función de fase lineal $-\omega n_0$ produce una salida que es un desplazamiento simple de la entrada, es decir, $y[n] = x[n - n_0]$. De esta forma, un desplazamiento de fase lineal con una pendiente de valor *entero* corresponde a un desplazamiento de $x[n]$ por un número entero de muestras. Cuando la pendiente de la fase no es un entero, el efecto en el dominio del tiempo es algo más complejo y se analiza en el capítulo 7, sección 7.5. De manera informal, el efecto es un desplazamiento en el tiempo de la envolvente de los valores de la secuencia, pero los valores mismos pueden cambiar.

Si bien los desplazamientos de fase lineal conducen a una comprensión y visualización sencilla de los cambios en una señal, si una señal de entrada se somete a un desplazamiento de fase que es una función no lineal de ω, entonces las componentes exponenciales complejas de la entrada a diferentes frecuencias serán desplazadas de una manera tal que dé como resultado en un cambio en sus fases relativas. Cuando estas exponenciales se sobreponen, obtenemos una señal que puede parecer considerablemente diferente a la señal del entrada. Esto se ilustra en la figura 6.3 en el caso continuo.

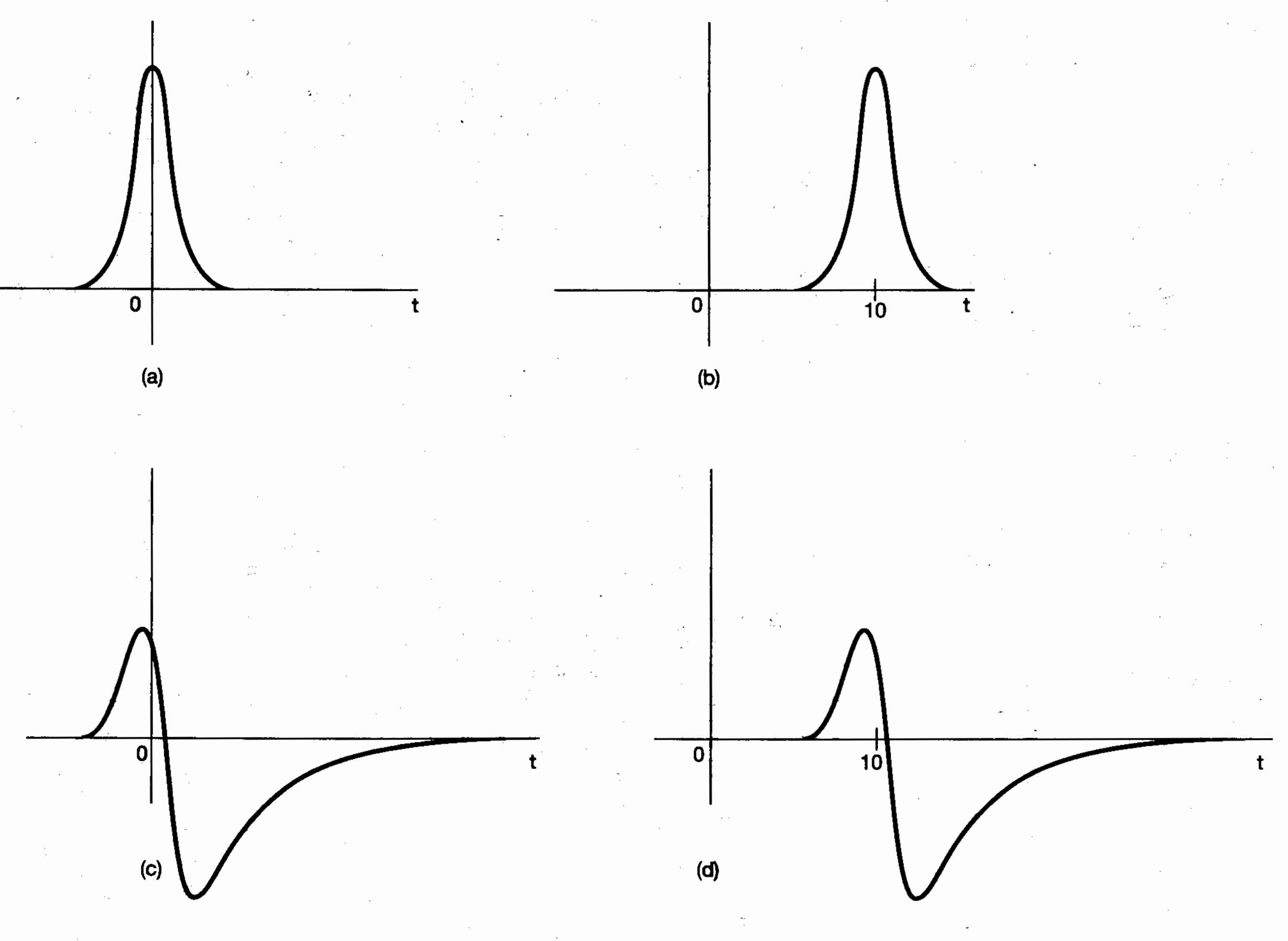


Figura 6.3 (a) Señal continua que se aplica como la entrada a varios sistemas para los cuales la respuesta en frecuencia tiene magnitud unitaria; (b) la respuesta de un sistema con fase lineal; (c) la respuesta de un sistema con fase no lineal; y (d) la respuesta para un sistema con fase igual a la fase no lineal del sistema en la parte (c) más un término lineal.

En la figura 6.3(a) hemos representado una señal que se aplica como la entrada a tres sistemas diferentes. La figura 6.3(b) muestra la salida cuando la señal se aplica como entrada a un sistema con respuesta en frecuencia $H_1(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$, lo cual provoca una salida que es igual a la entrada pero retrasada t_0 segundos. En la figura 6.3(c) presentamos la salida cuando la señal se aplica a un sistema con ganancia unitaria y función de fase no lineal; es decir,

$$H_2(e^{j\omega}) = e^{j\sphericalangle H_2(j\omega)}, \tag{6.10}$$

donde $\sphericalangle H_2(j\omega)$ es una función no lineal de ω. La figura 6.3(d) muestra la salida de otro sistema con fase no lineal. En este caso, la respuesta en frecuencia correspondiente tiene un desplazamiento de fase que se obtiene al sumar un término de fase lineal con $\sphericalangle H_2(j\omega)$, es decir,

$$H_3(j\omega) = H_2(j\omega)e^{-j\omega t_0}. \tag{6.11}$$

Por lo tanto, la salida en la figura 6.3(d) se puede considerar como la respuesta de una conexión en cascada del sistema $H_2(j\omega)$ seguido por un desplazamiento de tiempo, de manera que las formas de onda en las figuras 6.3(c) y (d) están relacionadas a través de un simple desplazamiento de tiempo.

En la figura 6.4 ilustramos el efecto de ambas fases, lineal y no lineal para el caso discreto. Una vez más, la señal en la figura 6.4(a) se aplica como entrada a tres diferentes sistemas LTI, todos con ganancia unitaria (es decir, $|H(e^{j\omega})| = 1$). Las demás señales de la figura 6.4 ilustran las correspondientes salidas. En el caso de la figura 6.4(b), el sistema tiene una característica de fase lineal con pendiente de valor entero de -5, de modo que la salida es igual a la entrada pero retrasada en 5 unidades. Los desplazamientos de fase para los sistemas asociados con las figuras 6.4(c) y (d) son no lineales, pero la diferencia entre estas dos funciones de fase es lineal con pendiente de valor entero, así que las señales en las figuras 6.4(c) y (d) están relacionadas por un desplazamiento en tiempo.

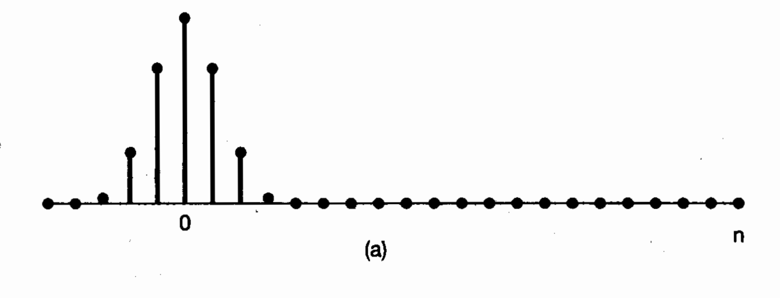
Observe que todos los sistemas examinados en los ejemplos ilustrados en las figuras 6.3 y 6.4 tienen ganancia unitaria, así que la magnitud de la transformada de Fourier de la entrada a cualquiera de estos sistemas pasa sin ser *alterada* por el sistema. Por esta razón, se conocen comúnmente como sistemas *pasa todo*. Las características de un sistema pasa todo se determinan por completo por sus características de desplazamiento de fase. Por supuesto, un sistema LTI más general $H(j\omega)$ o $H(e^{j\omega})$ proporciona forma a la magnitud a través de la ganancia $|H(j\omega)|$ o $|H(e^{j\omega})|$ como un desplazamiento de fase que puede o no ser lineal.

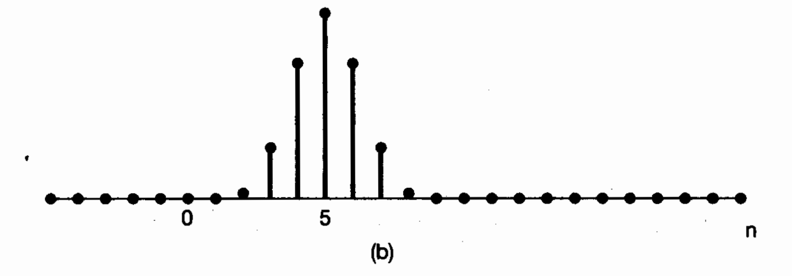
6.2.2 Retardo de grupo

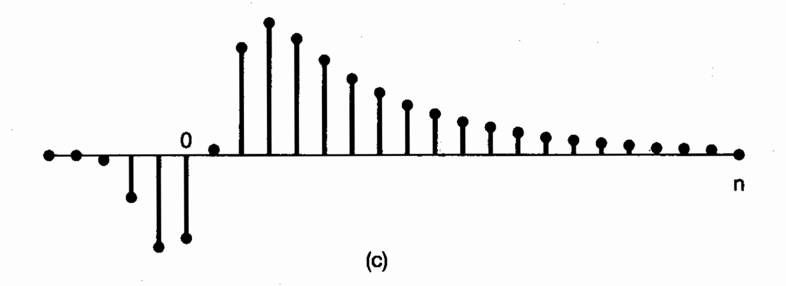
Como se analizó en la sección 6.2.1, los sistemas con características de fase lineal se pueden interpretar de forma en particular sencilla, como los desplazamientos en tiempo. De hecho, de las ecuaciones (6.8) y (6.9), la pendiente de la fase nos dice el tamaño del desplazamiento en el tiempo. Esto es, en el caso continuo, si $\sphericalangle H(j\omega) = -\omega t_0$, entonces el sistema imparte un desplazamiento de tiempo de $-t_0$ o, de manera equivalente, un *retardo* de t_0. De forma similar, en el caso discreto, $\sphericalangle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0$ corresponde a un retardo de n_0.

El concepto de retardo se puede extender de manera simple y natural a las características de fase no lineales. Suponga que deseamos examinar los efectos que tiene la fase de un sistema LTI continuo sobre una entrada de banda angosta, es decir, una entrada $x(t)$ cuya transformada de Fourier sea cero o demasiado pequeña fuera de una estrecha banda de frecuencias centrada en $\omega = \omega_0$. Dando por hecho que la banda es muy pequeña, podemos aproximar con exactitud la fase de este sistema en la banda a la aproximación lineal

$$\sphericalangle H(j\omega) \simeq -\phi - \omega\alpha, \tag{6.12}$$







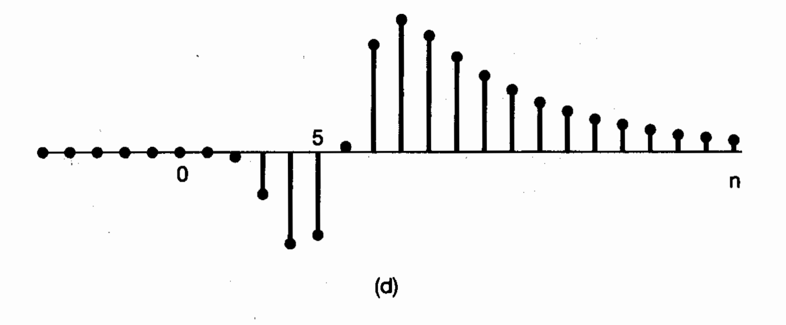


Figura 6.4 (a) Señal discreta que se aplica como entrada a varios sistemas para los cuales la respuesta en frecuencia tiene magnitud unitaria; (b) respuesta de un sistema con fase lineal con pendiente de -5; (c) respuesta de un sistema con fase no lineal; y (d) respuesta de un sistema cuya característica de fase es la de la parte (c) más un término de fase lineal con pendiente de valor entero.

de modo que

$$Y(j\omega) \simeq X(j\omega)|H(j\omega)|e^{-j\phi}e^{-j\omega\alpha}. \tag{6.13}$$

Así, el efecto aproximado del sistema en la transformada de Fourier de esta entrada de banda angosta consiste en la configuración de la magnitud correspondiente a $|H(j\omega)|$, la multiplicación por un factor complejo siempre constante $e^{-j\phi}$ y la multiplicación por un término de fase lineal $e^{-j\omega\alpha}$ correspondiente a un retardo de α segundos. Este retardo se conoce como *retardo de grupo* en $\omega = \omega_0$, ya que es el retardo común efectivo experimentado por la pequeña banda o grupo de frecuencias centradas en $\omega = \omega_0$.

El retardo de grupo a cada frecuencia es igual al negativo de la pendiente de la fase a dicha frecuencia; es decir, el retardo de grupo se define como

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\{\sphericalangle H(j\omega)\}. \tag{6.14}$$

Este concepto también se aplica de forma directa a los sistemas discretos. En el siguiente ejemplo ilustramos el efecto del retardo de grupo no constante en una señal.

Ejemplo 6.1

Considere la respuesta al impulso de un sistema pasa todo con un retardo de grupo que varía con la frecuencia. La respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ para nuestro ejemplo es el producto de tres factores, es decir,

$$H(j\omega) = \prod_{i=1}^{3} H_i(j\omega),$$

donde

$$H_i(j\omega) = \frac{1 + (j\omega/\omega_i)^2 - 2j\zeta_i(\omega/\omega_i)}{1 + (j\omega/\omega_i)^2 - 2j\zeta_i(\omega/\omega_i)}, \tag{6.15}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = 315 \text{ rad/seg y } \zeta_1 = 0.066, \\ \omega_2 = 943 \text{ rad/seg y } \zeta_2 = 0.033, \\ \omega_3 = 1888 \text{ rad/seg y } \zeta_3 = 0.058. \end{cases}$$

Con frecuencia es útil expresar las frecuencias ω_i medidas en radianes por segundo en términos de las frecuencias f_i medidas en Hertz, donde

$$\omega_1 = 2\pi f_i.$$

En este caso,

$$f_1 \simeq 50 \text{ Hz}$$
$$f_2 \simeq 150 \text{ Hz}$$
$$f_3 \simeq 300 \text{ Hz}.$$

Debido a que el numerador de cada factor $H_i(j\omega)$ es el conjugado complejo del denominador correspondiente, se desprende que $|H_i(j\omega)| = 1$. En consecuencia, tam-

bién podemos concluir que

$$|H(j\omega)| = 1.$$

La fase para cada $H_i(j\omega)$ se puede determinar a partir de la ecuación (6.15):

$$\sphericalangle H_i(j\omega) = -2 \arctan \left[\frac{2\zeta_i (\omega/\omega_i)}{1 - (\omega/\omega_i)^2} \right],$$

y

$$\sphericalangle H(j\omega) = \sum_{i=1}^{3} \sphericalangle H_i(j\omega).$$

Si restringimos los valores de $\sphericalangle H(j\omega)$ a que caigan entre $-\pi$ y π, obtenemos la función de *fase principal* (es decir, el módulo de fase 2π), como se muestra en la figura 6.5(a) donde hemos trazado la fase en función de la frecuencia medida en Hertz. Observe que esta función contiene discontinuidades de tamaño 2π en varias frecuencias, lo cual hace que la función de fase resulte no diferenciable en esos puntos. Sin embargo, la adición o sustracción de cualquier múltiplo entero de 2π al valor de la fase en cualquier frecuencia deja a la respuesta en frecuencia original sin cambio. Por lo tanto, sumando o restando adecuadamente tales múltiplos enteros de 2π desde varias porciones de la fase principal, obtenemos la *fase extendida* en la figura 6.5(b). El retardo de grupo como una función de la frecuencia puede ahora calcularse como

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\{\sphericalangle[H(j\omega)]\},$$

donde $\sphericalangle[H(j\omega)]$ representa la función de fase extendida correspondiente a $H(j\omega)$. En la figura 6.5(c) se muestra una gráfica de $\tau(\omega)$. Observe que las frecuencias cercanas a 50 Hz experimentan un retardo mayor que las frecuencias en la vecindad de 150 Hz o 300 Hz. El efecto de este retardo de grupo no constante también puede observarse de manera cualitativa en la respuesta del sistema LTI al impulso (véase la figura 6.5(d)). Recuerde que $\mathfrak{F}\{\delta(t)\} = 1$. Las componentes de frecuencia del impulso están todas alineadas en tiempo de tal forma que, combinadas, forman el impulso, el cual está, por supuesto, bien localizado en el tiempo. Ya que el sistema pasa todo tiene un retardo de grupo no constante, las diferentes frecuencias en la entrada están retrasadas en diferentes cantidades. Este fenómeno se conoce como *dispersión*. En el presente ejemplo, el mayor retardo de grupo ocurre a 50 Hz. En consecuencia, podríamos esperar que las últimas partes de la respuesta al impulso oscilaran a frecuencias más bajas, cercanas a 50 Hz. Esto resulta evidente en la figura 6.5(d).

Ejemplo 6.2

El retardo no constante de grupo está entre los factores considerados como importantes para la evaluación del desempeño de transmisión de las redes conmutadas de telecomunicaciones. En un estudio[1] que involucró diversas localidades de Estados Unidos, el Sistema AT&T/Bell reportó características de retardo de grupo para diversas categorías de llamadas de larga distancia. La figura 6.6 presenta algunos de los resultados de este estudio para dos clases de llamadas. En particular, lo que está trazado en cada curva en

[1]"Analog Transmission Performance on the Switched Telecommunications Network", por F. P. Duffy y T. W. Thatcher, Jr., en el *Bell System Technical Journal*, vol. 50, núm. 4, abril de 1971.

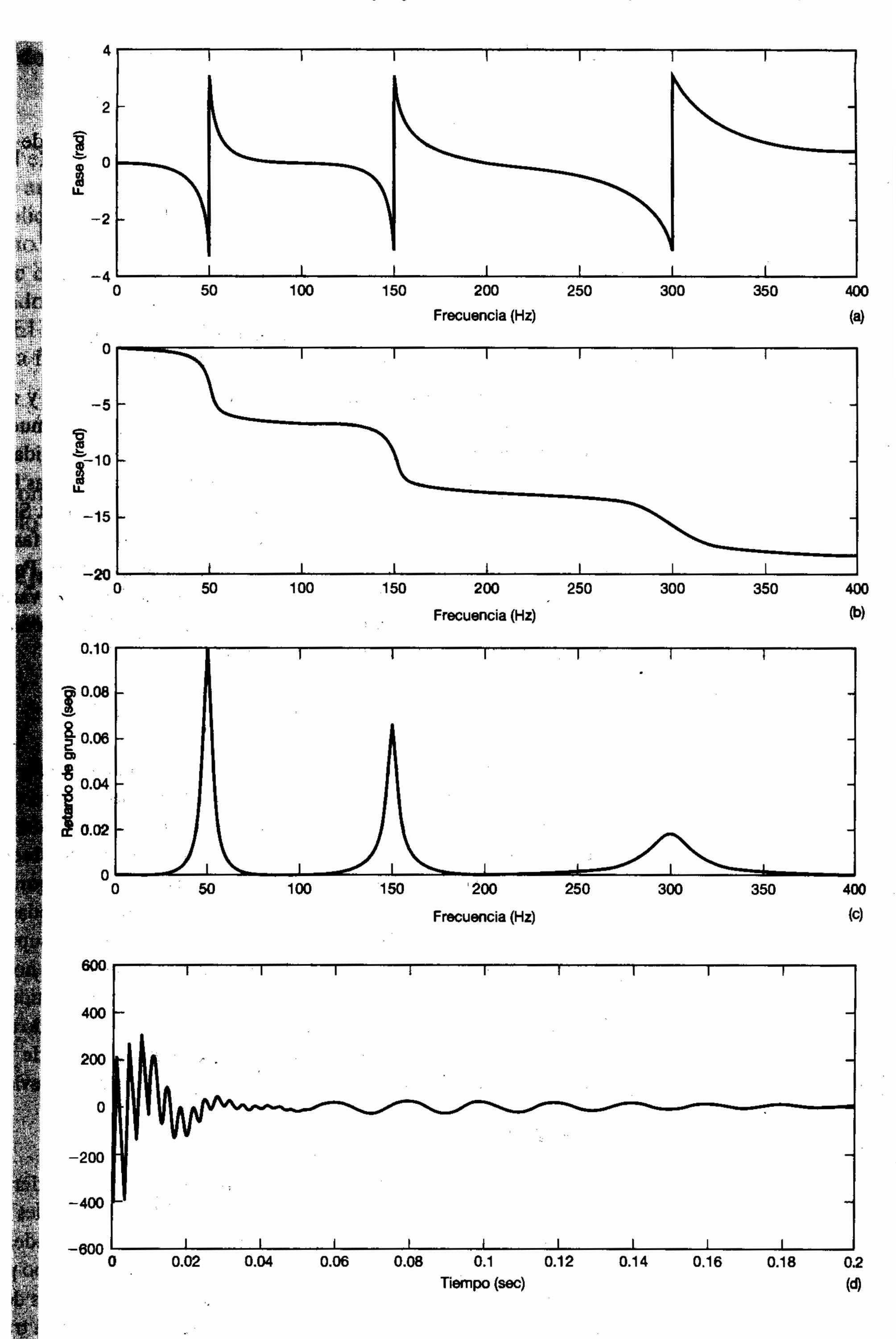


Figura 6.5 Fase, retardo de grupo y respuesta al impulso para el sistema pasa todo del ejemplo: (a) fase principal; (b) fase no extendida; (c) retardo de grupo; (d) respuesta al impulso. Cada una de estas cantidades está bosquejada contra la frecuencia en hertz.

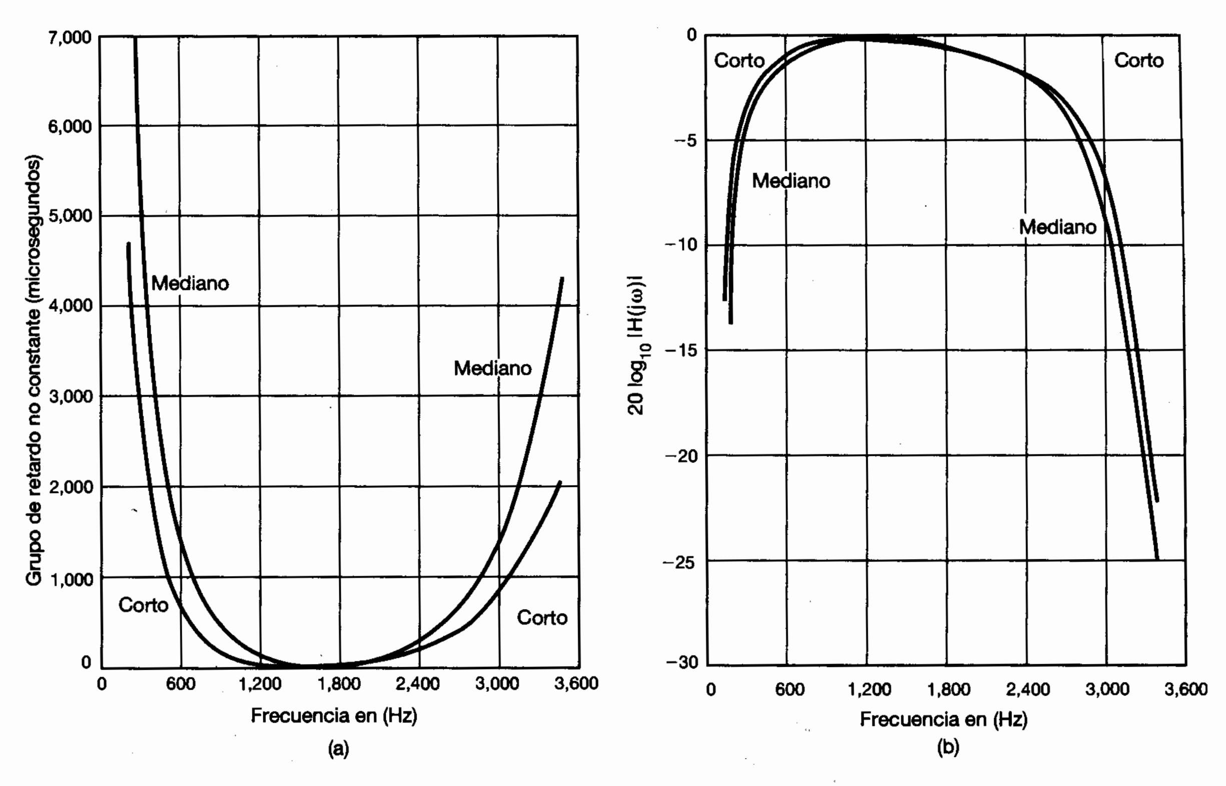


Figura 6.6 (a) La porción no constante del retardo de grupo; y (b) la magnitud de la respuesta en frecuencia, ambas funciones de la frecuencia para llamadas de larga distancia de corta y mediana distancia en redes de telecomunicaciones conmutadas [de Duffy y Thatcher]. Cada una de estas cantidades se traza en función de la frecuencia medida en hertz. También, como es común en la práctica, las magnitudes de las respuestas en frecuencia se trazan utilizando una escala logarítmica en unidades de *decibeles*. Esto es, lo que está trazado en (b) es $20 \log_{10} |H(j\omega)|$ para las respuestas en frecuencia correspondientes a las llamadas de larga distancia, de distancias corta y media. El uso de esta escala logarítmica para las magnitudes de la respuesta en frecuencia se analiza con detalle en la sección 6.2.3.

la figura 6.6(a) es la porción no constante del retardo de grupo para una categoría específica de llamadas de larga distancia. Esto es, para cada categoría, se ha sustraído del retardo de grupo un retardo constante común que corresponde al mínimo del retardo de grupo sobre todas las frecuencias, y la diferencia resultante está trazada en la figura 6.6(a). En consecuencia, cada curva en la figura 6.6(a) representa el retardo adicional (superior a este retardo constante común) que experimentan las componentes de frecuencia diferentes de las llamadas de larga distancia dentro de cada categoría. Las curvas marcadas como CORTA y MEDIA representan respectivamente los resultados para las llamadas de distancia corta (0−180 millas en línea aérea) y distancia media (180−725 millas en línea aérea). Podemos apreciar que el valor más bajo del retardo de grupo como una función de la frecuencia está a 1,700 Hz y se incrementa de manera monotónica conforme se aleja de ese valor en cualquiera de las dos direcciones.

Cuando las características de retardo de grupo ilustradas en la figura 6.6(a) se combinan con las características de la magnitud de la respuesta en frecuencia reportadas en el mismo estudio del Sistema AT&T/Bell y mostradas en la figura 6.6(b), obtenemos las respuestas al impulso mostradas en la figura 6.7. La respuesta al impulso en la figura 6.7(a) corresponde a la categoría de distancia corta. Las componentes de muy baja y

Tiempo (mseg)

(a)

Tiempo (mseg)

(b)

Figura 6.7 Respuestas al impulso asociadas con el retardo de grupo y las características de magnitud en la figura 6.6(a): (a) la respuesta al impulso correspondiente a la categoría de distancia corta de llamadas de larga distancia; (b) respuesta al impulso para la categoría de distancia media.



muy alta frecuencia de la respuesta ocurren primero que las componentes en el intervalo de frecuencia media. Esto es compatible con las características correspondientes de retardo de grupo en la figura 6.6(a). De manera similar, la figura 6.7(b) ilustra el mismo fenómeno para la respuesta al impulso correspondiente a llamadas de distancia media.

6.2.3 Magnitud logarítmica y diagramas de Bode

En la presentación gráfica de las transformadas de Fourier continua y de tiempo discreto y las respuestas en frecuencia de sistemas en forma polar, a menudo resulta conveniente usar una escala logarítmica para la magnitud de la transformada de Fourier. Una de las principales razones para hacerlo surge de las ecuaciones (6.5) y (6.6), las cuales relacionan la magnitud y la fase de la salida de un sistema LTI con aquellas de la entra-

da y la respuesta en frecuencia. Observe que la relación de fase es aditiva, en tanto que la relación de magnitud involucra el producto de $|H(j\omega)|$ y $|X(j\omega)|$. Por lo tanto, si las magnitudes de la transformada de Fourier se representan sobre una escala de amplitud logarítmica, la ecuación (6.5) adopta la forma de una relación aditiva, a saber,

$$\log|Y(j\omega)| = \log|H(j\omega)| + \log|X(j\omega)|, \tag{6.16}$$

con una expresión discreta exactamente análoga.

En consecuencia, si tenemos una gráfica de la magnitud logarítmica y la fase de la transformada de Fourier de la entrada y la respuesta en frecuencia de un sistema LTI, la transformada de Fourier de la salida se obtiene sumando las gráficas de magnitud logarítmica y sumando las gráficas de fase. De manera semejante, puesto que la respuesta en frecuencia de la conexión en cascada de sistemas LTI es el producto de las respuestas en frecuencia individuales, podemos obtener las gráficas de la magnitud logarítmica y la fase de la respuesta en frecuencia total de los sistemas en cascada sumando las gráficas correspondientes de cada uno de los sistemas. Además, graficar la magnitud de la transformada de Fourier a escala logarítmica permite que los detalles se puedan presentar sobre un intervalo dinámico más amplio. Por ejemplo, en una escala lineal, las características detalladas de la magnitud en la banda de supresión de un filtro selectivo en frecuencia con alta atenuación por lo general resultan no evidentes, mientras que sí lo son a una escala logarítmica.

En general, la escala de amplitud logarítmica específica que se utiliza se mide en unidades de 20 $\log_{10}$, conocida como *decibeles*[2] (y se abrevia dB). De esta manera, 0 dB corresponde a una respuesta en frecuencia con magnitud igual a 1, 20 dB equivale a una ganancia de 10, -20 dB corresponde a una atenuación de 0.1 y así sucesivamente. Además, resulta útil observar que 6 dB corresponde aproximadamente a una ganancia de 2.

Para sistemas continuos, también es común y útil usar una escala de frecuencia logarítmica. Las gráficas de $20\log_{10}|H(j\omega)|$ y $\sphericalangle H(j\omega)$ en función del $\log_{10}(\omega)$ se conocen como *diagramas de Bode*. Un diagrama de Bode típico se ilustra en la figura 6.8. Observe que, como se analizó en la sección 4.3.3, si $h(t)$ es real, entonces $|H(j\omega)|$ es una función par de ω y $\sphericalangle H(j\omega)$ es una función impar de ω. Debido a ello, las gráficas para valores negativos de ω son superfluas y se pueden obtener de manera inmediata a partir de las gráficas para valores positivos de ω. Esto, por supuesto, hace posible graficar las características de respuesta en frecuencia en función del $\log_{10}(\omega)$ para $\omega > 0$, como se hizo en la figura.

El uso de una escala de frecuencia logarítmica ofrece un gran número de ventajas en el caso continuo. Por ejemplo, permite representar un intervalo de frecuencias mucho

[2]El origen de esta selección particular de unidades y el término *decibeles* se pueden rastrear hasta la definición de razones de potencia en sistemas. Específicamente, ya que el cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier de una señal se puede interpretar como la energía por unidad de frecuencia, o potencia, en una señal, el cuadrado de la magnitud, $|H(j\omega)|^2$ o $|H(e^{j\omega})|^2$, de la respuesta en frecuencia de un sistema puede considerarse como la razón de potencias entre la entrada y la salida de un sistema LTI. En honor a Alexander Graham Bell, el inventor del teléfono, el término *bel* se introdujo para indicar un factor de 10 en una razón de potencias, y un *decibel* se usó para señalar un décimo de este factor en una escala logarítmica (de manera que la conexión en cascada de 10 sistemas con razones de potencia de 1 dB cada uno daría como resultado 1 bel de amplificación de potencia). Por lo tanto, $10\log_{10}|H(j\omega)|^2$ es el número de decibeles de amplificación de potencia para la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$, y esto a su vez equivale a $20\log_{10}|H(j\omega)|$ en amplificación de magnitud.

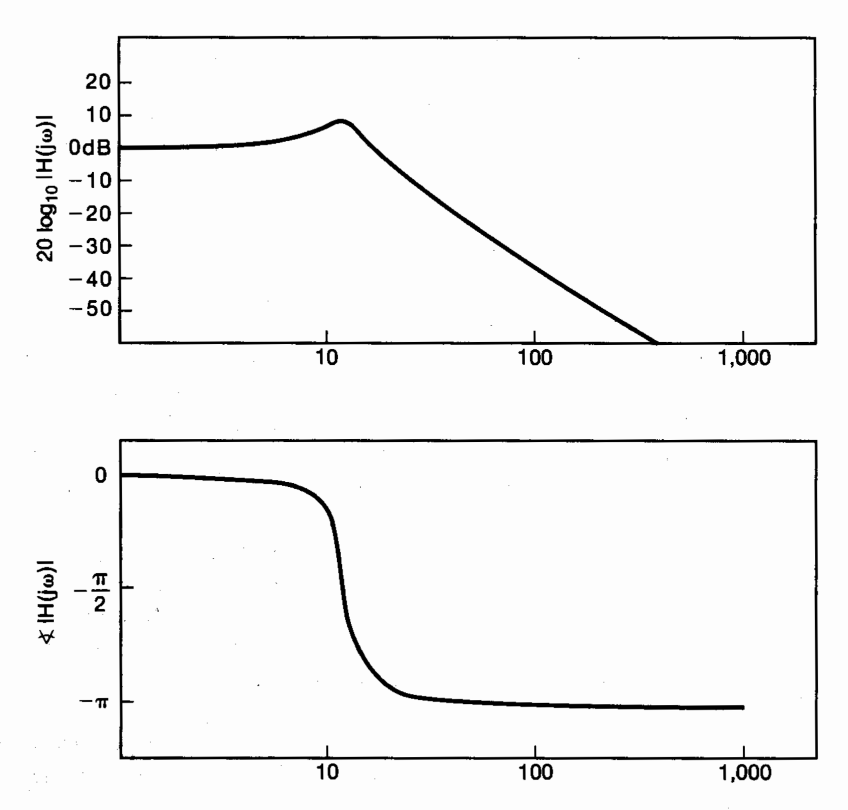


Figura 6.8 Un diagrama de Bode típico. (Observe que ω se grafica usando una escala logarítmica.)

más amplio que el de una escala de frecuencia lineal. Además, en una escala de frecuencia logarítmica, la forma de una curva de respuesta particular no cambia la frecuencia si se escala. (Véase el problema 6.30.) Más aún, para sistemas LTI continuos descritos mediante ecuaciones diferenciales podemos obtener con facilidad una gráfica aproximada de la magnitud log en función de la frecuencia log utilizando asíntotas. En la sección 6.5 explicaremos lo anterior mediante el desarrollo sencillo de diagramas de Bode aproximados por segmentos lineales para sistemas continuos de primer y segundo órdenes.

En el caso discreto, las magnitudes de las transformadas de Fourier y las respuestas en frecuencia a menudo se presentan en dB por las mismas razones por las que se encuentran en el caso continuo. Sin embargo, en el caso discreto no es común utilizar una escala de frecuencia logarítmica, ya que el intervalo de frecuencias considerado siempre está limitado y la ventaja que se encuentra para las ecuaciones diferenciales (es decir, asíntotas lineales) no se aplica a las ecuaciones de diferencias. Las representaciones gráficas típicas de la magnitud y fase de una respuesta en frecuencia discreta se muestran en la figura 6.9. En ella hemos representado $\sphericalangle H(e^{j\omega})$ en radianes y $|H(e^{j\omega})|$ en decibeles [es decir, $20 \log_{10}|H(e^{j\omega})|$] como funciones de ω. Observe que para $h[n]$ real, en realidad necesitamos graficar $H(e^{j\omega})$ únicamente para $0 \leq \omega \leq \pi$, ya que en este caso la propiedad de simetría de la transformada de Fourier implica que podemos entonces calcular $H(e^{j\omega})$ para $-\pi \leq \omega \leq 0$ usando las relaciones $|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$ y $\sphericalangle H(e^{-j\omega}) = -\sphericalangle H(e^{j\omega})$. Además, no necesitamos considerar valores de $|\omega|$ mayores que π, debido a la periodicidad de $H(e^{j\omega})$.

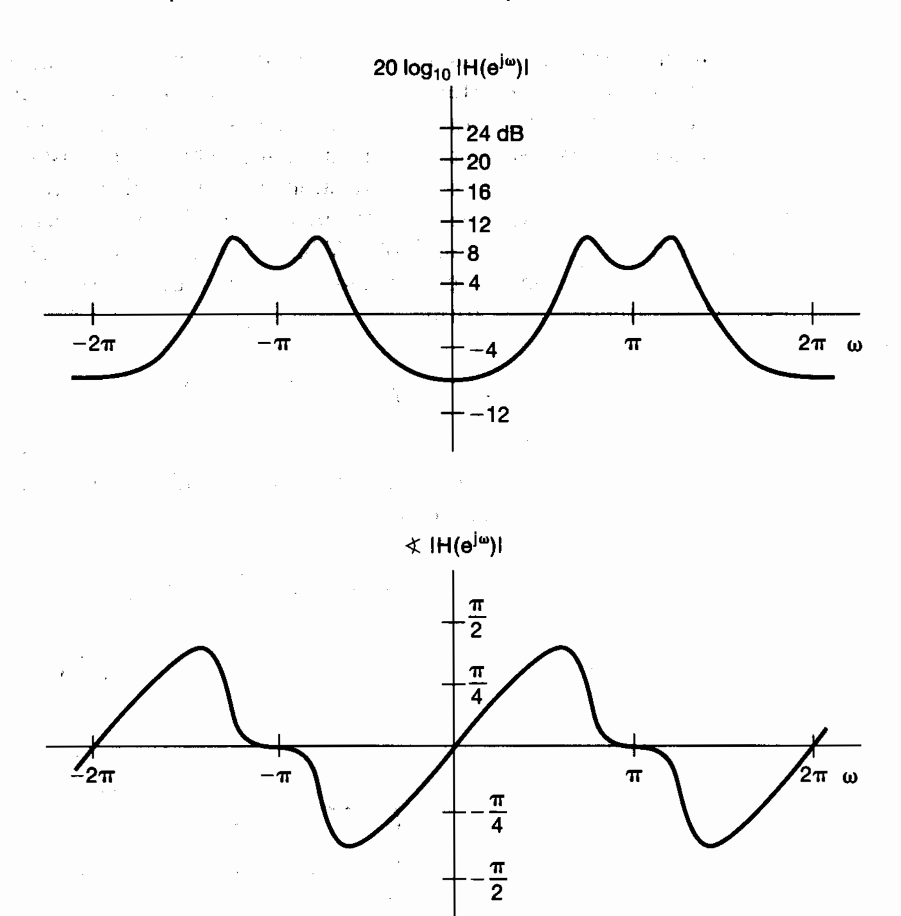


Figura 6.9 Representaciones gráficas comunes de la magnitud y fase de la respuesta en frecuencia discreta $H(e^{j\omega})$.

En esta sección hemos dado énfasis al hecho de que una escala de amplitud logarítmica a menudo es útil e importante. Sin embargo, hay muchas situaciones en las cuales es conveniente usar una escala de amplitud lineal. Por ejemplo, al analizar los filtros ideales para los cuales la magnitud de la respuesta en frecuencia es una constante diferente de cero en algunas bandas de frecuencia y cero en otras, una escala de amplitud lineal resulta más apropiada. De esta manera, hemos presentado las representaciones gráficas tanto lineales como logarítmicas para la magnitud de la transformada de Fourier y usaremos cada una cuando sea apropiado.

6.3 PROPIEDADES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE FILTROS IDEALES SELECTIVOS EN FRECUENCIA

En el capítulo 3 presentamos los filtros selectivos en frecuencia, es decir, los sistemas LTI con respuestas en frecuencia seleccionadas de manera tal que dejen pasar una o varias bandas de frecuencia con poca o ninguna atenuación y supriman o atenúen de manera

significativa las frecuencias fuera de esas bandas. Como se analizó en los capítulos 3, 4 y 5, hay varios aspectos importantes que surgen en las aplicaciones de filtrado selectivo en frecuencia y que se relacionan directamente con las características de los filtros selectivos en frecuencia. En esta sección, de nueva cuenta echamos un vistazo a estos filtros y sus propiedades. Aquí enfocamos nuestra atención en los filtros paso bajas, aunque para otros tipos de filtros selectivos en frecuencia, como los paso altas y paso banda, se cumplen conceptos y resultados similares. (Véanse los problemas 6.5, 6.6, 6.26 y 6.38.)

Como se mencionó en el capítulo 3, un filtro ideal paso bajas continuo tiene una respuesta en frecuencia de forma

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}. \tag{6.17}$$

Esto se ilustra en la figura 6.10(a). De manera parecida, un filtro ideal paso bajas discreto tiene una respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \tag{6.18}$$

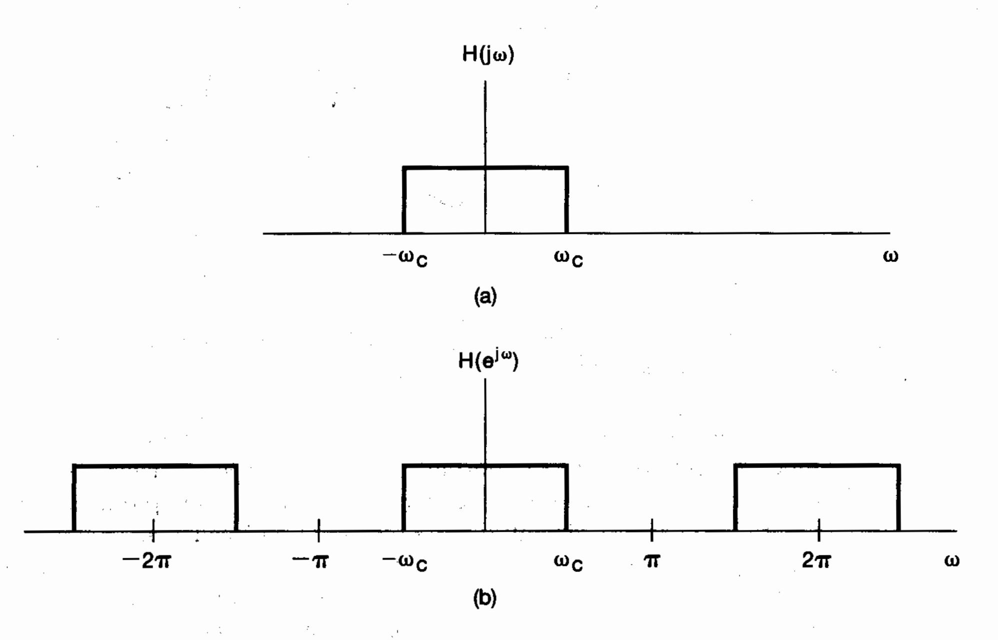
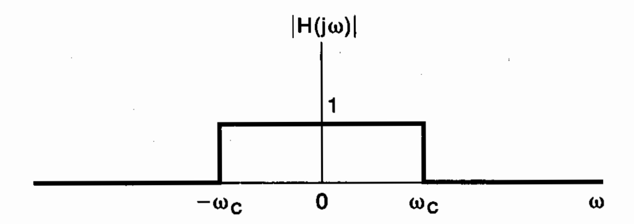


Figura 6.10 (a) La respuesta en frecuencia de un filtro paso bajas ideal continuo; (b) la respuesta en frecuencia de un filtro paso bajas ideal discreto.

y es periódica en ω, como se ilustra en la figura 6.10(b). Como podemos deducir de las ecuaciones (6.17) y (6.18) o de la figura 6.10, los filtros ideales paso bajas tienen una perfecta selectividad en frecuencia. Esto es, dejan pasar sin atenuación todas las frecuencias a, o más bajas que, la frecuencia de corte ω_c y eliminan por completo todas las frecuencias en la banda de supresión (es decir, superiores a ω_c). Además, estos filtros tienen características de fase cero, de modo que no introducen distorsión de fase.

Como hemos visto en la sección 6.2, las características de fase no lineal pueden conducir a cambios significativos en las características en el dominio del tiempo de una señal

aun cuando la magnitud de su espectro no sea cambiada por el sistema y, por lo tanto, un filtro con una característica de *magnitud* como en la ecuación (6.17) o la (6.18), pero con fase no lineal, puede producir efectos indeseables en algunas aplicaciones. Por otra parte, un filtro ideal con fase lineal en la banda de paso, como el que se muestra en la figura 6.11, introduce sólo un simple desplazamiento de tiempo en relación con la respuesta del filtro paso bajas ideal con característica de fase cero.



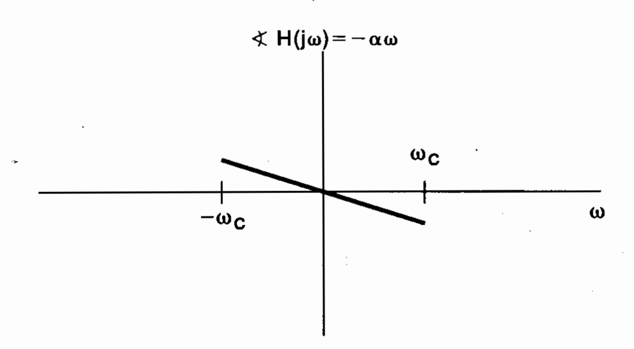


Figura 6.11 Filtro paso bajas ideal continuo con característica de fase lineal.

En los ejemplos 4.18 y 5.12 hemos calculado las respuestas al impulso de los filtros ideales paso bajas. En particular, la respuesta al impulso correspondiente al filtro en la ecuación (6.17) es

$$h(t) = \frac{\operatorname{sen} \omega_c t}{\pi t}, \tag{6.19}$$

la cual se muestra en la figura 6.12(a). De manera similar, la respuesta al impulso del filtro ideal discreto en la ecuación (6.18) es

$$h[n] = \frac{\operatorname{sen} \omega_c n}{\pi n}, \tag{6.20}$$

la cual se ilustra en la figura 6.12(b) para $\omega_c = \pi/4$. Si cualquiera de las respuestas ideales en frecuencia de las ecuaciones (6.17) y (6.18) es aumentada con una característica de fase lineal, la respuesta al impulso simplemente se retrasa en una cantidad igual al negativo de la pendiente de esta función de fase, como se ilustra en la figura 6.13 para la respuesta continua al impulso. Observe que tanto en el caso continuo como en el discreto, el ancho de la banda de paso del filtro es proporcional a ω_c, en tanto que el ancho del lóbulo principal del impulso es proporcional a $1/\omega_c$. Conforme el ancho de banda del filtro se incrementa, la respuesta al impulso se vuelve más angosta, y viceversa, en concordancia con la relación inversa entre el tiempo y la frecuencia analizada en los capítulos 4 y 5.

h(t)

$\frac{\omega_c}{\pi}$

$-\frac{\pi}{\omega_c}$ $\frac{\pi}{\omega_c}$ t

(a)

h[n]

$\frac{\omega_c}{\pi}$

$\frac{\pi}{\omega_c}$ n

(b)

Figura 6.12 (a) La respuesta al impulso del filtro paso bajas ideal continuo de la figura 6.10(a); (b) la respuesta al impulso del filtro paso bajas ideal discreto de la figura 6.10(b) con $\omega_c = \pi/4$.

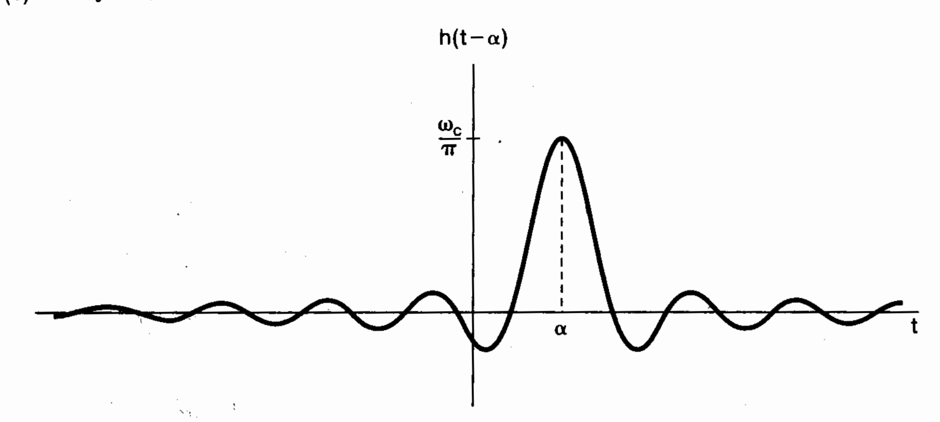


Figura 6.13 Respuesta al impulso de un filtro ideal paso bajas con magnitud y fase mostradas en la figura 6.11.

Las respuestas escalón $s(t)$ y $s[n]$ de los filtros paso bajas ideales continuos y discretos se presentan en la figura 6.14. En ambos casos, observamos que las respuestas escalón presentan varias características que pueden no ser deseables. Para estos filtros, en particular, las respuestas escalón sobrepasan sus valores finales a largo plazo y presentan un comportamiento oscilatorio, a menudo llamado *oscilaciones amortiguadas secundarias*. Además, cabe recordar que la respuesta al escalón es la integral o suma consecutiva de las respuestas al impulso; es decir,

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau,$$

$$s[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} h[m].$$

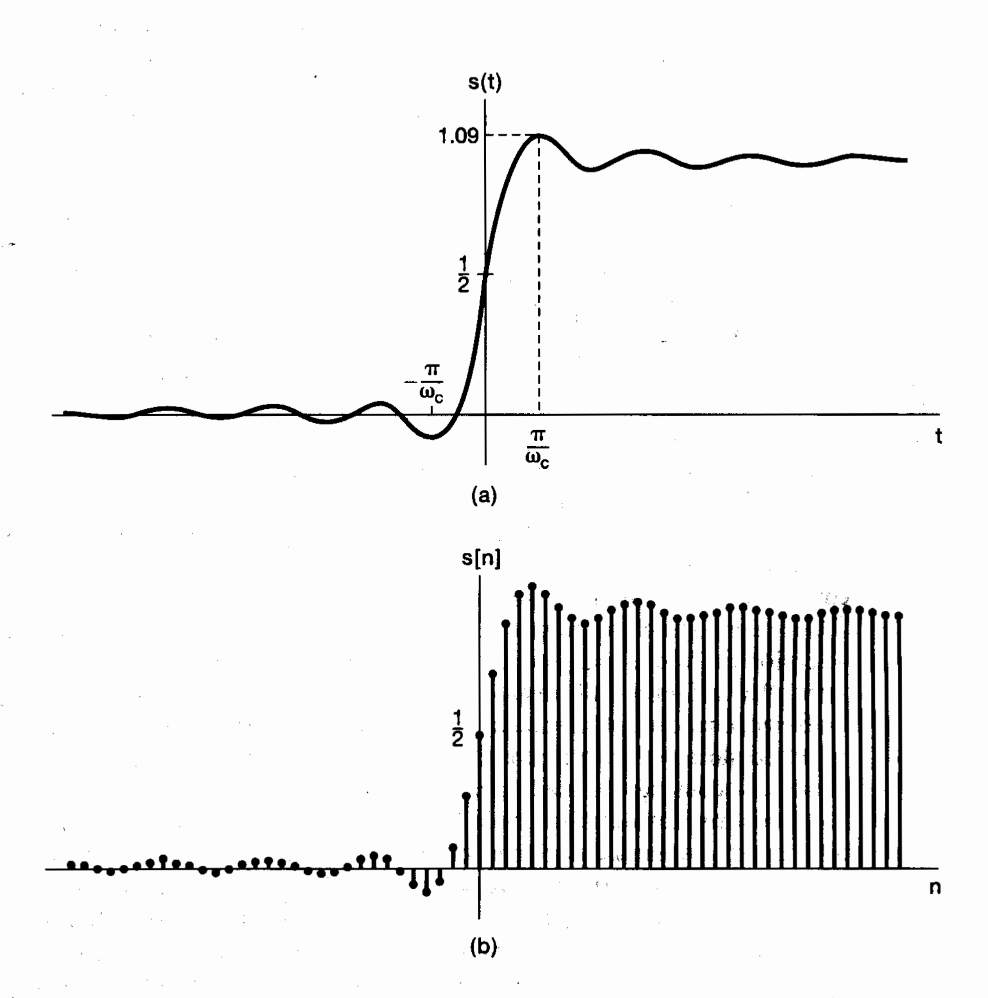


Figura 6.14 (a) Respuesta al escalón de un filtro paso bajas ideal continuo; (b) respuesta al escalón de un filtro paso bajas ideal discreto.

Debido a que las respuestas al impulso para los filtros ideales tienen lóbulos principales que se extienden de $-\pi/\omega_c$ a $+\pi/\omega_c$, las respuestas al escalón sufren su cambio más significativo en valor sobre este intervalo de tiempo. Esto es, el llamado *tiempo de subida* de la respuesta al escalón, una medida burda del tiempo de respuesta del filtro, también está inversamente relacionado con el ancho de banda del filtro.

6.4 ASPECTOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LOS FILTROS NO IDEALES

Las características de los filtros ideales no siempre son deseables en la práctica. Por ejemplo, en muchos contextos de filtrado, las señales que se desea separar no siempre caen en bandas de frecuencia totalmente separadas. Una situación común es la que se presenta en la figura 6.15, donde los espectros de las dos señales se traslapan ligeramente. En tales casos, se puede presentar el compromiso de la fidelidad con la cual los filtros mantienen una de estas señales —digamos, $x_1(t)$— contra el nivel con el cual las componentes de frecuencia de la segunda señal $x_2(t)$ son atenuadas. Por lo general se prefiere un filtro con una transición gradual de la banda de paso a la banda de supresión cuando se filtra la superposición de señales con espectros traslapados.

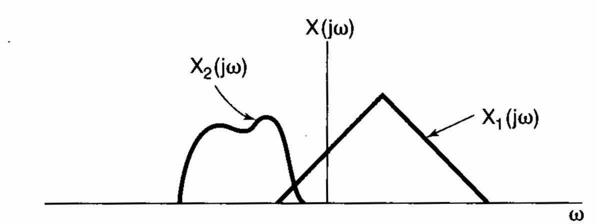


Figura 6.15 Dos espectros que se traslapan ligeramente.

Otra consideración digna de tomarse en cuenta es la que sugiere el examen de las respuestas al escalón de los filtros ideales paso bajas mostradas en la figura 6.14. Para el caso continuo y el discreto, la respuesta al escalón se aproxima en forma asintótica a una constante igual al valor del escalón. Sin embargo, en la vecindad de la discontinuidad sobrepasa este valor y presenta oscilaciones amortiguadas. En algunas situaciones, este comportamiento en el dominio del tiempo puede resultar indeseable.

Además, incluso en casos en los cuales son deseables las características ideales de selección de frecuencia, pueden no ser realizables. Por ejemplo, de las ecuaciones (6.18) y (6.19) y la figura 6.12, resulta evidente que el filtro paso bajas ideal es no causal. Sin embargo, cuando el filtrado se lleva a cabo en tiempo real, la causalidad es una restricción necesaria, y por lo tanto se requiere de una aproximación causal a la característica ideal. Una consideración adicional que nos motiva a proporcionar algo de flexibilidad en las características del filtro es la facilidad de construcción. Por lo general, entre más se trate de aproximar a o construir un filtro ideal selectivo en frecuencia, más complicada o costosa será la construcción, ya sea en términos de componentes como resistores, capacitores y amplificadores operacionales en el caso continuo o en términos de registros de memoria, multiplicadores y sumadores en el discreto. En muchos contextos, una característica precisa del filtro puede no ser esencial, por lo que un simple filtro será suficiente.

Por todas estas razones, los filtros no ideales son de considerable importancia práctica, y las características de éstos a menudo se especifican o cuantifican en términos de varios parámetros tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Primero, debido a que las características de magnitud del filtro ideal selectivo en frecuencia pueden

ser inalcanzables o indeseables, es preferible permitir alguna flexibilidad en el comportamiento del filtro en la banda de paso y en la banda de supresión, así como permitir una transición más gradual entre ambas, en contraposición con banda de supresión la característica de transición abrupta de los filtros ideales. Por ejemplo, en el caso de los filtros ideales, las especificaciones permiten alguna desviación de la ganancia unitaria en la banda de paso y de la ganancia cero en la banda de supresión, además de incluir una banda de transición en los bordes de dichas bandas. Así, entre las especificaciones requeridas para un filtro paso bajas continuo se incluye que la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro se restrinja al área no sombreada indicada en la figura 6.16. En ésta, en la banda de paso se permite una desviación de la unidad de más y menos δ_1, y en la banda de supresión se permite una desviación de δ_2 a partir de cero. La cantidad en que la respuesta en frecuencia difiere de la unidad en la banda de paso se conoce como *rizo de la banda de paso*, y la cantidad por la cual se desvía de cero en la banda de supresión se conoce como *rizo de la banda de supresión*. La frecuencia ω_p se conoce como el *flanco de la banda de paso* y ω_s como el *flanco de la banda de supresión*. El intervalo de frecuencia de ω_p a ω_s se proporciona para la transición de la banda de paso a la banda de supresión y se conoce como *banda de transición*. Las definiciones similares se aplican a los filtros paso bajas discretos, así como a otros filtros selectivos en frecuencia continuos y discretos.

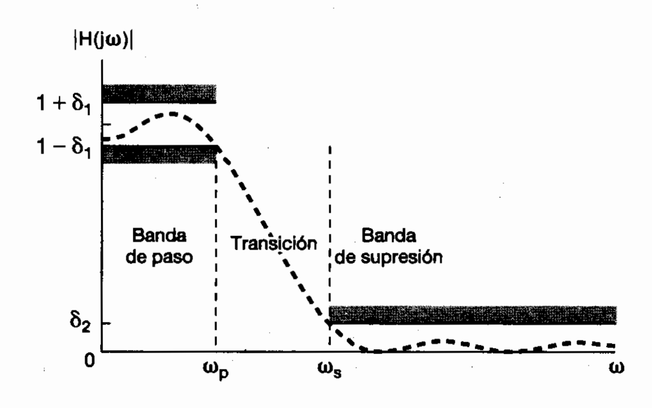


Figura 6.16 Tolerancias para la característica de magnitud de un filtro paso bajas. El rizo permitido de la banda de paso es δ_1 y el rizo de la banda de supresión es δ_2. La curva punteada ilustra una posible respuesta en frecuencia que se establece dentro de los límites tolerables.

Además de la especificación sobre la característica de magnitud en el dominio de la frecuencia, en algunos casos la especificación de la característica de fase también es importante. En particular, a menudo se desea una característica de fase lineal o casi lineal sobre la banda de paso del filtro.

Para controlar el comportamiento en el dominio del tiempo, por lo general las especificaciones son impuestas a la respuesta escalón de un filtro. Como se ilustra en la figura 6.17, una cantidad de interés es el tiempo de subida t_r de la respuesta al escalón, es decir, el intervalo sobre el cual esta respuesta se eleva hasta alcanzar su valor final. Además, la presencia o ausencia del comportamiento oscilatorio en la respuesta al escalón es importante. Si está presente la oscilación, hay otras tres cantidades que se usan para caracterizar la naturaleza de dichas oscilaciones: el sobrepaso Δ del valor final de la respuesta al escalón, la frecuencia de la oscilación amortiguada ω_r y el tiempo de asentamiento t_s (es decir, el tiempo requerido para que la respuesta al escalón se asiente dentro de una tolerancia especificada con respecto a su valor final).

Para los filtros paso bajas no ideales se puede observar un compromiso entre el ancho de la banda de transición (una característica del dominio de la frecuencia) y el tiempo de asentamiento de la respuesta al escalón (una característica del dominio del tiempo). Los siguientes ejemplos ilustran este compromiso.

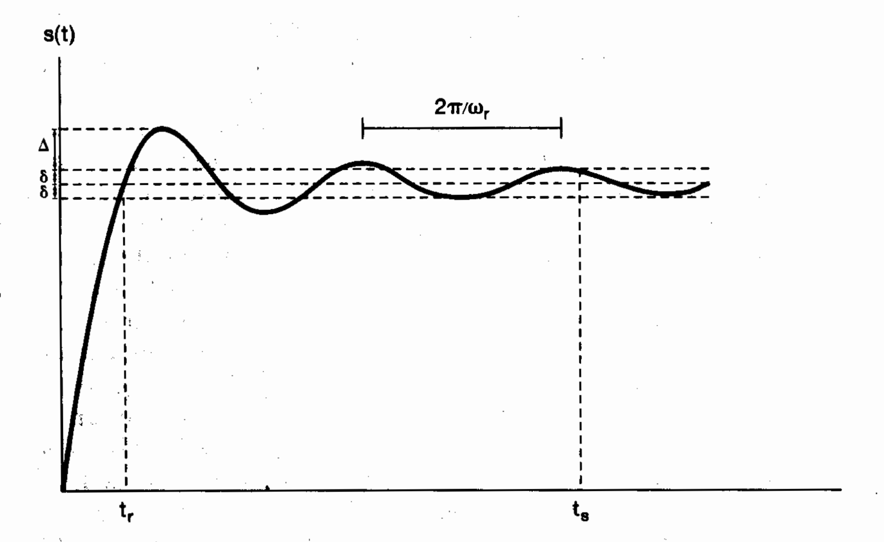


Figura 6.17 Respuesta al escalón de un filtro paso bajas continuo, que indica el tiempo de subida t_r, el sobrepaso Δ, frecuencia de oscilación ω_r y el tiempo de asentamiento t_s, es decir, el tiempo en el cual la respuesta al escalón se establece dentro de $\pm\delta$ de su valor final.

Ejemplo 6.3

Consideremos dos filtros paso bajas específicos, diseñados para tener una frecuencia de corte de 500 Hz. Cada filtro tiene una respuesta en frecuencia racional de quinto orden y una respuesta al impulso de valor real. Los dos filtros son de tipos específicos, uno conocido como Butterworth y el otro como elíptico. Ambas clases de filtros se usan a menudo en la práctica.

Las magnitudes de las respuestas en frecuencia de los dos filtros están graficadas (en función de la frecuencia en Hz) en la figura 6.18(a). Tomamos la banda de transición de cada filtro como la región alrededor de la frecuencia de corte (500 Hz) donde la magnitud de la respuesta en frecuencia no está dentro del .05 de la magnitud unitaria (el rizo de la banda de paso) ni dentro del .05 de la magnitud cero (el rizo de la banda de supresión). De la figura 6.18(a) se desprende que la banda de transición del filtro Butterworth es *más amplia* que la del filtro elíptico.

El precio que se tiene que pagar por la banda de transición más angosta del filtro elíptico se puede observar en la figura 6.18(b), en la cual se presentan las dos respuestas al escalón. Vemos que la oscilación en la respuesta al escalón del filtro elíptico es más prominente que para la respuesta al escalón Butterworth. En particular, el tiempo de asentamiento es mayor para la respuesta al escalón en el caso del filtro elíptico.

El examen del compromiso entre las características del dominio del tiempo y del dominio de la frecuencia, así como otros aspectos como la complejidad y el costo de los filtros, forman el núcleo del importante campo del diseño de filtros. En las siguientes secciones, y en varios de los problemas al final del capítulo, proporcionaremos ejemplos adicionales de los sistemas LTI y de filtros, además de sus características en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia.

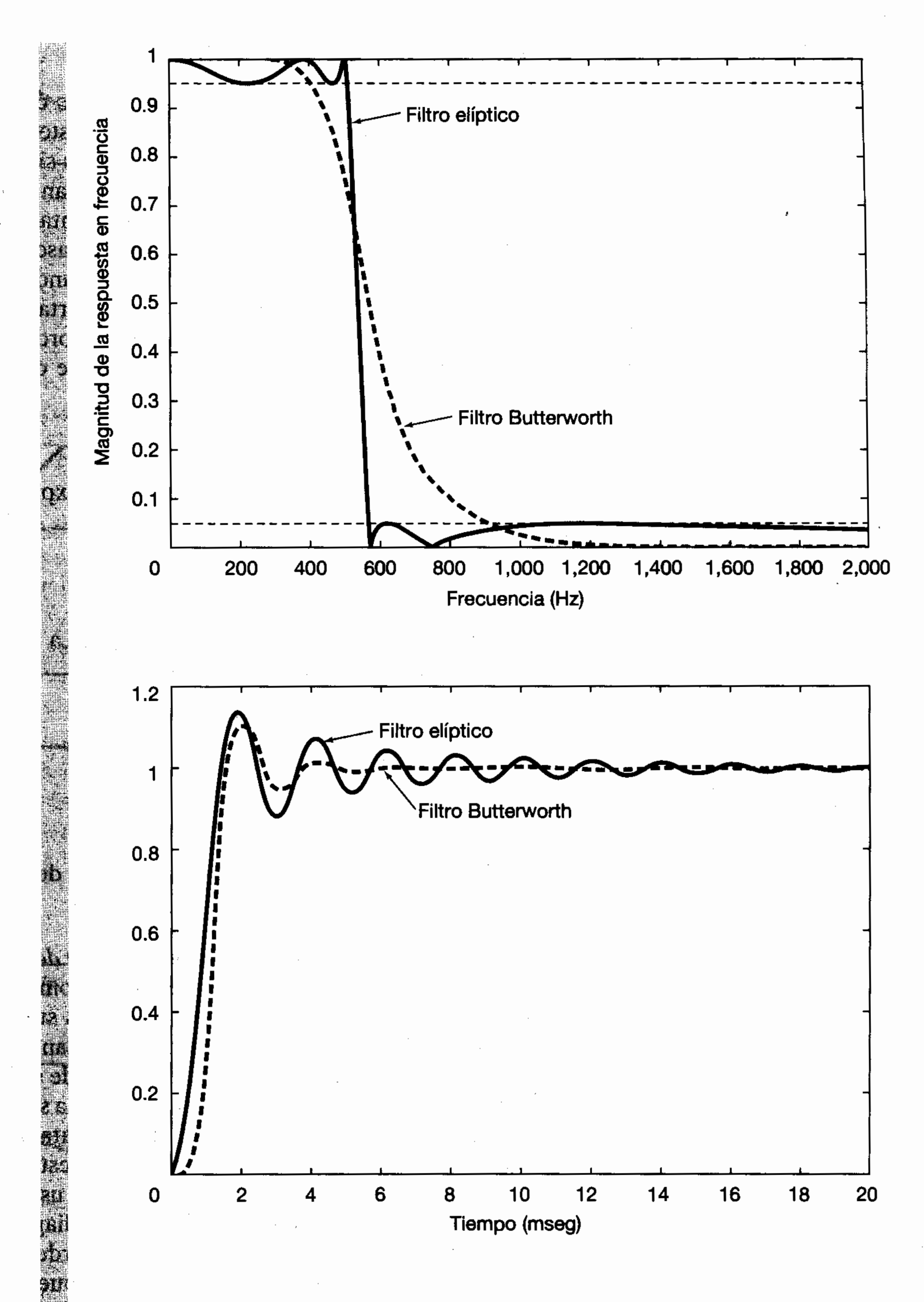


Figura 6.18 Ejemplo de un filtro Butterworth y un filtro elíptico de primer orden diseñados para que tengan el mismo rizo en la banda de paso y en la banda de supresión y tengan también la misma frecuencia de corte: (a) las magnitudes de las respuestas en frecuencia graficadas en función de la frecuencia en Hz; (b) respuestas al escalón.

6.5 SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER Y SEGUNDO ÓRDENES

Los sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes son de gran importancia práctica, debido a que muchos sistemas físicos se pueden modelar mediante ecuaciones como éstas y también porque los sistemas de este tipo a menudo se pueden construir de manera adecuada. Por una gran variedad de razones prácticas, los sistemas de orden mayor se construyen o representan mediante combinaciones de sistemas de primer y segundo órdenes en arreglos en cascada o en paralelo. En consecuencia, las propiedades de los sistemas de primer y segundo órdenes juegan un importante papel en el análisis, diseño, y comprensión del comportamiento en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia de los sistemas de orden mayor. En la presente sección analizamos con detalle estos sistemas continuos de orden bajo. En la sección 6.6 analizaremos sus contrapartes discretas.

6.5.1 Sistemas continuos de primer orden

La ecuación diferencial para un sistema de primer orden se expresa a menudo en la forma

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t), \tag{6.21}$$

donde τ es un coeficiente cuyo significado se aclarará en breve. La respuesta en frecuencia correspondiente para el sistema de primer orden es

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}, \tag{6.22}$$

y la respuesta al impulso es

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t), \tag{6.23}$$

la cual está dibujada en la figura 6.19(a). La respuesta al escalón del sistema es

$$s(t) = h(t) * u(t) = [1 - e^{-t/\tau}]u(t). \tag{6.24}$$

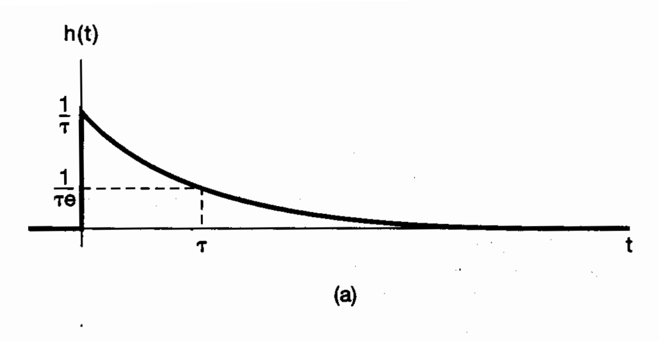
Y está dibujada en la figura 6.19(b). El parámetro τ es la *constante de tiempo* del sistema, y controla la velocidad a la cual responde el sistema. Por ejemplo, como se ilustra en la figura 6.19, en $t = \tau$ la respuesta al impulso ha alcanzado $1/e$ veces su valor en $t = 0$, y la respuesta al escalón está dentro de $1/e$ de su valor final. Por lo tanto, conforme τ disminuye, la respuesta al impulso decae más rápidamente, y el tiempo de subida de la respuesta al escalón se hace más corta, es decir, sube más abruptamente hacia su valor final. Observe que la respuesta al escalón del sistema de primer orden no presenta ninguna oscilación.

La figura 6.20 muestra el diagrama de Bode para la respuesta en frecuencia de la ecuación (6.22). En esta figura ilustramos una de las ventajas del uso de la escala logarítmica de frecuencia: podemos obtener, sin mucha dificultad, un diagrama de Bode aproximado de mucha utilidad para un sistema continuo de primer orden. Para ver esto, examinemos primero la gráfica de la magnitud logarítmica de la respuesta en frecuencia. De manera específica, de la ecuación (6.22) obtenemos

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = -10 \log_{10}[(\omega\tau)^2 + 1]. \tag{6.25}$$

Gracias a lo anterior, vemos que para $\omega\tau \ll 1$, la magnitud log se aproxima a cero, mientras que para $\omega\tau \gg 1$, la magnitud log se aproxima a una función *lineal* de $\log_{10}(\omega)$. Esto es,

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| \simeq 0 \qquad \text{para } \omega \ll 1/\tau, \tag{6.26}$$



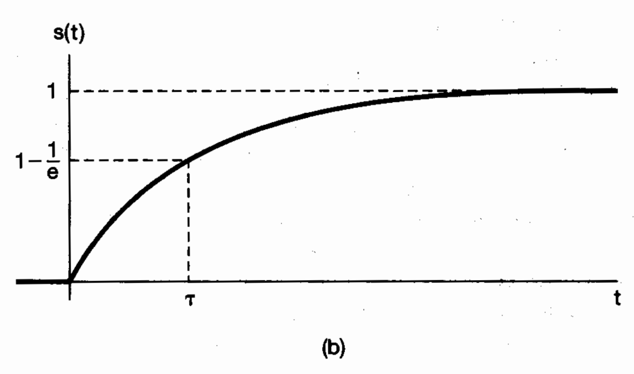
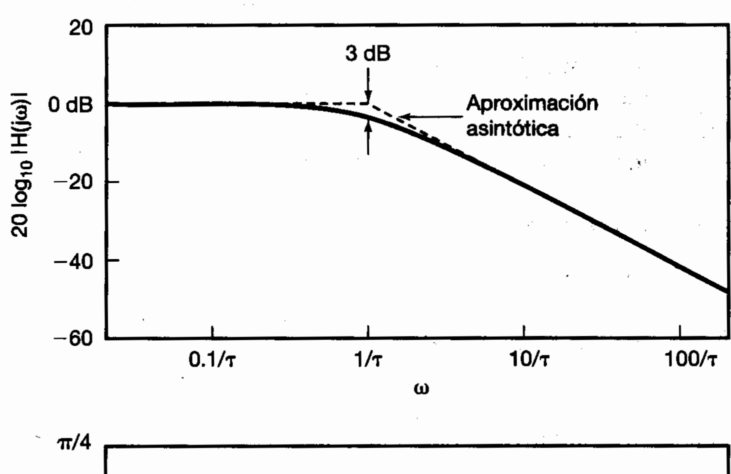


Figura 6.19 Sistema de primer orden continuo: (a) respuesta al impulso; (b) respuesta al escalón.



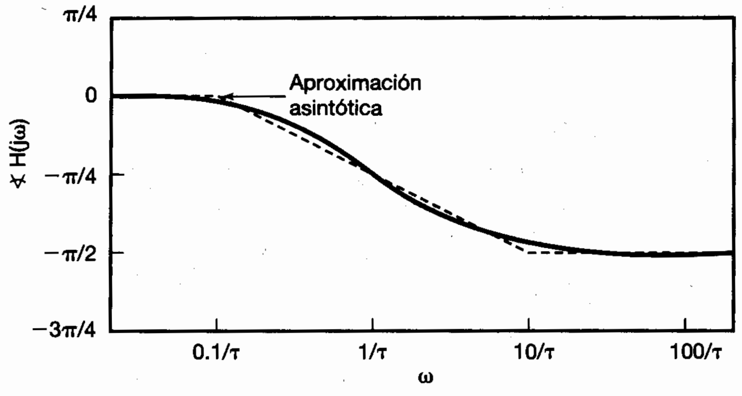


Figura 6.20 Diagrama de Bode para un sistema de primer orden continuo.

y

$$\begin{aligned} 20\log_{10}|H(j\omega)| &\simeq -20\log_{10}(\omega\tau) \\ &= -20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}(\tau) \qquad \text{para} \quad \omega \gg 1/\tau. \end{aligned} \tag{6.27}$$

En otras palabras, para el sistema de primer orden las asíntotas de baja y alta frecuencia de la magnitud log son líneas rectas. La asíntota de baja frecuencia [proporcionada por la ecuación (6.26)] es justo la línea 0-dB, mientras que la asíntota de alta frecuencia [especificada por la ecuación (6.27)] corresponde a una disminución de 20 dB en $|H(j\omega)|$ por cada década (es decir, un factor de 10) en ω. Esto se conoce algunas veces como una asíntota de "20 dB por década".

Observe que las dos aproximaciones asintóticas dadas en las ecuaciones (6.26) y (6.27) son iguales en el punto $\log_{10}(\omega) = -\log_{10}(\tau)$ o, de manera equivalente, $\omega = 1/\tau$. Interpretado gráficamente, esto significa que las dos asíntotas en línea recta se cruzan en $\omega = 1/\tau$, lo cual sugiere una aproximación en línea recta para el diagrama de magnitud. Esto es, nuestra aproximación a $20\log_{10}|H(j\omega)|$ es igual a 0 para $\omega \leq 1/\tau$ y está dada por la ecuación (6.27) para $\omega \geq 1/\tau$. Esta aproximación también está dibujada (con una línea punteada) en la figura 6.20. El punto en el que la pendiente de la aproximación cambia es precisamente $\omega = 1/\tau$, el cual, por esta razón, se conoce como *frecuencia de corte o de ruptura*. Asimismo, observe que en $\omega = 1/\tau$ los dos términos [$(\omega\tau)^2$ y 1] en el argumento del logaritmo en la ecuación (6.25) son iguales. De esta manera, en este punto el valor real de la magnitud es

$$20\log_{10}\left|H\left(j\frac{1}{\tau}\right)\right| = -10\log_{10}(2) \simeq -3\text{ dB}. \tag{6.28}$$

Debido a ello, el punto $\omega = 1/\tau$ es llamado a menudo el punto de 3 dB. Gracias a la figura podemos ver que sólo cerca de la frecuencia de corte existe un error con respecto a la aproximación en línea recta del diagrama de Bode. Por lo tanto, si deseamos obtener una gráfica más exacta del diagrama de Bode, sólo necesitamos modificar la aproximación cerca de la frecuencia de corte.

También es posible obtener una aproximación útil en línea recta de $\sphericalangle H(j\omega)$:

$$\begin{aligned} \sphericalangle H(j\omega) &= -\tan^{-1}(\omega\tau) \\ &\simeq \begin{cases} 0, & \omega \leq 0.1/\tau \\ -(\pi/4)[\log_{10}(\omega\tau) + 1], & 0.1/\tau \leq \omega \leq 10/\tau. \\ -\pi/2, & \omega \leq 10/\tau \end{cases} \end{aligned} \tag{6.29}$$

Observe que esta aproximación disminuye linealmente, de 0 a $-\pi/2$, como una función del $\log_{10}(\omega)$ en el intervalo

$$\frac{0.1}{\tau} \leq \omega \leq \frac{10}{\tau},$$

es decir, en el intervalo que va de una década por debajo de la frecuencia de corte hasta una década por arriba de la frecuencia de corte. Asimismo, el valor asintótico correcto de $\sphericalangle H(j\omega)$ es cero para $\omega \ll 1/\tau$, mientras que $-\pi/2$ es el valor asintótico correcto de $\sphericalangle H(j\omega)$ para $\omega \gg 1/\tau$. Además, la aproximación concuerda con el valor real de $\sphericalangle H(j\omega)$ en la frecuencia de corte $\omega = 1/\tau$, en cuyo punto

$$\sphericalangle H\left(j\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{\pi}{4}. \tag{6.30}$$

Esta aproximación asintótica también está graficada en la figura 6.20, y en ella podemos ver cómo, si se desea, podemos modificar la aproximación en línea recta para obtener una gráfica más exacta de $\sphericalangle H(j\omega)$.

A partir de este sistema de primer orden, podemos nuevamente ver la relación inversa entre el tiempo y la frecuencia. Conforme hacemos a τ más pequeña, aceleramos la respuesta en el tiempo del sistema [es decir, $h(t)$ se comprime más hacia el origen, y el tiempo de subida de la respuesta al escalón se reduce] y simultáneamente hacemos la frecuencia de corte larga [es decir, $H(j\omega)$ se vuelve más amplia, ya que $|H(j\omega)| \simeq 1$ para un intervalo más amplio de frecuencias]. Esto también se puede ver cuando multiplicamos la respuesta al impulso por τ y observamos la relación entre $\tau h(t)$ y $H(j\omega)$:

$$\tau h(t) = e^{-t/\tau} u(t), \qquad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}.$$

Por lo tanto, $\tau h(t)$ es una función de t/τ y $H(j\omega)$ es una función de $\omega\tau$, y de lo anterior vemos que cambiar a τ equivale en esencia a un escalamiento en tiempo y en frecuencia.

6.5.2 Sistemas continuos de segundo orden

La ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes para un sistema de segundo orden es

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t). \tag{6.31}$$

Las ecuaciones de este tipo surgen en muchos sistemas físicos, incluyendo los circuitos *RLC* y los sistemas mecánicos, como el que se muestra en la figura 6.21, compuesto por un resorte, una masa y un amortiguador de líquido viscoso o amortiguador mecánico. En la figura, la entrada es la fuerza aplicada $x(t)$ y la salida es el desplazamiento de la masa $y(t)$ a partir de una posición de equilibrio en la cual el resorte no ejerce ninguna fuerza de restauración. La ecuación de movimiento de este sistema es

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t) - ky(t) - b\frac{dy(t)}{dt},$$

o

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right)\frac{dy(t)}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)y(t) = \frac{1}{m}x(t).$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (6.31) vemos que si identificamos

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.32}$$

y

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}},$$

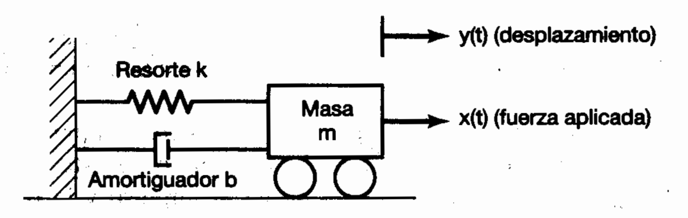


Figura 6.21 Sistema de segundo orden que consiste en un resorte y un amortiguador unidos a una masa móvil y a un soporte fijo.

entonces [excepto para un factor escalar de k en $x(t)$] la ecuación de movimiento para el sistema de la figura 6.21 se reduce a la ecuación (6.31).

La respuesta en frecuencia del sistema de segundo orden de la ecuación (6.31) es

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}. \tag{6.33}$$

El denominador de $H(j\omega)$ se puede factorizar para obtener

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)},$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \\ c_2 &= -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Para $\zeta \neq 1$, c_1 y c_2 son desiguales, y podemos realizar una expansión en fracciones parciales de la forma

$$H(j\omega) = \frac{M}{j\omega - c_1} - \frac{M}{j\omega - c_2}, \tag{6.35}$$

donde

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}. \tag{6.36}$$

De la ecuación (6.35), la respuesta al impulso correspondiente del sistema es

$$h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t). \tag{6.37}$$

Si $\zeta = 1$, entonces $c_1 = c_2 = -\omega_n$, y

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2}. \tag{6.38}$$

En la tabla 4.2, encontramos que en este caso la respuesta al impulso es

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t). \tag{6.39}$$

Observe, de las ecuaciones (6.37) y (6.39), que $h(t)/\omega_n$ es una función de $\omega_n t$. Además, la ecuación (6.33) se puede rescribir como

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + 1},$$

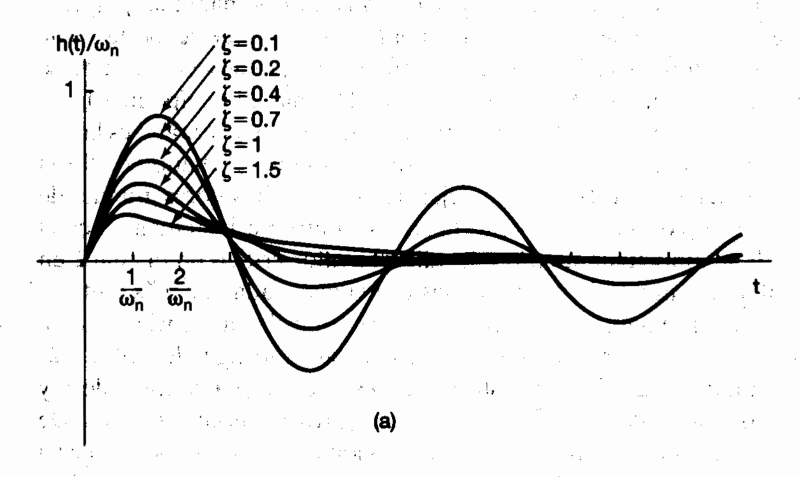
a partir de lo cual vemos que la respuesta en frecuencia es una función de ω/ω_n. Por lo tanto, cambiar ω_n resulta en esencia idéntico a realizar un escalamiento en tiempo y en frecuencia.

El parámetro ζ se conoce como la *razón de amortiguamiento* y el parámetro ω_n es conocido como la *frecuencia natural no amortiguada*. El motivo de esta terminología resulta claro cuando vemos con más detalle la respuesta al impulso y la respuesta al

escalón de un sistema de segundo orden. Primero, de la ecuación (6.35) vemos que para $0 < \zeta < 1$, c_1 y c_2 son complejas, y podemos escribir la respuesta al impulso de la ecuación (6.37) en la forma

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}}\{\exp[j(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t] - \exp[-j(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t]\}u(t) \\ &= \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}[\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t]u(t). \end{aligned} \tag{6.40}$$

Así, para $0 < \zeta < 1$, el sistema de segundo orden muestra una respuesta al impulso que tiene un comportamiento oscilatorio amortiguado, y en este caso el sistema se conoce como *subamortiguado*. Si $\zeta > 1$, tanto c_1 como c_2 son reales y negativas, y la respuesta al impulso es la diferencia entre dos exponenciales decrecientes. En este caso, el sistema está *sobreamortiguado*. En el caso en que $\zeta = 1$, cuando $c_1 = c_2$, el caso se considera como *críticamente amortiguado*. En la figura 6.22(a) se muestran las respuestas al impulso (multiplicadas por $1/\omega_n$) para los sistemas de segundo orden con diferentes valores de ζ.



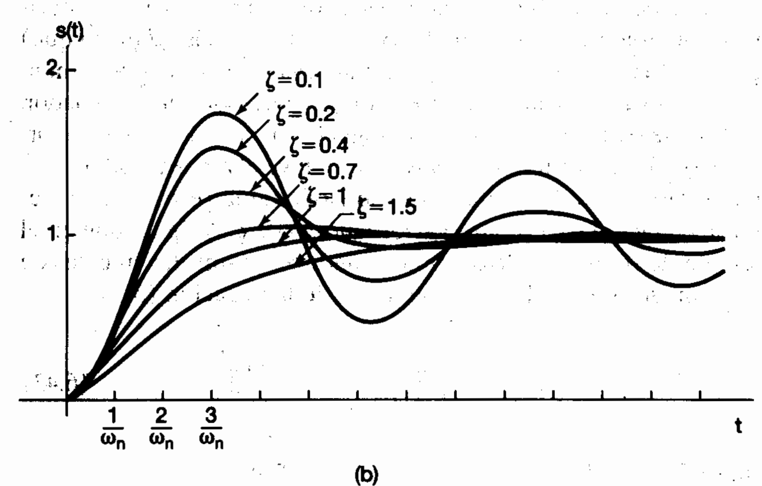


Figura 6.22 Respuesta de sistemas de segundo orden continuo con diferentes valores de la razón de amortiguamiento ζ: (a) la respuesta al impulso; (b) la respuesta al escalón.

La respuesta al escalón de un sistema de segundo orden se puede calcular a partir de la ecuación (6.37) para $\zeta \neq 1$. Ésta conduce a la expresión

$$s(t) = h(t) * u(t) = \left\{1 + M\left[\frac{e^{c_1 t}}{c_1} - \frac{e^{c_2 t}}{c_2}\right]\right\} u(t). \tag{6.41}$$

Para $\zeta = 1$, podemos usar la ecuación (6.39) para obtener

$$s(t) = [1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}]u(t). \tag{6.42}$$

La respuesta al escalón de un sistema de segundo orden está representada en la figura 6.22(b) para varios valores de ζ. De esta figura podemos ver que, en el caso subamortiguado, la respuesta al escalón presenta tanto un *sobrepaso* (es decir, la respuesta al escalón excede su valor final) como una *oscilación amortiguada* (es decir, un comportamiento oscilatorio). Para $\zeta = 1$, la respuesta al escalón tiene la respuesta más rápida (o bien, el tiempo de subida más corto) que es posible obtener sin que haya sobrepaso y de este modo tiene el tiempo de asentamiento más corto. Conforme ζ se incrementa a más de 1, la respuesta se hace más lenta. Esto se puede ver de las ecuación (6.34) y (6.41). Conforme ζ se incrementa, c_1 se hace más pequeña en magnitud, en tanto que c_2 se incrementa en magnitud. Por lo tanto, aunque la constante de tiempo ($1/|c_2|$) asociada con $e^{c_2 t}$ disminuye, la constante de tiempo ($1/|c_1|$) asociada con $e^{c_1 t}$ se incrementa. En consecuencia, el término $e^{c_1 t}$ en la ecuación (6.41) toma un tiempo más largo para que decaiga a cero, y entonces la constante de tiempo asociada con este término es la que determina el tiempo de asentamiento de la respuesta al escalón. Como resultado de ello, la respuesta al escalón toma un tiempo más largo para dejar de oscilar para valores grandes de ζ. En términos de nuestro ejemplo del resorte-amortiguador, conforme incrementamos la magnitud del coeficiente b de amortiguamiento más allá del valor crítico en el cual ζ en la ecuación (6.33) es igual a 1, el movimiento de la masa se vuelve cada vez más lento.

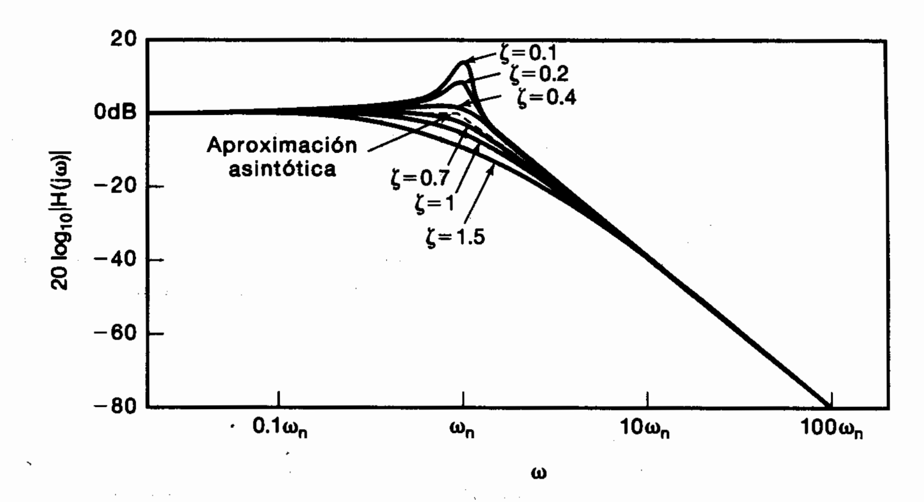
Por último, observe que, como hemos dicho, el valor de ω_n controla en esencia la escala de tiempo de las respuesta $h(t)$ y $s(t)$. Por ejemplo, en el caso subamortiguado, entre más grande sea ω_n, más comprimida estará la respuesta al impulso como una función de t, y más alta será la frecuencia de las oscilaciones u oscilaciones amortiguadas en $h(t)$ y $s(t)$. De hecho, de la ecuación (6.40) vemos que la frecuencia de oscilación de $h(t)$ y $s(t)$ es ω_n, la cual se incrementa conforme se incrementa ω_n. Sin embargo, esta frecuencia depende explícitamente de la razón de amortiguamiento y no es igual a (y de hecho es más pequeña que) ω_n, excepto en el caso en que $\zeta = 0$. (Es por esta razón que el parámetro ω_n se conoce comúnmente como la frecuencia natural no amortiguada.) Para el ejemplo del resorte-amortiguador, concluimos entonces que la tasa de oscilación de la masa es igual a ω_n cuando no hay amortiguamiento, y la frecuencia de oscilación disminuye cuando se incluye el amortiguador.

En la figura 6.23 hemos representado el diagrama de Bode de la respuesta en frecuencia proporcionada por la ecuación (6.33) para varios valores de ζ. Al igual que en el caso de primer orden, la escala de frecuencia logarítmica conduce a asíntotas lineales de alta y baja frecuencia para la magnitud log. Específicamente, de la ecuación (6.33),

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = -10 \log_{10}\left\{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}. \tag{6.43}$$

A partir de esta expresión, se desprende que

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| \simeq \begin{cases} 0, & \text{para } \omega \ll \omega_n \\ -40 \log_{10} \omega + 40 \log_{10} \omega_n, & \text{para } \omega \gg \omega_n \end{cases}. \tag{6.44}$$



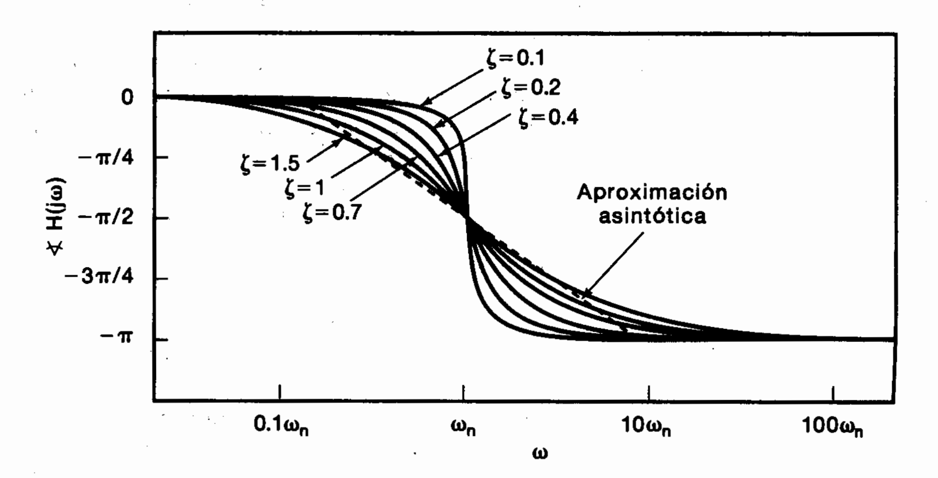


Figura 6.23 Diagramas de Bode para los sistemas de segundo orden con diferentes valores de razón de amortiguamiento ζ.

Por lo tanto, la asíntota de baja frecuencia de la magnitud log es la línea de 0 dB, mientras que la asíntota de alta frecuencia [dada por la ecuación (6.44)] muestra una pendiente de –40 dB por década; es decir, $|H(j\omega)|$ disminuye 40 dB por cada incremento de ω en un factor de 10. Además, observe que las dos asíntotas en línea recta se cruzan en el punto $\omega = \omega_n$. Por lo tanto, obtenemos una aproximación en línea recta a la magnitud log usando la aproximación proporcionada por la ecuación (6.44) para $\omega \leq \omega_n$. Por esta razón, ω_n se le conoce como la frecuencia de corte del sistema de segundo orden. Esta aproximación también está trazada (con una línea punteada) en la figura 6.23.

Además, podemos obtener una aproximación en línea recta a $\sphericalangle H(j\omega)$, cuya expresión exacta se puede obtener de la ecuación (6.33):

$$\sphericalangle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right). \tag{6.45}$$

La aproximación es

$$\sphericalangle H(j\omega) \simeq \begin{cases} 0, & \omega \leq 0.1\omega_n \\ -\frac{\pi}{2}\left[\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) + 1\right], & 0.1\omega_n \leq \omega \leq 10\omega_n, \\ -\pi, & \omega \geq 10\omega_n \end{cases} \tag{6.46}$$

la cual también está representada en la figura 6.23. Observe que la aproximación y el valor real nuevamente son iguales a la frecuencia de corte $\omega = \omega_n$, donde

$$\sphericalangle H(j\omega_n) = -\frac{\pi}{2}.$$

Es importante observar que las aproximaciones asintóticas, ecuaciones (6.44) y (6.46), que hemos obtenido para un sistema de segundo orden no dependen de ζ, mientras que las gráficas reales de $|H(j\omega)|$ y $\sphericalangle H(j\omega)$ sí lo hacen y, por consiguiente, para obtener una gráfica exacta, en especial cercana a la frecuencia de corte $\omega = \omega_n$, debemos tomar en cuenta esto al modificar las aproximaciones para darles una forma más cercana a las gráficas reales. La discrepancia está más marcada para pequeños valores de ζ. En particular, observe que en este caso la magnitud log real tiene un pico alrededor de $\omega = \omega_n$. De hecho, los cálculos directos usando la ecuación (6.43) muestran que, para $\zeta < \sqrt{2}/2 \simeq 0.707$, $|H(j\omega)|$ tiene un valor máximo en

$$\omega_{\text{máx}} = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}, \tag{6.47}$$

y el valor en ese punto máximo es

$$|H(j\omega_{\text{máx}})| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}. \tag{6.48}$$

Sin embargo, para $\zeta > 0.707$, $H(j\omega)$ disminuye monotónicamente conforme ω se incrementa desde cero. El hecho de que $H(j\omega)$ pueda tener un pico es en extremo importante en el diseño de filtros y amplificadores selectivos en frecuencia. En algunas aplicaciones podríamos desear diseñar un circuito tal que tuviera un pico pronunciado en la magnitud de su respuesta en frecuencia en alguna frecuencia específica, con lo cual proporcionaría una gran amplificación selectiva en frecuencia para senoides en una banda angosta. La *calidad* Q de dichos circuitos se define en términos de lo pronunciado del pico. Para un circuito de segundo orden descrito por una ecuación de la forma de la ecuación (6.31), es común considerar la calidad como

$$Q = \frac{1}{2\zeta},$$

y de la figura 6.23 y la ecuación (6.48), podemos ver que esta definición muestra el comportamiento adecuado: entre menos amortiguamiento hay en el sistema, más pronunciado es el pico en $|H(j\omega)|$.

6.5.3 Diagramas de Bode para respuestas en frecuencia racionales

Al inicio de esta sección indicamos que los sistemas de segundo orden se pueden usar como los bloques básicos para sistemas LTI más complejos con respuestas en frecuencia racionales. Una consecuencia de lo anterior es que los diagramas de Bode presentados

aquí, nos proporcionan, en esencia, toda la información que necesitamos para construir diagramas de Bode para respuestas en frecuencia racionales y arbitrarias. Hemos descrito, específicamente, los diagramas de Bode para las respuestas en frecuencia dadas por las ecuaciones (6.22) y (6.33). Además, podemos obtener con facilidad los diagramas de Bode para las respuestas en frecuencia de las formas

$$H(j\omega) = 1 + j\omega\tau \tag{6.49}$$

y

$$H(j\omega) = 1 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2. \tag{6.50}$$

Los diagramas de Bode para las ecuaciones (6.49) y (6.50) se obtienen directamente de las figuras 6.20 y 6.23 y del hecho de que

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{H(j\omega)}\right|$$

y

$$\sphericalangle(H(j\omega)) = -\sphericalangle\left(\frac{1}{H(j\omega)}\right).$$

Asimismo, considere una función de sistema que tenga una ganancia constante

$$H(j\omega) = K.$$

Puesto que $K = |K|e^{j\cdot 0}$ si $K > 0$ y $K = |K|e^{j\pi}$ si $K < 0$, vemos que

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = 20\log_{10}|K|$$

$$\sphericalangle H(j\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } K > 0 \\ \pi, & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

Debido a que una respuesta en frecuencia racional se puede factorizar en el producto de un ganancia constante y en términos de primer y segundo orden, podemos obtener su diagrama de Bode sumando los diagramas de cada término. Ilustramos además la construcción de los diagramas de Bode en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 6.4

Obtengamos el diagrama de Bode para la respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \frac{2\times 10^4}{(j\omega)^2 + 100j\omega + 10^4}.$$

En primer lugar, observamos que

$$H(j\omega) = 2\hat{H}(j\omega),$$

donde $\hat{H}(j\omega)$ tiene la misma forma que la respuesta en frecuencia de segundo orden estándar especificada por la ecuación (6.33). De lo anterior se desprende que

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = 20\log_{10}2 + 20\log_{10}|\hat{H}(j\omega)|.$$

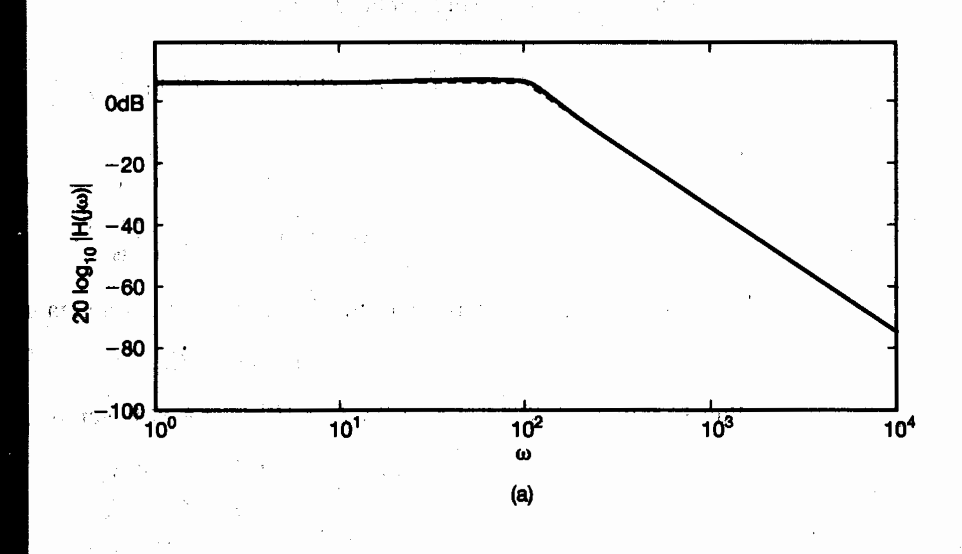
Al comparar $\hat{H}(j\omega)$ con la respuesta en frecuencia en la ecuación (6.33), concluimos que $\omega_n = 100$ y $\zeta = 1/2$ para $\hat{H}(j\omega)$. Usando la ecuación (6.44), podemos ahora especificar las asíntotas para $20 \log_{10}|\hat{H}(j\omega)|$:

$$20 \log_{10} |\hat{H}(j\omega)| \simeq 0 \qquad \text{para } \omega \ll 100,$$

y

$$20 \log_{10} |\hat{H}(j\omega)| \simeq -40 \log_{10} \omega + 80 \qquad \text{para } \omega \gg 100.$$

Concluimos así que $20 \log_{10}|H(j\omega)|$ tendrá las mismas asíntotas, excepto para un nivel constante en todas las frecuencias debido a la adición del término $20 \log_{10} 2$ (el cual es aproximadamente igual a 6 dB). Las líneas punteadas en la figura 6.24(a) representan estas asíntotas.



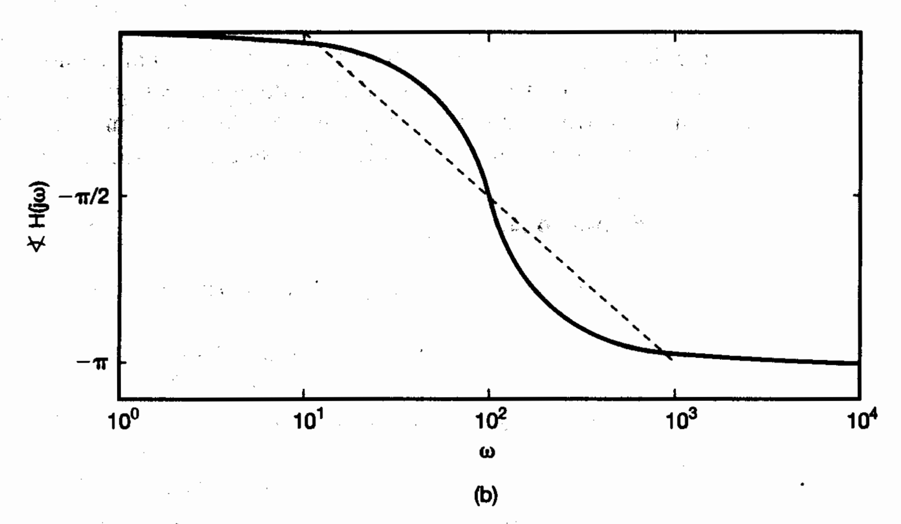


Figura 6.24 Diagrama de Bode para la función del sistema en el ejemplo 6.4: (a) magnitud; (b) fase.

La curva en línea sólida en la misma figura representa el diagrama de Bode real generado por computadora para $20 \log_{10}|H(j\omega)|$. Puesto que el valor de ζ para $\hat{H}(j\omega)$ es menor que $\sqrt{2}/2$, el diagrama de Bode real tiene un ligero pico cerca de $\omega = 100$.

Para obtener una gráfica de $\sphericalangle H(j\omega)$, observamos que

$$\sphericalangle H(j\omega) = \sphericalangle \hat{H}(j\omega)$$

y que $\sphericalangle \hat{H}(j\omega)$ tiene sus asíntotas especificadas de acuerdo con la ecuación (6.46); esto es,

$$\sphericalangle \hat{H}(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq 10 \\ -(\pi/2)[\log_{10}(\omega/100) + 1], & 10 \leq \omega \leq 1{,}000 \\ -\pi, & \omega \geq 1{,}000. \end{cases}$$

En la figura 6.24(b) están dibujadas las asíntotas y los valores reales para $\sphericalangle H(j\omega)$ con líneas punteada y sólida, respectivamente.

Ejemplo 6.5

Considere la respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \frac{100(1 + j\omega)}{(10 + j\omega)(100 + j\omega)}.$$

Para obtener el diagrama de Bode para $H(j\omega)$, la rescribimos en la forma factorizada siguiente:

$$H(j\omega) = \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{1 + j\omega/10}\right)\left(\frac{1}{1 + j\omega/100}\right)(1 + j\omega).$$

Aquí, el primer factor es una constante, los siguientes dos factores tienen la forma estándar de una respuesta en frecuencia de primer orden como está especificada en la ecuación (6.22) y el cuarto factor es el recíproco de la misma forma estándar de primer orden. El diagrama de Bode para $20 \log_{10}|H(j\omega)|$ es por lo tanto la suma de los diagramas de Bode correspondientes a cada uno de los factores. Además, las asíntotas correspondientes a cada factor se pueden sumar para obtener las asíntotas para el diagrama de Bode completo. Estas asíntotas y los valores reales de $20 \log_{10}|H(j\omega)|$ se presentan en la figura 6.25(a). Observe que el factor constante de 1/10 cuenta como un valor constante de –20 dB en cada frecuencia. La frecuencia de corte a $\omega = 1$ corresponde al factor $(1 + j\omega)$, el cual produce la elevación de 20 dB/década que empieza en $\omega = 1$ y se cancela mediante la disminución de 20 dB/década que empieza en la frecuencia de corte a $\omega = 10$ y se debe al factor $1/(1 + j\omega/10)$. Por último, el factor $1/(1 + j\omega/100)$ contribuye a otra frecuencia de corte en $\omega = 100$ y una caída subsecuente con una tasa de 20 dB/década.

De manera similar, como se ilustra en la figura 6.25(b), podemos construir la aproximación asintótica para $H(j\omega)$ de las asíntotas individuales para cada factor, junto con una gráfica del valor exacto de la fase. El factor constante 1/10 en particular contribuye con 0 a la fase, mientras que el factor $(1 + j\omega)$ contribuye a una aproximación asintótica que es 0 para $\omega < 0.1$, y se eleva linealmente como una función de $\log_{10}(\omega)$ desde un valor de cero a $\omega = 0.1$ hasta un valor de $\pi/2$ radianes a $\omega = 10$. Sin embargo, esta elevación se cancela en $\omega = 1$ por la aproximación asintótica del ángulo de $1/(1 + j\omega/10)$ la cual contribuye a una disminución lineal en un ángulo de $\pi/2$ radianes sobre un intervalo de frecuencias que va de $\omega = 1$ a $\omega = 100$. Por último, la aproximación asintótica para el ángulo de $1/(1 + j\omega/100)$ aporta otra reducción lineal en un ángulo de $\pi/2$ radianes sobre el intervalo de frecuencias que va de $\omega = 10$ a $\omega = 1{,}000$.

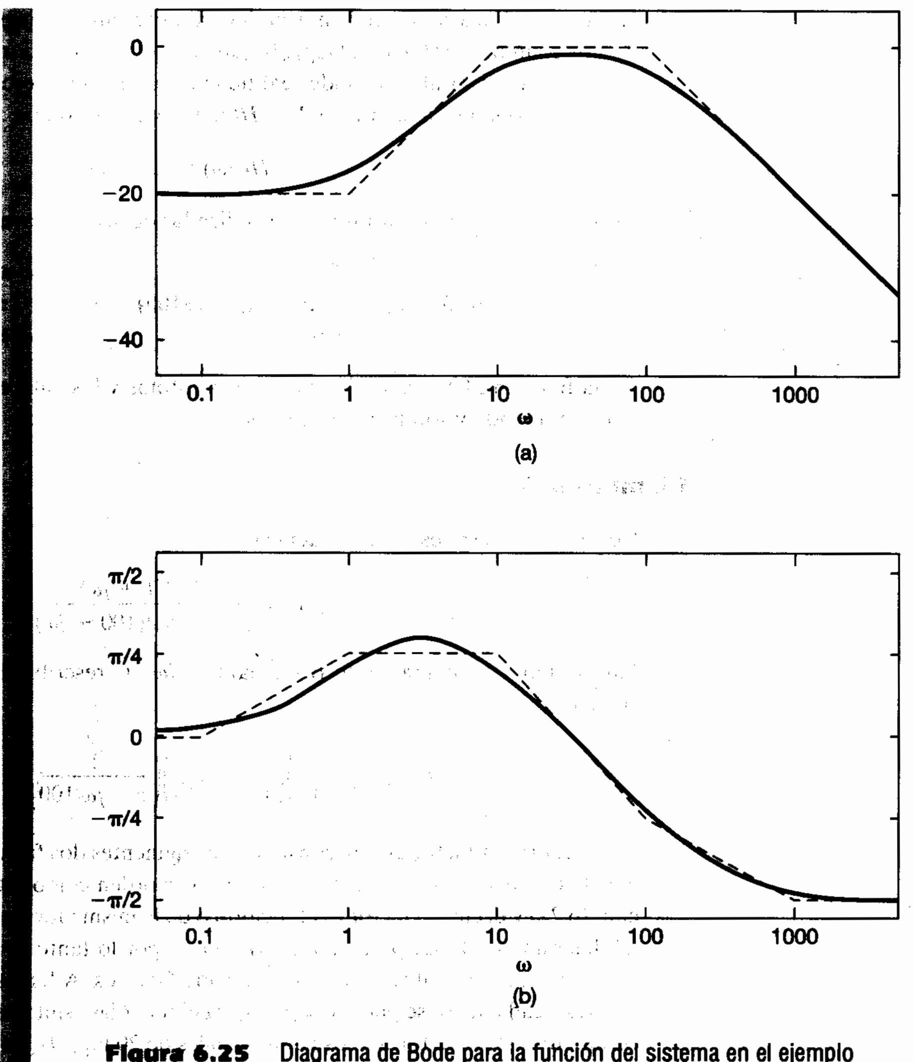


Figura 6.25 Diagrama de Bode para la función del sistema en el ejemplo 6.5: (a) magnitud; (b) fase.

En nuestro análisis de los sistemas de primer orden en esta sección, restringimos nuestra atención a valores de $\tau > 0$. De hecho, no es difícil verificar que si $\tau < 0$, entonces el sistema de primer orden causal descrito por la ecuación (6.21) tiene una respuesta al impulso que no es absolutamente integrable, y en consecuencia, el sistema es inestable. De manera similar, al analizar el sistema de segundo orden causal en la ecuación (6.31), requerimos que tanto ζ como ω_n^2 sean números positivos. Si cualquiera de éstos no lo fuera, la respuesta al impulso resultante no será absolutamente integrable. Por lo tanto, en esta sección hemos restringido nuestra atención a los sistemas causales de primer y segundo órdenes que son estables y par los cuales podemos definir respuestas en frecuencia.

6.6 SISTEMAS DISCRETOS DE PRIMER Y SEGUNDO ÓRDENES

En esta sección examinamos las propiedades de los sistemas LTI de primer y segundo órdenes discretos, en forma paralela a lo desarrollado en la sección anterior. Al igual que en el caso continuo, cualquier sistema con una respuesta en frecuencia que sea una razón de polinomios en $e^{-j\omega}$ (es decir, cualquier sistema LTI discreto descrito por una ecuación de diferencias lineal con coeficientes constantes) se puede escribir como un producto o suma de sistemas de primer y segundo órdenes, lo cual implica que estos sistemas básicos son de considerable valor para construir y analizar sistemas más complejos. (Véase, por ejemplo, el problema 6.45.)

6.6.1 Sistemas discretos de primer orden

Considere el sistema LTI causal de primer orden descrito por la ecuación de diferencias

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \tag{6.51}$$

con $|a| < 1$. Del ejemplo 5.18, la respuesta en frecuencia de este sistema es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \tag{6.52}$$

y su respuesta al impulso es

$$h[n] = a^n u[n], \tag{6.53}$$

que mostramos en la figura 6.26 para diversos valores de a. Asimismo, la respuesta al escalón del sistema es

$$s[n] = h[n] * u[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n], \tag{6.54}$$

la cual se ilustra en la figura 6.27.

La magnitud del parámetro a juega un papel similar al de la constante de tiempo τ en los sistemas continuos de primer orden. En forma específica, $|a|$ determina la velocidad a la cual responde el sistema de primer orden. Por ejemplo, de las ecuación (6.53) y (6.54) y las figuras 6.26 y 6.27, podemos ver que $h[n]$ y $s[n]$ convergen a su valor final a una velocidad a la cual $|a|^n$ converge a cero. Por lo tanto, la respuesta al impulso decae en forma abrupta y la respuesta al escalón se establece rápidamente para un $|a|$ pequeño. Para un $|a|$ más cercano a 1, estas respuestas son más lentas. Observe que, a diferencia de su contraparte continua, el sistema de primer orden descrito por la ecuación (6.51) puede presentar un comportamiento oscilatorio. Esto ocurre cuando $a < 0$, en cuyo caso la respuesta al escalón presenta tanto sobrepaso de su valor final como una oscilación amortiguada.

La magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del sistema de primer orden de la ecuación (6.51) son respectivamente,

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{(1 + a^2 - 2a\cos\omega)^{1/2}} \tag{6.55}$$

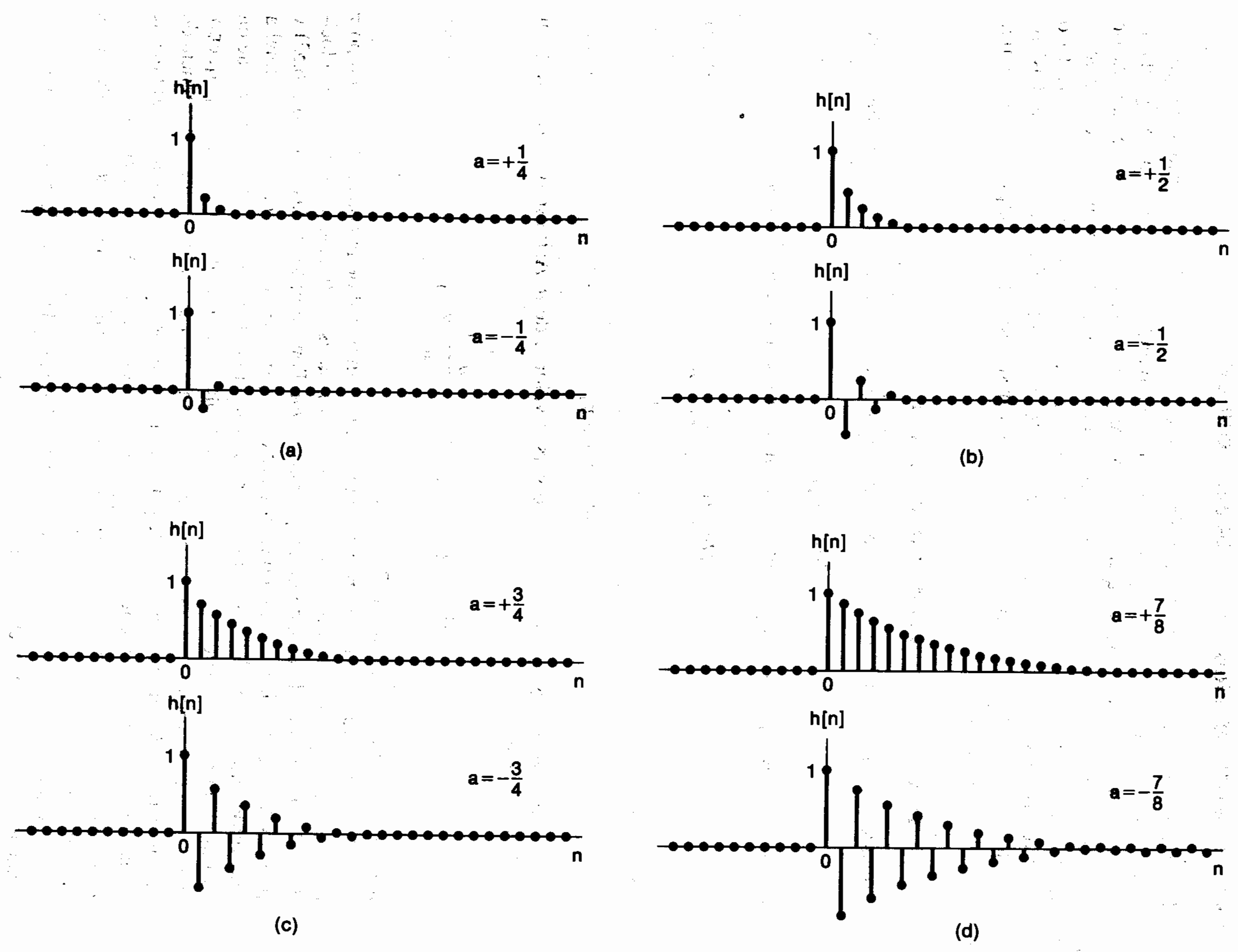


Figura 6.26 Respuesta al impulso $h[n] = a^n u[n]$ de un sistema de primer orden: (a) $a = \pm 1/4$; (b) $a = \pm 1/2$; (c) $a = \pm 3/4$; (d) $a = \pm 7/8$.

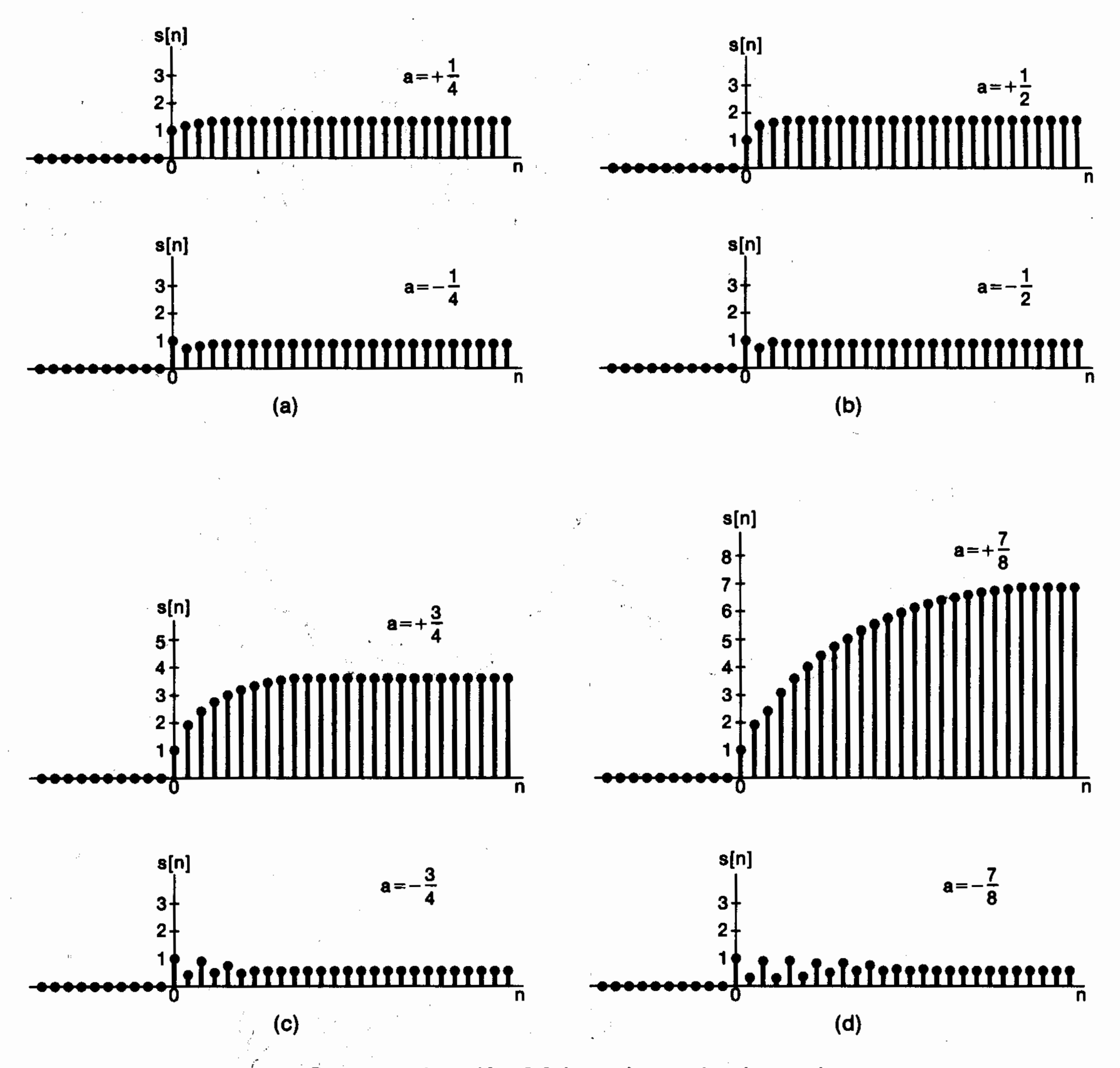


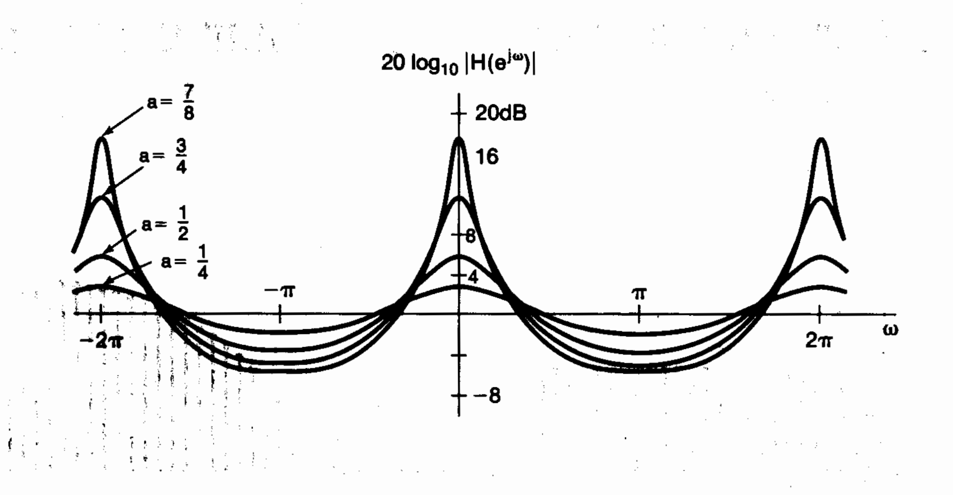
Figura 6.27 Respuesta al escalón $s[n]$ de un sistema de primer orden: (a) $a = \pm 1/4$; (b) $a = \pm 1/2$; (c) $a = \pm 3/4$; (d) $a = \pm 7/8$.

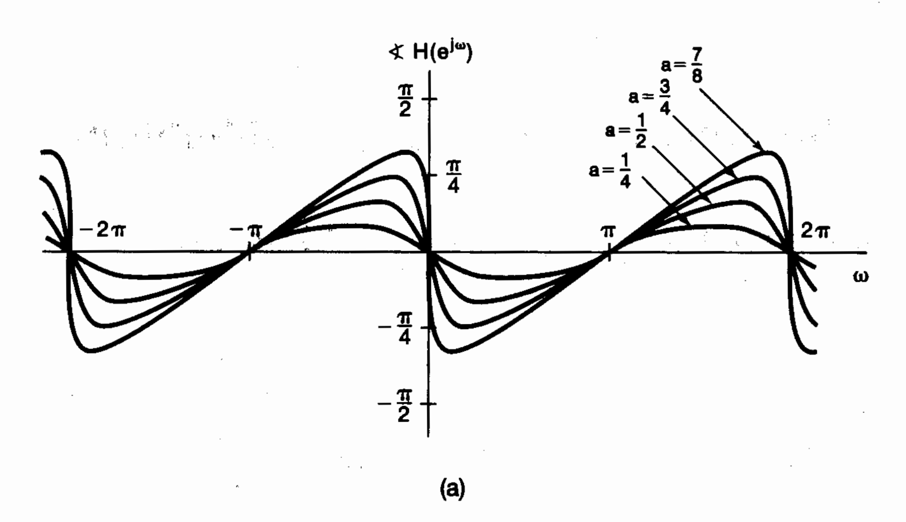
y

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = -\tan^{-1}\left[\frac{a \operatorname{sen} \omega}{1 - a \cos \omega}\right]. \tag{6.56}$$

En la figura 6.28(a) hemos graficado la magnitud log y la fase de la respuesta en frecuencia en la ecuación (6.52) para diversos valores de $a > 0$. El caso de $a < 0$ se ilustra en la figura 6.28(b). A partir de estas figuras, podemos ver que para $a > 0$, el sistema

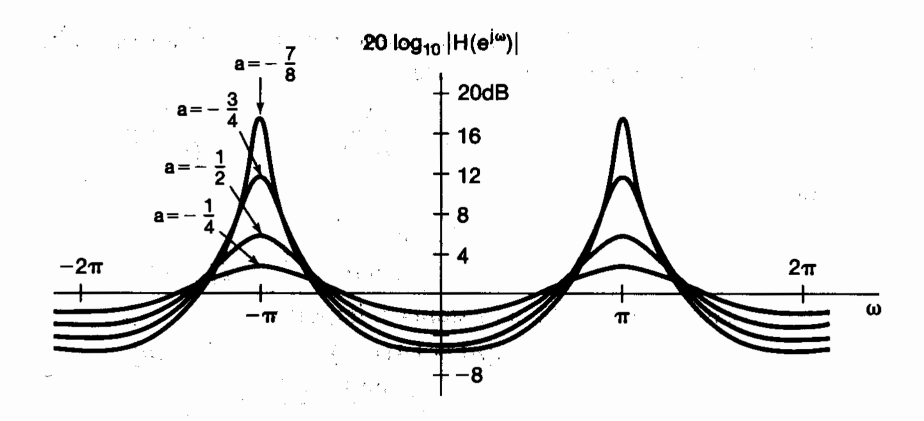
atenúa altas frecuencias [es decir, $|H(e^{j\omega})|$ es más pequeña cuando ω está cerca de $\pm\pi$ que cuando ω está cerca de 0], mientras que cuando $a < 0$, el sistema amplifica las altas frecuencias y atenúa las bajas frecuencias. Observe también que para una $|a|$ pequeña, los valores máximo y mínimo, $1/(1 + a)$ y $1/(1 - a)$, de $|H(e^{j\omega})|$ están más cercanos en valor, y la gráfica de $|H(e^{j\omega})|$ es relativamente plana. Por otro lado, para $|a|$ cercano a 1, estas cantidades difieren de manera significativa, y en consecuencia $|H(e^{j\omega})|$ tiene un pico más pronunciado, lo cual proporciona un filtrado y amplificación que resulta más selectivo sobre una banda estrecha de frecuencias.

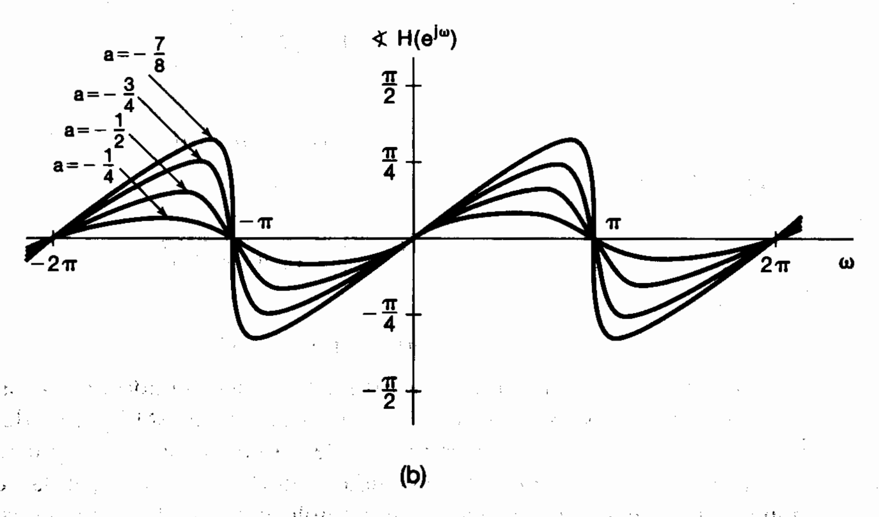




(a)

Figura 6.28 Magnitud y fase de la respuesta en frecuencia de la ecuación (6.52) para un sistema de primer orden: (a) gráficas para diversos valores de $a > 0$; (b) gráficas para diversos valores de $a < 0$.





(b)

Figura 6.28 *Continuación*

6.6.2 Sistemas discretos de segundo orden

Considere ahora el sistema LTI causal de segundo orden descrito por

$$y[n] - 2r\cos\theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n], \tag{6.57}$$

con $0 < r < 1$ y $0 \leq \theta \leq \pi$. La respuesta en frecuencia para este sistema es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}. \tag{6.58}$$

El denominador de $H(e^{j\omega})$ se puede factorizar para obtener

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{[1 - (re^{j\theta})e^{-j\omega}][1 - (re^{-j\theta})e^{-j\omega}]}. \tag{6.59}$$

Para $\theta \neq 0$ o π, los dos factores en el denominador de $H(e^{j\omega})$ son diferentes, y una expansión en fracciones parciales produce

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - (re^{j\theta})e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - (re^{-j\theta})e^{-j\omega}}, \tag{6.60}$$

donde

$$A = \frac{e^{j\theta}}{2j \operatorname{sen} \theta}, \quad B = \frac{e^{-j\theta}}{2j \operatorname{sen} \theta}. \tag{6.61}$$

En este caso, la respuesta del sistema al impulso es

$$\begin{aligned} h[n] &= [A(re^{j\theta})^n + B(re^{j\theta})^n]u[n] \\ &= r^n \frac{\operatorname{sen}[(n+1)\theta]}{\operatorname{sen} \theta} u[n]. \end{aligned} \tag{6.62}$$

Para $\theta = 0$ o π, los dos factores en el denominador de la ecuación (6.58) son el mismo. Cuando $\theta = 0$,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - re^{-j\omega})^2} \tag{6.63}$$

y

$$h[n] = (n+1)r^n u[n]. \tag{6.64}$$

Cuando $\theta = \pi$,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 + re^{-j\omega})^2} \tag{6.65}$$

y

$$h[n] = (n+1)(-r)^n u[n]. \tag{6.66}$$

Las respuestas al impulso de los sistemas de segundo orden están graficadas en la figura 6.29 para diversos valores de r y θ. A partir de esta figura y de la ecuación (6.62), vemos que la velocidad de decaimiento de $h[n]$ está controlada por r, es decir, conforme r se acerque a 1, más lenta será la caída en $h[n]$. De manera similar, el valor de θ determina la frecuencia de oscilación. Por ejemplo, con $\theta = 0$ no hay oscilación en $h[n]$, mientras que para $\theta = \pi$ las oscilaciones son más rápidas. El efecto de diferentes valores de r y θ también se puede ver cuando se examina la respuesta al escalón de la ecuación (6.57). Para $\theta \neq 0$ o π,

$$s[n] = h[n] * u[n] = \left[A\left(\frac{1 - (re^{j\theta})^{n+1}}{1 - re^{j\theta}}\right) + B\left(\frac{1 - (re^{-j\theta})^{n+1}}{1 - re^{-j\theta}}\right)\right] u[n]. \tag{6.67}$$

Asimismo, usando el resultado del problema 2.52, encontramos que para $\theta = 0$,

$$s[n] = \left[\frac{1}{(r-1)^2} - \frac{r}{(r-1)^2} r^n + \frac{r}{r-1}(n+1)r^n\right] u[n], \tag{6.68}$$

mientras que para $\theta = \pi$,

$$s[n] = \left[\frac{1}{(r+1)^2} + \frac{r}{(r+1)^2}(-r)^n + \frac{r}{r+1}(n+1)(-r)^n\right] u[n]. \tag{6.69}$$

La respuesta al escalón está graficada en la figura 6.30, de nueva cuenta, para diferentes valores de r y θ.

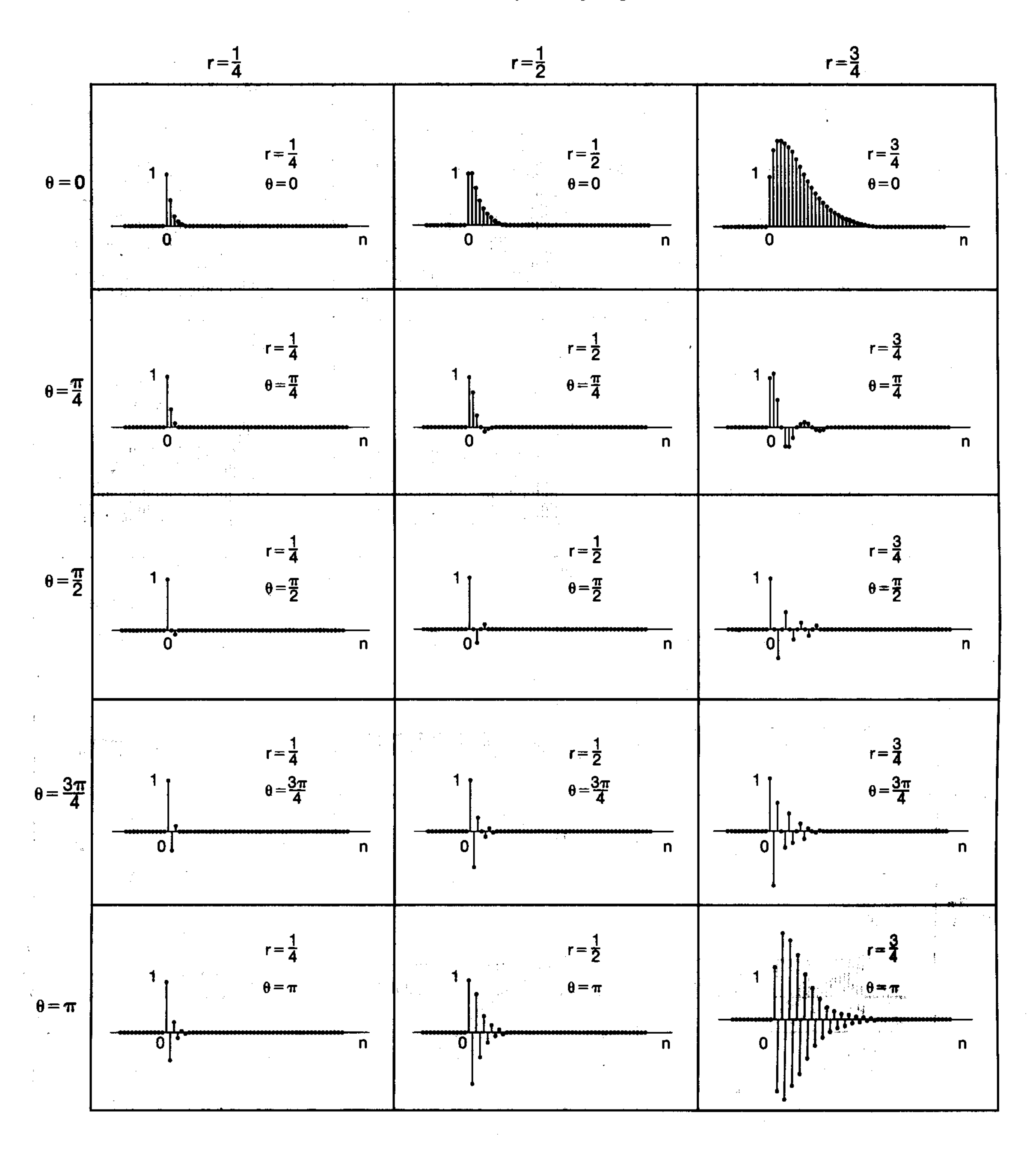
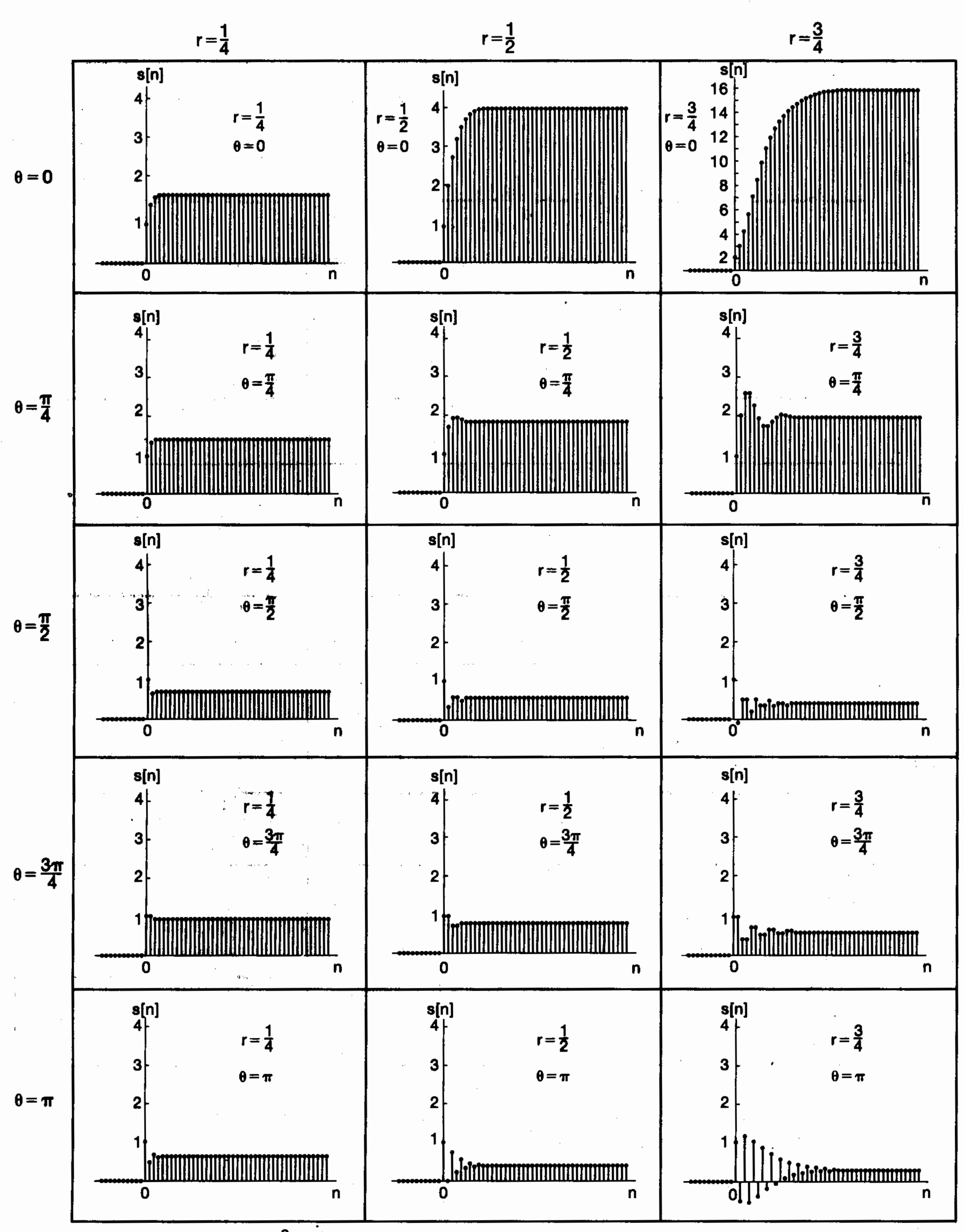


Figura 6.29 Respuestas al impulso del sistema de segundo orden de la ecuación (6.57) para un intervalo de valores de r y θ.

El sistema de segundo orden dado por la ecuación (6.57) es la contraparte del sistema continuo de segundo orden *subamortiguado*, mientras que el caso especial de $\theta = 0$ corresponde al caso críticamente amortiguado. Esto es, para cualquier valor de θ diferente de cero, la respuesta al impulso tiene un comportamiento oscilatorio amortiguado, y



* Nota: La gráfica para $r=\frac{3}{4}$, $\theta=0$ tiene una escala diferente de las demás.

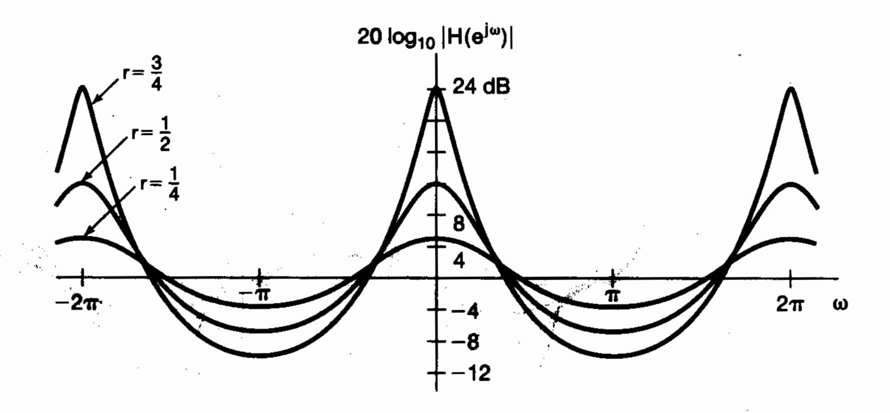
Figura 6.30 Respuestas al escalón del sistema de segundo orden de la ecuación (6.57) para un intervalo de valores de r y θ.

la respuesta al escalón presenta oscilación amortiguada y sobrepaso. La respuesta en frecuencia de este sistema se presenta en la figura 6.31 para diferentes valores de r y θ. De la figura 6.31 podemos ver que una banda de frecuencias se amplifica, y r determina qué tan pronunciado está el pico de la respuesta en frecuencia dentro de esta banda.

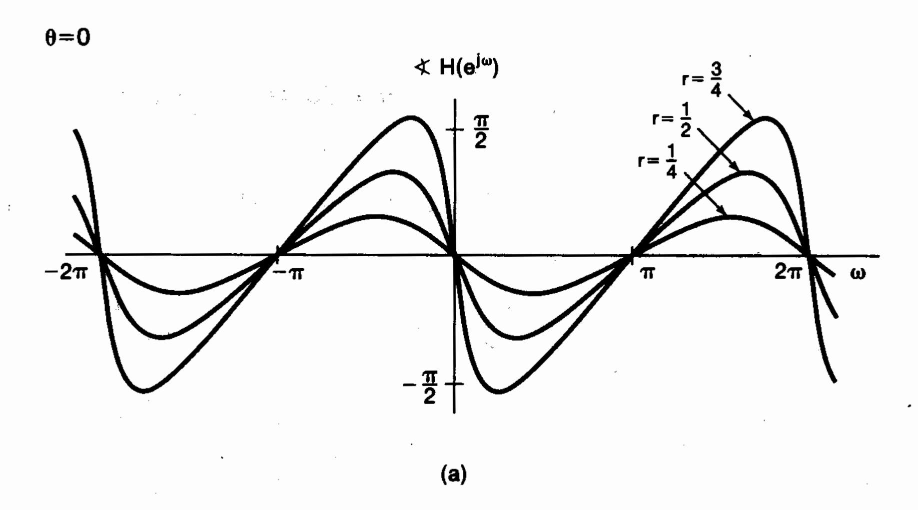
Como hemos visto, el sistema de segundo orden descrito por la ecuación (6.59) tiene factores con coeficientes complejos (a menos que $\theta = 0$ o π). También es posible considerar sistemas de segundo orden que tengan factores con coeficientes reales. Considere específicamente

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - d_1 e^{-j\omega})(1 - d_2 e^{-j\omega})}, \qquad (6.70)$$

donde d_1 y d_2 son números reales con $|d_1|, |d_2| < 1$. La ecuación (6.70) es la respuesta en frecuencia para la ecuación de diferencias

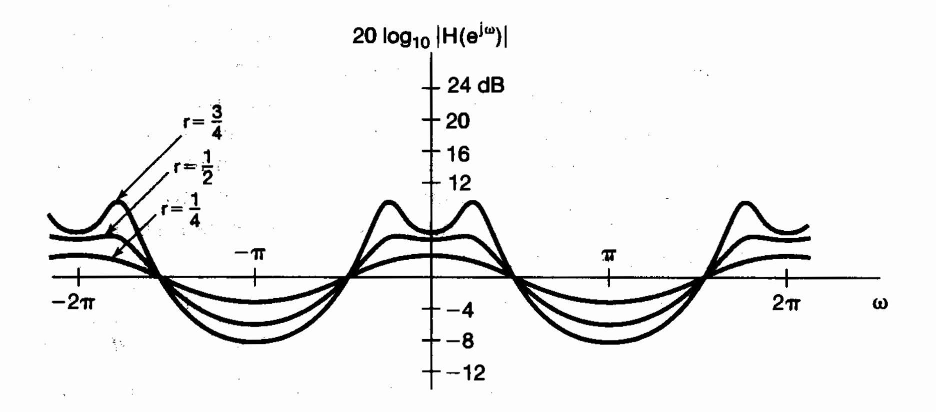


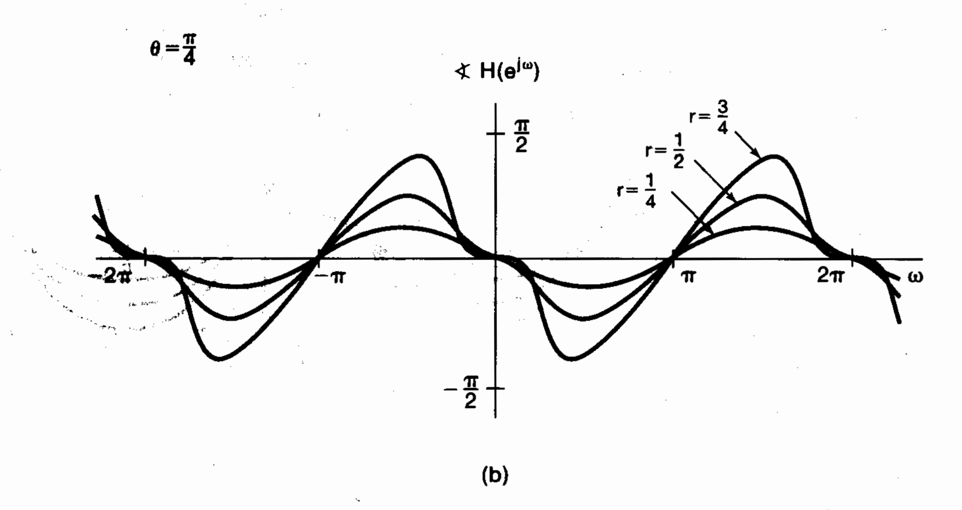
θ=0



(a)

Figura 6.31 Magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del sistema de segundo orden de la ecuación (6.57): (a) $\theta = 0$; (b) $\theta = \pi/4$; (c) $\theta = \pi/2$; (d) $\theta = 3\pi/4$; (e) $\theta = \pi$. Cada gráfica contiene las curvas correspondientes a $r = 1/4$, $1/2$ y $3/4$.





(b)

Figura 6.31 *Continuación*

$$y[n] - (d_1 + d_2)y[n-1] + d_1 d_2 y[n-2] = x[n]. \tag{6.71}$$

En este caso,

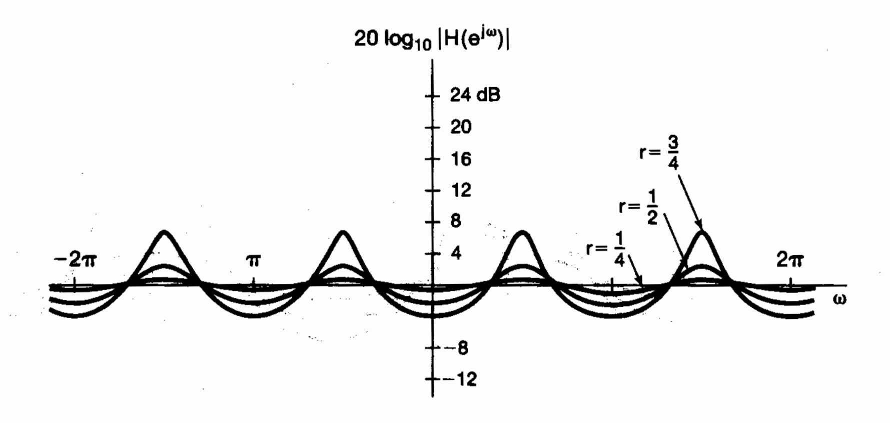
$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - d_1 e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - d_2 e^{-j\omega}}, \tag{6.72}$$

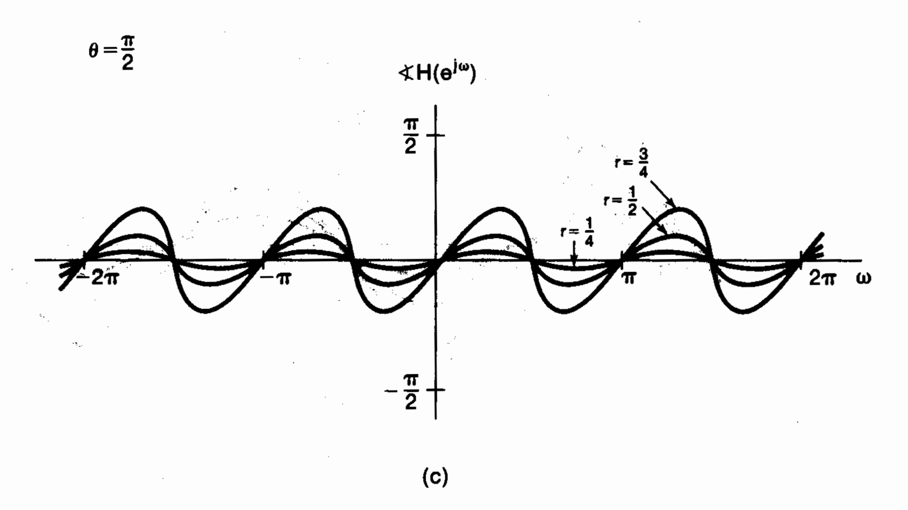
donde

$$A = \frac{d_1}{d_1 - d_2}, \quad B = \frac{d_2}{d_2 - d_1}. \tag{6.73}$$

Por lo tanto,

$$h[n] = [A d_1^n + B d_2^n]u[n], \tag{6.74}$$





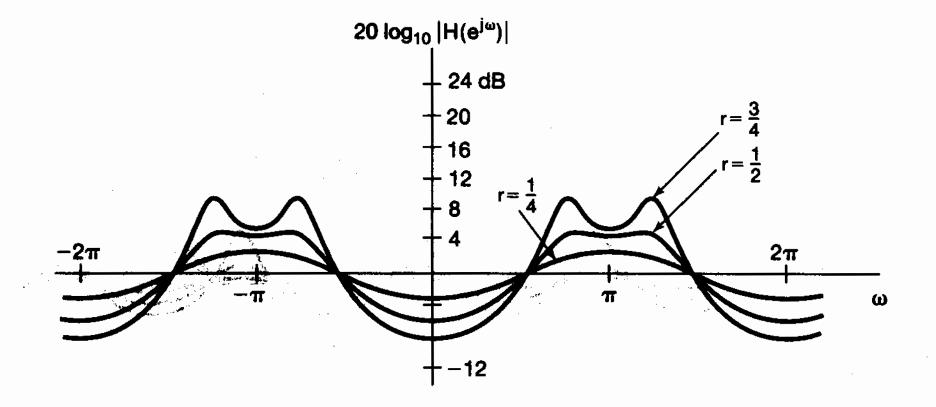
(c)

Figura 6.31 *Continuación*

la cual es la suma de dos exponenciales reales decrecientes. También,

$$s[n] = \left[A\left(\frac{1 - d_1^{n+1}}{1 - d_1}\right) + B\left(\frac{1 - d_2^{n+1}}{1 - d_2}\right)\right]u[n]. \tag{6.75}$$

El sistema con respuesta en frecuencia dada por la ecuación (6.70) corresponde a la conexión en cascada de dos sistema de primer orden. Por lo tanto, podemos deducir la mayor parte de sus propiedades si entendemos el caso de primer orden. Por ejemplo, las gráficas de la magnitud log y la fase para la ecuación (6.70) se pueden obtener sumando las gráficas de cada uno de los dos términos de primer orden. También, como vimos para los sistemas de primer orden, la respuesta del sistema es rápida si $|d_1|$ y $|d_2|$ son pequeños, pero el sistema tiene un tiempo de asentamiento largo si cualquiera de estas magnitudes está cerca de 1. Además, si d_1 y d_2 son negativas, la respuesta es oscilatoria. El caso en que tanto d_1 como d_2 son positivas es la contraparte del caso sobreamortiguado en tiempo continuo, con respuestas al impulso y al escalón sin oscilación.



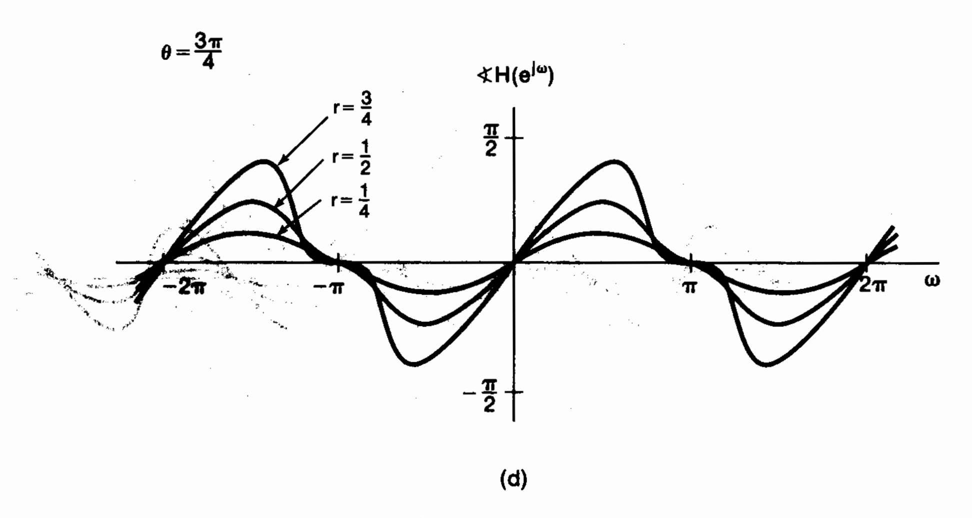


Figura 6.31 *Continuación*

En esta sección hemos dirigido nuestra atención a los sistemas causales de primer y segundo órdenes que son estables y para los cuales se puede definir la respuesta en frecuencia. En particular, el sistema causal descrito por la ecuación (6.51) es inestable para $|a| \geq 1$. El sistema causal descrito por la ecuación (6.56) también es inestable si $r \geq 1$, y el sistema descrito por la ecuación (6.71) es inestable si $|d_1|$ o $|d_2|$ son mayores que 1.

6.7 EJEMPLOS DE ANÁLISIS DE SISTEMAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y DE LA FRECUENCIA

A lo largo de todo el capítulo mostramos la importancia de considerar los sistemas tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia, así como la importancia de conocer el intercambio que hay en el comportamiento entre los dos dominios. En esta sección explicamos algo más de estos aspectos. En la sección 6.7.1 analizaremos estos compromisos para el caso continuo en el contexto de un sistema de suspensión para automóvil. En la sección 6.7.2 analizaremos una clase importante de discretos conocidos como sistemas de promedio móvil o no recursivos.

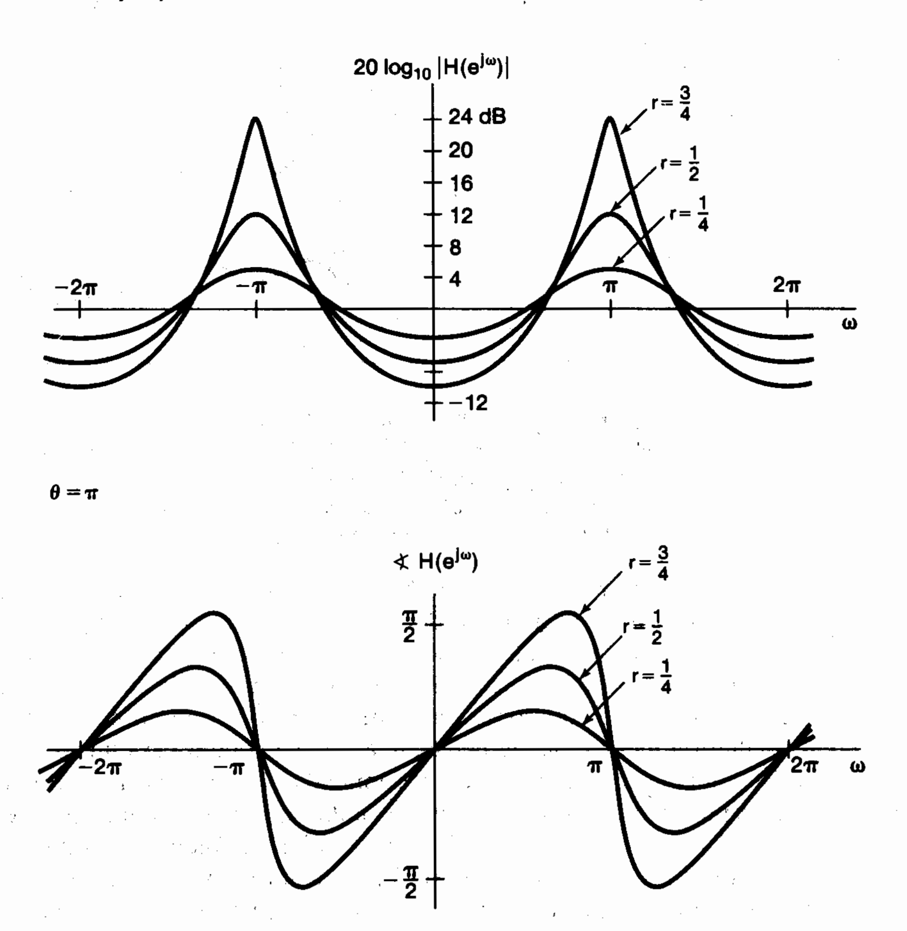


Figura 6.31 *Continuación*

6.7.1 Análisis de un sistema de suspensión para automóvil

Algunos de los conceptos estudiados relativos a las características y compromisos en los sistemas continuos se pueden ilustrar mediante la interpretación de un sistema de suspensión de automóvil como un filtro paso bajas. La figura 6.32 muestra una representación esquemática de un sistema sencillo de suspensión el cual consiste en un resorte y un amortiguador (que absorbe los golpes). La superficie de la carretera se puede considerar como una superposición de cambios rápidos de pequeña amplitud en la elevación (altas frecuencias) que representan la rugosidad de la carretera, y cambios graduales en la elevación (bajas frecuencias) debidos a la topografía en general. Por lo general, el sistema de suspensión del automóvil tiene por objeto filtrar las variaciones rápidas en el viaje del vehículo causadas por la superficie de la carretera (es decir, el sistema actúa como un filtro paso bajas).

El propósito básico del sistema de suspensión es proporcionar un viaje suave y que no exista una división natural aguda entre las frecuencias que se dejan pasar y las que se rechazan. Por lo tanto, es razonable aceptar, y de hecho preferir, un filtro paso bajas que

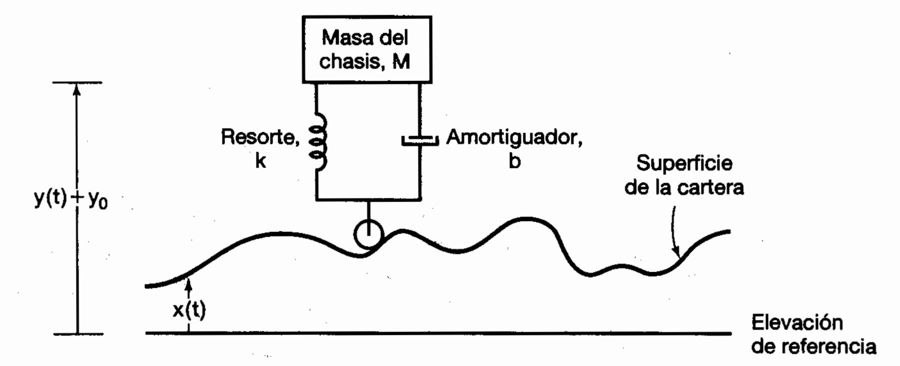


Figura 6.32 Representación esquemática de un sistema de suspensión para automóvil. Aquí, y_0 representa la distancia entre el chasis y la superficie de la carretera cuando el automóvil está en reposo, $y(t) + y_0$ es la posición del chasis por arriba de la elevación de referencia y $x(t)$ es la elevación de la superficie de la carretera por arriba del nivel de referencia.

observe una transición gradual de la banda de paso a la banda de supresión. Además, las características en el dominio del tiempo del sistema son importantes. Si la respuesta al impulso o la respuesta al escalón del sistema de suspensión presenta oscilaciones, entonces una gran protuberancia en la carretera (modelada como una entrada impulso) o un enfrenón (modelado como una entrada escalón) darán como resultado una respuesta oscilatoria incómoda. De hecho, una prueba común para un sistema de suspensión consiste en aplicar una excitación presionando el chasis hacia abajo y después soltándolo. Si la respuesta presenta oscilación, esto indica que el amortiguador necesita ser reemplazado.

El costo y la facilidad de construcción también juegan un papel importante en el diseño de los sistemas de suspensión para automóviles. Muchos estudios se han llevado a cabo para determinar la característica de respuesta en frecuencia más adecuada para los sistemas de suspensión a partir de puntos de vista de la comodidad del pasajero. En situaciones donde se puede justificar el costo, como en los carros de ferrocarril de pasajeros, se usan complejos y costosos sistemas de suspensión. Para la industria del automóvil el costo es un factor importante, por lo que en general se usan sistemas de suspensión sencillos y menos costosos. Un sistema de suspensión típico para automóvil consiste simplemente en un chasis conectado a las ruedas a través de un resorte y un amortiguador.

En la representación esquemática de la figura 6.32, y_0 representa la distancia entre el chasis y la superficie de la carretera cuando el automóvil está en reposo, $y(t) + y_0$ es la posición del chasis arriba de la elevación de referencia y $x(t)$ es la elevación de la carretera por arriba de la elevación de referencia. La ecuación diferencial que gobierna el movimiento del chasis es entonces

$$M\frac{d^2y(t)}{dt} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = kx(t) + b\frac{dx(t)}{dt}, \tag{6.76}$$

donde M es la masa del chasis y k y b son las constantes del resorte y el amortiguador, respectivamente. La respuesta en frecuencia del sistema es

$$H(j\omega) = \frac{k + bj\omega}{(j\omega)^2M + b(j\omega) + k},$$

o

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}, \tag{6.77}$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \text{y} \quad 2\zeta\omega_n = \frac{b}{M}.$$

Al igual que en la sección 6.5.2, el parámetro ω_n se conoce como la frecuencia natural no amortiguada y ζ como la razón de amortiguamiento. Se puede construir un diagrama de Bode de la magnitud log de la respuesta en frecuencia de la ecuación (6.77) usando diagramas de Bode de primer y segundo orden. El diagrama de Bode para la ecuación (6.77) se muestra en la figura 6.33 para diferentes valores de la razón de amortiguamiento.

Como vimos en la sección 6.5.2, la frecuencia de corte del filtro se controla principalmente a través de ω_n, o de manera equivalente para un chasis con una masa fija, mediante la selección apropiada de la constante del resorte k. Para una ω_n dada, la razón de amortiguamiento se ajusta a través del factor de amortiguamiento b asociado con los amortiguadores. Conforme la frecuencia natural ω_n disminuye, la suspensión tiende a filtrar las variaciones más lentas del camino, permitiendo entonces un viaje más suave. Por otro lado, vemos, gracias a la figura 6.34, que el tiempo de subida del sistema aumenta, y por consiguiente el sistema se vuelve más lento. Por una parte, sería conveniente mantener a ω_n pequeña para mejorar el filtrado paso bajas; por la otra, también sería deseable tener una ω_n grande para una rápida respuesta en el tiempo. Por supuesto, todo ello constituye requerimientos contradictorios que muestran la necesidad de un compromiso entre las características en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. Típicamente, un sistema de suspensión con un valor bajo de ω_n tal que el tiempo de subida sea grande, se caracteriza como uno "suave", mientras que uno con un valor grande de ω_n cuyo tiempo de subida sea corto, se caracteriza como uno "duro". De las figuras 6.33 y 6.34, observamos también que, conforme disminuye la razón de amortiguamiento, la respuesta en frecuencia del sistema cambia más abruptamente, pero el sobrepaso y la oscilación amortiguada tienden a incrementarse, lo cual implica otro compromiso entre los dominios del

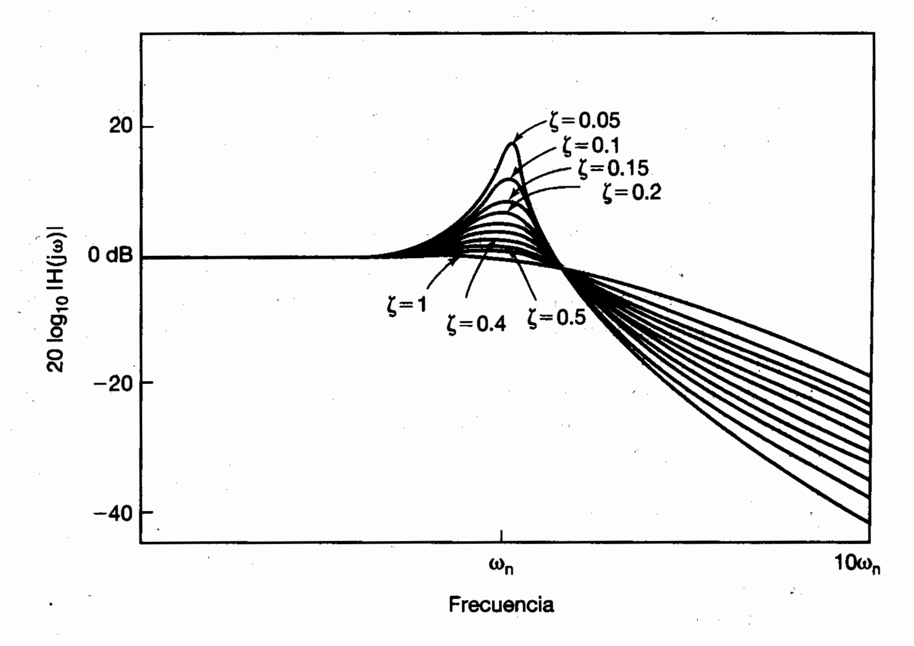


Figura 6.33 Diagrama de Bode para la magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema de suspensión para automóvil para varios valores de la razón de amortiguamiento.

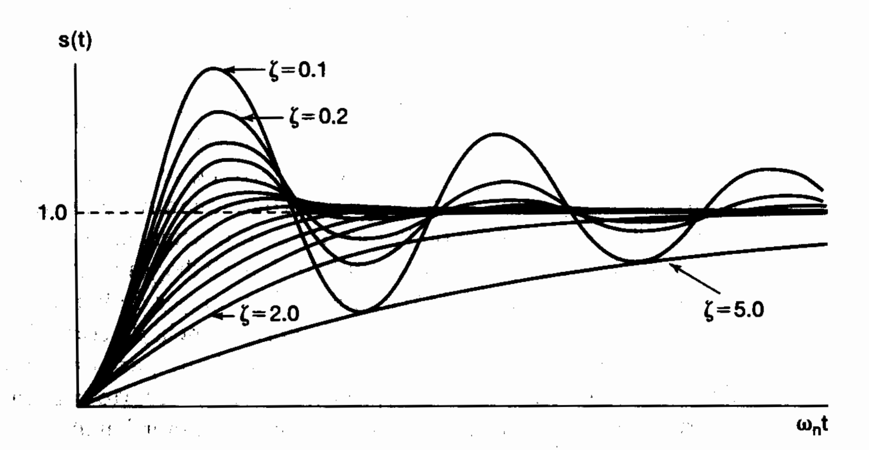


Figura 6.34 Respuesta al escalón del sistema de suspensión para automóvil para diferentes valores de la razón de amortiguamiento (ζ = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 1.5, 2.0, 5.0).

tiempo y de la frecuencia. Por lo general, la amortiguación se selecciona de modo que tenga un tiempo de subida rápido y, al mismo tiempo, evite el sobrepaso y la oscilación. Esta selección corresponde al caso críticamente amortiguado, con $\zeta = 1.0$, considerado en la sección 6.5.2.

6.7.2 Ejemplos de filtros discretos no recursivos

En la sección 3.11 presentamos las dos clases básicas de filtros LTI descritos por ecuaciones de diferencias, es decir, los filtros recursivos o de respuesta infinita al impulso (IIR, por sus siglas en inglés) y los filtros no recursivos o de respuesta finita al impulso (FIR, por sus siglas en inglés). Ambas clases de filtros son de gran importancia en la práctica y poseen sus propias ventajas y desventajas. Por ejemplo, los filtros recursivos construidos mediante las interconexiones de sistemas de primer y segundo órdenes, descritos en la sección 6.6, producen una clase flexible de filtros que se pueden construir fácil y eficientemente y cuyas características se pueden ajustar variando el número y los parámetros de cada componente de los subsistemas de primer y segundo orden. Por otro lado, como se muestra en el problema 6.64, no es posible diseñar un filtro recursivo causal con exactamente fase lineal, una propiedad que, como hemos visto, a menudo resulta deseable ya que, en este caso, el efecto de la fase en la señal de salida es un simple retardo en el tiempo. En contraste, como mostramos en esta sección, los filtros no recursivos *pueden* tener exactamente la fase lineal. Sin embargo, por lo general también las mismas especificaciones del filtro requieren de una ecuación de mayor orden, lo que a su vez repercute en más coeficientes y retardos cuando se construye con una ecuación no recursiva en comparación con la ecuación de diferencias recursiva. En consecuencia, para los filtros FIR, uno de los principales compromisos entre los dominios del tiempo y de la frecuencia es que al incrementar la flexibilidad en la especificación de la característica en el dominio de la frecuencia del filtro, incluyendo por ejemplo, el lograr un mayor grado de selectividad en frecuencia, requiere de un filtro FIR con una respuesta al impulso cuya duración sea más larga.

Uno de los filtros recursivos básicos, presentado en la sección 3.11.2, es el filtro de promedio móvil. Para esta clase de filtros, la salida es el promedio de los valores de la entrada sobre una ventana finita:

$$y[n] = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^{M} x[n-k]. \tag{6.78}$$

La respuesta al impulso correspondiente es un pulso rectangular, y la respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N + M + 1} e^{j\omega[(N-M)/2]} \frac{\text{sen}[\omega(M + N + 1)/2]}{\text{sen}(\omega/2)}. \tag{6.79}$$

En la figura 6.35 mostramos la magnitud log para $M + N + 1 = 33$ y $M + N + 1 = 65$. El lóbulo principal en el centro de cada respuesta en frecuencia corresponde a la banda de paso efectiva del filtro correspondiente. Observe que, conforme se incrementa en longitud la respuesta al impulso, disminuye el ancho del lóbulo principal de la magnitud de la respuesta en frecuencia. Éste es otro ejemplo del compromiso entre los dominios del tiempo y de la frecuencia. En concreto, para tener una banda de paso más angosta, el filtro en las ecuaciones (6.78) y (6.79) deben tener una respuesta al impulso más larga. Puesto que la longitud de la respuesta al impulso de un filtro FIR tiene un impacto directo en la complejidad de su construcción, esto implica un compromiso entre la selectividad de frecuencia y la complejidad del filtro, un tema de importancia en el diseño de filtros.

Los filtros de promedio móvil a menudo se aplican en el análisis económico para atenuar las fluctuaciones a corto plazo en relación con las tendencias a largo plazo que se presentan en una gran variedad de indicadores económicos. En la figura 6.36 mostramos el uso de un filtro de promedio móvil de la forma de la ecuación (6.78) en el índice semanal Dow Jones de la bolsa de valores para una periodo de 10 años. El índice semanal Dow Jones se muestra en la figura 6.36(a). La figura 6.36(b) corresponde a un promedio móvil de 51 días (es decir, $N = M = 25$) aplicado a ese índice, y la figura 6.36(c) corresponde a un promedio móvil de 201 días (es decir, $N = M = 100$) aplicado a dicho índice. Ambos promedios móviles son de utilidad, pues con el promedio de 51 días se rastrean las tendencias cíclicas (es decir, periódicas) que ocurren durante el curso del año, mientras que el promedio de 201 días enfatiza principalmente las tendencias sobre una referencia de tiempo más grande.

La forma más general de un filtro discreto no recursivo es

$$y[n] = \sum_{k=-N}^{M} b_k x[n-k], \tag{6.80}$$

de manera que la salida de este filtro se puede considerar como un promedio ponderado de $N + M + 1$ puntos vecinos. El filtro sencillo de promedio móvil de la ecuación (6.78) corresponde entonces a ajustar todos estos pesos al mismo valor, es decir, $1/(N + M + 1)$. Sin embargo, si seleccionamos estos coeficientes de maneras diferentes, tendremos bastante flexibilidad en el ajuste de la respuesta en frecuencia del filtro.

De hecho, hay una gran variedad de técnicas disponibles para seleccionar los coeficientes en la ecuación (6.80) para cumplir con ciertas especificaciones en el filtro, tales como agudizar lo más que sea posible la banda de transición para un filtro de una determinada longitud (es decir, para N+M+1 fijo). Estos procedimientos se analizan con detalle en varios textos,[3] y aunque no los analizamos aquí, es importante enfatizar que se basan fuertemente en los conceptos básicos y en las herramientas desarrolladas en este

[3]Consulte, por ejemplo, R. W. Hamming, *Digital Filters*, 3ª edición (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1989); A. V. Oppenheim y R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1989); y L. R. Rabiner y B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1975).

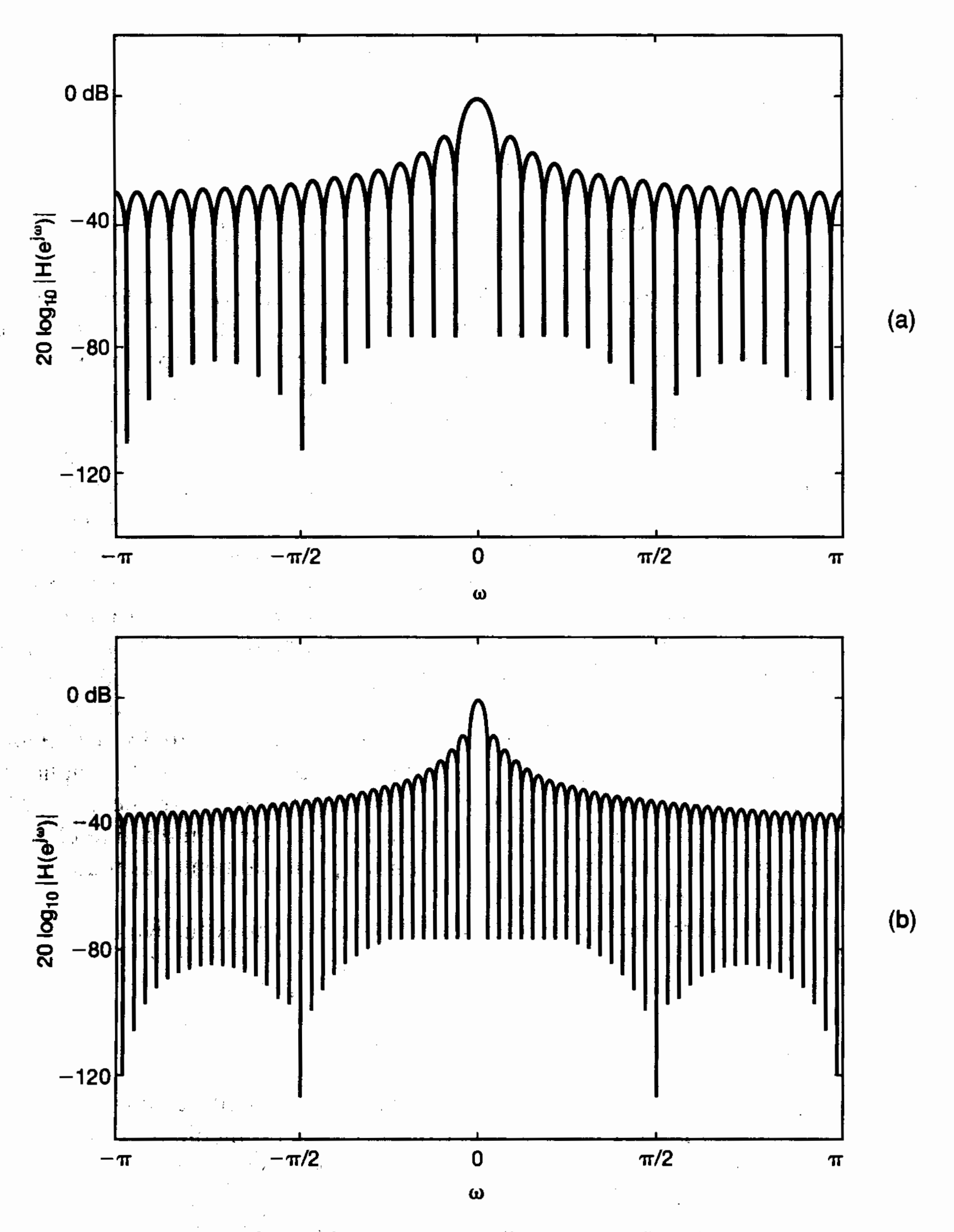
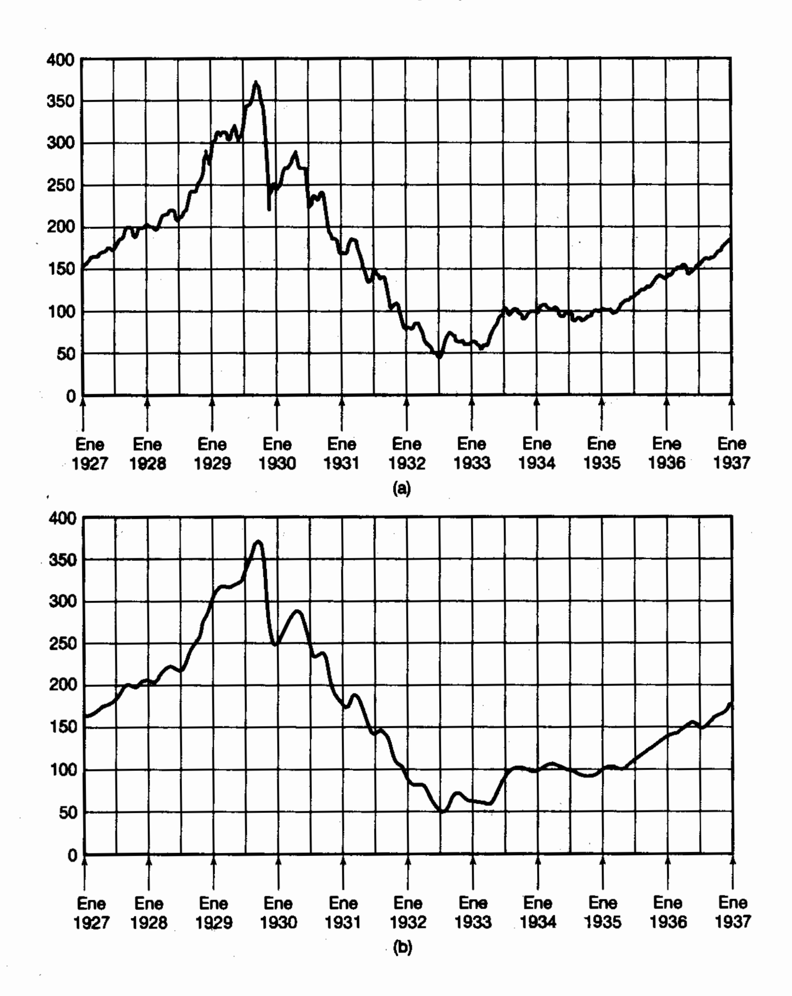


Figura 6.35 Gráficas de la magnitud logarítmica para el filtro de promedio móvil de las ecuaciones (6.78) y (6.79) para (a) $M + N + 1 = 33$ y (b) $M + N + 1 = 65$.

libro. Para ejemplificar cómo el ajuste de los coeficientes puede influir en la respuesta del filtro, consideremos un filtro con la forma de la ecuación (6.80), con $N = M = 16$ y los coeficientes del filtro como

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2\pi k/33)}{\pi k}, & |k| \le 32 \\ 0, & |k| > 32 \end{cases}. \tag{6.81}$$



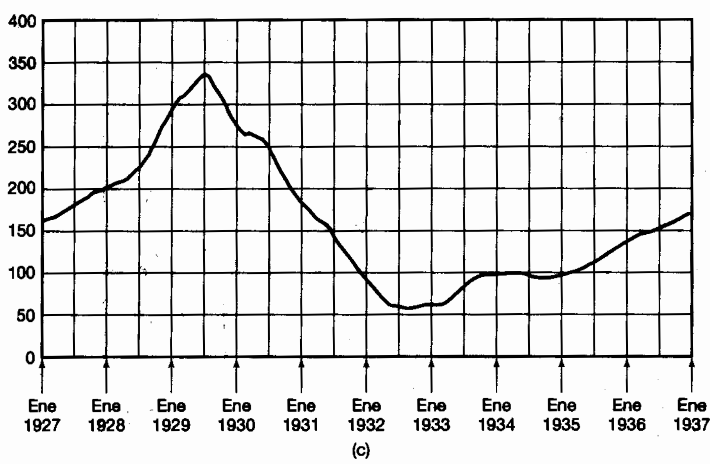


Figura 6.36 Efecto del filtrado paso bajas en el índice semanal Dow Jones del mercado de valores sobre un periodo de 10 años usando filtros de promedio móvil: (a) índice semanal; (b) promedio móvil de 51 días aplicado a (a); (c) promedio móvil de 201 días aplicado a (a). El índice semanal del mercado de valores y los dos promedios móviles son secuencias discretas. Para mayor claridad en la presentación gráfica, las tres secuencias se muestran aquí con los valores de la secuencia individual unido mediante líneas rectas para formar una línea continua.

La respuesta al impulso de este filtro es

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2\pi n/33)}{\pi n}, & |n| \le 32 \\ 0, & |n| > 32 \end{cases}. \tag{6.82}$$

Comparando esta respuesta al impulso con la ecuación (6.20), podemos observar que la ecuación (6.82) corresponde al truncamiento para $|n| > 32$, de la respuesta al impulso del filtro paso bajas ideal con frecuencia de corte $\omega_c = 2\pi/33$.

En general, los coeficientes b_k se pueden ajustar de manera que la frecuencia de corte esté al valor deseado. Para el ejemplo mostrado en la figura 6.37, la frecuencia de corte se seleccionó para igualar aproximadamente la frecuencia de corte de la figura 6.35 para $N = M = 16$. La figura 6.37(a) muestra la respuesta al impulso del filtro y la figura 6.37(b) muestra la magnitud log de la respuesta en frecuencia en dB. Si comparamos esta respuesta en frecuencia con la figura 6.35, podemos observar que la banda de paso del filtro tiene aproximadamente el mismo ancho, pero la transición a la banda de supresión es más aguda. En las figuras 6.38(a) y (b) se muestra, para su comparación, las magnitudes

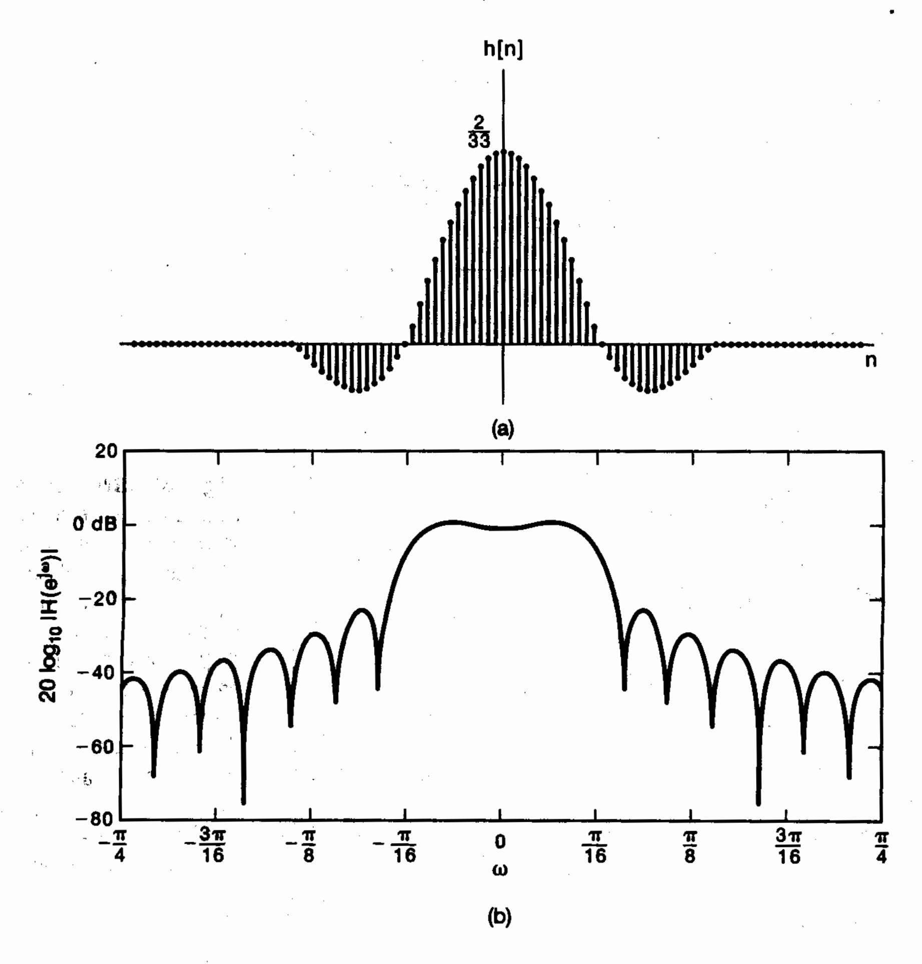


Figura 6.37 (a) Respuesta al impulso del filtro no recursivo de la ecuación (6.82); (b) magnitud logarítmica de la respuesta en frecuencia del filtro.

(en una escala de amplitud lineal) de los dos filtros. A partir de la comparación de los dos ejemplos, debería resultar claro que, mediante la selección adecuada de los coeficientes ponderados se puede agudizar la banda de transición. En la figura 6.39 se muestra el ejemplo de un filtro paso bajas de orden superior ($N = M = 125$), con los coeficientes determinados mediante un algoritmo numérico conocido como el algoritmo de Parks-McClellan.[4] Éste ilustra, nuevamente, el compromiso entre los dominios del tiempo y de la frecuencia: si incrementamos la longitud $N + M + 1$ del filtro, entonces, mediante una selección adecuada de los coeficientes del filtro en la ecuación (6.80), podremos obtener un comportamiento más abrupto en la banda de transición y un grado mayor de selectividad en frecuencia.

Una propiedad importante de los ejemplos que hemos dado es que todos tienen características de fase cero o lineales. Por ejemplo, la fase del filtro de promedio móvil de la ecuación (6.79) es $\omega[(N - M)/2]$. Además, puesto que la respuesta al impulso en la ecuación (6.82) es real y par, la respuesta al impulso del filtro descrita por esa ecuación es también real y par y tiene por lo tanto fase cero. A partir de las propiedades de simetría de la transformada de Fourier de las señales reales, sabemos que *cualquier* filtro no recursivo con una respuesta al impulso que sea real y par tendrá una respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ que será real y par, y en consecuencia tendrá fase cero. De hecho, este filtro es no causal, ya que su respuesta al impulso $h[n]$ tiene valores diferente de cero para $n < 0$. Sin embargo, si se requiere un filtro causal, entonces con un simple cambio en la respuesta al impulso se puede lograr lo anterior, lo cual dará como resultado un sistema con fase *lineal*. Específicamente, ya que $h[n]$ es la respuesta al impulso de un filtro FIR, y es cero

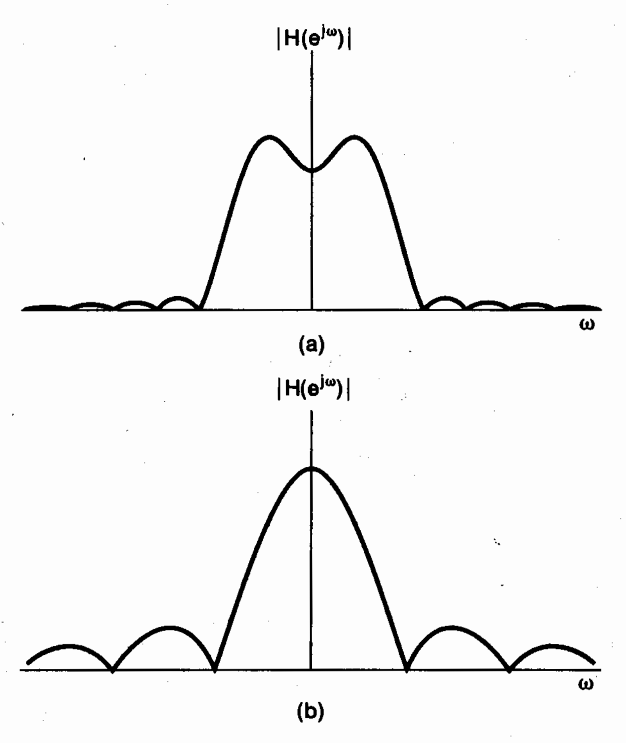


Figura 6.38 Comparación, en una escala lineal de amplitud, de las respuestas en frecuencia de (a) la figura 6.37 y (b) la figura 6.35.

[4]A. V. Oppenheim y R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1989), capítulo 7.

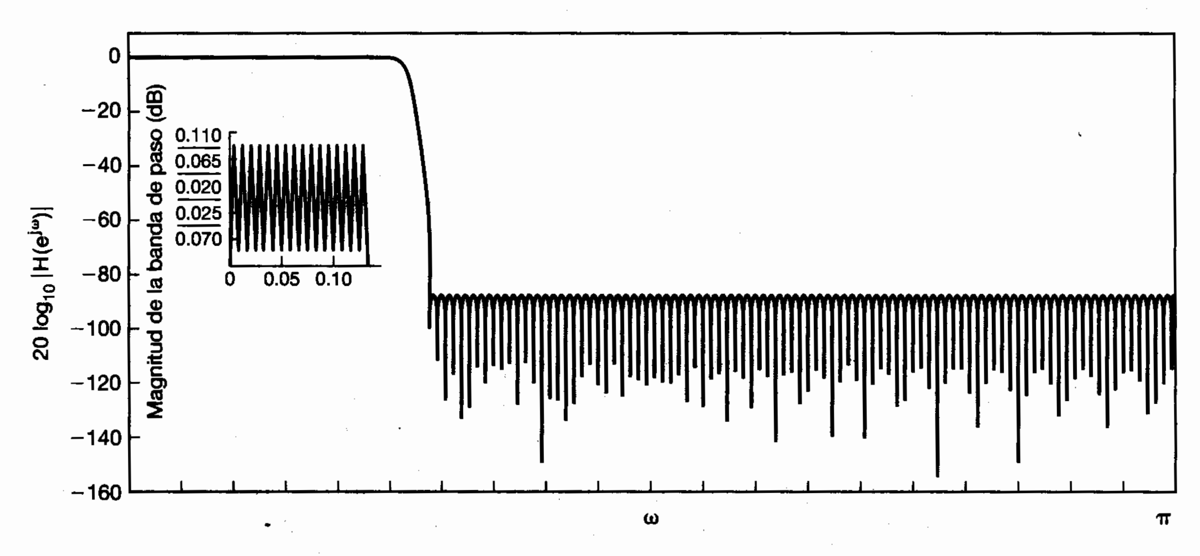


Figura 6.39 Filtro paso bajas no recursivo con 251 coeficientes diseñados para obtener el corte más agudo posible.

fuera del intervalo de valores centrado en el origen (es decir, $h[n] = 0$ para toda $|n| > N$). Si ahora definimos el sistema LTI no recursivo que es resultado de un simple retardo de N pasos de $h[n]$, es decir,

$$h_1[n] = h[n - N], \tag{6.83}$$

entonces $h_1[n] = 0$ para toda $n < 0$, de modo que este sistema LTI es causal. Además, de la propiedad de desplazamiento de tiempo para las transformadas de Fourier de tiempo discreto, vemos que la respuesta en frecuencia del sistema es

$$H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})e^{-j\omega N}. \tag{6.84}$$

Puesto que $H(e^{j\omega})$ tiene fase cero, $H_1(e^{j\omega})$ tiene, de hecho, fase lineal.

6.8 RESUMEN

En este capítulo presentamos los fundamentos para el análisis de Fourier de las señales y los sistemas desarrollados en los capítulos 3-5 de modo que pudiéramos examinar con más detalle las características de los sistemas LTI y los efectos que tienen sobre las señales. En particular, hemos revisado cuidadosamente las características de magnitud y fase de las señales y los sistemas y hemos introducido los conceptos de magnitud log y diagramas de Bode para los sistema LTI. También hemos discutido el impacto que tienen la fase y la distorsión de fase sobre las señales y sistemas. Este análisis nos permitió entender el papel tan especial que juegan las características de fase lineales, las cuales reflejan un retardo constante en todas las frecuencias y, a su vez, conducen al concepto de retardo de grupo no constante y la dispersión asociada con los sistemas que tienen características de fase no lineales. Usando estos conocimientos y herramientas, echamos otro vistazo a los filtros selectivos en frecuencia y al compromiso tiempo-frecuencia involucrado. Examinamos las propiedades de los filtros selectivos en frecuencia ideales y no ideales, y vimos que las consideraciones de tiempo-frecuencia, las restricciones de causalidad y los aspectos de la construcción a menudo hacen que los filtros no ideales con bandas de transición y límites de tolerancia en las bandas de paso y supresora, resulten la elección preferida.

También examinamos con detalle la característica de tiempo-frecuencia de los sistemas de primer y segundo orden tanto continuos como discretos. Observamos en particular el compromiso entre el tiempo de respuesta de estos sistemas y el ancho de banda en el dominio de la frecuencia. Puesto que los sistemas de primer y segundo órdenes son los bloques básicos de sistemas más complejos, como los sistemas LTI de orden superior, los conceptos desarrollados para estos sistemas básicos son de uso considerable en la práctica.

Por último, presentamos también varios ejemplos de sistemas LTI para ilustrar muchos de los puntos desarrollados en el capítulo. En particular, examinamos un modelo sencillo de un sistema de suspensión para automóvil que proporcionara un ejemplo concreto sobre las inquietudes acerca de la respuesta en tiempo y la respuesta en frecuencia que determinan el diseño práctico de sistemas. También consideramos varios ejemplos de filtros no recursivos discretos, desde los filtros sencillos de promedio móvil hasta los filtros FIR de mayor orden que se pueden diseñar de manera tal que posean exactamente fase lineal. Estos ejemplos, el desarrollo de las herramientas del análisis de Fourier que los preceden y el conocimiento que proporcionan esas herramientas, muestran el considerable valor de los métodos del análisis de Fourier en el análisis y diseño de los sistemas LTI.

Capítulo 6 Problemas

La primera sección de problemas comprende la categoría básica, y las respuestas se proporcionan al final del libro. Las dos secciones restantes contienen problemas que abarcan las categorías básica y avanzada, respectivamente.

PROBLEMAS BÁSICOS CON RESPUESTAS

6.1. Considere un sistema LTI continuo con respuesta en frecuencia $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{\sphericalangle H(j\omega)}$ y la respuesta al impulso real $h(t)$. Suponga que aplicamos una entrada $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ a este sistema. Se puede demostrar que la salida resultante tiene la forma

$$y(t) = Ax(t - t_0),$$

donde A es un número real no negativo que representa un factor de *escalamiento en amplitud* y t_0 es un retardo en tiempo.

(a) Exprese A en términos de $|H(j\omega_0)|$.

(b) Exprese t_0 en términos de $\sphericalangle H(j\omega_0)$.

6.2. Considere un sistema LTI discreto con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\sphericalangle H(j\omega)}$ y respuesta al impulso real $h[n]$. Suponga que aplicamos una entrada $x[n] = \text{sen}(\omega_0 n + \phi_0)$ a este sistema. Se puede demostrar que la salida resultante tiene la forma

$$y[n] = |H(e^{j\omega_0})|\, x[n - n_0],$$

siempre y cuando $\sphericalangle H(e^{j\omega_0})$ y ω_0 estén relacionadas en una forma particular. Determine dicha relación.

6.3. Considere la siguiente respuesta en frecuencia para un sistema LTI causal y estable:

$$H(j\omega) = \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega}.$$

(a) Demuestre que $|H(j\omega)| = A$, y determine el valor de A.
(b) Determine cuál de los siguientes enunciados es válido acerca de $\tau(\omega)$, el retardo de grupo del sistema. (*Nota*: $\tau(\omega) = -d(\sphericalangle H(j\omega))/d\omega$, donde $\sphericalangle H(j\omega)$ se expresa en una forma que no contiene discontinuidades.)
1. $\tau(\omega) = 0$ para $\omega > 0$
2. $\tau(\omega) > 0$ para $\omega > 0$
3. $\tau(\omega) < 0$ para $\omega > 0$

6.4. Considere un sistema LTI discreto con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ y respuesta al impulso real $h[n]$. La función de retardo de grupo para este sistema se define como

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\sphericalangle H(e^{j\omega}),$$

donde $\sphericalangle H(e^{j\omega})$ no tiene discontinuidades. Suponga que, para este sistema

$$|H(e^{j\pi/2})| = 2, \quad \sphericalangle H(e^{j0}) = 0, \quad \text{y} \quad \tau\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Determine la salida del sistema para cada una de las siguientes entradas:
(a) $\cos(\frac{\pi}{2}n)$ **(b)** $\text{sen}(\frac{7\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})$

6.5. Considere un filtro paso banda ideal continuo cuya respuesta en frecuencia es

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_c \le |\omega| \le 3\omega_c \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

(a) Si $h(t)$ es la respuesta al impulso de este filtro, determine una función $g(t)$ tal que

$$h(t) = \left(\frac{\text{sen}\,\omega_c t}{\pi t}\right) g(t).$$

(b) Conforme ω_c se incrementa, diga si la respuesta al impulso del filtro se concentra más o menos alrededor del origen.

6.6. Considere un filtro paso altas ideal discreto cuya respuesta en frecuencia se especifica como

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \pi - \omega_c \le |\omega| \le \pi \\ 0, & |\omega| < \pi - \omega_c \end{cases}.$$

(a) Si $h[n]$ es la respuesta al impulso de este filtro, determine la función $g[n]$ tal que

$$h[n] = \left(\frac{\text{sen}\,\omega_c n}{\pi n}\right) g[n].$$

(b) A medida que ω_c se incrementa, diga si la respuesta al impulso del filtro se concentra más o menos alrededor del origen.

6.7. Un filtro paso bajas continuo se ha diseñado con una frecuencia en la banda de paso de 1,000 Hz, una frecuencia en la banda de supresión de 1,200 Hz, un rizo en la banda de paso de 0.1 y un rizo en la banda de supresión de 0.05. La respuesta al impulso de este filtro paso bajas se denota con $h(t)$. Deseamos convertir el filtro en uno paso banda con respuesta al impulso

$$g(t) = 2h(t)\cos(4{,}000\pi t).$$

Considerando que $|H(j\omega)|$ es despreciable para $|\omega| > 4{,}000\pi$, responda las siguientes preguntas:

(a) Si el rizo de la banda de paso para el filtro paso banda está limitado a 0.1, ¿cuáles son las dos frecuencias de la banda de paso asociadas con el filtro paso banda?

(b) Si el rizo de la banda de supresión para el filtro paso banda está limitado a 0.05, ¿cuáles son las dos frecuencias de la banda de supresión asociadas con el filtro paso banda?

6.8. Un filtro paso banda causal no ideal está diseñado con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$. La ecuación de diferencias que relaciona la entrada $x[n]$ con la salida $y[n]$ está especificada como

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].$$

El filtro también satisface las siguientes especificaciones para la magnitud de su respuesta en frecuencia:

$$\text{frecuencia en la banda de paso} = \omega_p,$$
$$\text{tolerancia en la banda de paso} = \delta_p,$$
$$\text{frecuencia en la banda de supresión} = \omega_s,$$
$$\text{tolerancia en la banda de supresión} = \delta_s.$$

Ahora considere un sistema LTI causal cuya entrada y salida están relacionadas mediante la ecuación de diferencias

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} (-1)^k b_k x[n-k].$$

Demuestre que este filtro tiene una banda de paso con una tolerancia δ_p y especifique la localización correspondiente de la banda de paso.

6.9. Considere un sistema LTI causal estable continuo, cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ están relacionadas mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 2x(t).$$

¿Cuál es el valor final $s(\infty)$ de la respuesta al escalón $s(t)$ de este filtro? También determine el valor de t_0 para el cual

$$s(t_0) = s(\infty)\left[1 - \frac{1}{e^2}\right].$$

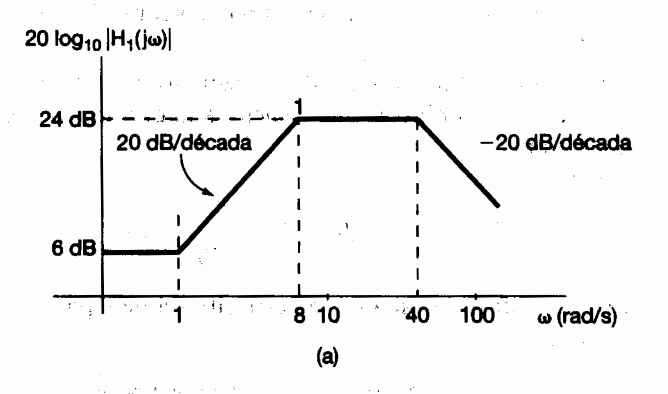
6.10. Para cada sistema de primer orden cuya respuesta en frecuencia es la indicada, especifique la aproximación en línea recta de la magnitud del diagrama de Bode:

(a) $40\left(\frac{j\omega + 0.1}{j\omega + 40}\right)$ **(b)** $0.04\left(\frac{j\omega + 50}{j\omega + 0.2}\right)$

6.11. Para cada sistema de segundo orden cuya respuesta en frecuencia es la indicada, especifique la aproximación en línea recta de la magnitud del diagrama de Bode:

(a) $\frac{250}{(j\omega)^2 + 50.5j\omega + 25}$ **(b)** $0.02\frac{j\omega + 50}{(j\omega)^2 + 0.2j\omega + 1}$

6.12. Un sistema LTI S continuo con respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ está construido mediante la conexión en cascada de dos sistemas LTI continuos con respuestas en frecuencia $H_1(j\omega)$ y $H_2(j\omega)$, respectivamente. Las figuras P6.12(a) y P6.12(b) muestran la aproximación en línea recta de la magnitud del diagrama de Bode de $H_1(j\omega)$ y $H(j\omega)$, respectivamente. Especifique $H_2(j\omega)$.



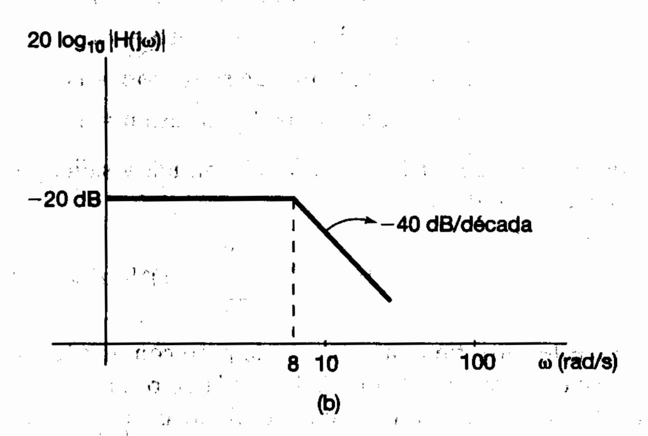


Figura P6.12

6.13. En la figura P6.13 se muestra la aproximación en línea recta de la magnitud del diagrama de Bode de un sistema LTI S de segundo orden. S se puede construir mediante

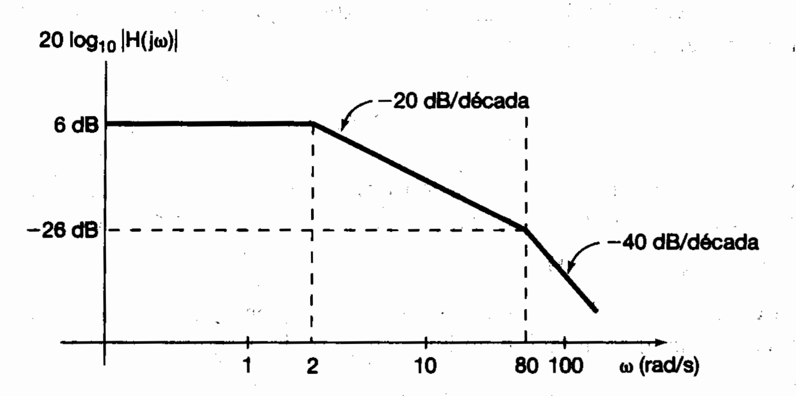


Figura P6.13

la conexión de dos sistemas de primer orden S_1 y S_2 en cascada o de dos sistemas de primer orden S_3 y S_4 en paralelo. Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifique sus respuestas.

(a) Las respuestas en frecuencia de S_1 y S_2 se pueden determinar de manera única.

(b) Las respuestas en frecuencia de S_3 y S_4 se pueden determinar de manera única.

6.14. En la figura P6.14 se muestra la aproximación en línea recta de la magnitud del diagrama de Bode de un sistema LTI S causal y estable continuo. Especifique la respuesta en frecuencia de un sistema que sea el inverso de S.

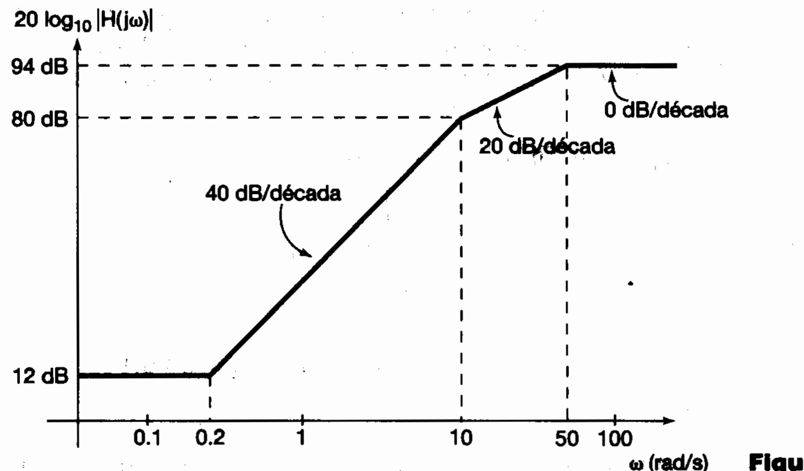


Figura P6.14

6.15. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden para los sistemas LTI causales estables, determine si la respuesta al impulso correspondiente es subamortiguada, sobreamortiguada o críticamente amortiguada:

(a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t)$

(b) $5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 7x(t)$

(c) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 20\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

(d) $5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 7x(t) + \frac{1}{3}\frac{dx(t)}{dt}$

6.16. Un sistema LTI causal estable discreto tiene una respuesta al escalón cuyo sobrepaso máximo es el 50% de su valor final. Si el valor final es 1, determine una ecuación de diferencias que relacione la entrada $x[n]$ con la salida $y[n]$ de este filtro.

6.17. Para cada una de las siguientes ecuaciones de diferencias de segundo orden para sistemas LTI causales estables, determine si la respuesta al escalón del sistema es o no oscilatoria:

(a) $y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$

(b) $y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$

6.18. Considere el sistema LTI continuo construido como el circuito RC mostrado en la figura P6.18. La fuente de voltaje $x(t)$ se considera la entrada a este sistema. El voltaje $y(t)$ a través del capacitor se considera la salida del sistema. ¿Es posible que la respuesta al escalón del sistema presente un comportamiento oscilatorio?

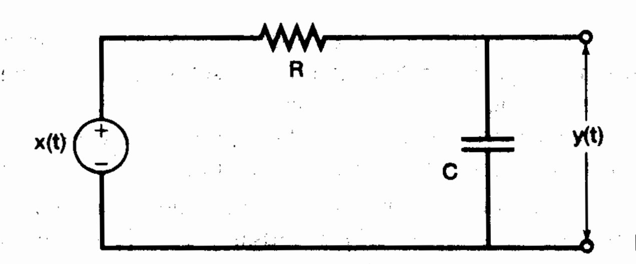


Figura P6.18

6.19. Considere el sistema LTI continuo construido como el circuito *RLC* mostrado en la figura P6.19. La fuente de voltaje $x(t)$ se considera la entrada a este sistema. El voltaje $y(t)$ a través del capacitor se considera la salida del sistema. ¿Cómo debería relacionarse a R, L y C para que no hubiera oscilación en la respuesta al escalón?

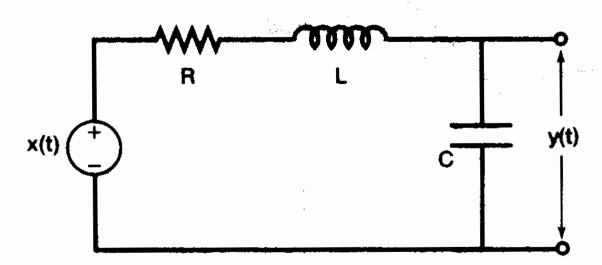


Figura P6.19

6.20. Considere un filtro no recursivo cuya respuesta al impulso sea la mostrada en la figura P6.20. ¿Cuál es el retardo de grupo como una función de la frecuencia para este filtro?

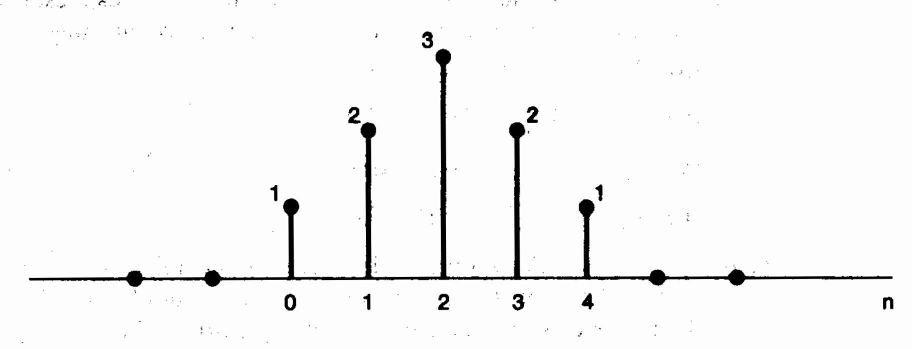


Figura P6.20

PROBLEMAS BÁSICOS

6.21. Un filtro LTI causal tiene la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ mostrada en la figura P6.21. Para cada una de las señales de entrada proporcionadas a continuación, determine la señal de salida filtrada $y(t)$.

(a) $x(t) = e^{jt}$ **(b)** $x(t) = (\text{sen}\,\omega_0 t)u(t)$

(c) $X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)(6 + j\omega)}$ **(d)** $X(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$

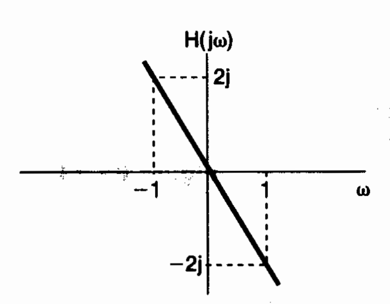


Figura P6.21

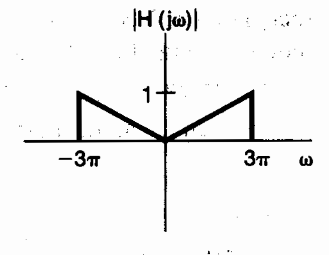
6.22. En la figura P6.22(a) se muestra la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ de un filtro continuo conocido como un diferenciador paso bajas. Para cada una de las señales de entrada $x(t)$ siguientes determine la señal de salida filtrada $y(t)$.

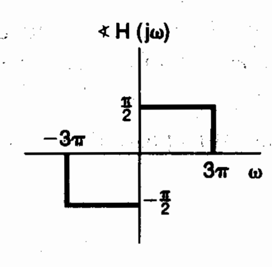
(a) $x(t) = \cos(2\pi t + \theta)$

(b) $x(t) = \cos(4\pi t + \theta)$

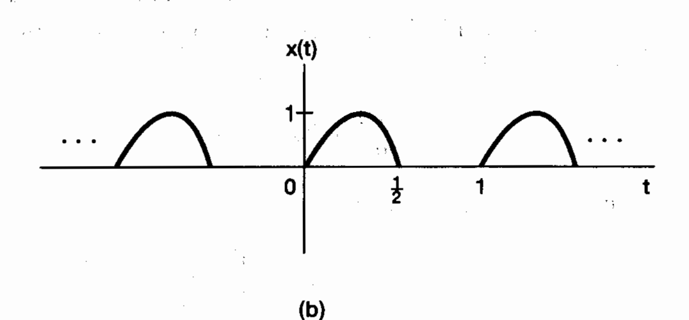
(c) $x(t)$ es una onda senoidal rectificada en media onda como la dibujada en la figura P6.22(b).

$$x(t) = \begin{cases} \text{sen } 2\pi t, & m \leq t \leq (m + \frac{1}{2}) \\ 0, & (m + \frac{1}{2}) \leq t \leq m \text{ para cualquier entero } m \end{cases}$$





(a)



(b)

Figura P6.22

6.23. En la figura P6.23 se muestra $|H(j\omega)|$ para un filtro paso bajas. Determine y dibuje la respuesta al impulso del filtro para cada una de las siguientes características de fase:

(a) $\sphericalangle H(j\omega) = 0$

(b) $\sphericalangle H(j\omega) = \omega T$, donde T es una constante

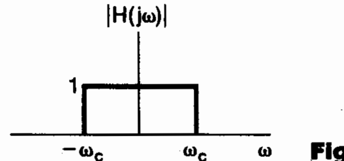


Figura P6.23

(c) $\sphericalangle H(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ \frac{-\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases}$.

6.24. Considere un filtro paso bajas continuo cuya respuesta al impulso $h(t)$ se sabe que es real y cuya magnitud de respuesta en frecuencia está dada como:

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 200\pi \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

(a) Determine y dibuje la respuesta al impulso $h(t)$ de valor real para este filtro cuando la función correspondiente de retardo de grupo está especificado como: **(i)** $\tau(\omega) = 5$ **(ii)** $\tau(\omega) = \frac{5}{2}$ **(iii)** $\tau(\omega) = -\frac{5}{2}$

(b) Si la respuesta al impulso $h(t)$ no se ha especificado como real, ¿será suficiente con conocer $|H(j\omega)|$ y $\tau(\omega)$ para determinar $h(t)$ de manera única? Justifique su respuesta.

6.25. Calculando el retardo de grupo en dos frecuencias seleccionadas, verifique que cada una de las siguientes respuestas en frecuencia tenga fase no lineal.
(a) $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$ **(b)** $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)^2}$ **(c)** $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)}$

6.26. Considere un filtro paso altas ideal cuya respuesta en frecuencia está especificada como

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| > \omega_c \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

(a) Determine la respuesta al impulso $h(t)$ para este filtro.

(b) Conforme ω_c se incrementa, diga si $h(t)$ se concentra más o menos alrededor del origen.

(c) Determine $s(0)$ y $s(\infty)$, donde $s(t)$ sea la respuesta al escalón del filtro.

6.27. La salida $y(t)$ de un sistema LTI causal está relacionada con la entrada $x(t)$ mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t).$$

(a) Determine la respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

del sistema, y trace su diagrama de Bode.

(b) Especifique, como una función de la frecuencia, el retardo de grupo asociado con este sistema.

(c) Si $x(t) = e^{-t}u(t)$, determine $Y(j\omega)$, la transformada de Fourier de la salida.

(d) Usando la técnica de expansión en fracciones parciales, determine la salida $y(t)$ para la entrada $x(t)$ en la parte (c).

(e) Repita las partes (c) y (d), primero con una entrada que tenga como transformada de Fourier

(i) $X(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{2 + j\omega}$,

después con

(ii) $X(j\omega) = \frac{2 + j\omega}{1 + j\omega}$,

y finalmente con

(iii) $X(j\omega) = \frac{1}{(2 + j\omega)(1 + j\omega)}$

6.28. **(a)** Trace el diagrama de Bode para cada una de las siguientes respuestas en frecuencia:

(i) $1 + (j\omega/10)$ **(ii)** $1 - (j\omega/10)$

(iii) $\frac{16}{(j\omega + 2)^4}$ **(iv)** $\frac{1 - (j\omega/10)}{(1 + j\omega)}$

(v) $\frac{(j\omega/10) - 1}{1 + j\omega}$ **(vi)** $\frac{1 + (j\omega/10)}{1 + j\omega}$

(vii) $\frac{1 - (j\omega/10)}{(j\omega)^2 + (j\omega) + 1}$ **(viii)** $\frac{10 + 5j\omega + 10(j\omega)^2}{1 + (j\omega/10)}$

(ix) $1 + j\omega + (j\omega)^2$ **(x)** $1 - j\omega + (j\omega)^2$

(xi) $\frac{(j\omega + 10)(10j\omega + 1)}{[(j\omega/100 + 1)][((j\omega^2) + j\omega + 1)]}$

(b) Determine y trace la respuesta al impulso y la respuesta al escalón para el sistema con respuesta en frecuencia (iv). Haga lo mismo para el sistema con respuesta en frecuencia (vi).

El sistema dado en (iv) a menudo se conoce como sistema de fase no mínima, en tanto que el sistema especificado en (vi) se conoce como uno de fase mínima. Las respuestas al impulso correspondientes de (iv) y (vi) se conocen como señal de fase no mínima y señal de fase mínima, respectivamente. Comparando los diagramas de Bode de estas dos respuestas en frecuencia, podemos ver que tienen idénticas magnitudes; sin embargo, la magnitud de la *fase* del sistema de (iv) es más grande que para el sistema de (vi).

También podemos observar diferencias en el comportamiento en el dominio del tiempo de los dos sistemas. Por ejemplo, la respuesta al impulso del sistema de fase mínima tiene una mayor parte de su energía concentrada cerca de $t = 0$ que la respuesta al impulso del sistema de fase no mínima. Además, la respuesta al escalón de (iv) tiene inicialmente el signo opuesto de su valor asintótico conforme $t \to \infty$, si bien éste no es el caso para el sistema (vi).

El importante concepto de sistemas de fase mínima y no mínima se puede extender a sistemas LTI más generales que los simples sistemas de primer orden que hemos tratado, y las características que distinguen a dichos sistemas se pueden describir con más detalle de lo que hemos hecho aquí.

6.29. Un sistema LTI se dice que tiene *adelanto de fase* en una frecuencia particular $\omega = \omega_0$ si $\sphericalangle H(j\omega_0) > 0$. La terminología surge del hecho de que si $e^{j\omega_0 t}$ es la entrada a este sistema, entonces la fase de la salida excederá, o adelantará, a la fase de la entrada. De manera similar, si $\sphericalangle H(j\omega_0) < 0$, se dice que el sistema tiene *retraso de fase* en esta frecuencia. Observe que el sistema con respuesta en frecuencia

$$\frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

tiene retardo de fase para toda $\omega > 0$, mientras que el sistema con respuesta en frecuencia

$$1 + j\omega\tau$$

tiene adelanto de fase para toda $\omega > 0$.

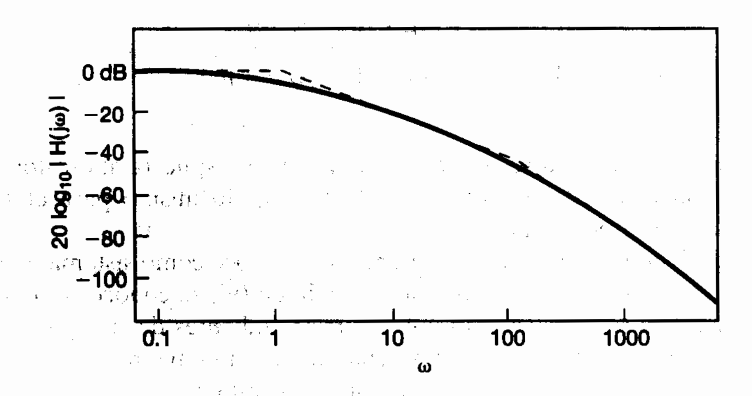
(a) Construya los diagrama de Bode para los siguientes dos sistemas. ¿Cuál tiene adelanto de fase y cuál tiene retraso de fase? Además, ¿cuál de los dos amplifica las señales a ciertas frecuencias?

(i) $\frac{1 + (j\omega/10)}{1 + 10j\omega}$ **(ii)** $\frac{1 + 10j\omega}{1 + (j\omega/10)}$

(b) Repita la parte (a) para las siguientes tres respuestas en frecuencia:

(i) $\frac{(1 + (j\omega/10))^2}{(1 + 10j\omega)^3}$ **(ii)** $\frac{1 + j\omega/10}{100(j\omega)^2 + 10j\omega + 1}$ **(iii)** $\frac{1 + 10j\omega}{0.01(j\omega)^2 + 0.2j\omega + 1}$

6.30. Sea una $x(t)$ que posee el diagrama de Bode mostrado en la figura P6.30. Las líneas punteadas en la figura representan aproximaciones en línea recta. Dibuje los diagramas de Bode para $10x(10t)$.



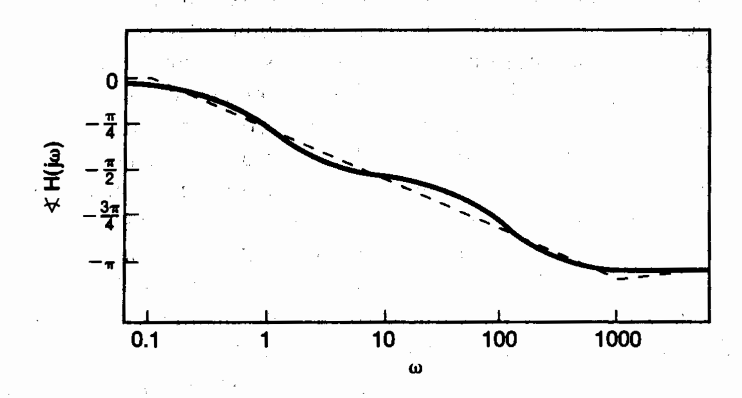


Figura P6.30

6.31. Un integrador tiene su respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega),$$

donde el impulso a $\omega = 0$ es resultado del hecho de que la integración de una entrada constante de $t = -\infty$ produce en una salida infinita. Por lo tanto, si evitamos

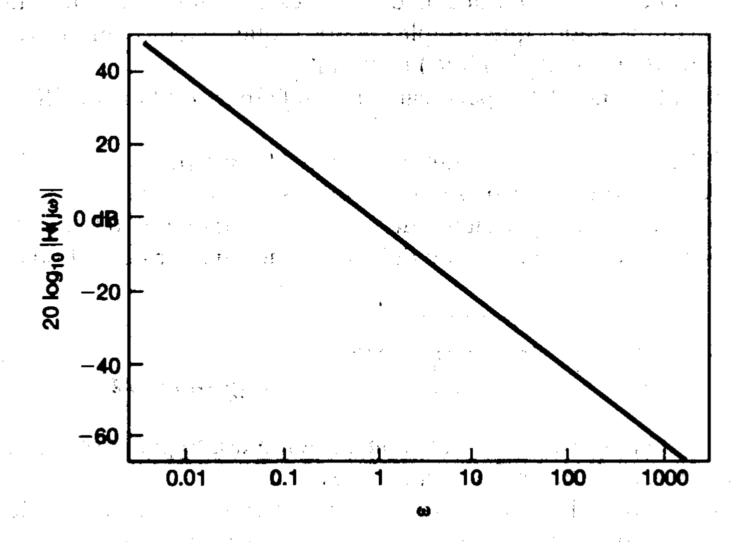
entradas que son constantes, o, de manera equivalente, sólo examinamos $H(j\omega)$ para $\omega > 0$, vemos que

$$20 \log |H(j\omega)| = -20 \log(\omega),$$

$$\sphericalangle H(j\omega) = \frac{-\pi}{2}.$$

En otras palabras, el diagrama de Bode de un integrador, como se ilustra en la figura P6.31, consiste en dos gráficas en línea recta. Estas gráficas reflejan la característica principal de un integrador: un desplazamiento de fase de –90° en todos los valores positivos de frecuencia y la amplificación a bajas frecuencias.

(a) Un modelo útil y sencillo de un motor eléctrico es un sistema LTI con entrada igual al voltaje aplicado y salida proporcionada por el ángulo del eje del motor. Éste sistema se puede visualizar como la conexión en cascada de un sistema LTI estable (con el voltaje como entrada y la velocidad angular del eje como salida) y un integrador (que representa la integración de la velocidad angular). A menudo, se utiliza un modelo de sistema de primer orden para la primera parte de la conexión en cascada. Suponiendo, por ejemplo, que este sistema de primer orden tiene una constante de tiempo de 0.1 segundos, obtenemos una



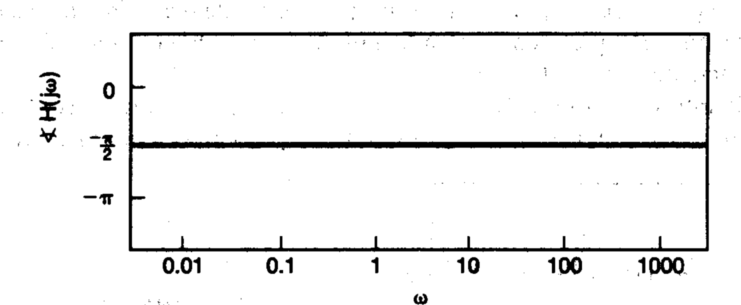


Figura P6.31

respuesta en frecuencia total del motor de la forma

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega/10)} + \pi\,\delta(\omega).$$

Dibuje el diagrama de Bode del sistema para $\omega > 0.001$.

(b) Dibuje el diagrama de Bode para un diferenciador.

(c) Haga lo mismo para sistemas que posean las siguientes respuestas en frecuencia:

(i) $H(j\omega) = \frac{j\omega}{1 + j\omega/100}$

(ii) $H(j\omega) = \frac{j\omega}{(1 + (j\omega)/10 + (j\omega)^2/100)}$

6.32. Considere el sistema representado en la figura P6.32. Este "compensador" es un sistema LTI continuo.

(a) Suponga que se desea seleccionar la respuesta en frecuencia del compensador de manera que la respuesta en frecuencia total $H(j\omega)$ de la conexión en cascada satisfaga las siguientes dos condiciones:

1. La magnitud log de $H(j\omega)$ tiene una pendiente de –40 dB/década más allá de $\omega = 1{,}000$.
2. Para $0 < \omega < 1{,}000$, la magnitud log de $H(j\omega)$ debe estar entre –10 dB y 10 dB.

Diseñe un compensador adecuado (esto es, determine la respuesta en frecuencia del compensador que cumpla con los requerimientos anteriores) y dibuje el diagrama de Bode de la $H(j\omega)$ resultante.

(b) Repita (a) cuando las especificaciones en la magnitud log de $H(j\omega)$ sean como sigue:

1. Debe tener una pendiente de +20 dB/década para $0 < \omega < 10$.
2. Debe estar entre +10 y +30 dB para $10 < \omega < 100$.
3. Debe tener una pendiente de −20 dB/década para $100 < \omega < 1{,}000$.
4. Debe tener una pendiente de −40 dB/década para $\omega > 1{,}000$.

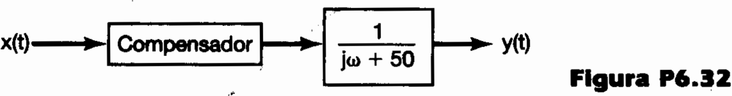


Figura P6.32

6.33. La figura P6.33 muestra un sistema comúnmente usado para obtener un filtro paso altas a partir de un filtro paso bajas, y viceversa.

(a) Demuestre que si $H(j\omega)$ es un filtro paso bajas con frecuencia de corte ω_{lp}, el sistema completo corresponde a un filtro paso altas ideal. Determine la frecuencia de corte del sistema y dibuje su respuesta al impulso.

(b) Demuestre que, si $H(j\omega)$ es un filtro paso altas ideal con frecuencia de corte ω_{hp}, el sistema completo corresponde a un filtro paso bajas ideal y determine la frecuencia de corte del sistema.

(c) Si la interconexión de la figura P6.33 se aplica a un filtro paso bajas ideal discreto, ¿el sistema resultante será un filtro paso altas ideal discreto?

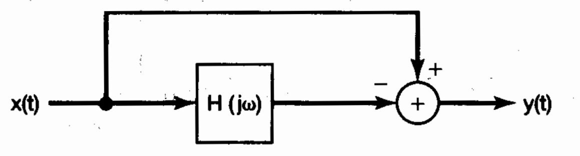


Figura P6.33

6.34. En el problema 6.33 consideramos un sistema que se usa a menudo para obtener un filtro paso altas a partir de un filtro paso bajas y viceversa. En este problema, exploramos el sistema con mayor detalle, y en particular, consideramos una dificultad potencial si la fase de $H(j\omega)$ no se selecciona adecuadamente.

(a) En relación con la figura P6.33, supongamos que $H(j\omega)$ es real y se muestra en la figura P6.34. Entonces

$$1 - \delta_1 < H(j\omega) < 1 + \delta_1, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_1,$$

$$-\delta_2 < H(j\omega) < +\delta_2, \quad \omega_2 < \omega.$$

Determine y dibuje la respuesta en frecuencia resultante del sistema completo de la figura P6.33. ¿El sistema resultante corresponde a una aproximación a un filtro paso altas?

(b) Tenga ahora $H(j\omega)$ en la figura P6.33 la forma

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)e^{j\theta(\omega)}, \tag{P6.34-1}$$

donde $H_1(j\omega)$ es idéntica a la figura P6.34 y $\theta(\omega)$ es una característica de fase no especificada. Con $H(j\omega)$ en esta forma más general, ¿corresponde todavía a una aproximación a un filtro paso bajas?

(c) Sin hacer ninguna suposición acerca de $\theta(\omega)$, determine y dibuje los límites de tolerancia en la magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema completo de la figura P6.33.

(d) Si $H(j\omega)$ en la figura P6.33 es una aproximación a un filtro paso bajas con característica de fase no especificada, ¿el sistema completo en esa figura corresponderá necesariamente a alguna aproximación a un filtro paso altas?

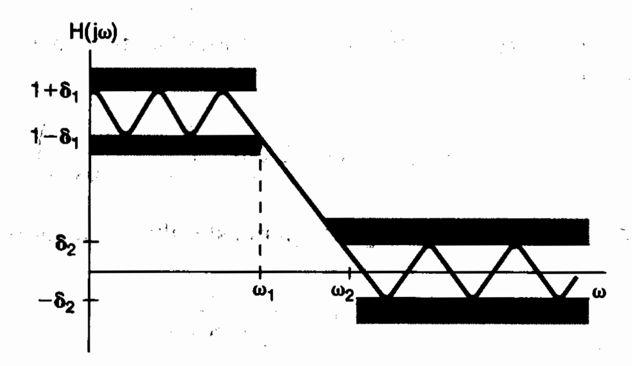


Figura P6.34

6.35. En la figura P6.35 se muestra la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ de un diferenciador discreto. Determine la señal de salida $y[n]$ como una función de ω_0 si la entrada $x[n]$ es

$$x[n] = \cos[\omega_0 n + \theta].$$

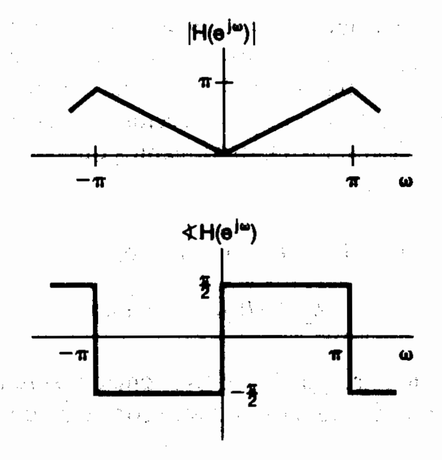


Figura P6.35

6.36. Considere un filtro paso bajas discreto cuya respuesta al impulso $h[n]$ se sabe que es real y cuya magnitud de respuesta en frecuencia en la región $-\pi \leq \omega \leq \pi$ está dada como

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Determine y dibuje la respuesta al impulso $h[n]$ de valor real para este filtro cuando la función de retardo de grupo correspondiente está especificada como:
(a) $\tau(\omega) = 5$ **(b)** $\tau(\omega) = \frac{5}{2}$ **(c)** $\tau(\omega) = -\frac{5}{2}$

6.37. Considere un sistema LTI causal cuya respuesta en frecuencia está dada como:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\frac{1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

(a) Demuestre que $|H(e^{j\omega})|$ es unitaria para todas las frecuencias.
(b) Demuestre que

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = -\omega - 2\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\ \text{sen}\ \omega}{1 - \frac{1}{2}\cos\omega}\right).$$

(c) Demuestre que el retardo de grupo para este filtro está dado por

$$\tau(\omega) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \cos\omega}.$$

Trace $\tau(\omega)$.
(d) ¿Cuál es la salida de este filtro cuando la entrada es $\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$?

6.38. Considere un filtro paso banda ideal cuya respuesta en frecuencia en la región $-\pi \leq \omega \leq \pi$ está especificada como

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{2} - \omega_c \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{2} + \omega_c \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Determine y trace la respuesta al impulso $h[n]$ para este filtro cuando

(a) $\omega_c = \frac{\pi}{5}$

(b) $\omega_c = \frac{\pi}{4}$

(c) $\omega_c = \frac{\pi}{3}$

Conforme ω_c se incrementa, ¿$h[n]$ se concentra más o menos alrededor del origen?

6.39. Trace la magnitud log y la fase de cada una de las siguientes respuestas en frecuencia.

(a) $1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}$ **(b)** $1 + 2\, e^{-j\omega}$

(c) $1 - 2\, e^{-j\omega}$ **(d)** $1 + 2\, e^{-j2\omega}$

(e) $\frac{1}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega})^3}$ **(f)** $\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

(g) $\frac{1 + 2e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$ **(h)** $\frac{1 - 2e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

(i) $\frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega})}$ **(j)** $\frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 + \frac{3}{4}e^{-j\omega})}$

(k) $\frac{1 + 2e^{-2j\omega}}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})^2}$

6.40. Considere un filtro paso bajas ideal discreto con respuesta al impulso $h[n]$ y cuya respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ es la que se muestra en la figura P6.40. Considere que obtiene un nuevo filtro con respuesta al impulso $h_1[n]$ y respuesta en frecuencia $H_1(e^{j\omega})$ como:

$$h_1[n] = \begin{cases} h[n/2], & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Esto corresponde a insertar un valor de secuencia cero entre cada valor de secuencia de $h[n]$. Determine y trace $H_1(e^{j\omega})$ y establezca la clase de filtros ideales a la que pertenece (es decir, paso bajas, paso altas, paso banda, multibanda, etcétera).

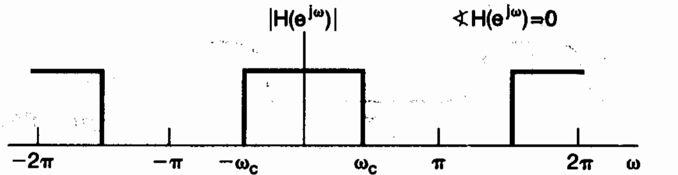


Figura P6.40

6.41. Un sistema LTI causal particular está descrito por la ecuación de diferencias

$$y[n] - \frac{\sqrt{2}}{2} y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n] - x[n-1].$$

(a) Determine la respuesta al impulso de este sistema.

(b) Trace la magnitud log y la fase de la respuesta en frecuencia del sistema.

6.42. **(a)** Considere dos sistemas LTI con las siguientes respuestas en frecuencia:

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}},$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

Demuestre que ambas respuestas en frecuencia tienen la misma función de magnitud [es decir, $|H_1(e^{j\omega})| = |H_2(e^{j\omega})|$], pero el retardo de grupo de $H_2(e^{j\omega})$ es mayor que el retardo de grupo de $H_1(e^{j\omega})$ para $\omega > 0$.

(b) Determine y dibuje las respuestas al impulso y al escalón de los dos sistemas.

(c) Demuestre que

$$H_2(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}),$$

donde $G(e^{j\omega})$ es un *sistema paso todo* [es decir, $|G(e^{j\omega})| = 1$ para toda ω].

6.43. En el diseño de filtros con características paso altas y paso banda, a menudo resulta conveniente diseñar un filtro paso bajas con las especificaciones de la banda de paso y la banda de supresión deseadas, y entonces transformar este filtro prototipo en el filtro paso altas o paso banda deseado. A esto se le llama transformaciones paso bajas a paso altas o paso altas a paso bajas. Diseñar filtros de esta manera es conveniente debido a que sólo necesitamos plantear nuestros algoritmos del diseño del filtro para la clase de filtros que tengan características paso bajas. Como un ejemplo de este procedimiento, considere un filtro paso bajas discreto con respuesta al impulso $h_{lp}[n]$ y respuesta en frecuencia $H_{lp}(e^{j\omega})$, como está dibujado en la figura P6.43. Suponga que la respuesta al impulso se modula con la secuencia $(-1)^n$ para obtener $h_{hp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$.

(a) Determine y trace $H_{hp}(e^{j\omega})$ en términos de $H_{lp}(e^{j\omega})$. Demuestre en particular que, para $H_{lp}(e^{j\omega})$ como se muestra en la figura P6.43, $H_{hp}(e^{j\omega})$ corresponde a un filtro paso altas.

(b) Demuestre que la modulación de la respuesta al impulso de un filtro paso altas discreto por $(-1)^n$ lo transformará en un filtro paso bajas.

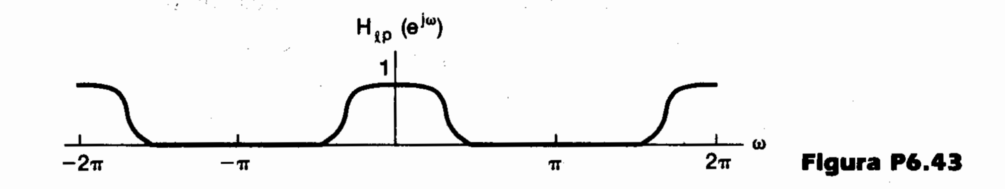


Figura P6.43

6.44. Un sistema discreto se construye como se muestra en la figura P6.44. El sistema S que se muestra en la figura es un sistema LTI con respuesta al impulso $h_{lp}[n]$.

(a) Demuestre que el sistema completo es invariante en el tiempo.

(b) Si $h_{lp}[n]$ es un filtro paso bajas, ¿qué tipo de filtro es el sistema puesto en práctica en la figura?

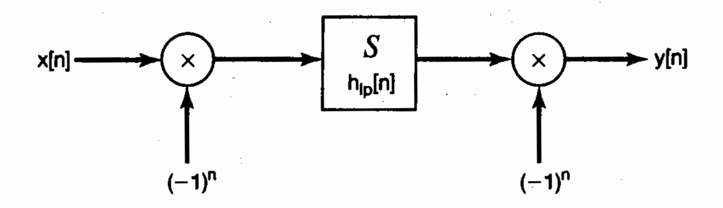


Figura P6.44

6.45. Considere las siguientes tres respuestas en frecuencia para los sistemas LTI de tercer orden causales y estables. Utilizando las propiedades de los sistemas de primer y segundo órdenes analizados en la sección 6.6, determine si la respuesta al impulso de cada uno de los sistemas de tercer orden es o no oscilatoria. (*Nota:* Debe ser capaz de responder a esta pregunta sin realizar la transformada inversa de Fourier de las respuestas en frecuencia de los sistemas de tercer orden.)

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})},$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})},$$

$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{9}{16}e^{-j2\omega})}.$$

6.46. Considere un filtro (FIR) causal no recursivo, cuya respuesta al impulso de valor real $h[n]$ es cero para $n \geq N$.

(a) Suponiendo que N sea impar, demuestre que si $h[n]$ es simétrica alrededor de $(N-1)/2$ (es decir, si $h[(N-1)/2+n] = h[(N-1)/2-n]$, entonces

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j[(N-1)/2]\omega},$$

donde $A(\omega)$ es una función de ω de valor real. Concluimos que el filtro tiene fase lineal.

(b) Dé un ejemplo de la respuesta al impulso $h[n]$ de un filtro FIR causal de fase lineal tal que $h[n] = 0$ para $n \geq 5$ y $h[n] \neq 0$ para $0 \leq n \leq 4$.

(c) Suponiendo que N fuera par, demuestre que $h[n]$ es simétrica alrededor de $(N-1)/2$ (es decir, si $h[(N/2)+n] = h[N/2-n-1]$, entonces

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j[(N-1)/2]\omega},$$

donde $A(\omega)$ es una función de ω de valor real.

(d) Proporcione un ejemplo de la respuesta al impulso $h[n]$ de un filtro FIR causal de fase lineal tal que $h[n] = 0$ para $n \geq 4$ y $h[n] \neq 0$ para $0 \leq n \leq 3$.

6.47. Un promedio móvil simétrico de tres puntos, conocido como promedio móvil ponderado, tiene la forma

$$y[n] = b\{ax[n-1] + x[n] + ax[n+1]\}. \qquad \text{(P6.47-1)}$$

(a) Determine, como una función de a y b, la respuesta en frecuencia de $H(e^{j\omega})$ del promedio móvil de tres puntos de la ecuación (P6.47-1).

(b) Determine el factor de escalamiento b tal que $H(e^{j\omega})$ tenga ganancia unitaria a frecuencia cero.

(c) En muchos problemas de análisis de series de tiempo, una selección común para el coeficiente a en el promedio móvil ponderado de la ecuación (P6.47-1) es $a = 1/2$. Determine y trace la respuesta en frecuencia del filtro resultante.

6.48. Considere un filtro discreto de promedio móvil de cuatro puntos, para el cual la ecuación de diferencias es

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + b_3x[n-2].$$

Determine y trace la magnitud de la respuesta en frecuencia para cada uno de los siguientes casos:

(a) $b_0 = b_3 = 0, \quad b_1 = b_2$
(b) $b_1 = b_2 = 0, \quad b_0 = b_3$
(c) $b_0 = b_1 = b_2 = b_3$
(d) $b_0 = -b_1 = b_2 = -b_3$

PROBLEMAS AVANZADOS

6.49. La constante de tiempo proporciona una medida de qué tan rápido responde un sistema de primer orden a las entradas. La idea de medir la velocidad de respuesta de un sistema también es importante para los sistemas de mayor orden, y en este problema investigamos la extensión de la constante de tiempo para dichos sistemas.

(a) Recordemos que la constante de tiempo de un sistema de primer orden con respuesta al impulso

$$h(t) = ae^{-at}u(t), \qquad a > 0,$$

es $1/a$, lo cual es la cantidad de tiempo desde $t = 0$ que toma la respuesta al escalón $s(t)$ del sistema para llegar a $1/e$ de su valor final [es decir, $s(\infty) = \lim_{t\to\infty} s(t)$]. Usando esta misma definición cuantitativa, encuentre la ecuación que se debe resolver para determinar la constante de tiempo del sistema LTI causal descrito mediante la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 9x(t). \qquad \text{(P6.49-1)}$$

(b) Como puede verse en la parte (a), si usamos la definición precisa de la constante de tiempo que ahí se dio, obtendremos una sencilla expresión para la constante de tiempo de un sistema de primer orden, pero los cálculos son definitivamente más complejos para el sistema de la ecuación (P6.49-1). Sin embargo, demuestre que este sistema se puede ver como la interconexión en paralelo de dos sistemas de primer orden. Por lo tanto, a menudo consideramos que el sistema en la ecuación (P6.49-1) tiene *dos* constantes de tiempo, correspondientes a dos factores de primer orden. ¿Cuáles son las dos constantes de tiempo para este sistema?

(c) El análisis realizado en la parte (b) se puede generalizar de manera directa a todos los sistemas con respuesta al impulso que sean combinaciones lineales de exponenciales decrecientes. En cualquier sistema de este tipo, uno puede identificar las constantes de tiempo *dominantes* del sistema, las cuales son simplemente las constantes de tiempo más grandes. Éstas representan las partes más lentas de la respuesta del sistema, y en consecuencia, tienen el efecto dominante sobre qué tan rápido puede responder el sistema completo. ¿Cuál es la constante de tiempo dominante del sistema en la ecuación (P6.49-1)? Sustituya esta constante de tiempo en la ecuación determinada en la parte (a). Aunque el número no satisface exactamente la ecuación, debemos observar que es muy cercano, lo cual indica que está muy cerca de la constante de tiempo definida en la parte (a). De este modo, la aproximación que hemos descrito en la parte (b) y en esta parte resulta valiosa, ya que proporciona el conocimiento acerca de la velocidad de respuesta de los sistemas LTI sin necesidad de realizar cálculos excesivos.

(d) Un uso importante del concepto de constantes de tiempo dominantes se presenta en la reducción del orden de los sistemas LTI. Esto es de gran significado

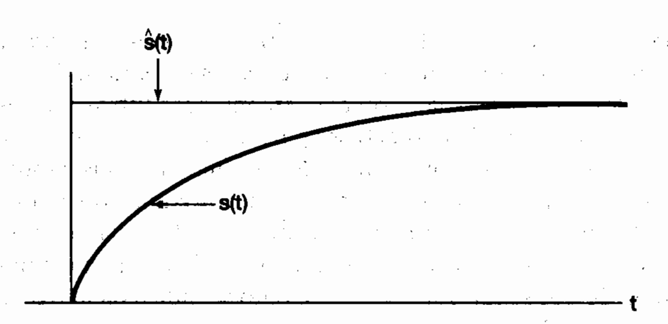


Figura P6.49

práctico en problemas que involucran el análisis de sistemas complejos que tienen pocas constantes de tiempo dominantes y otras de valor muy pequeño. Para reducir la complejidad del modelo del sistema a analizarse, a menudo se pueden simplificar las partes rápidas del sistema. Esto es, suponga que consideramos un sistema complejo como una interconexión en paralelo de sistemas de primer y segundo órdenes. Suponga también que uno de estos subsistemas, con respuesta al impulso $h(t)$ y respuesta al escalón $s(t)$, es rápida, es decir, que $s(t)$ llega a su valor final $s(\infty)$ muy rápidamente. Entonces, nos podemos aproximar a este subsistema mediante el subsistema que llega al mismo valor *de manera instantánea*. Esto es, si $\hat{s}(t)$ es la respuesta al escalón de nuestra aproximación, entonces

$$\hat{s}(t) = s(\infty)u(t).$$

Lo anterior se ilustra en la figura P6.49. Observe que la respuesta al impulso del sistema aproximado es entonces

$$\hat{h}(t) = s(\infty)\delta(t),$$

la cual indica que el sistema aproximado es *sin memoria*.

Considere nuevamente el sistema LTI causal descrito por la ecuación (P6.49-1) y, en particular, su representación como una interconexión en paralelo de dos sistemas de primer orden, como se describe en la parte (b). Use el método descrito para remplazar el más rápido de los dos subsistemas por un sistema sin memoria. ¿Cuál es la ecuación diferencial que describe entonces el sistema resultante completo? ¿Cuál es la respuesta en frecuencia del sistema? Trace $|H(j\omega)|$ (no $\log|H(j\omega)|$) y $\sphericalangle H(j\omega)$ para el sistema original y el aproximado. ¿Sobre qué intervalo de frecuencias las respuestas en frecuencia son casi iguales? Dibuje las respuestas al escalón para ambos sistemas. ¿Sobre qué intervalo de tiempo son casi iguales las respuestas al escalón? A partir de sus gráficas, usted verá algunas de las similitudes y diferencias entre el sistema original y su aproximación. La utilidad de una aproximación como ésta depende de la aplicación específica. En particular, uno debe tomar en cuenta qué tan separadas están las diferentes constantes de tiempo y también la naturaleza de las entradas que serán consideradas. Como verá gracias a sus respuestas en esta parte del problema, la respuesta en frecuencia del sistema aproximado es en esencia la misma que la respuesta en frecuencia del sistema original a bajas frecuencias. Es decir, cuando las partes rápidas del sistema son lo suficientemente rápidas en comparación con la velocidad de fluctuación de la entrada, la aproximación se vuelve útil.

6.50. Los conceptos asociados con el filtrado selectivo en frecuencia son a menudo usados para separar dos señales que han sido sumadas o conjuntadas. Si los espectros de las dos señales no se traslapan, son convenientes los filtros ideales selectivos en frecuencia. Sin embargo, si los espectros se traslapan, a menudo resulta preferible el diseño de filtros que tienen una transición gradual entre las bandas de paso y de supresión. En este problema, exploramos una aproximación para determinar la respuesta en frecuencia de un filtro para usarse en la separación de señales con espectros traslapados. Sea que $x(t)$ denota una señal continua compuesta que consiste en la suma de dos señales $s(t) + w(t)$. Como se indica en la figura P6.50(a), nos gustaría diseñar un filtro para recuperar $s(t)$ a partir de $x(t)$. La respuesta en frecuencia del filtro $H(j\omega)$ se selecciona de manera que, en algún sentido, $y(t)$ sea una "buena" aproximación a $s(t)$.

Definamos ahora una medida del error entre $y(t)$ y $s(t)$ en cada frecuencia ω como

$$\epsilon(\omega) \triangleq |S(j\omega) - Y(j\omega)|^2,$$

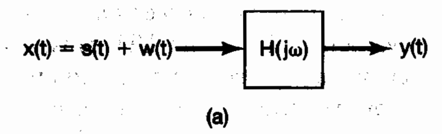
donde $S(j\omega)$ y $Y(j\omega)$ son las transformadas de Fourier de $s(t)$ y $y(t)$, respectivamente.

(a) Exprese $\epsilon(\omega)$ en términos de $S(j\omega)$, $H(j\omega)$ y $W(j\omega)$, donde $W(j\omega)$ es la transformada de Fourier de $w(t)$.

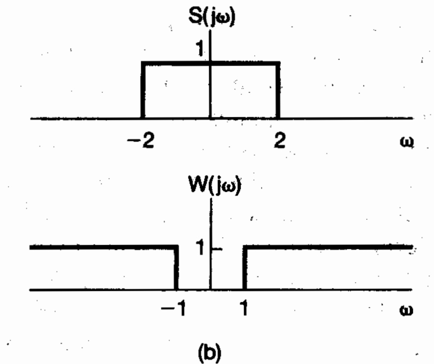
(b) Limitémonos a que $H(j\omega)$ sea real, de manera que $H(j\omega) = H^*(j\omega)$. Estableciendo la derivada de $\epsilon(\omega)$ con respecto a $H(j\omega)$ como cero, determine la $H(j\omega)$ requerida para minimizar el error $\epsilon(\omega)$.

(c) Demuestre que si los espectros de $S(j\omega)$ y $W(j\omega)$ no se traslapan, el resultado en la parte (b) se reduce a un filtro ideal selectivo en frecuencia.

(d) A partir de su resultado en la parte (b), determine y dibuje $H(j\omega)$ si $S(j\omega)$ y $W(j\omega)$ son como se muestra en la figura P6.50(b).



(a)



(b)

Figura P6.50

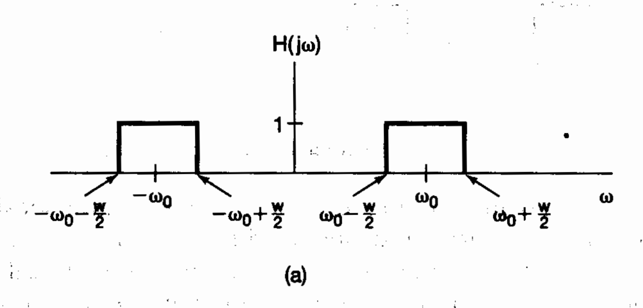
6.51. Un filtro paso banda ideal es el que deja pasar sólo un intervalo de frecuencias, sin ningún cambio en amplitud o fase. Como se muestra en la figura P6.51(a), sea la banda de paso

$$\omega_0 - \frac{w}{2} \leq |\omega| \leq \omega_0 + \frac{w}{2}.$$

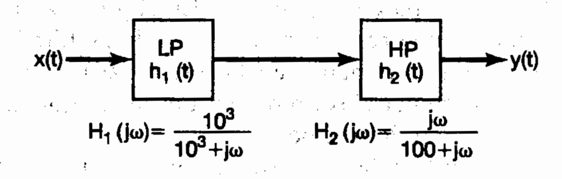
(a) ¿Cuál es la respuesta al impulso $h(t)$ de este filtro?

(b) ¿Podemos aproximar un filtro paso banda ideal mediante la conexión en cascada de un filtro paso bajas de primer orden y uno paso altas de primer orden, como se muestra en la figura P6.51(b)? Trace los diagramas de Bode para cada uno de los dos filtros $H_1(j\omega)$ y $H_2(j\omega)$.

(c) Determine el diagrama de Bode del filtro paso banda completo en términos de los resultados que obtuvo en la parte (b).



(a)



(b)

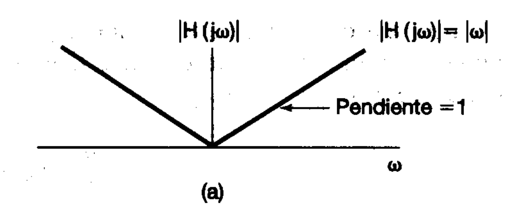
Figura P6.51

6.52. En la figura P6.52(a) mostramos la magnitud de la respuesta en frecuencia de un diferenciador ideal continuo. Un diferenciador no ideal tendría una respuesta en frecuencia que es una aproximación a la respuesta en frecuencia de la figura.

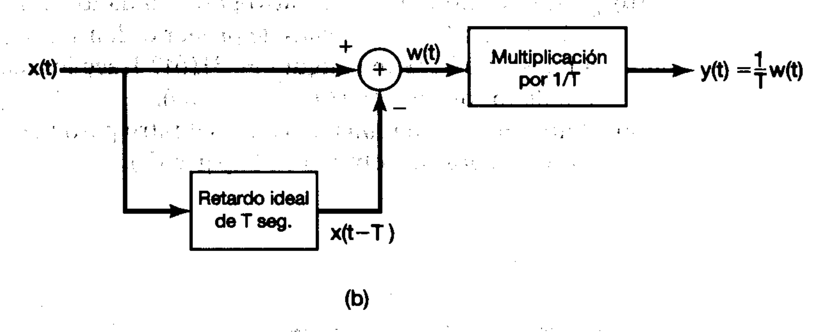
(a) Considere un diferenciador no ideal con respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ para la cual $|G(j\omega)|$ se limita a estar dentro de ± 10% de la magnitud de la respuesta en frecuencia del diferenciador ideal en todas las frecuencias; esto es,

$$-0.1|H(j\omega)| \leq [|G(j\omega)| - |H(j\omega)|] \leq 0.1|H(j\omega)|.$$

Trace la región en una gráfica de $G(j\omega)$ en función de ω donde $|G(j\omega)|$ debe estar confinada a cumplir con esta especificación.



(a)



(b)

Figura P6.52

(b) El sistema en la figura P6.52(b), que incorpora un retardo ideal de T segundos, se usa algunas veces para aproximar un diferenciador continuo. Para $T = 10^{-2}$ segundos, determine el intervalo de frecuencia sobre el cual la magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema en la figura esté dentro de ±10% con respecto a un diferenciador ideal.

6.53. En muchas aplicaciones de filtrado, a menudo no se desea que la respuesta al escalón de un filtro sobrepase su valor final. En el procesamiento de imágenes, por ejemplo, el sobrepaso en la respuesta al escalón de un filtro lineal puede producir brillantez (es decir, un incremento en la intensidad) en los bordes agudos. Sin embargo, es posible eliminar el sobrepaso requiriendo que la respuesta al impulso del filtro sea positiva en todo tiempo.

Demuestre que si $h(t)$, la respuesta al impulso de un filtro LTI continuo, es siempre mayor o igual a cero, la respuesta al escalón del filtro es una función no decreciente monotónicamente y por tanto no tendrá sobrepaso.

6.54. Mediante un procedimiento de diseño específico de un filtro, se ha diseñado un filtro paso bajas no ideal continuo, con respuesta en frecuencia $H_0(j\omega)$, respuesta al impulso $h_0(t)$ y respuesta al escalón $s_0(t)$. La frecuencia de corte del filtro se encuentra en $\omega = 2\pi \times 10^2$ rad/s, y el tiempo de elevación de la respuesta al escalón, definido como el tiempo requerido para que la respuesta al escalón vaya de 10% a 90% de su valor final, es $\tau_r = 10^{-2}$ segundos. A partir de este diseño, podemos obtener un nuevo filtro con una frecuencia de corte arbitraria ω_c mediante el uso de escalamiento de frecuencia. La respuesta en frecuencia del filtro resultante tiene entonces la forma

$$H_{lp}(j\omega) = H_0(ja\omega),$$

donde a es un factor de escala adecuado.

(a) Determine el factor de escala a tal que $H_{lp}(j\omega)$ tenga una frecuencia de corte de ω_c.

(b) Determine la respuesta al impulso de $h_{lp}(t)$ del nuevo filtro en términos de ω_c y $h_0(t)$.

(c) Determine la respuesta al escalón $s_{lp}(t)$ del nuevo filtro en términos de ω_c y $s_0(t)$.

(d) Determine y trace el tiempo de subida del nuevo filtro como una función de su frecuencia de corte ω_c.

Éste es un ejemplo del compromiso entre las características del dominio del tiempo y del dominio de la frecuencia. En particular, conforme la frecuencia de corte disminuye, el tiempo de subida tiende a incrementarse.

6.55. El cuadrado de la magnitud de la respuesta en frecuencia de una clase de filtros paso bajas continuo, conocida como filtros Butterworth, es

$$|B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}.$$

Definamos la frecuencia límite de la banda de paso ω_p como la frecuencia debajo de la cual $|B(j\omega)|^2$ es mayor que un medio de su valor en $\omega = 0$; esto es,

$$|B(j\omega)|^2 \geq \frac{1}{2}|B(j0)|^2, \quad |\omega| < \omega_p.$$

Definamos ahora la frecuencia límite de la banda de supresión ω_s como la frecuencia por encima de la cual $|B(j\omega)|^2$ es menor que 10^{-2} de su valor en $\omega = 0$; es decir,

$$|B(j\omega)|^2 \leq 10^{-2}|B(j0)|^2, \quad |\omega| > \omega_s.$$

La banda de transición es entonces el intervalo de frecuencia entre ω_p y ω_s. La razón ω_s/ω_p se conoce como la razón de transición.

Para una ω_p fija, y llevando a cabo aproximaciones razonables, determine y trace la razón de transición como una función de N para los filtros Butterworth.

6.56. En este problema, exploramos algunos de los aspectos de filtrado que se involucran en la versión comercial de un sistema típico usado en la mayoría de las reproductoras de cintas de audio para reducir el ruido. La fuente principal de ruido es el zumbido de alta frecuencia en el proceso de reproducción de la cinta, el cual se debe, en parte, a la fricción entre la cinta y la cabeza reproductora. Supongamos que el ruido del zumbido que se adiciona a la señal reproducida tiene el espectro mostrado en la figura P6.56(a) medido en decibeles, con 0 dB igual al nivel de la señal en 100 Hz. El espectro $S(j\omega)$ de la señal tiene la forma que se muestra en la figura P6.56(b).

El sistema que analizamos tiene un filtro $H_1(j\omega)$ el cual acondiciona la señal $s(t)$ antes de que sea grabada. Cuando se reproduce, el zumbido $n(t)$ se adiciona a la señal. El sistema se representa de manera esquemática en la figura P6.56(c).

Suponga que nos gustaría que el sistema tuviera una razón señal a ruido de 40 dB en el intervalo de frecuencias de 50 Hz $< \omega/2\pi <$ 20 kHz.

(a) Determine la característica de transferencia del filtro $H_1(j\omega)$. Trace el diagrama de Bode de $H_1(j\omega)$.

(b) Si escuchásemos la señal $p(t)$, suponiendo que el proceso de reproducción no adiciona nada más que el zumbido, ¿cómo sería el sonido?

(c) ¿Cuál sería el diagrama de Bode y la característica de transferencia del filtro $H_2(j\omega)$ para que la señal $\hat{s}(t)$ sonara similar a $s(t)$?

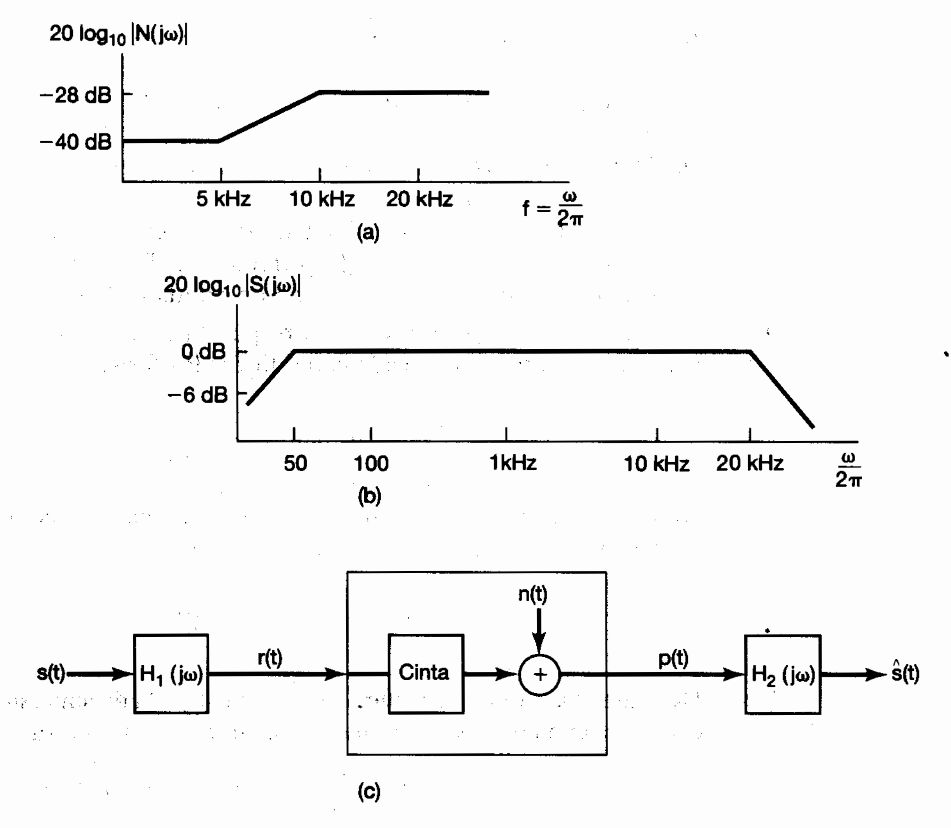


Figura P6.56

6.57. Demuestre que si $h[n]$, la respuesta al impulso de un filtro LTI discreto, es siempre más grande que o igual a cero, la respuesta al escalón del filtro es una función monotónicamente no decreciente y por lo tanto no tiene sobrepaso.

6.58. En el diseño de los filtros analógicos o digitales, a menudo aproximamos una característica de magnitud especificada sin poner atención particular a la fase. Por ejemplo, las técnicas estándar de diseño para filtros paso bajas y paso altas se derivan típicamente de tan sólo una consideración sobre las características de magnitud.

En muchos problemas de filtrado, idealmente nos gustaría que las características de fase fueran cero o lineales. Para los filtros causales es imposible tener fase cero. Sin embargo, para muchas aplicaciones de filtrado digital no es necesario que la respuesta a la muestra unitaria del filtro sea cero para $n < 0$ si el procesamiento no se lleva a cabo en tiempo real.

Una técnica común que se usa en el filtrado digital, cuando los datos a filtrar son almacenados y de duración finita, por ejemplo en un disco o cinta magnética, consiste en procesar los datos hacia adelante y luego hacia atrás a través del mismo filtro.

Sea $h[n]$ la respuesta a la muestra unitaria de un filtro causal con una característica arbitraria de fase. Suponga que $h[n]$ es real, y denote su transformada de Fourier mediante $H(e^{j\omega})$. Sea $x[n]$ los datos que queremos filtrar. La operación de filtrado se realiza como sigue:

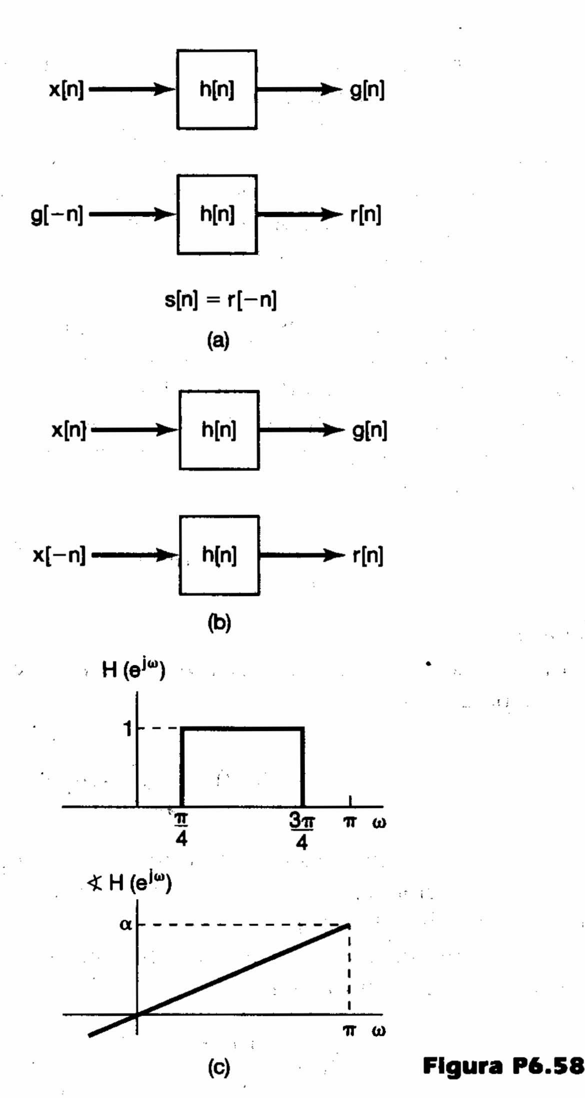


Figura P6.58

(a) *Método A:* Procese $x[n]$ para obtener $s[n]$ como se indica en la figura P6.58(a).

1. Determine la respuesta total a la muestra unitaria $h_1[n]$ que relaciona a $x[n]$ con $s[n]$, y demuestre que tiene característica de fase cero.
2. Determine $|H_1(e^{j\omega})|$ y exprésela en términos de $|H(e^{j\omega})|$ y $\sphericalangle H(e^{j\omega})$.

(b) *Método B:* Procese $x[n]$ a través del filtro $h[n]$ para obtener $g[n]$ [figura P6.58(b)]. También procese $x[n]$ de regreso a través de $h[n]$ para obtener $r[n]$. La salida $y[n]$ es la suma de $g[n]$ y $r[-n]$. El conjunto compuesto de operaciones se puede representar mediante un filtro con entrada $x[n]$, salida $y[n]$ y respuesta a la muestra unitaria $h_2[n]$.

1. Demuestre que el filtro compuesto $h_2[n]$ tiene característica de fase cero.
2. Determine $|H_2(e^{j\omega})|$ y exprésela en términos de $|H(e^{j\omega})|$ y $\sphericalangle H(e^{j\omega})$.

(c) Suponga que se nos proporciona una secuencia de duración finita en la cual nos gustaría realizar un filtrado paso banda de fase cero. Además, suponga que se

nos da el filtro paso banda $h[n]$ con respuesta en frecuencia como se especifica en la figura P6.58(c) y con la característica de magnitud que deseamos, pero con fase lineal. Para obtener la fase cero, podemos usar algunos de los métodos anteriores, A o B. Determine y trace $|H_1(e^{j\omega})|$ y $|H_2(e^{j\omega})|$. A partir de estos resultados, ¿qué método usaría para obtener la operación de filtrado paso banda deseada? Explique por qué. De manera más general, si $h[n]$ tiene la magnitud deseada, pero una característica de fase no lineal, ¿qué método resulta más conveniente para lograr una característica de fase cero?

6.59. Sea que $h_d[n]$ denota la respuesta a la muestra unitaria del sistema ideal deseado con respuesta en frecuencia $H_d(e^{j\omega})$, y sea que $h[n]$ denota la respuesta a la muestra unitaria de un sistema FIR de longitud N y con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$. En este problema, demostramos que una ventana rectangular de longitud de N muestras aplicada a $h_d[n]$ producirá una respuesta a la muestra unitaria $h[n]$ tal que el error cuadrático medio

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

se minimiza.

(a) La función de error $E(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})$ se puede expresar como una serie de potencias

$$E(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]e^{j\omega n}.$$

Determine los coeficientes $e[n]$ en términos de $h_d[n]$ y $h[n]$.

(b) Usando la relación de Parseval, exprese el error cuadrático medio ϵ^2 en términos de los coeficientes $e[n]$.

(c) Demuestre que para una respuesta a la muestra unitaria $h[n]$ de longitud N muestras, ϵ^2 se minimiza cuando

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Esto es, el simple truncamiento proporciona la mejor aproximación cuadrática media a una respuesta en frecuencia deseada para un valor fijo de N.

6.60. En el problema 6.50, consideramos un criterio específico para determinar la respuesta en frecuencia de un filtro continuo que recupera una señal a partir de la suma de dos señales cuando sus espectros se traslapan en frecuencia. Para el caso discreto, desarrolle el resultado que corresponda al obtenido en la parte (b) del problema 6.50.

6.61. En muchas situaciones tenemos disponible un módulo de filtro analógico o digital, como sería el caso de un elemento de circuito básico o una subrutina de computadora. Usando el módulo de forma repetitiva o combinando módulos idénticos, es posible construir un nuevo filtro con características mejoradas en la banda de paso y en la banda de supresión. En éste y en el siguiente problema, consideramos dos procedimientos para hacerlo. Aunque el análisis está determinado para los filtros discretos, gran parte se aplica también a los filtros continuos.

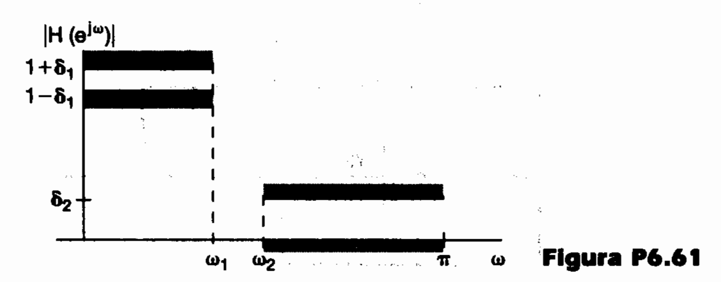


Figura P6.61

Considere un filtro paso bajas con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ para el cual $|H(e^{j\omega})|$ cae dentro de los límites de tolerancia mostrados en la figura P6.61; esto es

$$1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_1,$$
$$0 \leq |H(e^{j\omega})| \leq \delta_2, \quad \omega_2 \leq \omega \leq \pi.$$

Al conectar en cascada dos filtros idénticos, ambos con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$, se forma un nuevo filtro con respuesta en frecuencia $G(e^{j\omega})$.

(a) Determine los límites de tolerancia en $|G(e^{j\omega})|$.

(b) Suponiendo que $H(e^{j\omega})$ es una buena aproximación a un filtro paso bajas, de manera que $\delta_1 << 1$ y $\delta_2 << 1$, determine si el rizo de la banda de paso para $G(e^{j\omega})$ es mayor o menor que el rizo de la banda de paso para $H(e^{j\omega})$. Determine también si el rizo de la banda de supresión para $G(e^{j\omega})$ es mayor o menor que el rizo de la banda de supresión para $H(e^{j\omega})$.

(c) Si se conectan N filtros idénticos con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ para obtener una nueva respuesta en frecuencia $G(e^{j\omega})$, entonces, suponiendo otra vez que $\delta_1 << 1$ y $\delta_2 << 1$, determine los límites de tolerancia aproximados en $|G(e^{j\omega})|$.

6.62. En el problema 6.61 consideramos un método para usar un módulo de filtro básico de manera repetitiva en la construcción de un nuevo filtro con características mejoradas. Consideremos ahora una alternativa propuesta por J. W. Tukey en el libro *Exploratory Data Analysis* (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1976). El procedimiento se muestra en forma de diagrama de bloques en la figura P6.62(a).

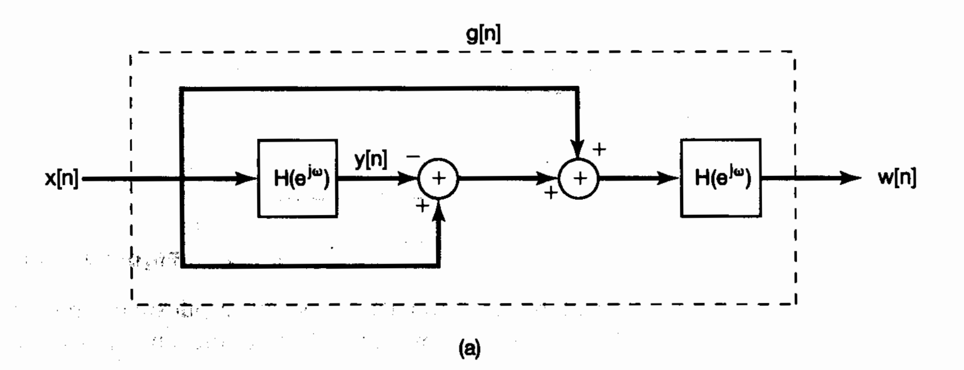
(a) Suponga que $H(e^{j\omega})$ es real y tiene un rizo en la banda de paso de $\pm\delta_1$ y un rizo en la banda de supresión de $\pm\delta_2$ (es decir, $H(e^{j\omega})$ cae dentro de los límites de tolerancia indicados en la figura P6.62(b)). La respuesta en frecuencia $G(e^{j\omega})$ del sistema completo en la figura P6.62(a) cae dentro de los límites de tolerancia indicados en la figura P6.62(c). Determine A, B, C y D en términos de δ_1 y δ_2.

(b) Si $\delta_1 << 1$ y $\delta_2 << 1$, ¿cuál es el rizo de la banda de paso y cuál el rizo de la banda de supresión aproximados asociados con $G(e^{j\omega})$? Indique en particular si el rizo de la banda de paso de $G(e^{j\omega})$ es mayor o menor que el rizo de la banda de paso de $H(e^{j\omega})$. Indique también si el rizo de la banda de supresión de $G(e^{j\omega})$ es mayor o menor que el rizo de la banda de supresión de $H(e^{j\omega})$.

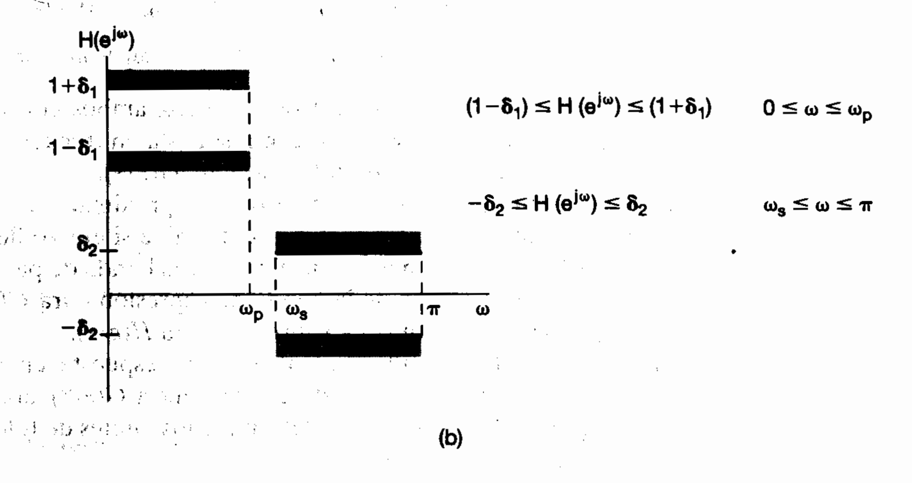
(c) En las partes (a) y (b) asumimos que $H(e^{j\omega})$ es real. Ahora considere $H(e^{j\omega})$ de modo que tenga la forma más general

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})e^{j\theta(\omega)},$$

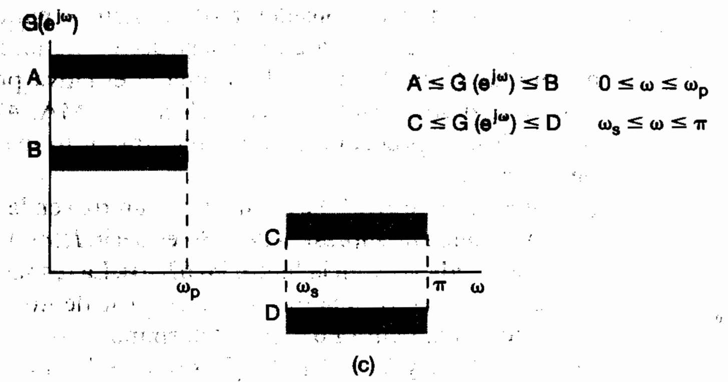
donde $H_1(e^{j\omega})$ es real y $\theta(\omega)$ es una característica de fase no especificada. Si



(a)



(b)



(c)

Figura P6.62

$|H(e^{j\omega})|$ es una aproximación razonable a un filtro paso bajas ideal, ¿será necesariamente $|G(e^{j\omega})|$ una aproximación razonable a un filtro paso bajas ideal?

(d) Suponga ahora que $H(e^{j\omega})$ es un filtro paso bajas FIR de fase lineal, de manera que

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})e^{jM\omega},$$

donde $H_1(e^{j\omega})$ es real y M es un entero. Muestre cómo se modificaría el sistema en la figura P6.62(a) de manera que el sistema completo se aproxime a un filtro paso bajas.

6.63. En el diseño de filtros digitales, a menudo se selecciona un filtro con una característica de magnitud especificada que tiene la duración más corta. Esto es, la respuesta al impulso, la cual es la transformada de Fourier inversa del espectro de frecuencia compleja, debe ser tan angosta como sea posible. Suponiendo que $h[n]$ es real, queremos demostrar que si la fase $\theta(\omega)$ asociada con la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ es cero, la duración de la respuesta al impulso es mínima. Expresemos la respuesta en frecuencia como

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)},$$

y consideremos que la cantidad

$$D = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2h^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nh[n])^2$$

es una medida de la duración de la respuesta al impulso asociada $h[n]$.

(a) Usando la propiedad de derivación de la transformada de Fourier y la relación de Parseval, exprese D en términos de $H(e^{j\omega})$.

(b) Expresando $H(e^{j\omega})$ en términos de su magnitud $|H(e^{j\omega})|$ y fase $\theta(\omega)$, use el resultado de la parte (a) para demostrar que D se minimiza cuando $\theta(\omega) = 0$.

6.64. Para que un filtro discreto sea *causal* y tenga fase lineal exacta, su respuesta al impulso debe ser de longitud finita y en consecuencia la ecuación de diferencias debe ser no recursiva. La base que justifica esta afirmación consiste en considerar un caso particular, el de una característica de fase lineal para la cual la pendiente de la fase es un entero. De este modo, la respuesta en frecuencia se supone que tiene la forma

$$H(e^{j\omega}) = H_r(e^{j\omega})e^{-jM\omega}, \; -\pi < \omega < \pi \qquad \text{(P6.64-1)}$$

donde $H_r(e^{j\omega})$ es real y par.

Sea que $h[n]$ denota la respuesta al impulso del filtro con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ y sea que $h_r[n]$ denota la respuesta al impulso del filtro con respuesta en frecuencia $H_r(e^{j\omega})$.

(a) Usando las propiedades adecuadas en la tabla 5.1, demuestre que:

1. $h_r[n] = h_r[-n]$ (es decir, $h_r[n]$ es simétrica alrededor de $n = 0$).
2. $h[n] = h_r[n - M]$.

(b) Usando el resultado de la parte (a), demuestre que cuando $H(e^{j\omega})$ tiene la forma de la ecuación (P6.54-1), $h[n]$ es simétrica alrededor de $n = M$, esto es,

$$h[M + n] = h[M - n]. \qquad \text{(P6.64-2)}$$

(c) De acuerdo con el resultado de la parte (b), la característica de fase lineal en la ecuación (P6.64-1) impone una simetría en la respuesta al impulso. Demuestre que si $h[n]$ es causal y tiene la simetría en la ecuación (P6.64-2), entonces

$$h[n] = 0, \qquad n < 0 \text{ y } n > 2M$$

(es decir, debe ser de longitud finita).

6.65. Para una clase de filtros paso bajas discretos, conocidos como filtros Butterworth, la magnitud al cuadrado de la respuesta en frecuencia está dada por

$$|B(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan(\omega/2)}{\tan(\omega_c/2)}\right)^{2N}},$$

donde ω_c es la frecuencia de corte (la cual tomaremos como $\pi/2$) y N es el orden del filtro (el cual consideraremos como $N = 1$). De este modo, tenemos

$$|B(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \tan^2(\omega/2)}.$$

(a) Usando las identidades trigonométricas, demuestre que $|B(e^{j\omega})|^2 = \cos^2(\omega/2)$.
(b) Sea $B(e^{j\omega}) = a\cos(\omega/2)$. ¿Para qué valores complejos de a $|B(e^{j\omega})|^2$ es la misma que en la parte (a)?
(c) Demuestre que $B(e^{j\omega})$ de la parte (b) es la función de transferencia correspondiente de una ecuación de diferencias de forma

$$y[n] = \alpha x[n] + \beta x[n - \gamma].$$

Determine α, β y γ.

6.66. En la figura P6.66(a) mostramos un sistema discreto que consiste en una combinación en paralelo de N filtros LTI con respuesta al impulso $h_k[n]$, $k = 0, 1, \cdots, N - 1$. Para cualquier k, $h_k[n]$ está relacionada con $h_0[n]$ mediante la expresión

$$h_k[n] = e^{j(2\pi nk/N)}h_0[n].$$

(a) Si $h_0[n]$ es un filtro paso bajas ideal discreto con respuesta en frecuencia $H_0(e^{j\omega})$ como se muestra en la figura P6.66(b), trace las transformadas de Fourier de $h_1[n]$ y $h_{N-1}[n]$ para ω en el intervalo de $-\pi < \omega \leq +\pi$.

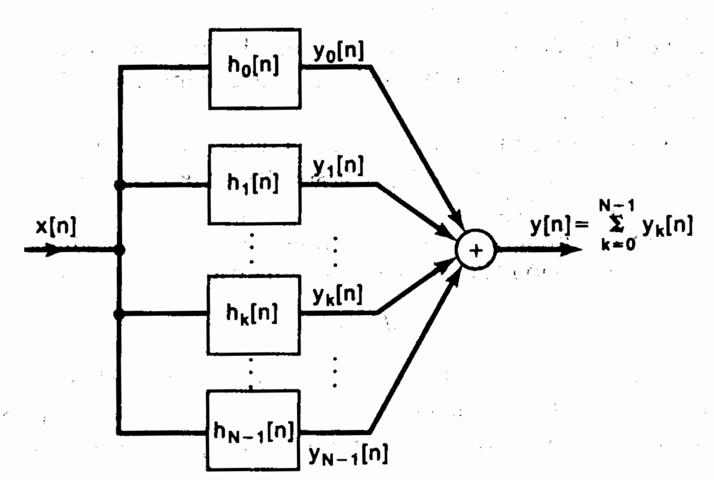


Figura P6.66a

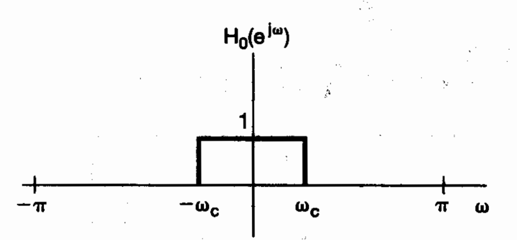


Figura P6.66b

(b) Determine el valor de la frecuencia de corte ω_c en la figura P6.66(b) en términos de $N(0 < \omega_c \leq \pi)$ tal que el sistema de la figura P6.66(a) sea un sistema identidad; esto es, $y[n] = x[n]$ para toda n y cualquier entrada $x[n]$.

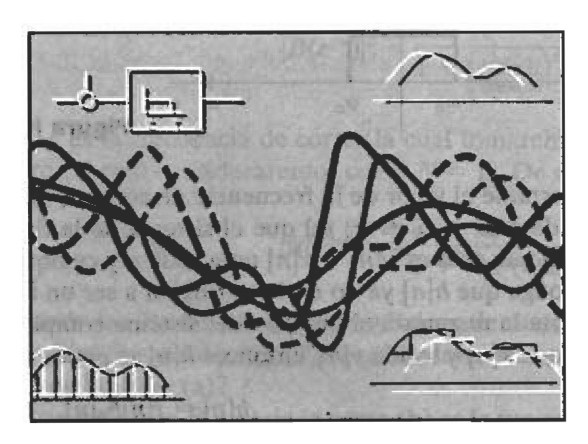
(c) Suponga que $h[n]$ ya no está restringida a ser un filtro paso bajas ideal. Si $h[n]$ denota la respuesta al impulso del sistema completo en la figura P6.66(a) con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$, entonces $h[n]$ se puede expresar en la forma

$$h[n] = r[n]h_0[n].$$

Determine y trace $r[n]$.

(d) A partir del resultado de la parte (c), determine una condición suficiente y necesaria en $h_0[n]$ para asegurar que el sistema completo será un sistema identidad (es decir, tal que para cualquier entrada $x[n]$, la salida $y[n]$ será idéntica a $x[n]$). Su respuesta no debe contener ninguna suma.

7
MUESTREO



7.0 INTRODUCCIÓN

Bajo ciertas condiciones, una señal continua puede representarse y reconstruirse por completo partiendo del conocimiento de sus valores, o *muestras*, en puntos igualmente espaciados en el tiempo. Esta propiedad un tanto sorprendente se deriva de un resultado básico que se conoce como el *teorema de muestreo*. Este teorema es en extremo importante y útil. Se utiliza, por ejemplo, en las imágenes en movimiento, que consisten en una secuencia de cuadros individuales, cada uno de los cuales representa una vista instantánea (es decir, una muestra en tiempo) de una escena que cambia continuamente. Cuando estas muestras son vistas en una secuencia a una velocidad suficientemente rápida, percibimos una representación precisa de la escena original en movimiento continuo. Otro ejemplo son las imágenes impresas, las cuales por lo general consisten de una fina malla de puntos, cada uno de ellos correspondiente a una muestra de la imagen continua en el espacio que se representa en la impresión. Si las muestras están lo suficientemente cercanas unas a otras, la imagen parecerá ser continua en el espacio, aunque al verla con una lupa su representación en términos de muestras se hace evidente.

Gran parte de la importancia del teorema de muestreo reside en su papel de puente entre las señales continuas y las discretas. Como veremos en este capítulo, el hecho de que, bajo ciertas condiciones, una señal continua se pueda recuperar por completo a partir de una secuencia de sus muestras, proporciona un mecanismo para representar una señal continua mediante una señal discreta. En muchos contextos, el procesamiento de señales discretas es más flexible y a menudo se prefiere al procesamiento de señales continuas. Esto se debe en gran parte al impresionante desarrollo de la tecnología digital en las últimas décadas, lo cual da como resultado la disponibilidad de sistemas discretos de bajo costo, ligeros, programables y de fácil reproducción. Así, el concepto de muestreo sugiere un método en extremo atractivo y ampliamente empleado en la tecnología de sistemas discretos para construir sistemas continuos y procesar señales de este tipo: explo-

tamos el muestreo para convertir una señal continua a una señal discreta, procesar la señal discreta usando un sistema discreto, y después, convertirla de nuevo a una señal continua.

En el siguiente análisis presentamos y desarrollamos el concepto de muestreo y el proceso de reconstrucción de una señal continua a partir de sus muestras. En este estudio, identificamos las condiciones bajo las cuales una señal continua se puede reconstruir con exactitud a partir de sus muestras y examinamos las consecuencias cuando no se satisfacen estas condiciones. Más tarde exploramos el procesamiento de señales continuas que han sido convertidas a señales discretas mediante el muestreo. Finalmente, examinamos el muestreo de señales discretas y los conceptos relacionados con la decimación y la interpolación.

7.1 REPRESENTACIÓN DE UNA SEÑAL CONTINUA MEDIANTE SUS MUESTRAS: EL TEOREMA DE MUESTREO

En general, no deberíamos esperar que, en la ausencia de cualquier condición o información adicionales, una señal pudiera ser especificada unívocamente por una secuencia de muestras igualmente espaciadas. Por ejemplo, en la figura 7.1 mostramos tres diferentes señales continuas, las cuales tienen valores idénticos en múltiplos enteros de T; esto es,

$$x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT).$$

Claramente, hay un número infinito de señales que pueden generar un conjunto dado de muestras. Sin embargo, como veremos más adelante, si una señal es de banda limitada, es decir, si su transformada de Fourier es cero fuera de una banda finita de frecuencias, y si las muestras son tomadas lo suficientemente cercanas unas de otras en relación con la frecuencia más alta presente en la señal, entonces las muestras especifican *unívocamente* a la señal y podemos reconstruirla perfectamente. Este resultado se conoce como el *teorema de muestreo*, y es de gran importancia en la aplicación práctica de los métodos de análisis de señales y sistemas.

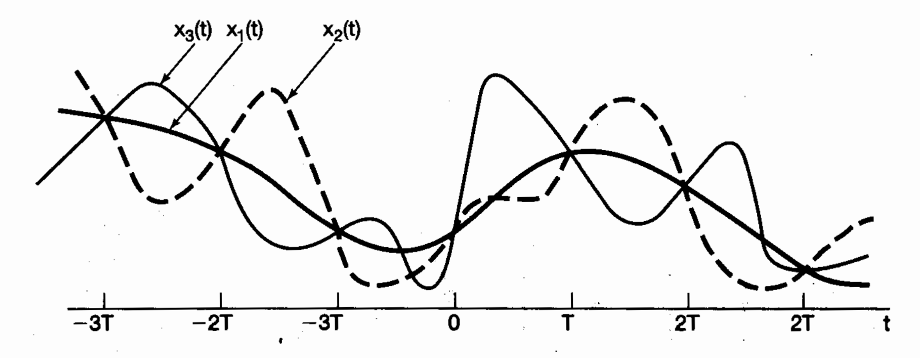


Figura 7.1 Tres señales continuas con valores idénticos en múltiplos enteros de T.

7.1.1 Muestreo con tren de impulsos

Para desarrollar el teorema de muestreo, necesitamos un método conveniente con el cual se pueda representar el muestreo de una señal continua a intervalos regulares. Una forma útil de hacerlo es mediante el uso de un tren de impulsos periódicos multiplicado por la señal continua $x(t)$ que deseamos muestrear. Este mecanismo, conocido como *muestreo con tren de impulsos*, se representa en la figura 7.2. El tren de impulsos periódicos $p(t)$ se conoce como la *función de muestreo*, el periodo T como el *periodo de muestreo* y la frecuencia fundamental de $p(t)$, $\omega_s = 2\pi/T$, como la *frecuencia de muestreo*. En el dominio del tiempo

$$x_p(t) = x(t)p(t), \tag{7.1}$$

donde

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \tag{7.2}$$

Debido a la propiedad de muestreo del impulso unitario analizado en la sección 1.4.2, sabemos que al multiplicar $x(t)$ por un impulso unitario se muestrea el valor de la señal en el punto en que se localiza el impulso; es decir, $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$. Aplicando esta información a la ecuación (7.1), vemos, como se muestra en la figura 7.2, que $x_p(t)$ es un tren de impulsos en el cual las amplitudes de los mismos son iguales a las

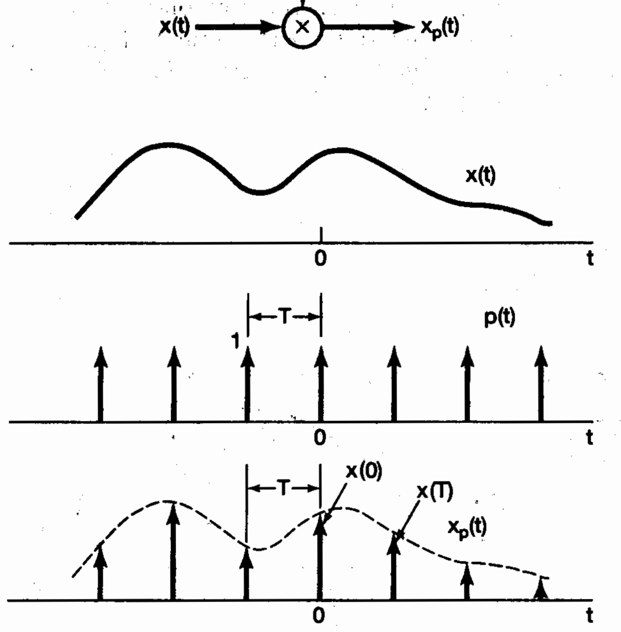


Figura 7.2 Muestreo con un tren de impulsos.

muestras de $x(t)$ en intervalos espaciados por T; es decir,

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT). \tag{7.3}$$

De la propiedad de multiplicación (sección 4.5), sabemos que

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * P(j\omega)], \tag{7.4}$$

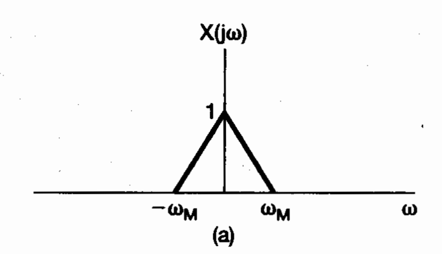
y del ejemplo 4.8,

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s). \tag{7.5}$$

Puesto que la convolución con un impulso simplemente desplaza la señal [es decir, $X(j\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = X(j(\omega - \omega_0))$], se sigue que

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s)). \tag{7.6}$$

Esto es, $X_p(j\omega)$ es una función periódica de ω que consiste de una superposición de réplicas de $X(j\omega)$ desplazadas y escaladas por $1/T$, como se muestra en la figura 7.3. En la figura 7.3(c), $\omega_M < (\omega_s - \omega_M)$ o, de manera equivalente, $\omega_s > 2\omega_M$, por lo que no hay traslape entre las réplicas desplazadas de $X(j\omega)$, mientras que en la figura 7.3(d), con $\omega_s < 2\omega_M$, sí lo hay. Para el caso ilustrado en la figura 7.3(c), $X(j\omega)$ se reproduce fielmente en múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo. En consecuencia, si $\omega_s > 2\omega_M$, $x(t)$ puede ser recuperada exactamente a partir de $x_p(t)$ por medio de un filtro paso bajas con ganancia T



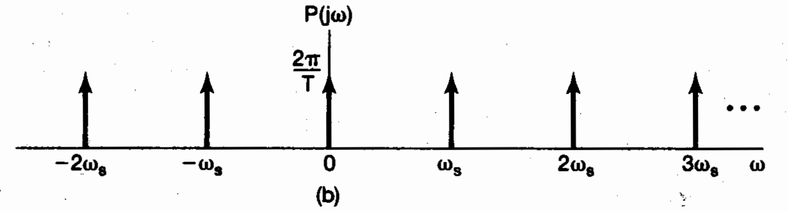
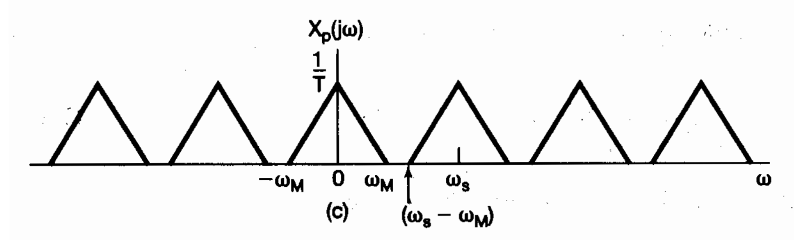


Figura 7.3 Efecto en el dominio de la frecuencia del muestreo en el dominio del tiempo: (a) espectro de la señal original; (b) espectro de la función de muestreo;



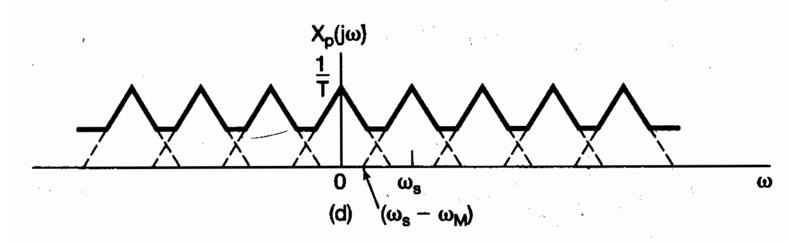
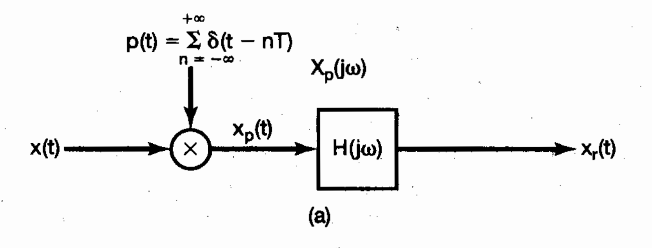


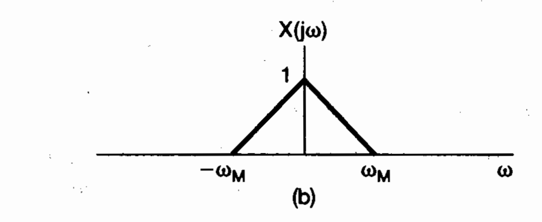
Figura 7.3 *Continuación*
(c) espectro de la señal muestreada con $\omega_s > 2\omega_M$; (d) espectro de la señal muestreada con $\omega_s < 2\omega_M$.

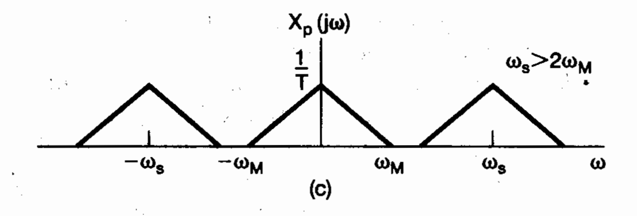
y una frecuencia de corte mayor que ω_M y menor que $\omega_s - \omega_M$, como se indica en la figura 7.4. Este resultado básico, conocido como el *teorema de muestreo* se puede expresar como sigue:[1]

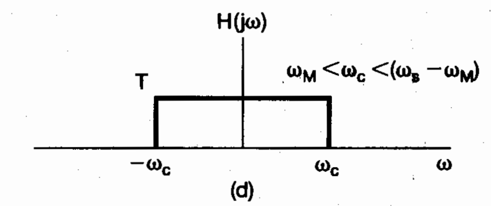
> Teorema de muestreo:
> Sea $x(t)$ una señal de banda limitada con $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$. Entonces $x(t)$ se determina unívocamente mediante sus muestras $x(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, si
>
> $$\omega_s > 2\omega_M$$
>
> donde
>
> $$\omega_s = \frac{2\pi}{T}.$$
>
> Dadas estas muestras, podemos reconstruir $x(t)$ generando un tren de impulsos periódicos en el cual los impulsos sucesivos tengan amplitudes que correspondan a valores de muestras sucesivas. Este tren de impulsos es entonces procesado a través de un filtro paso bajas ideal con ganancia T cuya frecuencia de corte sea mayor que ω_M y menor que $\omega_s - \omega_M$. La señal de salida resultante será exactamente igual a $x(t)$.

[1]Este importante y elegante teorema de muestreo estuvo disponible por muchos años en una gran variedad de formas en la literatura matemática. Véase, por ejemplo, de J. M. Whittaker, "Interpolatory Function Theory" (Nueva York: Stecher-Hafner Service Agency, 1964) capítulo 4. No apareció explícitamente en la literatura de la teoría de comunicaciones hasta la publicación en 1949 de las notas clásicas de Shannon tituladas "Communication in the Presence of Noise" (*Proceedings of the IRE*, enero de 1949, pp. 10-21). Sin embargo, H. Nyquist en 1928 y D. Gabor en 1946 señalaron, basándose en el uso de series de Fourier, que $2TW$ números son suficientes para representar una función de duración T y cuya frecuencia más alta es W. [H. Nyquist, "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory", *AIEE Transactions*, 1928, p. 617; D. Gabor, "Theory of Communication", *Journal of IEE 93*, núm. 26 (1946), p. 429.]









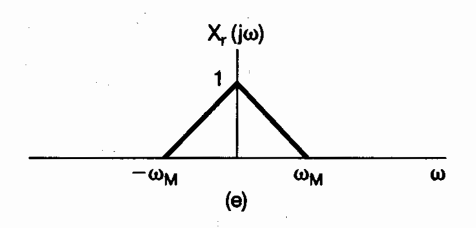


Figura 7.4 Recuperación exacta de una señal continua a partir de sus muestras usando un filtro paso bajas ideal: (a) sistema de muestreo y reconstrucción; (b) espectro representativo de $x(t)$; (c) espectro correspondiente a $x_p(t)$; (d) filtro paso bajas ideal para recuperar $X(j\omega)$ a partir de $X_p(j\omega)$; (e) el espectro de $x_r(t)$.

La frecuencia de muestreo, bajo el teorema de muestreo, debe exceder a la frecuencia $2\omega_M$, la cual se conoce comúnmente como la *velocidad de Nyquist*.[2]

Como se analizó en el capítulo 6, los filtros ideales en general no se usan en la práctica por diversas razones. En cualquier aplicación práctica, el filtro paso bajas ideal de la figura 7.4 sería reemplazado por un filtro no ideal $H(j\omega)$ que se aproxima con bastante exactitud a la característica de frecuencia deseada para el problema que nos interesa (es

[2]La frecuencia ω_M correspondiente a la mitad de la razón de Nyquist se conoce a menudo como *frecuencia de Nyquist*.

decir, $H(j\omega) \simeq 1$ para $|\omega| < \omega_M$, y $H(j\omega) \simeq 0$ para $|\omega| > (\omega_s - \omega_M)$. Obviamente, cualquier aproximación de este tipo en la etapa del filtrado paso bajas conducirá a alguna discrepancia entre $x(t)$ y $x_r(t)$ en la figura 7.4 o, de manera equivalente, entre $X(j\omega)$ y $X_r(j\omega)$. La selección particular del filtro no ideal está determinada entonces por el nivel de distorsión aceptable para la aplicación que se esté considerando. Por conveniencia, y para enfatizar los principios básicos como el teorema de muestreo, por lo regular daremos por sentado tanto la disponibilidad como el uso de los filtros ideales a todo lo largo de este capítulo y del siguiente, en el entendido de que en la práctica estos filtros deben ser reemplazados por filtros no ideales diseñados para aproximarse a las características ideales con la precisión suficiente para resolver el problema en cuestión.

7.1.2 Muestreo con un retenedor de orden cero

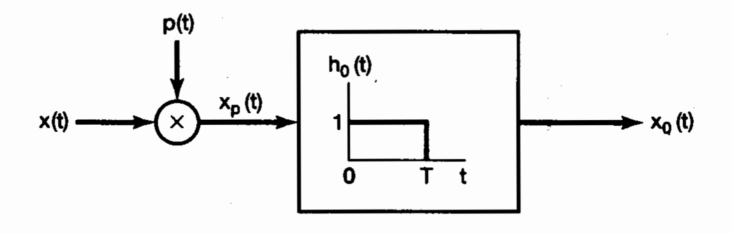
El teorema de muestreo, el cual se puede explicar más fácilmente en términos del muestreo con el tren de impulsos, establece el hecho de que una señal de banda limitada es representada unívocamente por sus muestras. Sin embargo, en la práctica, los pulsos angostos de gran amplitud, los cuales se aproximan a los impulsos, son relativamente difíciles de generar y transmitir, y a menudo resulta más conveniente generar la señal de muestreo en una forma conocida como un *retenedor de orden cero*. Tal sistema muestrea la señal $x(t)$ en un instante determinado y retiene ese valor hasta el siguiente instante en el cual se toma una muestra, como se muestra en la figura 7.5. La reconstrucción de $x(t)$ a partir de la salida de un retenedor de orden cero puede llevarse a cabo nuevamente mediante el filtrado paso bajas. Sin embargo, en este caso, el filtro requerido ya no tiene ganancia constante en la banda de paso. Para desarrollar la característica requerida del filtro, primero debemos observar que la salida $x_0(t)$ del retenedor de orden cero puede, en principio, ser generada mediante el muestreo por un tren de impulsos seguido por un sistema LTI con una respuesta rectangular al impulso como la representada en la figura 7.6. Para reconstruir $x(t)$ a partir de $x_0(t)$, consideramos el procesamiento de $x_0(t)$ mediante un sistema LTI con respuesta al impulso $h_r(t)$ y respuesta en frecuencia $H_r(j\omega)$. La conexión en cascada entre este sistema y el sistema de la figura 7.6 se muestra en la figura 7.7, en la cual deseamos especificar $H_r(j\omega)$ de manera que $r(t) = x(t)$. Comparando el sistema de la figura 7.7 con el de la figura 7.4, vemos que $r(t) = x(t)$ si la combinación en cascada de $h_0(t)$ y $h_r(t)$ es el filtro paso bajas ideal $H(j\omega)$ usado en la figura 7.4. Ya que, a partir del ejemplo 4.4 y de la propiedad de desplazamiento en tiempo 4.3.2,

$$H_0(j\omega) = e^{-j\omega T/2}\left[\frac{2\,\mathrm{sen}(\omega T/2)}{\omega}\right], \tag{7.7}$$

esto requiere que

$$H_r(j\omega) = \frac{e^{j\omega T/2}\,H(j\omega)}{\dfrac{2\,\mathrm{sen}(\omega T/2)}{\omega}}. \tag{7.8}$$

Figura 7.5 Muestreo utilizando un retenedor de orden cero.



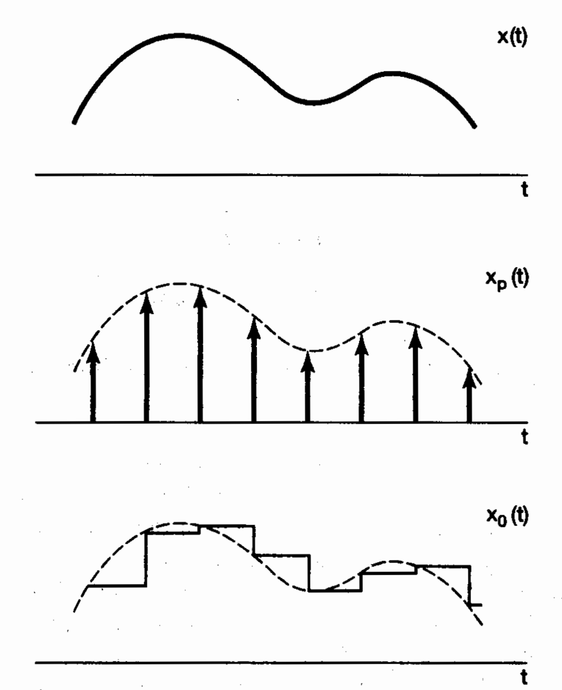


Figura 7.6 Retenedor de orden cero como un muestreador de tren de impulsos seguido por un sistema LTI con respuesta rectangular al impulso.

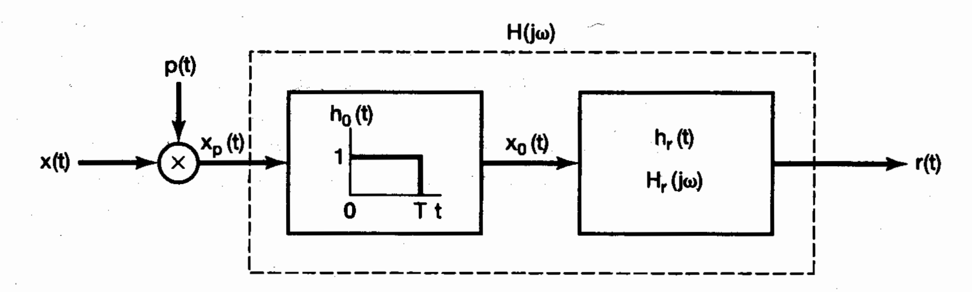


Figura 7.7 Representación de un retenedor de orden cero (figura 7.6) con un filtro de reconstrucción conectados en cascada.

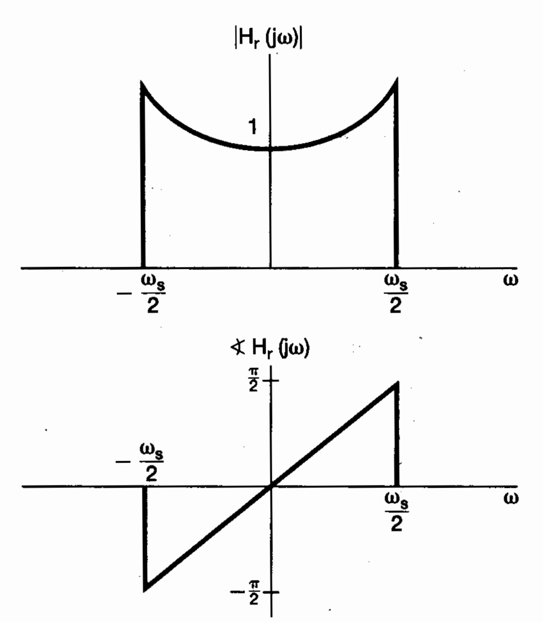


Figura 7.8 Magnitud y fase del filtro de reconstrucción para el retenedor de orden cero.

Por ejemplo, si $\omega_s/2$ es igual a la frecuencia de corte de $H(j\omega)$, la magnitud y la fase ideales para el filtro de reconstrucción que sigue después del retenedor de orden cero son las mostradas en la figura 7.8.

Una vez más, en la práctica la respuesta en frecuencia en la ecuación (7.8) no se puede realizar en forma exacta, y por lo tanto debe diseñarse una aproximación adecuada. De hecho, en muchas situaciones se considera que la salida del retenedor de orden cero es una aproximación adecuada de la señal original sin pasarla por un filtrado paso bajas adicional, y representa en esencia una posible, si bien muy burda, interpolación entre los valores de la muestra. De manera alternativa, podemos desear llevar a cabo alguna ligera interpolación entre valores de muestras. En la próxima sección revisaremos con más detalle el concepto general de interpretación de la reconstrucción de una señal a partir de sus muestras como un proceso de interpolación.

7.2 RECONSTRUCCIÓN DE UNA SEÑAL A PARTIR DE SUS MUESTRAS USANDO LA INTERPOLACIÓN

La interpolación, es decir, el ajuste de una señal continua a un conjunto de valores de muestras, es un procedimiento comúnmente usado para reconstruir, en forma aproximada o precisa, de una función a partir de sus muestras. Un procedimiento simple de interpolación lo constituye el retenedor de orden cero analizado en la sección 7.1. Otra forma útil de interpolación es la *interpolación lineal*, según la cual puntos de muestras adyacentes son conectados mediante una línea recta, como se muestra en la figura 7.9. En

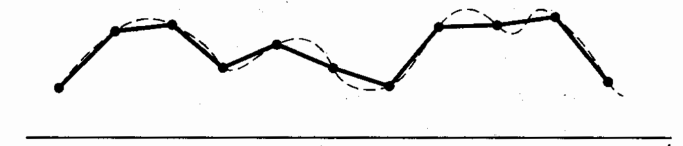


Figura 7.9 Interpolación lineal entre puntos muestra. La curva punteada representa la señal original y la curva sólida la interpolación lineal.

fórmulas de interpolación más complicadas, los puntos muestra se pueden conectar mediante polinomios de mayor orden o mediante otras funciones matemáticas.

Como hemos visto en la sección 7.1, para una señal de banda limitada, si los instantes de muestreo son lo suficientemente cercanos, entonces la señal se puede reconstruir exactamente: en otras palabras, mediante el uso de un filtro paso bajas se puede efectuar la interpolación exacta entre los puntos de muestra. La interpretación de la reconstrucción de $x(t)$ como un proceso de interpolación se hace evidente cuando consideramos el efecto en el dominio del tiempo del filtro paso bajas de la figura 7.4. En particular, la salida es

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t)$$

o, con $x_p(t)$ dada por la ecuación (7.3),

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)h(t - nT). \tag{7.9}$$

La ecuación (7.9) describe cómo se debe ajustar una curva continua entre los puntos de muestra $x(nT)$ y en consecuencia representa una fórmula de interpolación. Para el filtro paso bajas ideal $H(j\omega)$ de la figura 7.4,

$$h(t) = \frac{\omega_c T \operatorname{sen}(\omega_c t)}{\pi \omega_c t} \tag{7.10}$$

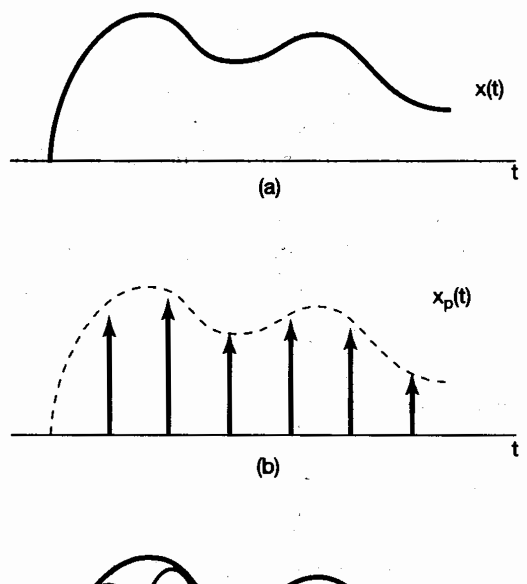
de manera que

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{\omega_c T}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(\omega_c(t - nT))}{\omega_c(t - nT)}. \tag{7.11}$$

La reconstrucción de acuerdo con la ecuación (7.11) con $\omega_c = \omega_s/2$ se ilustra en la figura 7.10. La figura 7.10(a) representa la señal $x(t)$ original de banda limitada, y la figura 7.10(b) representa a $x_p(t)$, el tren de impulsos de las muestras. En la figura 7.10(c) mostramos la superposición de los términos individuales en la ecuación (7.11).

A la interpolación que se realiza usando la respuesta al impulso de un filtro paso bajas ideal como el de la ecuación (7.11) se le conoce comúnmente como *interpolación de banda limitada*, ya que lleva a cabo la reconstrucción exacta si $x(t)$ es de banda limitada y la frecuencia de muestreo satisface las condiciones del teorema de muestreo. Como hemos indicado, en muchos casos es preferible usar un filtro menos exacto pero más sencillo o, de manera equivalente, una función de interpolación más simple que la función en la ecuación (7.10). Por ejemplo, el retenedor de orden cero puede verse como una forma de interpolación entre los valores muestra en los cuales la función de interpolación $h(t)$ es la respuesta al impulso $h_0(t)$ representada en la figura 7.6. En ese sentido, cuando $x_0(t)$ en la figura corresponde a la aproximación a $x(t)$, el sistema $h_0(t)$ representa una aproximación al filtro paso bajas ideal requerido para la interpolación exacta. La figura 7.11 muestra la magnitud de la función de transferencia del filtro de interpolación con el retenedor de orden cero, superpuesta a la función de transferencia deseada del filtro de interpolación exacta.

Tanto en la figura 7.11 como en la 7.6, vemos que el retenedor de orden cero constituye una aproximación muy burda, si bien en algunos casos es suficiente. Por ejemplo, si en una aplicación dada hay un filtrado paso bajas adicional que se aplica de manera



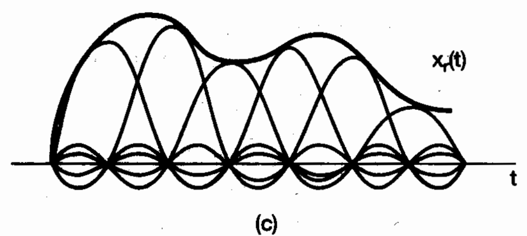


Figura 7.10 Interpolación ideal de banda limitada usando la función sinc: (a) señal de banda limitada $x(t)$; (b) tren de impulsos de muestras de $x(t)$; (c) interpolación ideal de banda limitada en la cual el tren de impulsos es reemplazado por la superposición de funciones sinc [ecuación (7.11)].

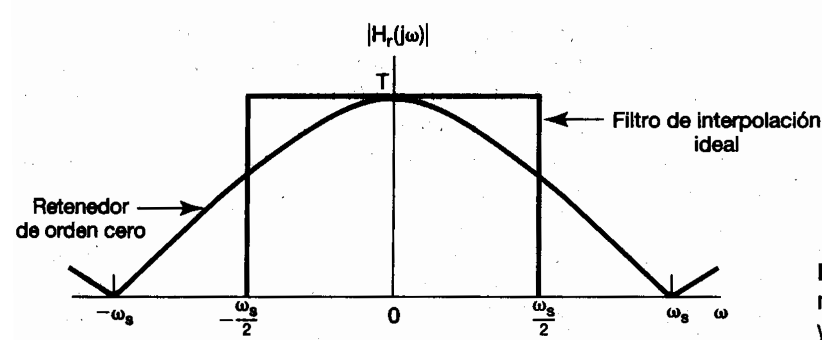
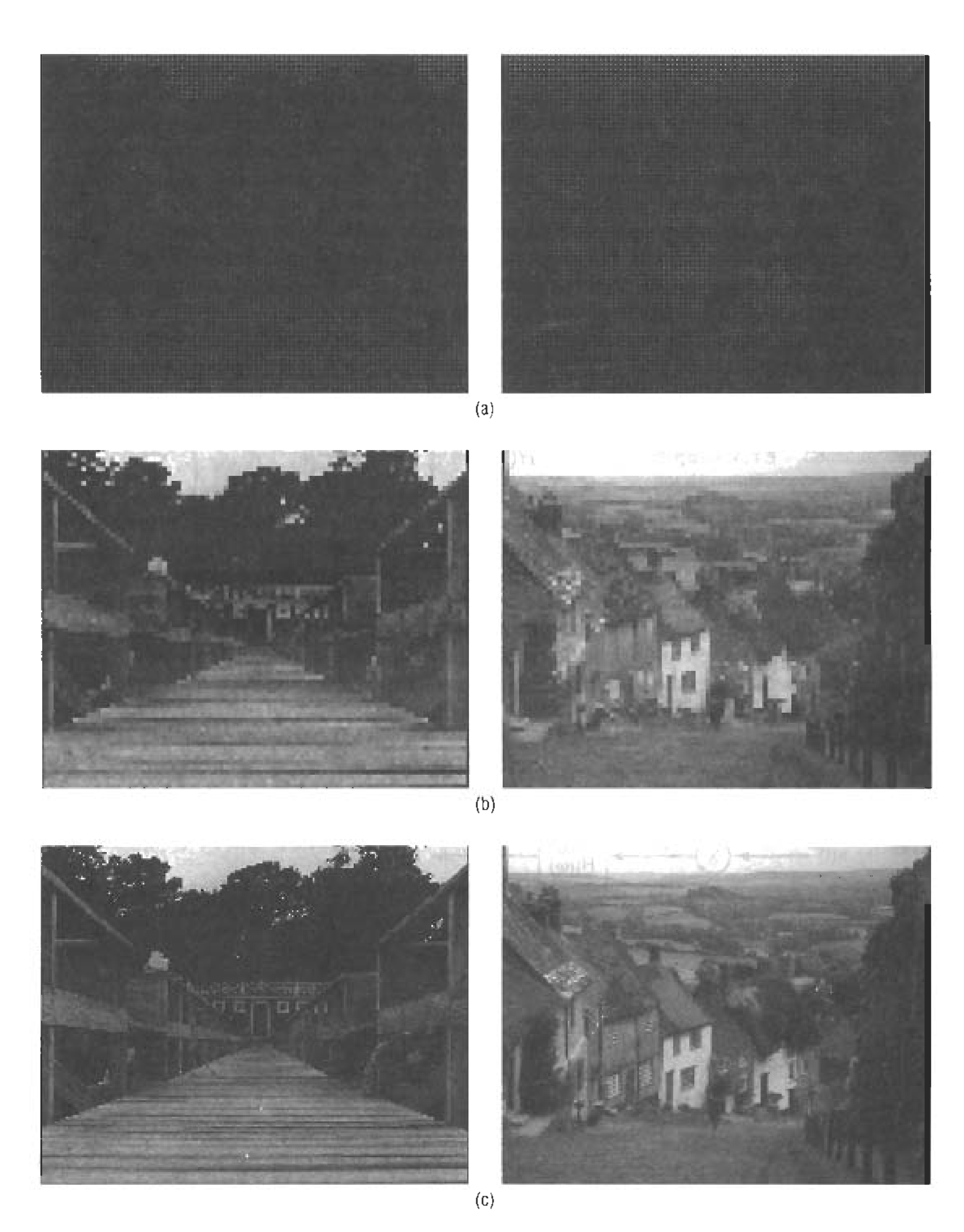


Figura 7.11 Función de transferencia para el retenedor de orden cero y para el filtro de interpolación ideal.

natural, esto tiende a mejorar la interpolación total. Esto se ilustra con el caso de las imágenes de la figura 7.12. La figura 7.12(a) muestra imágenes con muestreo de impulso (es decir, muestreo con pulsos angostos en el espacio). La figura 7.12(b) es el resultado de aplicar un retenedor bidimensional de orden cero a la figura 7.12(a), lo cual da como resultado un efecto de mosaico. Sin embargo, el sistema visual humano aplica en forma inherente un filtrado paso bajas y, en consecuencia, cuando se ve a distancia, las discontinuidades en el mosaico se suavizan. Por ejemplo, en la figura 7.12(c) un retenedor de



(a)

(b)

(c)

Figura 7.12 (a) Las imágenes originales de las figuras 6.2(a) y (g) con muestreo de impulso; (b) retenedor de orden cero aplicado a las imágenes en (a). El sistema visual introduce de forma natural un filtrado paso bajas con una frecuencia de corte que disminuye con la distancia. Por lo tanto, cuando se ve a distancia, las discontinuidades en el mosaico en la figura 7.12(b) son suavizadas; (c) el resultado de aplicar un retenedor de orden cero después del muestreo de impulsos con un espaciamiento horizontal y vertical de un tercio del usado en (a) y (b).

orden cero se usa de nuevo, pero aquí el espaciamiento de muestras en cada dirección es un cuarto del de la figura 7.12(a). Con una visión normal, se aplica en forma natural un filtrado paso bajas considerable, aunque el efecto de mosaico continúa siendo evidente.

Si la interpolación burda proporcionada por el retenedor de orden cero es insuficiente, podemos usar diversas estrategias de interpolación más suave, algunas de las cuales se conocen en conjunto como *retenedores de orden superior*. En particular, el retenedor de orden cero produce una señal de salida, como en la figura 7.5, la cual es discontinua. En contraste, la interpolación lineal, como se muestra en la figura 7.9, produce reconstrucciones que son continuas aunque con derivadas discontinuas debidas a los cambios en la pendiente en los puntos de muestreo. La interpolación lineal, a menudo llamada retenedor de primer orden, puede verse también como la interpolación de la forma mostrada en la figura 7.4 y en la ecuación (7.9) con $h(t)$ triangular, como se ilustra en la figura 7.13. La función de transferencia asociada también se muestra en la figura y es

$$H(j\omega) = \frac{1}{T}\left[\frac{\text{sen}(\omega T/2)}{\omega/2}\right]^2. \tag{7.12}$$

La función de transferencia del retenedor de primer orden se muestra superpuesta sobre la función de transferencia para el filtro de interpolación ideal. La figura 7.14 corresponde a las mismas imágenes de la figura 7.12(b), pero a la imagen muestreada se le aplicó un retenedor de primer orden. De manera análoga, podemos definir los retenedores de segundo y mayor orden que producen reconstrucciones con un mayor grado de uniformidad. Por ejemplo, la salida de un retenedor de segundo orden produce una interpolación continua de los valores de la muestra y que tiene una primera derivada continua y una segunda derivada discontinua.

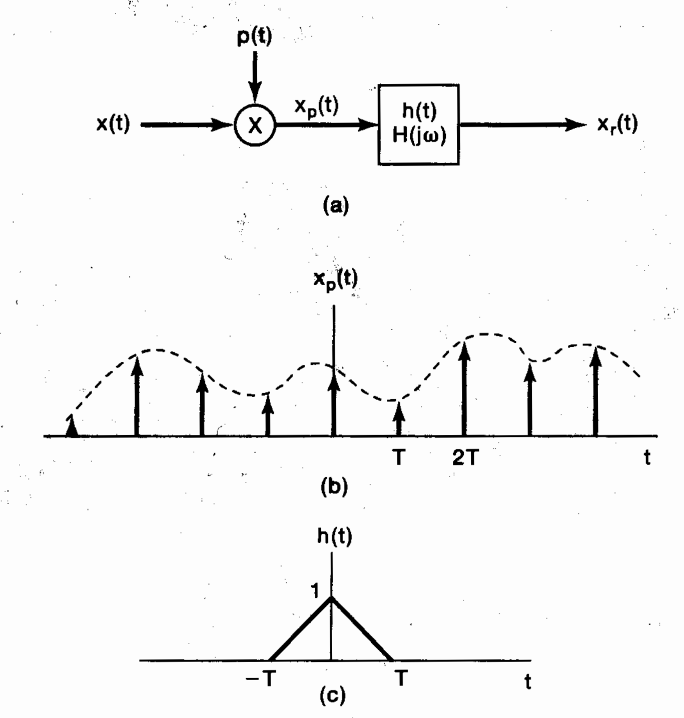


Figura 7.13 Interpolación lineal (retenedor de primer orden) como un muestreo con tren de impulsos seguido por la convolución con una respuesta al impulso triangular: (a) sistema de muestreo y reconstrucción; (b) tren de impulsos de las muestras; (c) respuesta al impulso que representa un retenedor de primer orden;

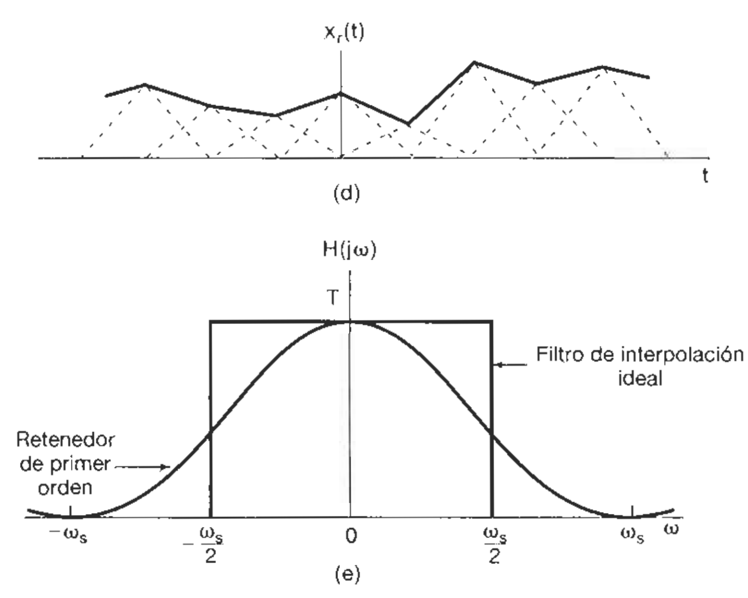


Figura 7.13 *Continuación* (d) retenedor de primero orden aplicado a la señal muestreada; (e) comparación de la función de transferencia del filtro ideal de interpolación y el retenedor de primer orden.

7.3 EL EFECTO DEL SUBMUESTREO: TRASLAPE

En las secciones anteriores de este capítulo, se dio por hecho que la frecuencia de muestreo era lo suficientemente alta como para que se cumplieran las condiciones del teorema de muestreo. Como se ilustró en la figura 7.3, con $\omega_s > 2\omega_M$, el espectro de la señal muestreada consiste de réplicas escaladas del espectro de $x(t)$ y esto forma la base del teorema de muestreo. Cuando $\omega_s < 2\omega_M$, $X(j\omega)$, el espectro de $x(t)$, ya no está repro-



Figura 7.14 Resultado de aplicar un retenedor de primer orden en lugar de un retenedor de orden cero después del muestreo con impulsos con un espaciamiento horizontal y vertical de un tercio usado en las figuras 7.12(a) y (b).

ducido en $X_p(j\omega)$ y por consiguiente, la señal ya no es recuperable mediante un filtrado paso bajas. Este efecto, en el cual los términos individuales de la ecuación (7.6) se superponen, se conoce como *traslape* (*aliasing*), y en esta sección exploraremos su efecto y consecuencias.

Resulta claro que, si el sistema de la figura 7.4 se aplica a una señal con $\omega_s < 2\omega_M$, la señal reconstruida $x_r(t)$ ya no será igual a $x(t)$. Sin embargo, como verificaremos en el problema 7.25, la señal original y la señal $x_r(t)$ que es reconstruida mediante el uso de una interpolación de banda limitada siempre serán iguales en los instantes de muestreo; esto es, para cualquier selección de ω_s,

$$x_r(nT) = x(nT), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{7.13}$$

Para tener una idea más clara de la relación que existe entre $x(t)$ y $x_r(t)$ cuando $\omega_s < 2\omega_M$, consideraremos con más detalle el caso relativamente simple de una señal senoidal. Por lo tanto, sea

$$x(t) = \cos \omega_0 t, \tag{7.14}$$

con trasformada de Fourier $H(j\omega)$ como se indica en la figura 7.15(a). En esta figura, por comodidad hemos diferenciado gráficamente el impulso en ω_0 del que está en $-\omega_0$. Consideremos $X_p(j\omega)$, el espectro de la señal muestreada, y centremos nuestra atención en el efecto de un cambio en la frecuencia ω_0 manteniendo fija la frecuencia de muestreo ω_s. En las figuras 7.15(b)-(e) ilustramos $X_p(j\omega)$ para diversos valores de ω_0. También señalamos con una línea punteada la banda de paso del filtro paso bajas de la figura 7.4 con $\omega_c = \omega_s/2$. Observe que no ocurre traslape en (b) o en (c), ya que $\omega_0 = \omega_s/2$, en tanto que en (d) y (e) sí se presenta el traslape. Para cada uno de estos cuatro casos, la salida $x_r(t)$ del filtro paso bajas está dada por:

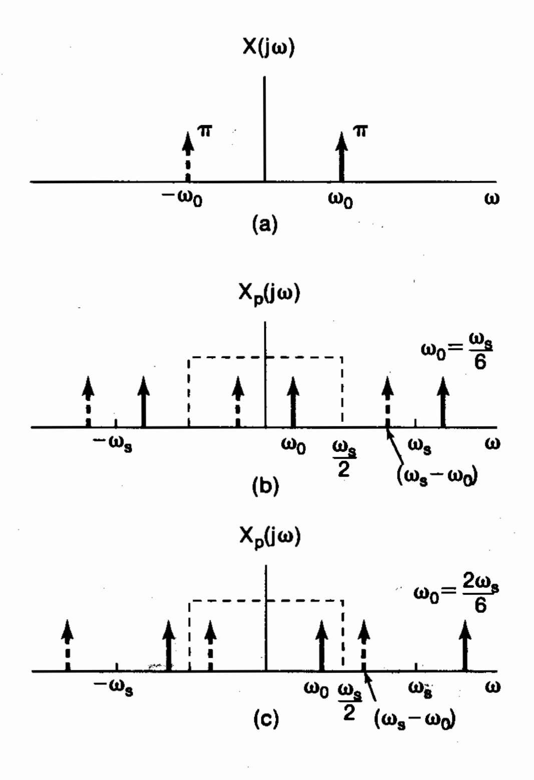
(a) $\omega_0 = \dfrac{\omega_s}{6}; \qquad x_r(t) = \cos \omega_0 t = x(t)$

(b) $\omega_0 = \dfrac{2\omega_s}{6}; \qquad x_r(t) = \cos \omega_0 t = x(t)$

(c) $\omega_0 = \dfrac{4\omega_s}{6}; \qquad x_r(t) = \cos (\omega_s - \omega_0)t \neq x(t)$

(d) $\omega_0 = \dfrac{5\omega_s}{6}; \qquad x_r(t) = \cos (\omega_s - \omega_0)t \neq x(t).$

Cuando ocurre el traslape, la frecuencia original ω_0 adopta la identidad de una frecuencia inferior, $\omega_s - \omega_0$. Para $\omega_s/2 < \omega_0 < \omega_s$, a medida que ω_0 se incrementa en relación con ω_s, la frecuencia de salida $\omega_s - \omega_0$ disminuye. Cuando $\omega_s = \omega_0$, por ejemplo, la señal reconstruida es una constante. Lo anterior concuerda con el hecho de que, cuando se muestrea una vez por ciclo, todas las muestras son iguales y serían idénticas a las obtenidas al muestrear una señal constante ($\omega_0 = 0$). En la figura 7.16 hemos representado para cada uno de los casos de la figura 7.15, la señal $x(t)$, sus muestras y la señal reconstruida $x_r(t)$. A partir de la figura podemos ver cómo el filtro paso bajas interpola entre las



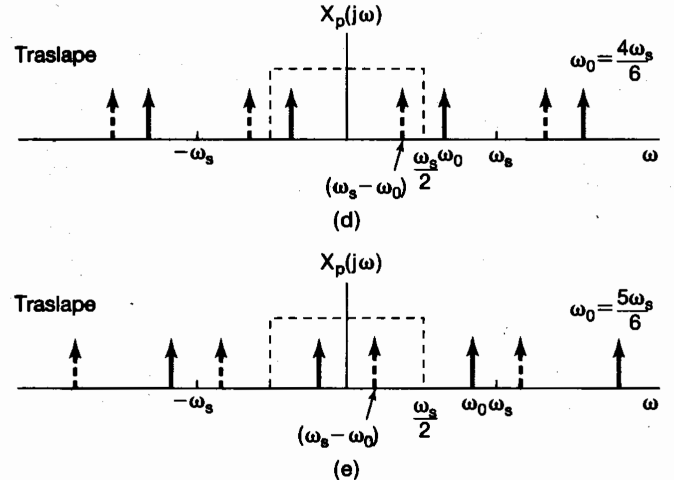


Figura 7.15 Efecto de sobremuestreo y submuestreo en el dominio de la frecuencia: (a) espectro de la señal senoidal original; (b), (c) espectro de la señal muestreada con $\omega_s > 2\omega_0$; (d), (e) espectro de la señal muestreada con $\omega_s < 2\omega_0$. Conforme incrementamos ω_0 al moverse de (b) a (d), los impulsos con líneas sólidas se mueven a la derecha, mientras que los impulsos con líneas punteadas se mueven a la izquierda. En (d) y (e), estos impulsos se han movido lo suficiente como para que haya un cambio en aquellos que caen dentro de la banda de paso del filtro paso bajas ideal.

muestras, ajustando siempre, en particular, una senoide de frecuencia menor que $\omega_s/2$ a las muestras de $x(t)$.

Como una variación de los ejemplos anteriores, considere la señal

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi). \tag{7.15}$$

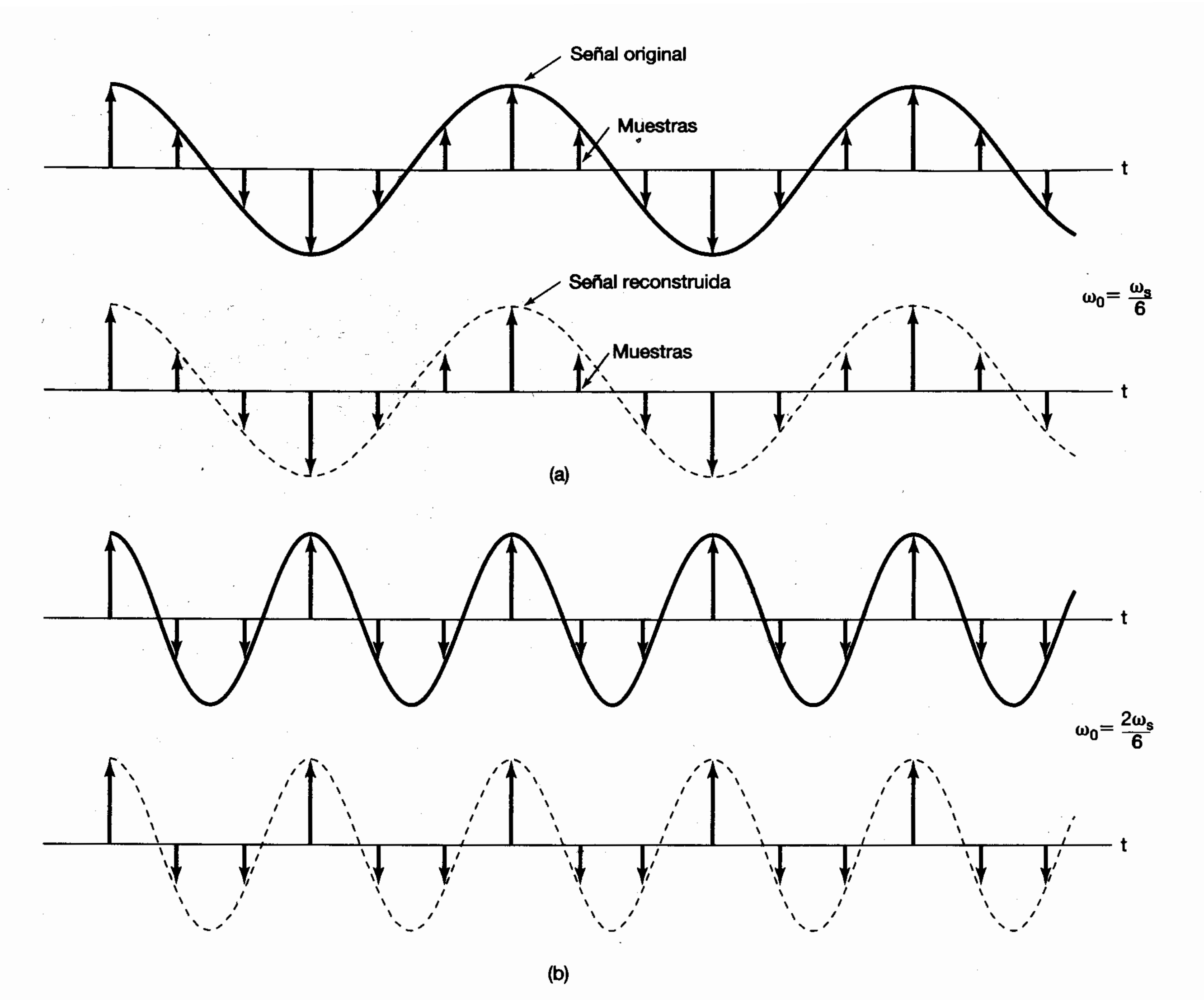


Figura 7.16 Efecto de traslape en una señal senoidal. Para cada uno de los cuatro valores de ω_0, se ilustra la señal senoidal original (curva sólida), sus muestras y la señal reconstruida (curva punteada): (a) $\omega_0 = \omega_s/6$; (b) $\omega_0 = 2\omega_s/6$; (c) $\omega_0 = 4\omega_s/6$; (d) $\omega_0 = 5\omega_s/6$. En (a) y (b) no ocurre traslape, mientras que en (c) y en (d) sí hay traslape.

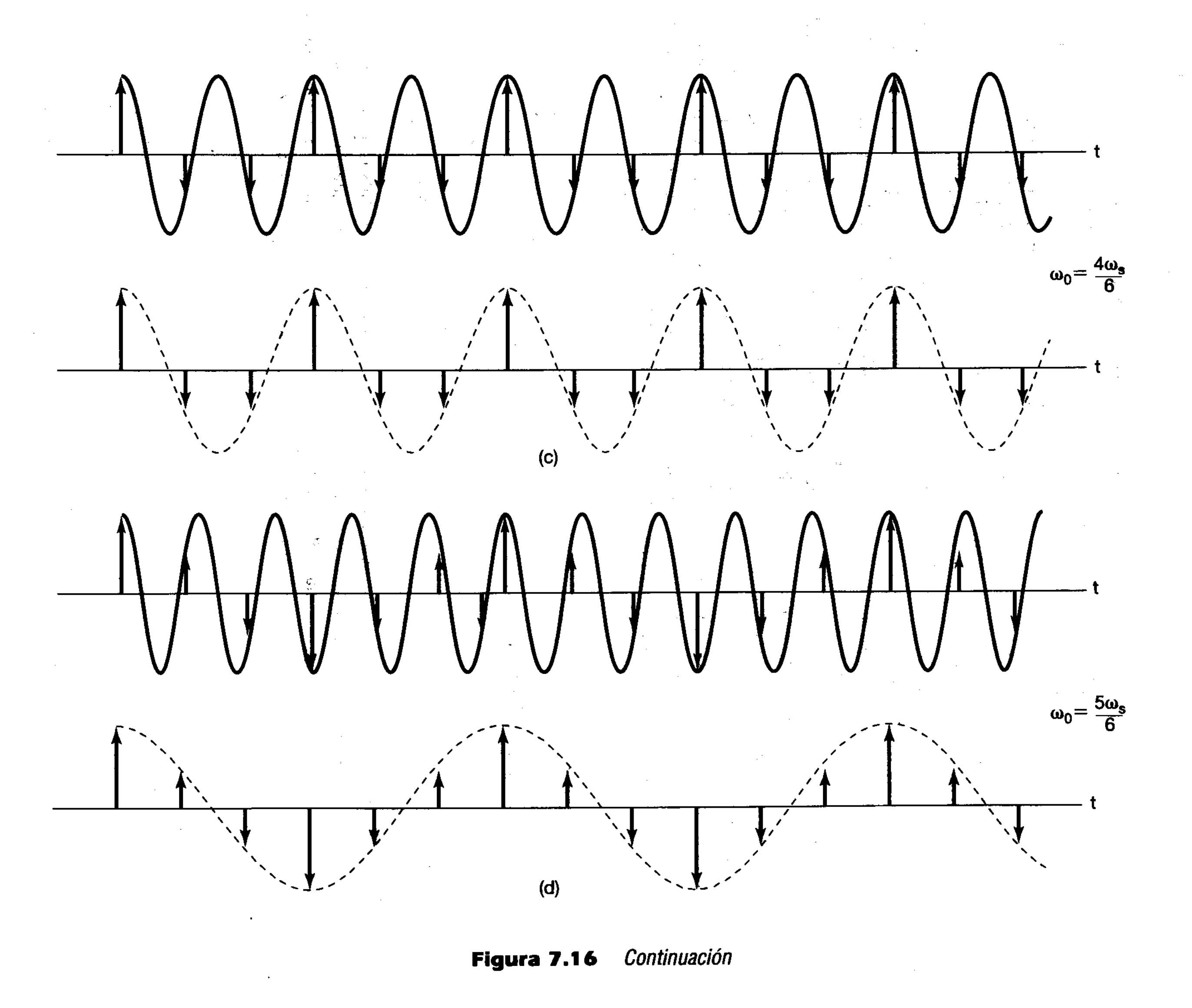


Figura 7.16 *Continuación*

En este caso, la transformada de Fourier de $x(t)$ es en esencia la misma que la de la figura 7.15(a), excepto que el impulso indicado con una línea sólida tiene ahora una amplitud $\pi e^{j\phi}$, mientras que el impulso indicado con una línea punteada tiene una amplitud con la fase opuesta, es decir, $\pi e^{-j\phi}$. Si consideramos ahora el mismo conjunto de selecciones para ω_0 como en la figura 7.15, el espectro resultante para las versiones muestreadas de $\cos(\omega_0 t + \phi)$ son exactamente como en la figura, en la cual todos los impulsos en línea sólida tienen amplitud $\pi e^{j\phi}$, y los que están en línea punteada tienen amplitud $\pi e^{-j\phi}$. De nueva cuenta, en los casos (b) y (c) se cumple la condición del teorema de muestreo, de modo que $x_r(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) = x(t)$, mientras que en (d) y (e) de nuevo hay traslape. Sin embargo, ahora vemos que ha habido una inversión en los impulsos en líneas sólida y punteada, los cuales aparecen en la banda de paso del filtro paso bajas. Como resultado de ello encontramos que, en estos casos, $x(t) = \cos[(\omega_s - \omega_0)t - \phi]$, donde tenemos un cambio en el signo de la fase ϕ, es decir, una *fase inversa*.

Es importante observar que el teorema de muestreo requiere explícitamente que la frecuencia de muestreo sea *mayor que el doble* de la frecuencia más alta en la señal, en vez de ser mayor que o igual al doble de la frecuencia más alta. El siguiente ejemplo señala que al muestrear una señal senoidal a exactamente el doble de su frecuencia (es decir, exactamente dos muestras por ciclo) no es suficiente.

Ejemplo 7.1

Considere la señal senoidal

$$x(t) = \cos\left(\frac{\omega_s}{2} t + \phi\right),$$

y suponga que esta señal se muestrea, mediante muestreo con impulsos, a exactamente el doble de la frecuencia de la senoide, es decir, a la frecuencia de muestreo ω_s. Como se presenta en el problema 7.39, si esta señal de impulsos muestreados se aplica como entrada a un filtro paso bajas ideal con frecuencia de corte $\omega_s/2$, la salida resultante es

$$x_r(t) = (\cos\phi)\cos\left(\frac{\omega_s}{2} t\right).$$

Como consecuencia de ello, vemos que la reconstrucción perfecta de $x(t)$ ocurre sólo en el caso en el cual la fase ϕ es cero (o un múltiplo entero de 2π). De otra manera, la señal $x_r(t)$ no resulta igual a $x(t)$.

Como un ejemplo extremo, considere el caso en el cual $\phi = -\pi/2$, de modo que

$$x(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_s}{2} t\right).$$

Esta señal está dibujada en la figura 7.17. Observamos que los valores de la señal en múltiplos enteros del periodo de muestreo $2\pi/\omega_s$ son cero. En consecuencia, el muestreo a esta frecuencia produce una señal que es idéntica a cero, y cuando dicha entrada cero se aplica al filtro paso bajas ideal, la salida resultante $x_r(t)$ también será idéntica a cero.

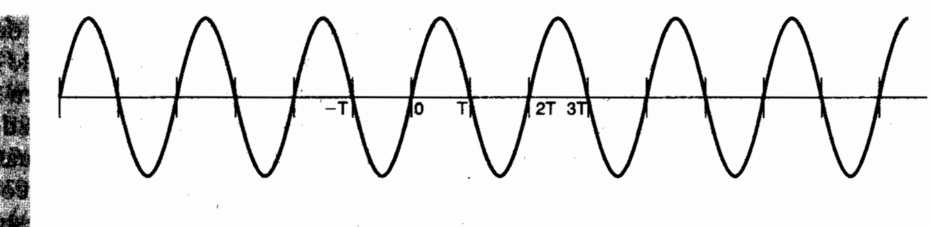


Figura 7.17 Señal senoidal del ejemplo 7.1.

El efecto del submuestreo, por medio del cual las frecuencias más altas son reflejadas en las frecuencias más bajas, es el principio en el cual se basa el efecto estroboscópico. Considere, por ejemplo, la situación mostrada en la figura 7.18, en la cual tenemos un disco que gira a una velocidad constante con una sola línea radial marcada en él. El destello estroboscópico actúa como un sistema de muestreo, ya que ilumina el disco por intervalos de tiempo extremadamente breves a una velocidad periódica. Cuando la frecuencia estroboscópica es mucho más alta que la velocidad de rotación del disco, esta velocidad se percibe correctamente. Cuando la frecuencia estroboscópica es menor que el doble de la frecuencia de rotación del disco, la rotación parece estar a una frecuencia más baja de la que en realidad tiene. Además, debido a la inversión de fase, ¡el disco parece girar en la dirección equivocada! Hablando de manera general, si rastreamos la posición de una línea fija sobre el disco en muestras sucesivas, entonces, cuando $\omega_0 < \omega_s < 2\omega_0$, de manera que muestreamos con una frecuencia un poco mayor que una vez por revolución, las muestras del disco mostrarán la línea fija en posiciones que están desplazadas sucesivamente en una dirección contraria a las manecillas del reloj, opuesta a la rotación en sentido de las manecillas del reloj del propio disco. A un destello por revolución, lo cual corresponde a $\omega_s = \omega_0$, la línea radial aparece estacionaria (es decir, la frecuencia de rotación del disco y sus armónicas han sido traslapadas a la frecuencia

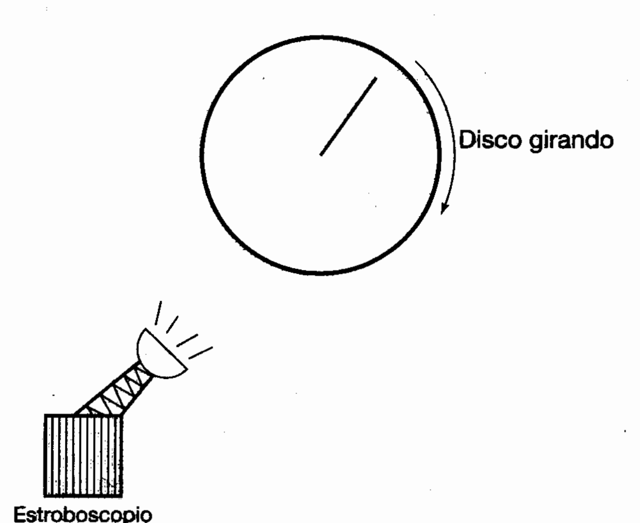


Figura 7.18 Efecto estroboscópico.

cero). Un efecto similar se observa a menudo en las películas del oeste, en donde las ruedas de las diligencias parecen estar girando más lentamente de lo que correspondería al movimiento hacia delante del carruaje, y algunas veces parecen ir en la dirección contraria. En este caso, el proceso de muestreo corresponde al hecho de que las películas son una secuencia de fotogramas individuales cuya velocidad (usualmente entre 18 y 24 fotogramas por segundo) corresponde a la frecuencia de muestreo.

El análisis anterior sugiere la interpretación del efecto estroboscópico como un ejemplo de una aplicación útil del traslape debido al submuestreo. Otra aplicación práctica del traslape surge en un instrumento de medición conocido como *osciloscopio de muestreo*. Este instrumento se utiliza para la observación de formas de onda de frecuencias muy altas y utiliza los principios de muestreo para traslapar estas frecuencias en otras que se puedan desplegar en la pantalla con mayor facilidad. Esta aplicación se analiza con detalle en el problema 7.38.

7.4 PROCESAMIENTO DISCRETO DE SEÑALES CONTINUAS

En muchas aplicaciones, se puede obtener una ventaja significativa en el procesamiento de una señal continua al convertirla primero en una señal discreta y, después de procesarla de este modo, convertirla de nuevo en una señal continua. El procesamiento de la señal discreta se puede llevar a cabo con una computadora general o de propósito especial, con microprocesadores o con cualquiera de la gran variedad de dispositivos que están diseñados específicamente para el procesamiento de señales discretas.

En términos generales, este enfoque del procesamiento de las señales continuas se puede considerar como la conexión en cascada de tres operaciones, como se indica en la figura 7.19, donde $x_c(t)$ y $y_c(t)$ son señales continuas y $x_d[n]$ y $y_d[n]$ son sus señales discretas correspondientes. El sistema total es, de hecho, un sistema continuo en el sentido de que la entrada y salida del sistema son ambas señales continuas. La base teórica para la conversión de una señal continua a una señal discreta y la reconstrucción de una señal continua a partir de su representación de tiempo discreto reside en el teorema de muestreo, analizado en la sección 7.1. Mediante el proceso de muestreo periódico con una frecuencia de muestreo que sea consistente con las condiciones del teorema de muestreo, la señal continua $x_c(t)$ está representada exactamente mediante una secuencia de valores muestra instantáneos $x_c(nT)$; es decir, la secuencia de tiempo discreto $x_d[n]$ se relaciona con $x_c(t)$ mediante

$$x_d[n] = x_c(nT). \tag{7.16}$$

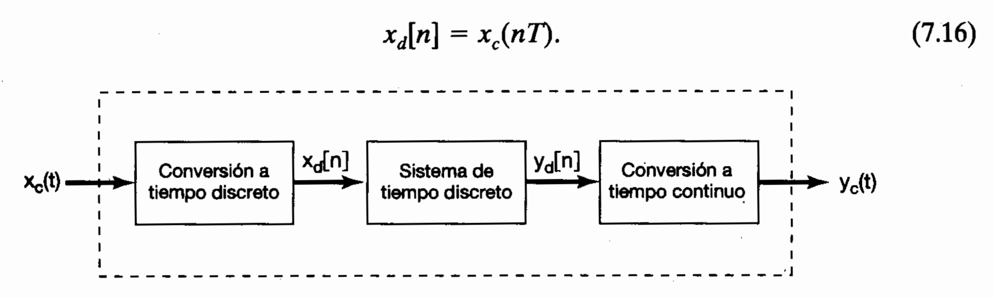


Figura 7.19 Procesamiento de tiempo discreto de señales continuas.

En adelante, nos referiremos a la transformación de $x_c(t)$ a $x_d[n]$ que corresponde al primer sistema de la figura 7.19 será referida como la *conversión de tiempo continuo a discreto* y se abreviará como C/D. La operación inversa correspondiente al tercer sistema de la figura 7.19 será abreviada como D/C, y representa la *conversión de tiempo discreto a tiempo continuo*. La operación D/C realiza una interpolación entre los valores de muestras proporcionados como entrada. Es decir, la operación D/C produce una señal continua $y_c(t)$ que está relacionada con la señal discreta $y_d[n]$ mediante

$$y_d[n] = y_c(nT).$$

Esta notación se explica en la figura 7.20. En sistemas como las computadoras digitales y los sistemas digitales en los cuales la señal discreta se representa en forma digital, el dispositivo comúnmente utilizado para llevar a cabo la conversión C/D se conoce como convertidor *analógico/digital* (A a D), y el dispositivo usado para realizar la conversión D/C se conoce como convertidor *digital/analógico* (D a A).

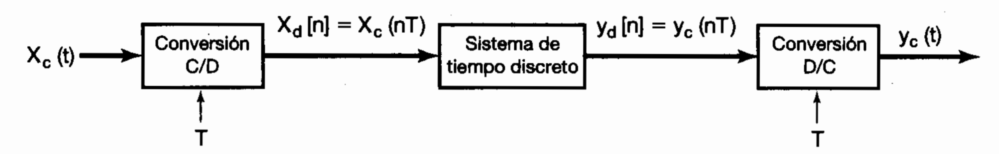


Figura 7.20 Notación para la conversión de tiempo continuo a discreto y la conversión de tiempo discreto a continuo. *T* representa el periodo de muestreo.

Para comprender mejor la relación entre la señal continua $x_c(t)$ y su representación de tiempo discreto $x_d[n]$, resulta útil representar la conversión C/D como un proceso de muestreo periódico seguido por un mapeo del tren de impulsos en una secuencia. Estos dos pasos se muestran en la figura 7.21. En el primer paso, el cual representa el proceso de muestreo, el tren de impulsos $x_p(t)$ corresponde a una secuencia de impulsos cuyas amplitudes corresponden a las muestras de $x_c(t)$ y cuyo espaciamiento en tiempo es igual al periodo de muestreo T. En la conversión del tren de impulsos a la secuencia de tiempo discreto obtenemos $x_d[n]$, que corresponde a la misma secuencia de muestras de $x_c(t)$, pero con un espaciamiento unitario en términos de la nueva variable independiente n. Así, en efecto, la conversión a partir de la secuencia de muestras del tren de impulsos a la secuencia de muestras de tiempo discreto se puede considerar como una normalización de tiempo. Dicha normalización al convertir a $x_p(t)$ en $x_d[n]$ resulta evidente en las figuras 7.21(b) y (c), en las cuales $x_p(t)$ y $x_d[n]$ se ilustran respectivamente para velocidades de muestreo de $T = T_1$ y $T = 2T_1$.



También resulta conveniente examinar las etapas de procesamiento en la figura 7.19 en el dominio de la frecuencia. Puesto que estaremos utilizando las transformadas de Fourier tanto continua como de tiempo discreto, únicamente en esta sección haremos una distinción entre las variables de frecuencia, es decir, ω para tiempo continuo y Ω en tiempo discreto. Por ejemplo, las transformadas de Fourier continuas de $x_c(t)$ y $y_c(t)$ son $X_c(j\omega)$ y $Y_c(j\omega)$, respectivamente, mientras que las transformadas de Fourier de tiempo discreto de $x_d[n]$ y $y_d[n]$ son $X_d(e^{j\Omega})$ y $Yd(e^{j\Omega})$, respectivamente.

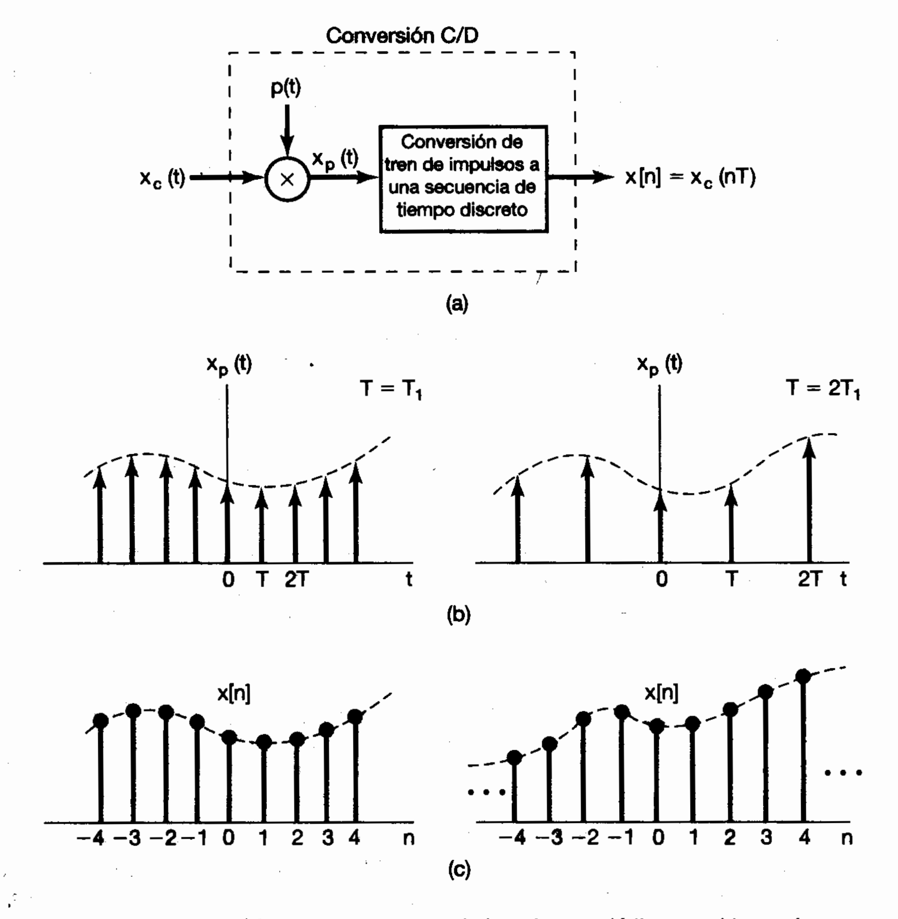


Figura 7.21 Muestreo con un tren de impulsos periódico seguido por la conversión a una secuencia de tiempo discreto: (a) sistema total; (b) $x_p(t)$ para dos velocidades de muestreo. La envolvente punteada representa $x_c(t)$; (c) la secuencia de salida para las dos diferentes velocidades de muestreo.

Para empezar, expresemos $X_p(j\omega)$, la transformada continua de Fourier de $x_p(t)$, en términos de los valores de muestra de $x_c(t)$, aplicando la transformada de Fourier a la ecuación (7.3). Puesto que

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t - nT), \tag{7.17}$$

y además la transformada de $\delta(t - nT)$ es $e^{-j\omega nT}$, se desprende que

$$x_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)e^{-j\omega nT}. \tag{7.18}$$

Ahora considere la transformada de Fourier de tiempo discreto de $x_d[n]$, es decir,

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n]e^{-j\Omega n}, \tag{7.19}$$

o usando la ecuación (7.16),

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n}. \tag{7.20}$$

Comparando las ecuaciones (7.18) y (7.20), vemos que $X_d(e^{j\Omega})$ y $X_p(j\omega)$ están relacionadas a través de

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T). \tag{7.21}$$

También, si recordamos que, como se desarrolló en la ecuación (7.6) y se ilustró en la figura 7.3,

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s)). \tag{7.22}$$

En consecuencia,

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega - 2\pi k)/T). \tag{7.23}$$

La relación entre $X_c(j\omega)$, $X_p(j\omega)$ y $X_d(e^{j\Omega})$ se ilustra en la figura 7.22 para dos diferentes velocidades de muestreo. Aquí, $X_d(e^{j\Omega})$ es una réplica escalada en frecuencia de

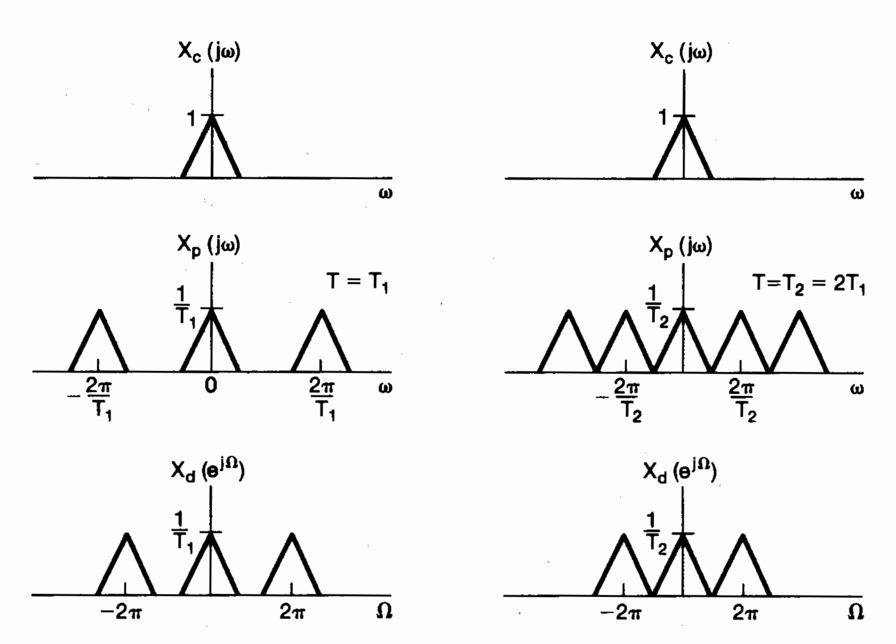


Figura 7.22 Relación entre $X_c(j\omega)$, $X_p(j\omega)$ y $X_d(e^{j\Omega})$ para dos diferentes velocidades de muestreo.

$X_p(j\omega)$ y en particular, es periódica en Ω con periodo 2π. Dicha periodicidad es, de hecho, la característica de cualquier transformada de Fourier de tiempo discreto. El espectro de $x_d[n]$ está relacionado con el de $x_c(t)$ a través de la réplica periódica, representada por la ecuación (7.22), seguida por un escalamiento lineal de frecuencia el cual se representa con la ecuación (7.21). La réplica periódica es una consecuencia del primer paso del proceso de conversión en la figura (7.21), a saber, el muestreo con el tren de impulsos. El escalamiento lineal de frecuencia mostrado en la ecuación (7.21) se puede considerar como una consecuencia de la normalización de tiempo introducida mediante la conversión del tren de impulsos $x_p(t)$ a la secuencia de tiempo discreto $x_d[n]$. A partir de la propiedad de escalamiento en tiempo de la transformada de Fourier analizada en la sección 4.3.5, el escalamiento de $1/T$ en el eje del tiempo introducirá un escalamiento de T en el eje de la frecuencia. Por lo tanto, la relación $\Omega = \omega T$ es compatible con la noción de que, en la conversión de $x_p(t)$ a $x_d[n]$, el eje del tiempo es escalado por un factor de $1/T$.

En el sistema completo de la figura 7.19, después del procesamiento con un sistema discreto, la secuencia resultante se convierte de nuevo en una señal continua. Este proceso es el inverso de los pasos señalados en la figura 7.21. En concreto, a partir de la secuencia $y_d[n]$ se puede generar un tren de impulsos continuo $y_p(t)$. La recuperación de la señal continua $y_c(t)$ a partir de este tren de impulsos se logra entonces por medio de un filtrado paso bajas, como se ilustra en la figura 7.23.

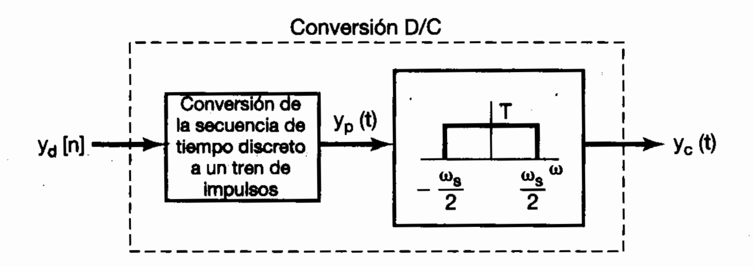


Figura 7.23 Conversión de una secuencia de tiempo discreto a una señal continua.

Consideremos ahora el sistema completo de la figura 7.19, representado como se muestra en la figura 7.24. Resulta claro que, si el sistema discreto es un sistema identidad (es decir, $x_d[n] = y_d[n]$), entonces, suponiendo que las condiciones del teorema de muestreo se cumplen, el sistema completo será un sistema identidad. Las características del sistema total con una respuesta en frecuencia $H_d(e^{j\Omega})$ más general quizá se entiendan mejor examinando el ejemplo representativo mostrado en la figura 7.25. En el lado

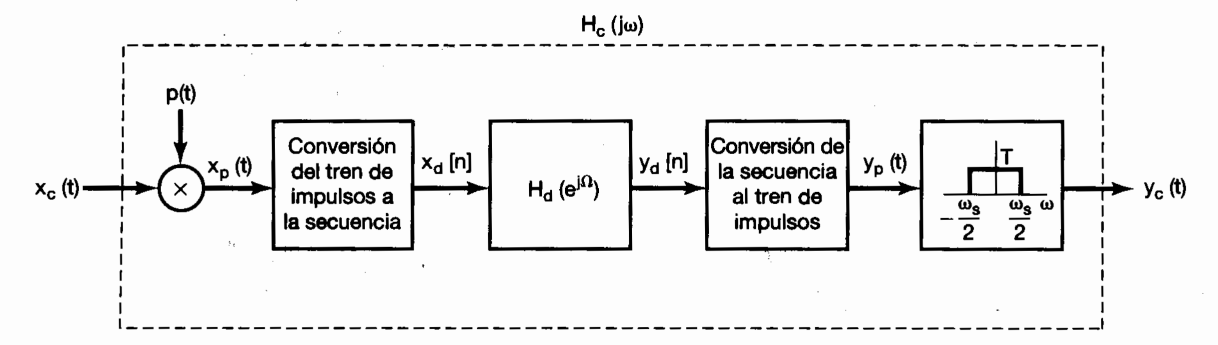


Figura 7.24 Sistema total para filtrar una señal continua usando un filtro discreto.

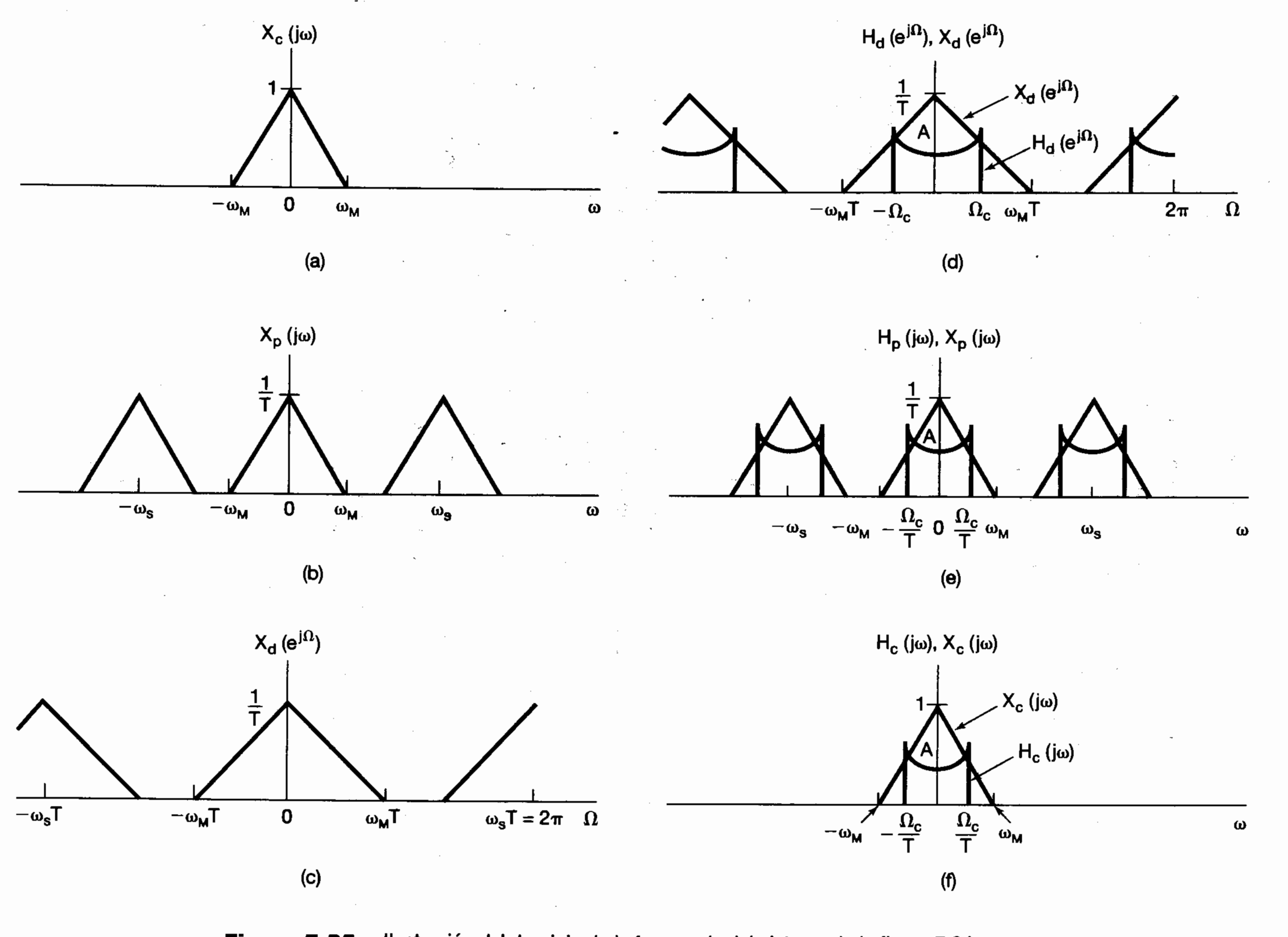


Figura 7.25 Ilustración del dominio de la frecuencia del sistema de la figura 7.24: (a) espectro de tiempo continuo $X_c(j\omega)$; (b) espectro después del muestreo del tren de impulsos; (c) espectro de la secuencia de tiempo discreto $x_d[n]$; (d) $H_d(e^{j\Omega})$ y $X_d(e^{j\Omega})$ que son multiplicadas para formar $Y_d(e^{j\Omega})$; (e) espectros que son multiplicados para formar $Y_p(j\omega)$; (f) espectros que son multiplicados para formar $Y_c(j\omega)$.

izquierdo de la figura están los espectros representativos $X_c(j\omega)$, $X_p(j\omega)$ y $X_d(e^{j\Omega})$, donde suponemos que $\omega_M < \omega_s/2$, de manera que no hay traslape. El espectro $Y_d(e^{j\Omega})$, correspondiente a la salida del filtro discreto, es el producto de $X_d(e^{j\Omega})$ y $H_d(e^{j\Omega})$, y está representado en la figura 7.25(d) sobreponiendo $H_d(e^{j\Omega})$ y $X_d(e^{j\Omega})$. La transformación a $Y_c(j\omega)$ corresponde entonces a aplicar un escalamiento en frecuencia y un filtrado paso bajas, con lo cual se obtiene como resultado el espectro indicado en las figuras 7.25(e) y (f). Ya que $Y_d(e^{j\Omega})$ es el producto de los dos espectros sobrepuestos en la figura 7.25(d), el escalamiento en frecuencia y el filtrado paso bajas se aplican a ambos. Comparando las figuras 7.25(a) y (f), vemos que

$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega)H_d(e^{j\omega T}). \tag{7.24}$$

En consecuencia, para entradas que están lo suficientemente limitadas en banda, el sistema total de la figura 7.24 es, de hecho, equivalente a un sistema LTI continuo con respuesta en frecuencia $H_c(j\omega)$, el cual está relacionado con la respuesta en frecuencia discreta $H_d(e^{j\Omega})$ mediante

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}. \tag{7.25}$$

La respuesta en frecuencia equivalente del filtro continuo es un periodo de la respuesta en frecuencia del filtro discreto con un cambio lineal de escala aplicado al eje de la frecuencia. Esta relación entre la respuesta en frecuencia discreta y la respuesta en frecuencia continua equivalente se ilustra en la figura 7.26.

La equivalencia del sistema total de la figura 7.24 a un sistema LTI resulta un tanto sorprendente en vista de que la multiplicación por un tren de impulsos *no* es una operación invariante en el tiempo. De hecho, el sistema completo de la figura 7.24 no es invariante en el tiempo para entradas arbitrarias. Por ejemplo, si $x_c(t)$ fuera un pulso rectangular angosto de duración menor que T, entonces un desplazamiento en tiempo de $x_c(t)$ podría generar una secuencia $x[n]$ que tendría o sólo ceros en todos los valores de la secuencia o sólo un valor de secuencia diferente de cero, dependiendo de la alineación del pulso rectangular en relación con el tren de impulsos de muestreo. Sin embargo, como sugiere el espectro de la

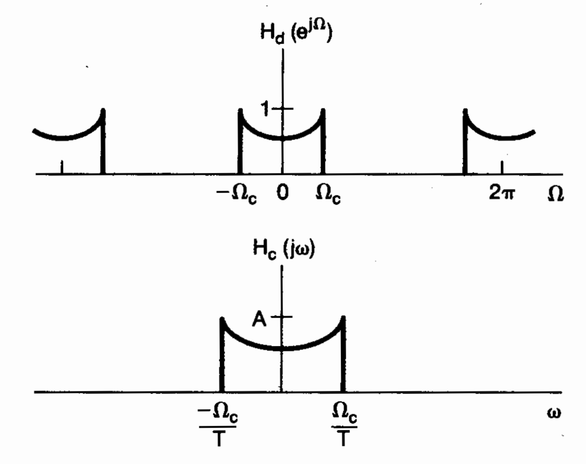


Figura 7.26 Respuesta en frecuencia de tiempo discreto y respuesta en frecuencia de tiempo continuo equivalente para el sistema de la figura 7.24.

figura 7.25, para *señales de entrada de banda limitada* con una velocidad de muestreo lo suficientemente alta como para evitar el traslape, el sistema de la figura 7.24 *es* equivalente a un sistema continuo. Para tales entradas, la figura 7.24 y la ecuación (7.25) proporcionan la base conceptual del procesamiento de tiempo continuo usando filtros de tiempo discreto. Esto se explora con mayor detalle en el contexto de algunos ejemplos.

7.4.1 Diferenciador digital

Considere la puesta en práctica en tiempo discreto de un filtro diferenciador de tiempo continuo y banda limitada. Como se mencionó en la sección 3.9.1, la respuesta en frecuencia de un filtro diferenciador continuo es

$$H_c(j\omega) = j\omega, \tag{7.26}$$

y la del diferenciador de banda limitada con frecuencia de corte ω_c es

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \tag{7.27}$$

como se ha dibujado en la figura 7.27. Usando la ecuación (7.25) con una frecuencia de muestreo $\omega_s = 2\omega_c$, vemos que la función correspondiente de transferencia de tiempo discreto es

$$H_d(e^{j\Omega}) = j\left(\frac{\Omega}{T}\right), \quad |\Omega| < \pi, \tag{7.28}$$

misma que está representada en la figura 7.28. Con esta función de transferencia de tiempo discreto, $y_c(t)$ en la figura 7.24 será la derivada de $x_c(t)$, en tanto no haya traslape en el muestreo de $x_c(t)$.

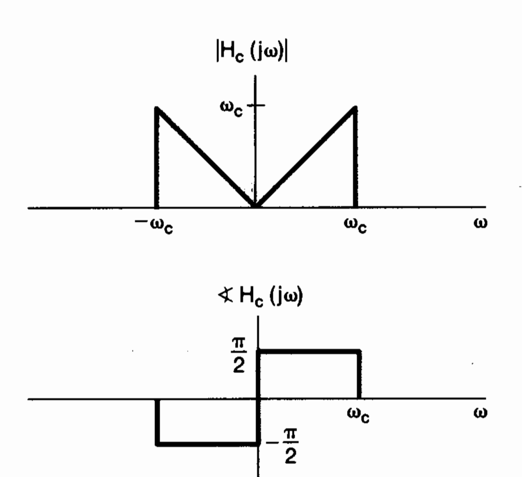
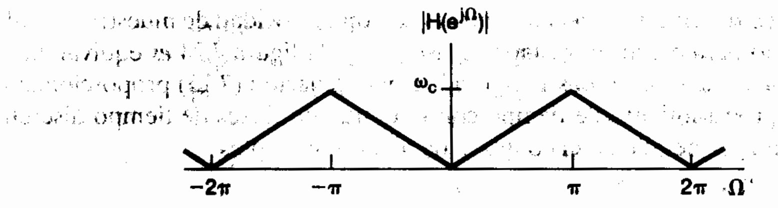


Figura 7.27 Respuesta en frecuencia de un diferenciador continuo ideal de banda limitada $H_c(j\omega) = j\omega$, $|\omega| < \omega_c$.



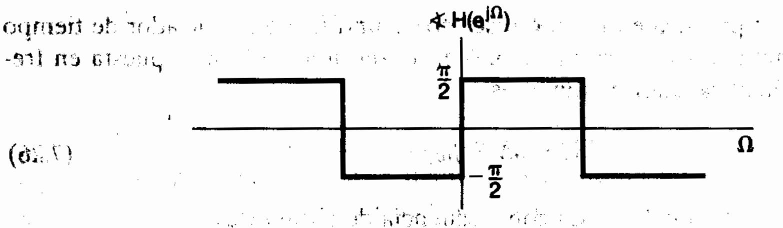


Figura 7.28 Respuesta en frecuencia de un filtro discreto para construir un diferenciador continuo de banda limitada.

Ejemplo 7.2

Al considerar la salida del diferenciador digital para la entrada sinc continua, podemos determinar de manera conveniente la respuesta al impulso $h_d[n]$ del filtro discreto en la puesta en práctica del diferenciador digital. Con respecto a la figura 7.24, sea

$$x_c(t) = \frac{\operatorname{sen}(\pi t/T)}{\pi t}, \tag{7.29}$$

donde T es el periodo de muestreo. Entonces

$$X_c(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/T \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases},$$

lo cual tiene una banda lo suficientemente limitada como para asegurar que el muestreo de $x_c(t)$ a la frecuencia $\omega_s = 2\pi/T$ no dará lugar a traslape alguno. De lo anterior se desprende que la salida del diferenciador digital es

$$y_c(t) = \frac{d}{dt}x_c(t) = \frac{\cos(\pi t/T)}{Tt} - \frac{\operatorname{sen}(\pi t/T)}{\pi t^2}. \tag{7.30}$$

Para $x_c(t)$ como se dio en la ecuación (7.29), la señal correspondiente $x_d[n]$ en la figura 7.24 puede expresarse como

$$x_d[n] = x_c(nT) = \frac{1}{T}\delta[n]. \tag{7.31}$$

Esto es, para $n \neq 0$, $x_c(nT) = 0$, mientras que

$$x_d[0] = x_c(0) = \frac{1}{T}$$

lo cual se puede verificar mediante la regla de l'Hôpital. De manera similar, podemos evaluar $y_d[n]$ en la figura 7.24, correspondiente a $y_c(t)$ en la ecuación (7.30). Específicamente,

$$y_d[n] = y_c(nT) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{nT^2}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}. \tag{7.32}$$

la cual puede verificarse para $n \neq 0$ mediante la sustitución directa en la ecuación (7.30) y para $n = 0$ mediante la aplicación de la regla de l'Hôpital.

Por lo tanto, cuando la entrada al filtro discreto dada por la ecuación (7.28) es el impulso unitario escalado en la ecuación (7.31), la salida resultante es igual a la proporcionada por la ecuación (7.32). De este modo, podemos deducir que la respuesta al impulso de este filtro está dada por

$$h_d[n] = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{nT}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}.$$

7.4.2 Retardo de media muestra

En esta sección consideraremos la puesta en práctica de un desplazamiento en tiempo (retardo) de una señal continua mediante el uso de un sistema que tiene la forma de la figura 7.19. Por lo tanto, requerimos que la entrada y la salida del sistema total estén relacionadas mediante

$$y_c(t) = x_c(t - \Delta) \tag{7.33}$$

cuando la entrada $x_c(t)$ es de banda limitada y la velocidad de muestreo es lo bastante alta como para evitar el traslape, y donde Δ representa el tiempo de retardo. De la propiedad de desplazamiento en el tiempo deducida en la sección 4.3.2,

$$Y_c(j\omega) = e^{-j\omega\Delta}X_c(j\omega).$$

De la ecuación (7.25), el sistema continuo equivalente que se pondrá en práctica debe ser de banda limitada. Por lo tanto, tomamos

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega\Delta}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}, \tag{7.34}$$

donde ω_c es la frecuencia de corte del filtro continuo. Esto es, $H_c(j\omega)$ corresponde a un desplazamiento de tiempo como en la ecuación (7.33) para señales de banda limitada y rechaza todas las frecuencias mayores que ω_c. La magnitud y fase de la respuesta en frecuencia se muestra en la figura 7.29(a). Con la frecuencia de muestreo ω_s considerada

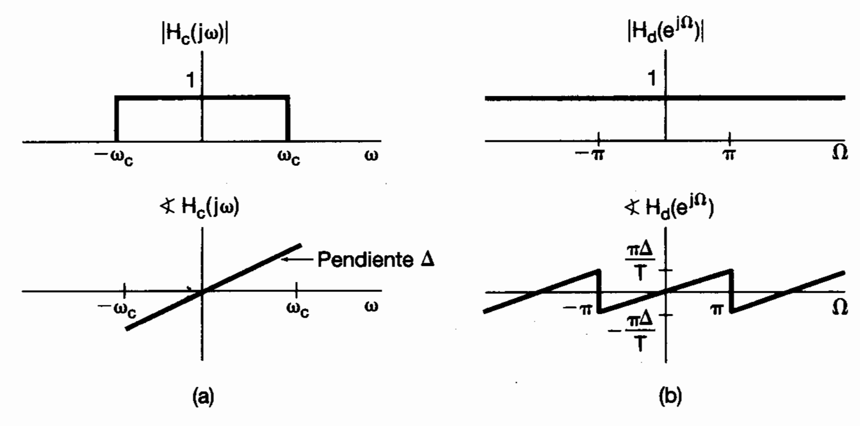


Figura 7.29 (a) Magnitud y fase de la respuesta en frecuencia para un retardo continuo; (b) magnitud y fase de la respuesta en frecuencia para el retardo correspondiente discreto.

como $\omega_s = 2\omega_c$, la respuesta en frecuencia correspondiente de tiempo discreto es

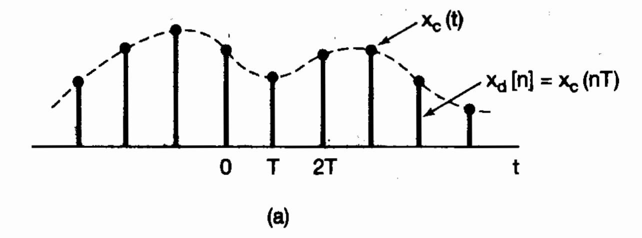
$$H_d(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega\Delta/T}, \qquad |\Omega| < \pi, \tag{7.35}$$

como se muestra en la figura 7.29(b).

Para entradas de banda limitada adecuadas, la salida del sistema de la figura 7.24, con una $H_d(e^{j\Omega})$ como la de la ecuación (7.35), es una réplica retardada de la entrada. Para Δ/T entero, la secuencia $y_d[n]$ es una réplica retardada de $x_d[n]$; esto es,

$$y_d[n] = x_d\left[n - \frac{\Delta}{T}\right]. \tag{7.36}$$

Si Δ/T no es entero, la ecuación (7.36) no tiene significado ya que las secuencias están definidas sólo para valores enteros del índice. Sin embargo, en estos casos podemos interpretar la relación entre $x_d[n]$ y $y_d[n]$ en términos de la interpolación de banda limitada. Las señales $x_c(t)$ y $x_d[n]$ están relacionadas mediante el muestreo y la interpolación de banda limitada, así como lo están $y_c(t)$ y $y_d[n]$. Con $H_d(e^{j\Omega})$ como se describe en la ecuación (7.35), $y_d[n]$ es igual a las muestras de una versión desplazada de la interpolación de banda limitada de la secuencia $x_d[n]$. Esto se ilustra en la figura 7.30 con $\Delta/T = 1/2$, lo cual algunas veces se conoce como un retardo de media muestra.



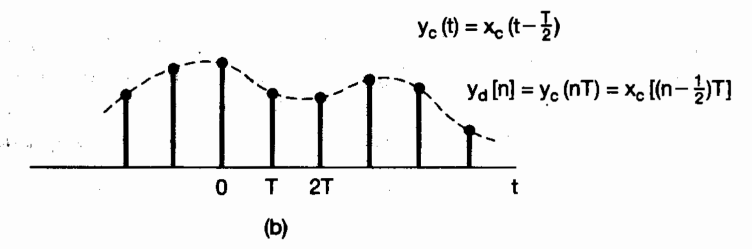


Figura 7.30 (a) Secuencia de muestras de una señal continua $x_c(t)$; (b) secuencia en (a) con un retardo de media muestra.

Ejemplo 7.3

La descripción del ejemplo 7.2 también se aplica para determinar la respuesta al impulso $h_d[n]$ del filtro discreto en el sistema de retardo de media muestra. En relación con la figura 7.24, sea

$$x_c(t) = \frac{\operatorname{sen}(\pi t/T)}{\pi t}. \tag{7.37}$$

Del ejemplo 7.2 se desprende que

$$x_d[n] = x_c(nT) = \frac{1}{T}\delta[n].$$

Asimismo, ya que no hay traslape para la entrada de banda limitada en la ecuación (7.37), la salida del sistema de retardo de media muestra es

$$y_c(t) = x_c(t - T/2) = \frac{\text{sen}(\pi(t - T/2)/T)}{\pi(t - T/2)},$$

y la secuencia $y_d[n]$ de la figura 7.24 es

$$y_d[n] = y_d[n] = \frac{\text{sen}(\pi(n - \frac{1}{2}))}{T\pi(n - \frac{1}{2})}.$$

Concluimos que

$$h[n] = \frac{\text{sen}(\pi(n - \frac{1}{2}))}{\pi(n - \frac{1}{2})}.$$

7.5 MUESTREO DE SEÑALES DISCRETAS

Hasta el momento, en este capítulo hemos considerado el muestreo de señales continuas, y además de desarrollar el análisis necesario para entender el muestreo continuo, hemos presentado varias de sus aplicaciones. Como veremos en esta sección, para el muestreo de señales discretas se puede desarrollar un conjunto muy similar de propiedades y resultados con muchas aplicaciones importantes.

7.5.1 Muestreo con tren de impulsos

En analogía con el muestreo continuo como el que se llevó a cabo usando el sistema de la figura 7.2, el muestreo de una señal discreta se puede representar como se muestra en la figura 7.31. En ésta la nueva secuencia $x_p[n]$ que resulta del proceso de muestreo es igual a la secuencia original $x[n]$ en los múltiplos enteros del periodo de muestreo N y es cero en las muestras intermedias; es decir,

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & \text{si } n = \text{un entero múltiplo de } N \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}. \quad (7.38)$$

Al igual que con el muestreo continuo de la sección 7.1, el efecto en el dominio de la frecuencia del muestreo discreto se hace evidente mediante el uso de la propiedad de modulación desarrollado en la sección 5.5. De este modo, con

$$x_p[n] = x[n]p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN]\delta[n - kN], \quad (7.39)$$

tenemos que, en el dominio de la frecuencia,

$$X_\pi(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} P(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta. \quad (7.40)$$

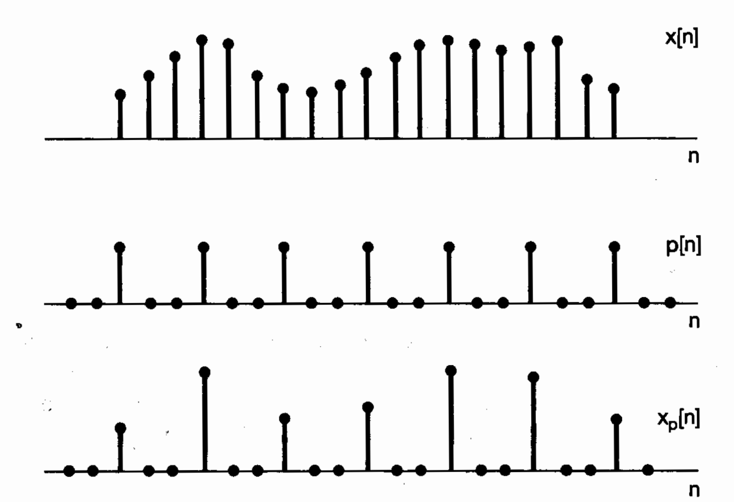


Figura 7.31 Muestreo discreto.

Como se desarrolló en el ejemplo 5.6, la transformada de Fourier de la secuencia de muestreo $p[n]$ es

$$P(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \tag{7.41}$$

donde ω_s, la frecuencia de muestreo, es igual a 2π/N. Combinando las ecuaciones (7.40) y (7.41), tenemos

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j(\omega - k\omega_s)}). \tag{7.42}$$

La ecuación (7.42) es la contraparte para el muestreo discreto de la ecuación (7.6) para el muestreo continuo y se ilustra en la figura 7.32. En la figura 7.32(c), con $\omega_s - \omega_M > \omega_M$ o, de manera equivalente, $\omega_s > 2\omega_M$ no hay traslape [es decir, las porciones diferentes de cero de las réplicas de $X(e^{j\omega})$ no se superponen], mientras que con $\omega_s < 2\omega_M$, como en la figura 7.32(d), resulta un traslape en el dominio de la frecuencia. En ausencia de traslapes, $X(e^{j\omega})$ se reproduce fielmente alrededor de $\omega = 0$ y en múltiplos enteros de 2π. En consecuencia, $x[n]$ se puede recuperar a partir de $x_p[n]$ por medio de un filtro paso

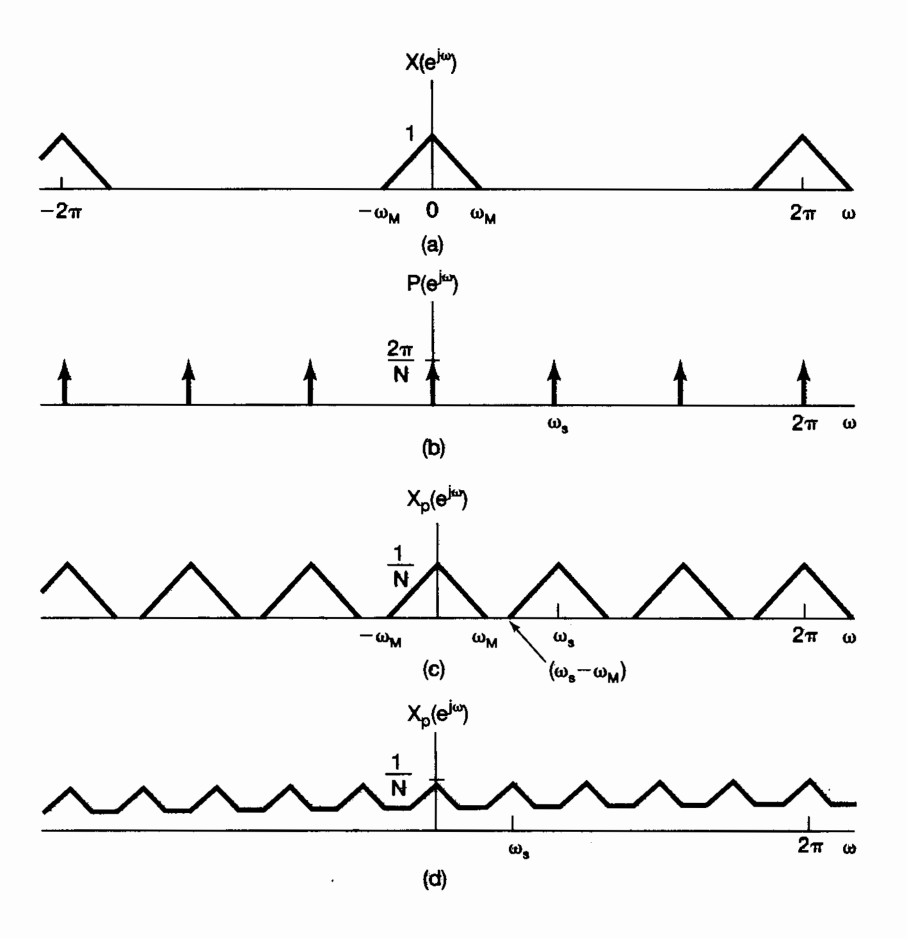


Figura 7.32 Efecto en el dominio de la frecuencia del muestreo del tren de impulsos de una señal discreta: (a) espectro de la señal original; (b) espectro de la secuencia muestreada; (c) espectro de la señal muestreada con $\omega_s > 2\omega_M$; (d) espectro de la señal muestreada con $\omega_s < 2\omega_M$. Observe que ocurre un traslape.

bajas con ganancia N y una frecuencia de corte mayor que ω_M y menor que $\omega_s - \omega_M$, como se ilustra en la figura 7.33, en la que hemos especificado la frecuencia de corte de un filtro paso bajas como $\omega_s/2$. Si el sistema completo de la figura 7.33(a) se aplica a una secuencia para la cual $\omega_s < 2\omega_M$, de manera que resulte traslape, $x_r[n]$ ya no será igual a $x[n]$. Sin embargo, al igual que en el muestreo continuo, las dos secuencias *serán* iguales en múltiplos del periodo de muestreo; esto es, en correspondencia con la ecuación (7.13), tenemos

$$x_r[kN] = x[kN], \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{7.43}$$

independientemente de que ocurra traslape (véase el problema 7.46).

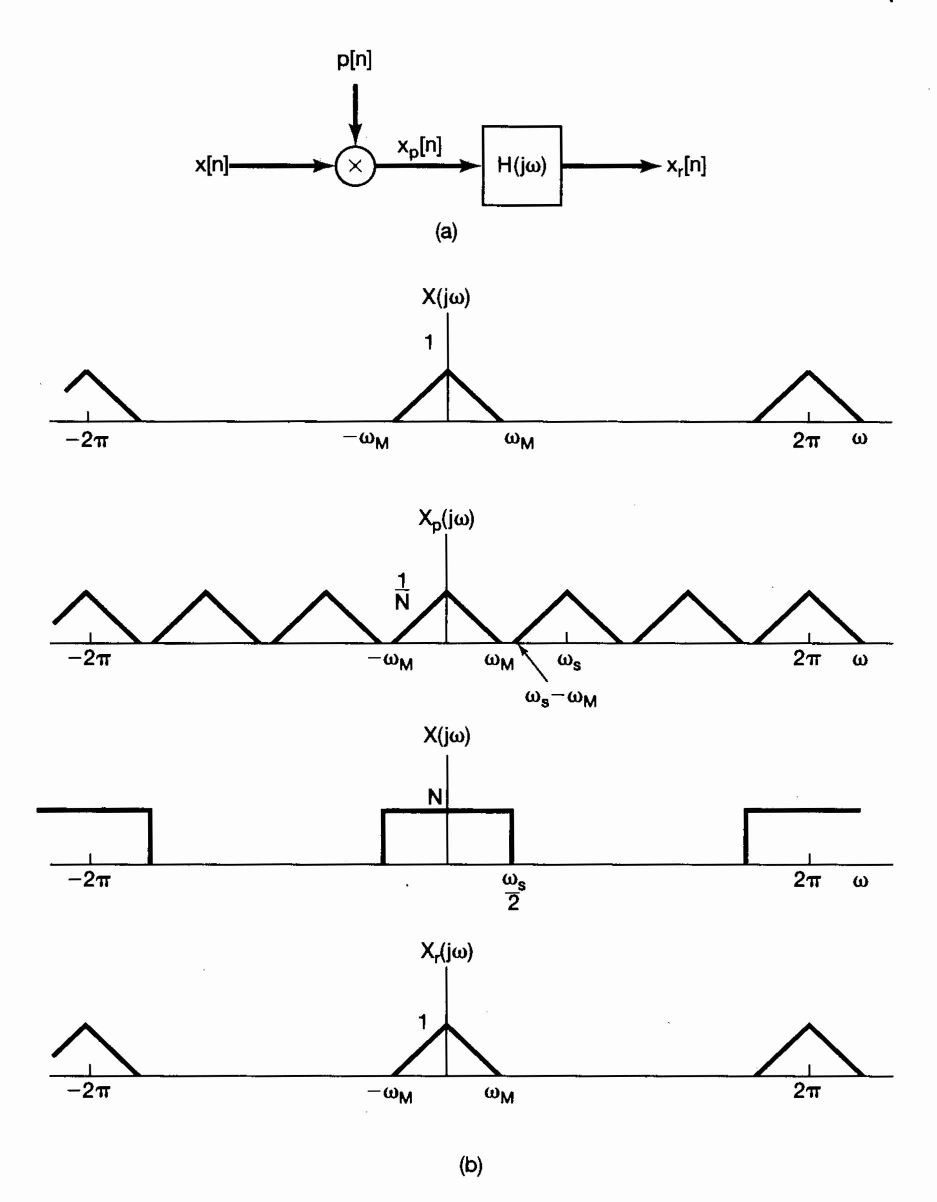


Figura 7.33 Recuperación exacta de una señal discreta a partir de sus muestras usando un filtro paso bajas ideal: (a) diagrama de bloques para el muestreo y la reconstrucción de una señal de banda limitada a partir de sus muestras; (b) espectro de la señal $x[n]$; (c) espectro de $x_p[n]$; (d) respuesta en frecuencia de un filtro ideal paso bajas con frecuencia de corte $\omega_s/2$; (e) espectro de la señal reconstruida $x_r[n]$. Para este ejemplo, $\omega_s > 2\omega_M$, de modo que no ocurre traslape y en consecuencia $x_r[n] = x[n]$.

Ejemplo 7.4

Considere la secuencia $x[n]$ cuya transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ tiene la propiedad de que

$$X(e^{j\omega}) = 0 \qquad \text{para} \qquad 2\pi/9 \le |\omega| \le \pi.$$

Para determinar la frecuencia más baja a la cual $x[n]$ se puede muestrear sin la posibilidad de que haya traslape, debemos encontrar la N más grande tal que

$$\frac{2\pi}{N} \geq 2\left(\frac{2\pi}{9}\right) \Rightarrow N \leq 9/2.$$

Deducimos entonces que $N_{\text{máx}} = 4$, y la frecuencia correspondiente de muestreo es $2\pi/4 = \pi/2$.

La reconstrucción de $x[n]$ mediante el uso de un filtro paso bajas aplicado a $x_p[n]$ se puede interpretar en el dominio del tiempo como una fórmula de interpolación similar a la ecuación (7.11). Cuando $h[n]$ denota la respuesta al impulso del filtro paso bajas, tenemos

$$h[n] = \frac{N\omega_c}{\pi}\frac{\text{sen}\,\omega_c n}{\omega_c n}. \tag{7.44}$$

La secuencia reconstruida es entonces

$$x_r[n] = x_p[n] * h[n], \tag{7.45}$$

o de manera equivalente,

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN]\frac{N\omega_c}{\pi}\frac{\text{sen}\,\omega_c(n-kN)}{\omega_c(n-kN)}. \tag{7.46}$$

La ecuación (7.46) representa la interpolación ideal de banda limitada y requiere de la construcción de un filtro paso bajas ideal. En aplicaciones típicas se usa una aproximación adecuada para el filtro paso bajas de la figura 7.33, en cuyo caso la fórmula de interpolación equivalente tiene la forma

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN]h_r[n-kN], \tag{7.47}$$

donde $h_r[n]$ es la respuesta al impulso del filtro de interpolación. Algunos ejemplos específicos, que incluyendo las contrapartes discretas del retenedor de orden cero y el retenedor de primer orden analizados en la sección 7.2 para la interpolación continua, se examinan en el problema 7.50.

7.5.2 Decimación en tiempo discreto e interpolación

Existe una gran variedad de aplicaciones importantes de los principios de muestreo discreto, como es el caso del diseño y construcción de filtros o en las comunicaciones. En muchas de estas aplicaciones representar, transmitir o almacenar la secuencia muestreada $x_p[n]$ de manera directa en la forma que se ilustra en la figura (7.31) resulta ineficiente, ya que, entre los instantes de muestreo, *se sabe* que $x_p[n]$ es cero. Así, la secuencia muestreada es reemplazada por una nueva secuencia $x_b[n]$, la cual se encuentra simplemente a cada valor N de $x_p[n]$; es decir,

$$x_b[n] = x_p[nN]. \tag{7.48}$$

También, de manera equivalente,

$$x_b[n] = x[nN], \tag{7.49}$$

ya que $x_p[n]$ y $x[n]$ son iguales a múltiplos enteros de N. La operación de extraer cada muestra N se conoce comúnmente como *decimación*.[3] La relación entre $x[n]$, $x_p[n]$ y $x_b[n]$ se muestra en la figura 7.34.

Para determinar el efecto de la decimación en el dominio de la frecuencia, es conveniente determinar la relación entre $X_b(e^{j\omega})$ (que es la transformada de Fourier de $x_b[n]$) y $X(e^{j\omega})$. Con este fin, observamos que

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_b[k]e^{-j\omega k}, \tag{7.50}$$

o, usando la ecuación (7.48),

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_p[kN]e^{-j\omega k}. \tag{7.51}$$

Si hacemos $n = kN$ o, de manera equivalente, $k = n/N$, podemos escribir

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{\substack{(n = \text{múltiplo} \\ \text{entero de } N)}} x_p[n]e^{-j\omega n/N},$$

y ya que $x_p[n] = 0$ cuando n no es un múltiplo entero de N, podemos también escribir

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_p[n]e^{-j\omega n/N}. \tag{7.52}$$

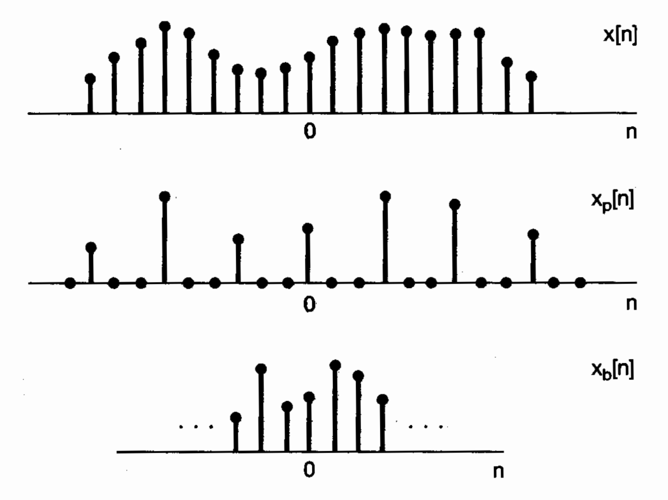


Figura 7.34 Relación entre $x_p[n]$ correspondiente al muestreo y $x_b[n]$ correspondiente a la decimación.

[3]Técnicamente, la decimación correspondería a extraer cada *décima* muestra. Sin embargo, ha llegado a ser una terminología común referirse a la operación como decimación aun cuando N no sea igual a 10.

Más aún, reconocemos el miembro derecho de la ecuación (7.52) como la transformada de Fourier de $x_p[n]$; esto es,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n]e^{-j\omega n/N} = X_p(e^{j\omega/N}). \tag{7.53}$$

Por lo tanto, a partir de las ecuaciones (7.52) y (7.53), concluimos que

$$x_b(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\omega/N}). \tag{7.54}$$

Esta relación se ilustra en la figura 7.35, a partir de la cual observamos que el espectro de la secuencia muestreada y el de la secuencia decimada difieren sólo en un escalamiento de frecuencia o normalización. Si el espectro original $X(e^{j\omega})$ es apropiadamente de banda limitada, de manera que no haya traslape presente en $X_p(e^{j\omega})$, entonces, como se ilustra en la figura, el efecto de decimar consiste en ampliar el espectro de la secuencia original sobre una porción mayor de la banda de frecuencia.

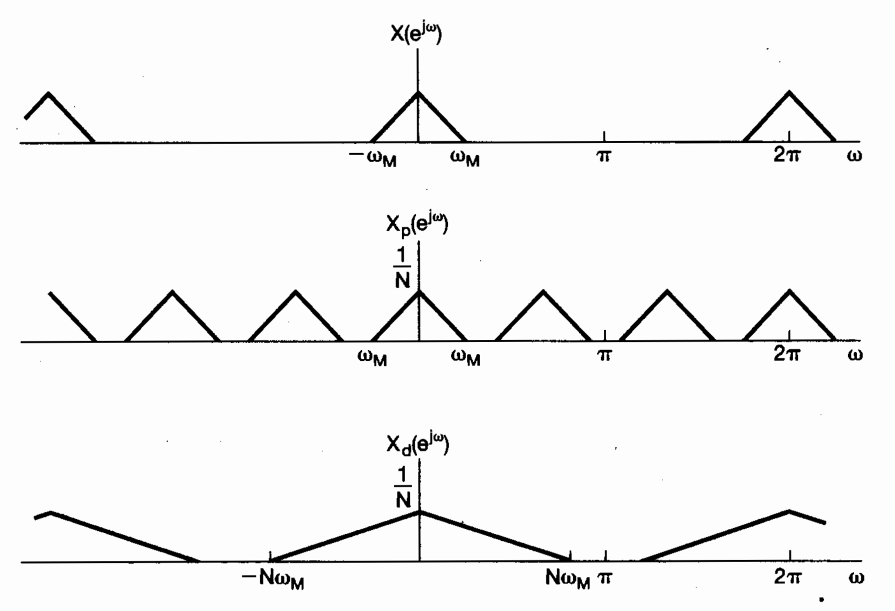


Figura 7.35 Ilustración en el dominio de la frecuencia de la relación entre el muestreo y la decimación.

Si la secuencia original $x[n]$ se obtiene muestreando una señal continua, el proceso de decimación puede verse como la reducción de la velocidad de muestreo de la señal por un factor N. Para evitar traslape, $X(e^{j\omega})$ no puede ocupar toda la banda de frecuencia. En otras palabras, si la señal puede ser decimada sin introducir traslape, entonces la señal original continua está muestreada en exceso, y por lo tanto la velocidad de muestreo se puede reducir sin producir traslape. Cuando interpretamos la secuencia $x[n]$ como muestras de una señal continua, el proceso de decimación se conoce a menudo como *reducción de muestreo* o *submuestreo*.

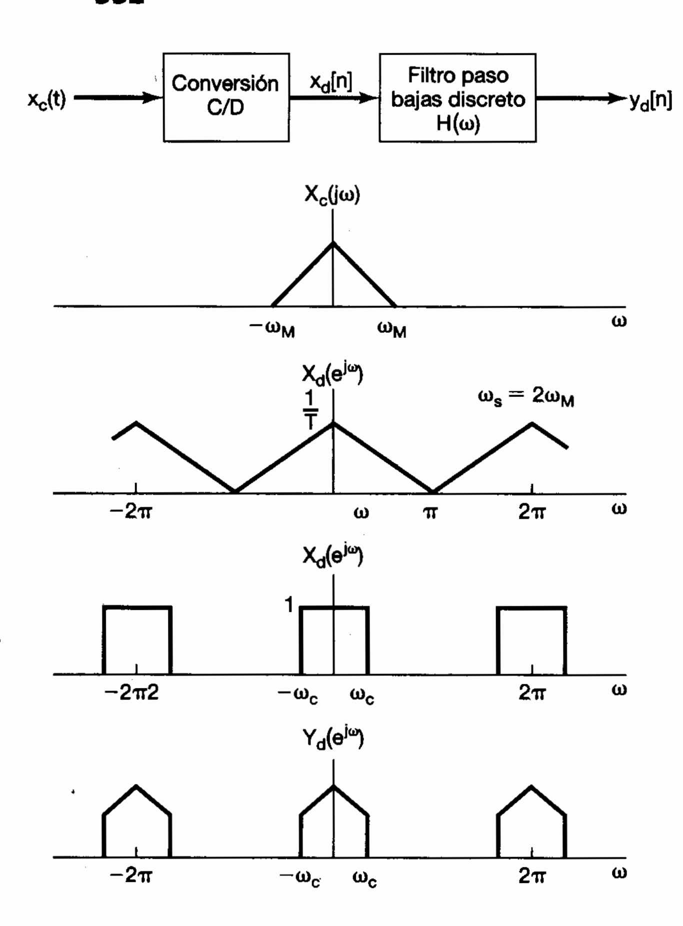


Figura 7.36 Señal continua que fue muestreada originalmente a la velocidad de Nyquist. Después del filtrado discreto, a la secuencia resultante puede aplicársele además un submuestreo. Aquí $X_c(j\omega)$ es la transformada continua de Fourier de $x_c(t)$, $X_d(e^{j\omega})$ y $Y_d(e^{j\omega})$ son las transformadas de Fourier de tiempo discreto de $x_d[n]$ y $y_d[n]$, respectivamente, y $H_d(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia del filtro paso bajas discreto representado en el diagrama de bloques.

En algunas aplicaciones en las cuales se obtiene una secuencia mediante el muestreo de una señal continua, la velocidad de muestreo original puede ser tan baja como sea posible sin introducir traslape, pero después del procesamiento adicional y del filtrado, el ancho de banda de la secuencia se puede reducir. Un ejemplo de esta situación se muestra en la figura 7.36. Debido a que la salida del filtro discreto es de banda limitada, se puede aplicar una disminución del muestreo o decimación.

Así como en algunas aplicaciones es útil disminuir el muestreo, hay situaciones en las cuales es útil convertir una secuencia a una velocidad de muestreo equivalente *más alta*, procedimiento conocido como *sobremuestreo* o *interpolación*. El sobremuestreo es básicamente el proceso inverso de decimar o submuestrear. Como se ilustra en las figuras 7.34 y 7.35, en la decimación, primero muestreamos y después retenemos sólo los valores de la secuencia en los instantes de muestreo. Para sobremuestrear, invertimos el proceso. Por ejemplo, remitiéndonos a la figura 7.34, consideremos el proceso de sobremuestrear la secuencia $x_b[n]$ para obtener $x[n]$. A partir de $x_b[n]$ formamos la secuencia $x_p[n]$, insertando $N-1$ puntos con amplitud cero entre cada uno de los valores de $x_b[n]$. La secuencia interpolada $x[n]$ se obtiene entonces a partir de $x_p[n]$ mediante un filtrado paso bajas. El procedimiento completo se resume en la figura 7.37.

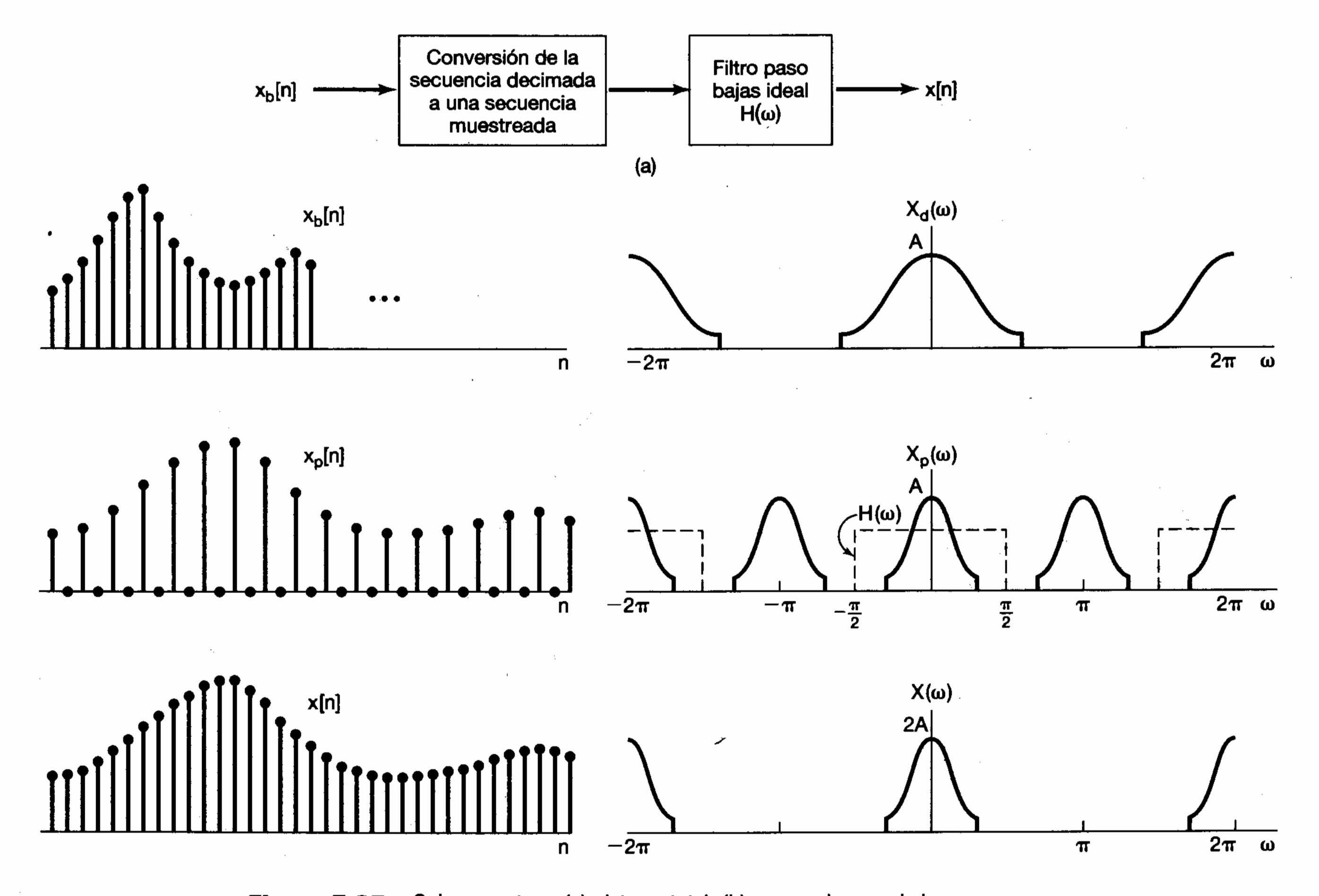


Figura 7.37 Sobremuestreo: (a) sistema total; (b) secuencias asociadas y espectro para el sobremuestreo por un factor de 2.

Ejemplo 7.5

En este ejemplo mostramos cómo una combinación de la interpolación y la decimación se pueden usar para submuestrear aún más una secuencia sin incurrir en el traslape. Se debe observar que el submuestreo máximo posible se logra una vez que la porción diferente de cero de un periodo del espectro de tiempo discreto se ha expandido hasta llenar toda la banda desde $-\pi$ hasta π.

Considere la secuencia $x[n]$ cuya transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ se ilustra en la figura 7.38(a). Como se analizó en el ejemplo 7.4, la velocidad más baja a la cual se puede usar el muestreo con un tren de impulsos sobre esta secuencia sin llegar al traslape es de $2\pi/4$. Esto corresponde a muestrear cada cuatro valores de $x[n]$. Si el resultado de este muestreo se decima en un factor de 4, obtenemos una secuencia $x_b[n]$

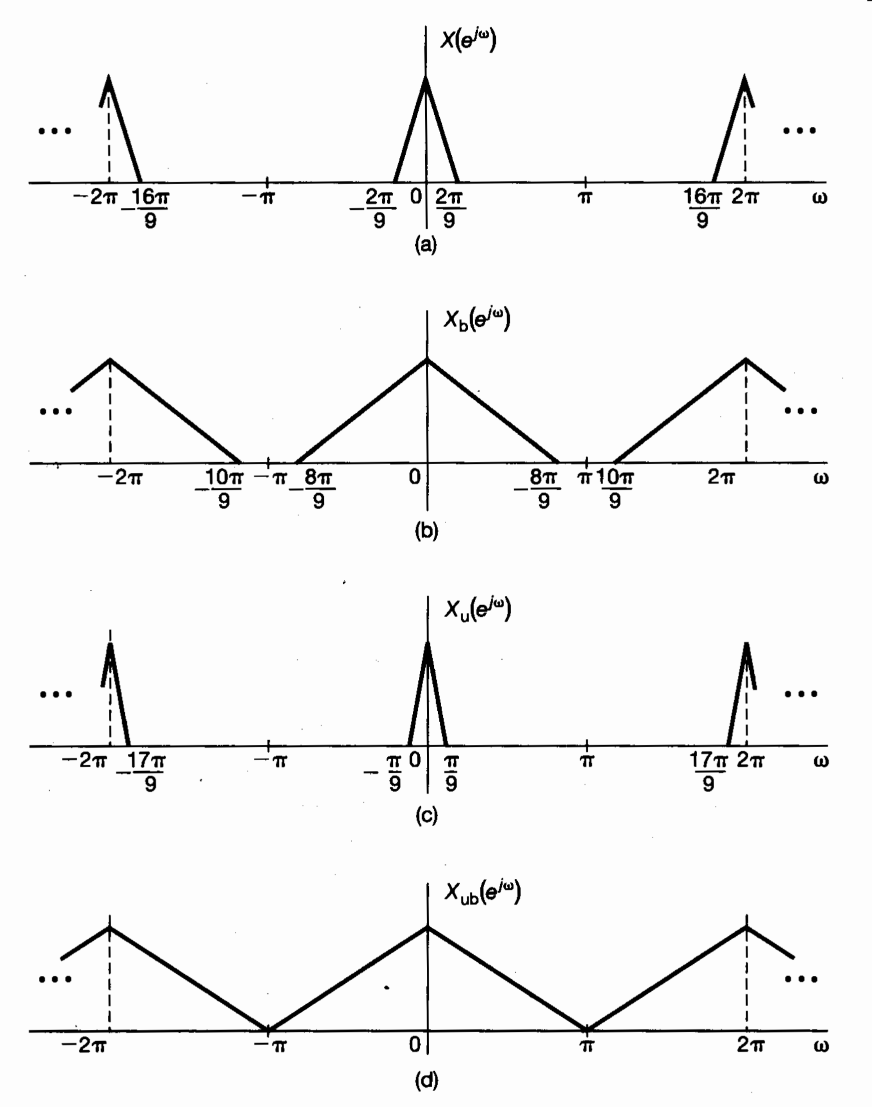


Figura 7.38 Espectro asociado con el ejemplo 7.5: (a) Espectro de $x[n]$; (b) espectro después del submuestreo por 4; (c) espectro después de sobremuestrear $x[n]$ por un factor de 2; (d) espectro después de sobremuestrear $x[n]$ por 2 y más tarde submuestrear por 9.

cuyo espectro se muestra en la figura 7.38(b). Es claro que aún no hay traslape del espectro original. Sin embargo, dicho espectro es cero para $8\pi/9 \leq |\omega| \leq \pi$, lo cual sugiere que hay espacio para un submuestreo adicional.

Específicamente, al examinar la figura 7.38(a) vemos que si pudiéramos escalar la frecuencia por un factor de 9/2, el espectro resultante tendría valores diferentes de cero sobre el intervalo de frecuencia completo de $-\pi$ a π. Sin embargo, ya que 9/2 no es un número entero, no podemos lograr esto sólo mediante el submuestreo. En lugar de ello, debemos primero sobremuestrear $x[n]$ por un factor de 2 y después submuestrearla por un factor de 9. En particular, en la figura 7.38(c) se presenta el espectro de la señal $x_u[n]$ obtenido cuando $x[n]$ se sobremuestrea por un factor de 2. Cuando $x_u[n]$ es entonces submuestreada por un factor de 9, el espectro de la secuencia resultante $x_{ub}[n]$ es como el que se muestra en la figura 7.38(d). Este resultado combinado corresponde efectivamente a submuestrear $x[n]$ por una cantidad no entera de 9/2. Suponiendo que $x[n]$ representa muestras no traslapadas de una señal continua $x_c(t)$, nuestra secuencia interpolada y decimada representa el máximo submuestreo posible (sin traslape) de $x_c(t)$.

7.6 RESUMEN

En este capítulo hemos desarrollado el concepto de muestreo, por medio del cual una señal continua o una señal discreta es representada por una secuencia de muestras igualmente espaciadas. Las condiciones bajo las cuales la señal es recuperable en forma exacta a partir de las muestras están contenidas en el teorema de muestreo. Para la reconstrucción exacta, este teorema requiere, que la señal a ser muestreada sea de banda limitada y que la frecuencia de muestreo sea mayor que el doble de la frecuencia más alta en dicha señal. Bajo estas condiciones, la reconstrucción exacta de la señal original se lleva a cabo mediante un filtrado paso bajas ideal. La interpretación en el dominio del tiempo de este procedimiento de reconstrucción ideal es conocido como interpolación ideal de banda limitada. En realizaciones prácticas, el filtro paso bajas es aproximado y la interpolación en el dominio del tiempo ya no es exacta. En algunos casos, son suficientes los procedimiento de interpolación simple como un retenedor de orden cero o una interpolación lineal (retenedor de primer orden).

Si una señal es submuestreada (es decir, si la frecuencia de muestreo es menor que la requerida por el teorema de muestreo), entonces la señal reconstruida mediante la interpolación ideal de banda limitada estará relacionada con la señal original a través de una forma de distorsión conocida como traslape (*aliasing*). En muchos casos es importante seleccionar la velocidad de muestreo para evitar el traslape. Sin embargo, hay una gran variedad de ejemplos importantes, como el estroboscopio, en donde se explota la presencia del traslape.

El muestreo tiene un gran número de aplicaciones importantes. Un conjunto de aplicaciones particularmente significativas se relacionan con el uso del concepto de muestreo para procesar señales continuas con sistemas de tiempo discreto, por medio de minicomputadoras, microprocesadores o cualquier variedad de dispositivos orientados específicamente al procesamiento de señales de tiempo discreto.

La teoría básica del muestreo es similar tanto para señales de tiempo continuo como de tiempo discreto. En el caso de tiempo discreto está estrechamente relacionada con el concepto de decimación, en el cual la secuencia decimada se obtiene mediante la extracción de valores de la secuencia original a intervalos igualmente espaciados. La diferencia entre el muestreo y la decimación recae en el hecho de que, para la secuencia muestreada, los valores de cero caen entre los valores de las muestras, mientras que en la secuencia decimada estos valores de cero son descartados, con lo cual se comprime la secuencia

en tiempo. El inverso de la decimación es la interpolación. La idea de decimar e interpolar surgen en una gran variedad de aplicaciones prácticas importantes de señales y sistemas, incluyendo los sistemas de comunicación, audio digital, televisión de alta definición y muchas otras.

Capítulo 7 Problemas

La primera sección de problemas comprende la categoría básica, y las respuestas se proporcionan al final del libro. Las dos secciones restantes contienen problemas que abarcan las categorías básica y avanzada, respectivamente.

PROBLEMAS BÁSICOS CON RESPUESTAS

7.1. Se sabe que una señal de valor real $x(t)$ ha sido determinada sólo por sus muestras cuando la frecuencia de muestreo es $\omega_s = 10{,}000\pi$. ¿Para qué valores de ω se garantiza que $X(j\omega)$ sea cero?

7.2. Una señal continua $x(t)$ se obtiene a la salida de un filtro paso bajas ideal con frecuencia de corte $\omega_c = 1{,}000\pi$. Si el muestreo con tren de impulsos se realiza sobre $x(t)$, ¿cuál de los siguientes periodos de muestreo garantiza que $x(t)$ se pueda recuperar a partir de sus versiones muestreadas usando un filtro paso bajas adecuado?
(a) $T = 0.5 \times 10^{-3}$
(b) $T = 2 \times 10^{-3}$
(c) $T = 10^{-4}$

7.3. Aquella frecuencia que de acuerdo con el teorema de muestreo, debe ser excedida por la frecuencia de muestreo se llama *razón de Nyquist*. Determine la razón de Nyquist correspondiente a cada una de las siguientes señales:
(a) $x(t) = 1 + \cos(2{,}000\pi t) + \text{sen}(4{,}000\pi t)$
(b) $x(t) = \frac{\text{sen}(4{,}000\pi t)}{\pi t}$
(c) $x(t) = \left(\frac{\text{sen}(4{,}000\pi t)}{\pi t}\right)^2$

7.4. Sea $x(t)$ una señal con razón de Nyquist ω_0. Determine la razón de Nyquist para cada una de las siguientes señales:
(a) $x(t) + x(t-1)$
(b) $\frac{dx(t)}{dt}$
(c) $x^2(t)$
(d) $x(t)\cos\omega_0 t$

7.5. Sea $x(t)$ una señal con razón de Nyquist ω_0. También,

$$y(t) = x(t)p(t-1),$$

donde

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \text{ y } T < \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Especifique las restricciones en la magnitud y fase de la respuesta en frecuencia de un filtro que proporciona $x(t)$ como su salida cuando $y(t)$ es la entrada.

7.6. En el sistema mostrado en la figura P7.6 se multiplican dos funciones de tiempo $x_1(t)$ y $x_2(t)$, y el producto $w(t)$ es muestreado por un tren de impulsos. La función $x_1(t)$ es de banda limitada a ω_1 y $x_2(t)$ es de banda limitada a ω_2; esto es,

$$X_1(j\omega) = 0, |\omega| \geq \omega_1,$$

$$X_2(j\omega) = 0, |\omega| \geq \omega_2.$$

Determine el *máximo* intervalo de muestreo T tal que $w(t)$ se pueda recuperar a partir de $w_p(t)$ mediante el uso de un filtro paso bajas ideal.

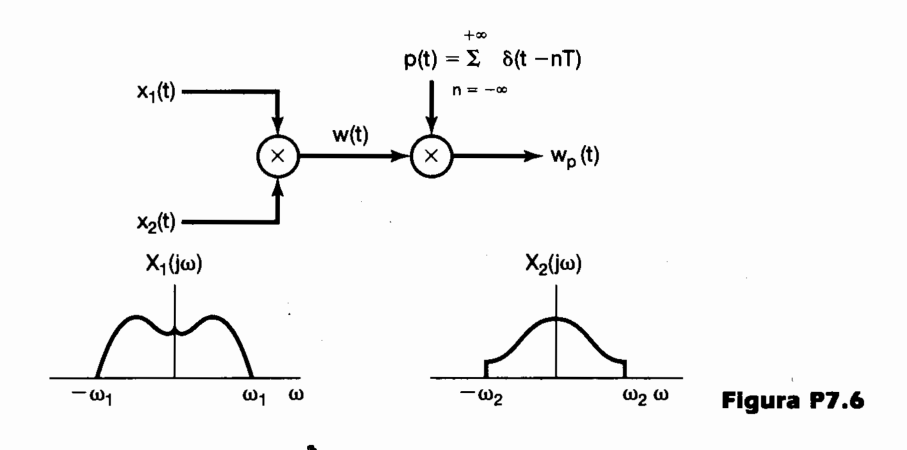


Figura P7.6

7.7. Una señal $x(t)$ se somete a una operación de retenedor de orden cero con un periodo de muestreo efectivo T para producir la señal $x_0(t)$. Sea que $x_1(t)$ denota el resultado de una operación de retenedor de primer orden en las muestras de $x(t)$; es decir,

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h_1(t - nT),$$

donde $h_1(t)$ es la función que se muestra en la figura P7.7. Especifique la respuesta en frecuencia del filtro que produce $x_1(t)$ así como su salida cuando $x_0(t)$ es la entrada.

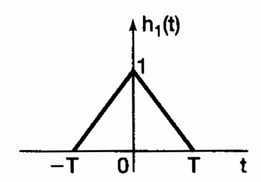


Figura P7.7

7.8. Considere una señal $x(t)$ periódica real e impar cuya representación en serie de Fourier se puede expresar como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^k \operatorname{sen}(k\pi t).$$

Sea que $\hat{x}(t)$ representa la señal obtenida al realizar un muestreo con tren de impulsos sobre $x(t)$ utilizando un periodo de muestreo de $T = 0.2$.

(a) ¿Se presenta el traslape cuando este muestreo con tren de impulsos se realiza sobre $x(t)$?

(b) Si $\hat{x}(t)$ se pasa a través de un filtro paso bajas ideal con frecuencia de corte π/T y ganancia en la banda de paso T, determine la representación en serie de Fourier de la señal de salida $g(t)$.

7.9. Considere la señal

$$x(t) = \left(\frac{\operatorname{sen} 50\pi t}{\pi t}\right)^2,$$

la cual deseamos muestrear con una frecuencia de muestreo de $\omega_s = 150\pi$ para obtener una señal $g(t)$ con transformada de Fourier $G(j\omega)$. Determine el máximo valor de ω_0 con el cual se garantiza que

$$G(j\omega) = 75X(j\omega) \text{ para } |\omega| \leq \omega_0,$$

donde $X(j\omega)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$.

7.10. Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

(a) La señal $x(t) = u(t + T_0) - u(t - T_0)$ puede someterse a un muestreo con tren de impulsos sin traslape, siempre y cuando el periodo de muestreo sea $T < 2T_0$.

(b) La señal $x(t)$ con transformada de Fourier $X(j\omega) = u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)$ puede someterse a un muestreo con tren de impulsos sin traslape, siempre y cuando el periodo de muestreo sea $T < \pi/\omega_0$.

(c) La señal $x(t)$ con transformada de Fourier $X(j\omega) = u(\omega) - u(\omega - \omega_0)$ puede someterse a un muestreo con tren de impulsos sin traslape, siempre que el periodo de muestreo sea $T < 2\pi/\omega_0$.

7.11. Sea $x_c(t)$ una señal continua cuya transformada de Fourier tiene la propiedad de que $X_c(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq 2{,}000\pi$. Se obtiene una señal discreta

$$x_d[n] = x_c(n(0.5 \times 10^{-3}))$$

Para cada una de las siguientes restricciones en la transformada de Fourier $X_d(e^{j\omega})$ de $x_d[n]$, determine la restricción correspondiente en $X_c(j\omega)$:

(a) $X_d(e^{j\omega})$ es real.

(b) El máximo valor de $X_d(e^{j\omega})$ en toda ω es 1.

(c) $X_d(e^{j\omega}) = 0$ para $\frac{3\pi}{4} \leq |\omega| \leq \pi$.

(d) $X_d(e^{j\omega}) = X_d(e^{j(\omega-\pi)})$.

7.12. Una señal discreta $x_d[n]$ tiene una transformada de Fourier $X_d(e^{j\omega})$ con la propiedad de que $X_d(e^{j\omega}) = 0$ para $3\pi/4 \leq |\omega| \leq \pi$. La señal se convierte en una señal continua

$$x_c(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{T}(t - nT)}{\pi(t - nT)},$$

donde $T = 10^{-3}$. Determine los valores de ω para los cuales se garantiza que la transformada de Fourier $X_c(j\omega)$ de $x_c(t)$ es cero.

7.13. En relación con el filtrado que se examina en la figura 7.24, suponga que el periodo de muestreo usado es T y la entrada $x_c(t)$ es de banda limitada, de modo que $X_c(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \pi/T$. Si el sistema completo tiene la propiedad de que $y_c(t) = x_c(t - 2T)$, determine la respuesta al impulso $h[n]$ del filtro discreto de la figura 7.24.

7.14. Repita el problema anterior, pero ahora suponga que

$$y_c(t) = \frac{d}{dt} x_c\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

7.15. El muestreo con tren de impulsos de $x[n]$ se usa para obtener

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n - kN].$$

Si $X(e^{j\omega}) = 0$ para $3\pi/7 \leq |\omega| \leq \pi$, determine el valor más grande para el intervalo de muestreo N que asegure que no se presenta traslape mientras $x[n]$ se muestrea.

7.16. Se nos proporcionan los siguientes datos acerca de la señal $x[n]$ y su transformada de Fourier:

1. $x[n]$ es real.
2. $X(e^{j\omega}) \neq 0$ para $0 < \omega < \pi$.
3. $x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 2k] = \delta[n]$.

Determine $x[n]$. Puede encontrar útil el observar que la señal $(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} n)/(\pi n)$ satisface dos de estas condiciones.

7.17. Considere un filtro supresor de banda discreto con respuesta al impulso $h[n]$ para el cual la respuesta en frecuencia en el intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ es

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \text{ y } |\omega| \geq \frac{3\pi}{4} \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Determine la respuesta en frecuencia del filtro cuya respuesta al impulso es $h[2n]$.

7.18. Suponga que se interpola la respuesta al impulso de un filtro paso bajas ideal discreto con frecuencia de corte $\pi/2$ (de acuerdo con la figura 7.37) para obtener un sobremuestreo por un factor de 2. ¿Cuál es la respuesta en frecuencia correspondiente a esta respuesta al impulso sobremuestreada?

7.19. Considere el sistema que se muestra en la figura P7.19, con entrada $x[n]$ y la correspondiente salida $y[n]$. El sistema de inserción cero asigna dos puntos con amplitud cero entre cada uno de los valores de la secuencia en $x[n]$. La decimación se define como

$$y[n] = w[5n],$$

donde $w[n]$ es la secuencia de entrada para el sistema de decimación. Si la entrada tiene la forma

$$x[n] = \frac{\operatorname{sen} \omega_1 n}{\pi n},$$

determine la salida $y[n]$ para los siguientes valores de ω_1:

(a) $\omega_1 \leq \frac{3\pi}{5}$

(b) $\omega_1 > \frac{3\pi}{5}$

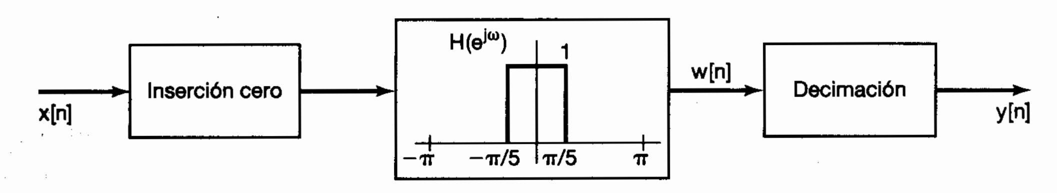


Figura P7.19

7.20. Dos sistemas discretos S_1 y S_2 tienen la función de realizar un filtro paso bajas ideal con frecuencia de corte $\pi/4$. El sistema S_1 se ilustra en la figura P7.20(a) y el sistema S_2 en la figura P7.20(b). En estas figuras, S_A corresponde a un sistema de inserción que asigna un cero después de cada muestra de entrada, mientras que S_B corresponde a un sistema de decimación que extrae cada dos muestras de su entrada.

(a) ¿La función del sistema S_1 corresponde al filtro ideal paso bajas deseado?

(b) ¿La función del sistema S_2 corresponde al filtro ideal paso bajas deseado?

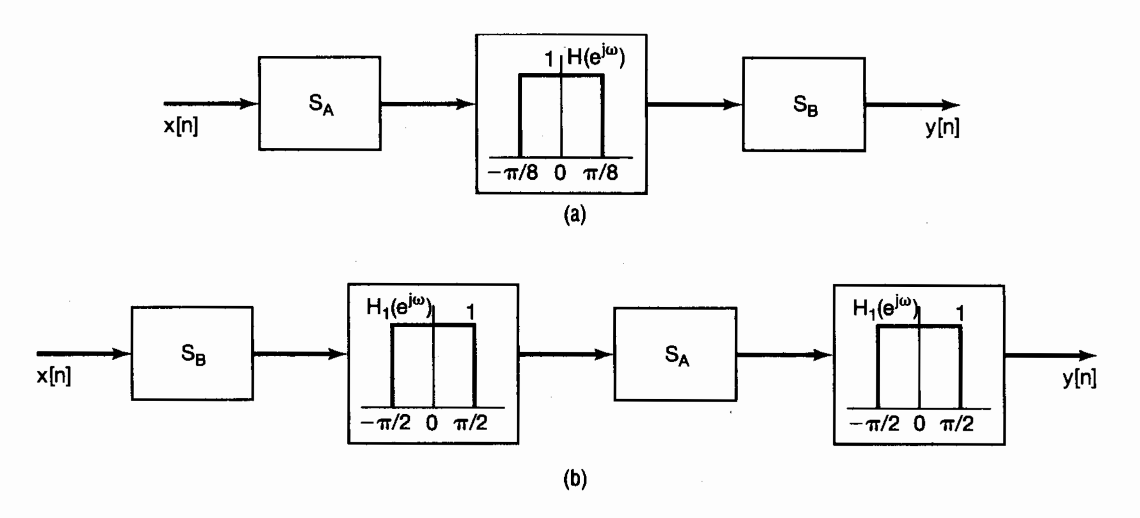


Figura P7.20

PROBLEMAS BÁSICOS

7.21. Una señal $x(t)$ con transformada de Fourier $X(j\omega)$ se somete a un tren de impulsos para generar

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t - nT)$$

donde $T = 10^{-4}$. Para cada uno de los siguientes conjuntos de restricciones en $x(t)$ y/o $X(j\omega)$, ¿el teorema de muestreo (véase la sección 7.1.1) garantiza que $x(t)$ se pueda recuperar de manera exacta a partir de $x_p(t)$?

(a) $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 5000\pi$
(b) $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 15000\pi$
(c) $\mathcal{R}e\{X(j\omega)\} = 0$ para $|\omega| > 5000\pi$
(d) $x(t)$ real y $X(j\omega) = 0$ para $\omega > 5000\pi$
(e) $x(t)$ real y $X(j\omega) = 0$ para $\omega < -15000\pi$
(f) $X(j\omega) * X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 15000\pi$
(g) $|X(j\omega)| = 0$ para $\omega > 5000\pi$

7.22. La señal $y(t)$ se genera al convolucionar una señal de banda limitada $x_1(t)$ con otra señal de banda limitada $x_2(t)$, es decir,

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

donde

$$X_1(j\omega) = 0 \qquad \text{para } |\omega| > 1000\pi$$
$$X_2(j\omega) = 0 \qquad \text{para } |\omega| > 2000\pi.$$

El muestreo con tren de impulsos se realiza sobre $y(t)$ para obtener

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(nT)\delta(t - nT).$$

Especifique el intervalo de valores para el periodo de muestreo T que asegure que $y(t)$ se puede recuperar a partir de $y_p(t)$.

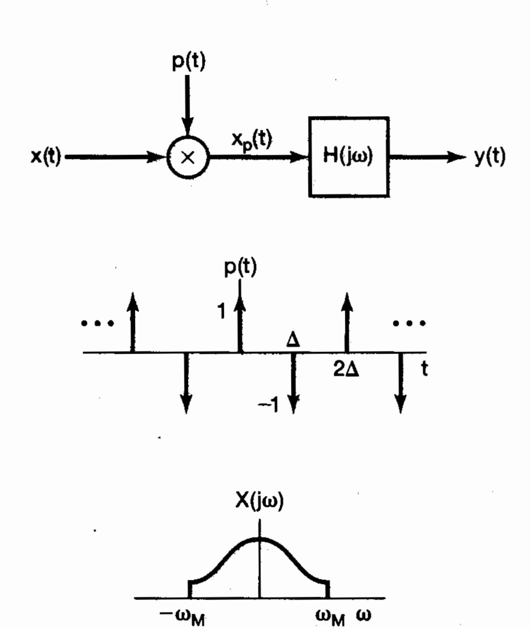
7.23. En la figura P7.23 se muestra un sistema en el cual la señal de muestreo es un tren de impulsos con signo alternado. La transformada de Fourier de la señal de entrada es como se indica en la figura.

(a) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, dibuje la transformada de Fourier de $x_p(t)$ y $y(t)$.

(b) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, determine un sistema con el cual se pueda recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

(c) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, determine un sistema con el cual se pueda recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$.

(d) ¿Cuál es el valor *máximo* de Δ en relación con ω_M para la cual $x(t)$ puede recuperarse a partir de $x_p(t)$ o de $y(t)$?



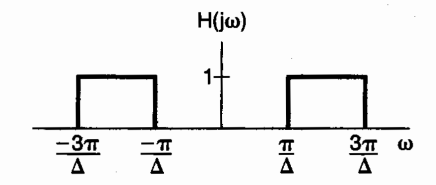


Figura P7.23

7.24. En la figura P7.24 se muestra un sistema en el cual la señal de entrada está multiplicada por una onda cuadrada periódica. El periodo de $s(t)$ es T. La señal de entrada es de banda limitada con $|X(j\omega)| = 0$ para $|\omega| \geq \omega_M$.

(a) Para $\Delta = T/3$, determine en términos de ω_M el valor máximo de T para el cual no hay traslape entre las réplicas de $X(j\omega)$ en $W(j\omega)$.
(b) Para $\Delta = T/4$, determine en términos de ω_M el valor máximo de T para el cual no hay traslape entre las réplicas de $X(j\omega)$ en $W(j\omega)$.

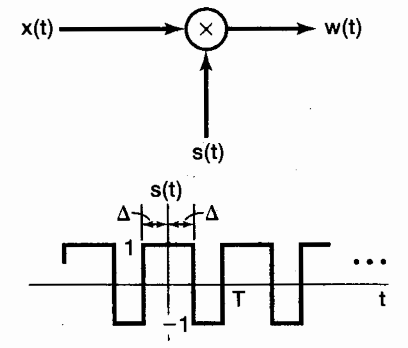


Figura P7.24

7.25. La figura P7.25 representa un muestreador, seguido por un filtro paso bajas ideal, para reconstruir $x(t)$ a partir de sus muestras $x_p(t)$. Del teorema de muestreo, sabemos que si $\omega_s = 2\pi/T$ es mayor que el doble de la frecuencia más alta presente en $x(t)$ y $\omega_c = \omega_s/2$, entonces la señal reconstruida $x_r(t)$ será exactamente igual a $x(t)$. Si esta condición se viola en el ancho de banda, entonces $x_r(t)$ *no* será igual a $x(t)$. Lo que buscamos es mostrar en este problema que si $\omega_c = \omega_s/2$, entonces para cualquier selección de T, $x_r(t)$ y $x(t)$ siempre serán iguales en los instantes de muestreo; es decir,

$$x_r(kT) = x(kT), \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

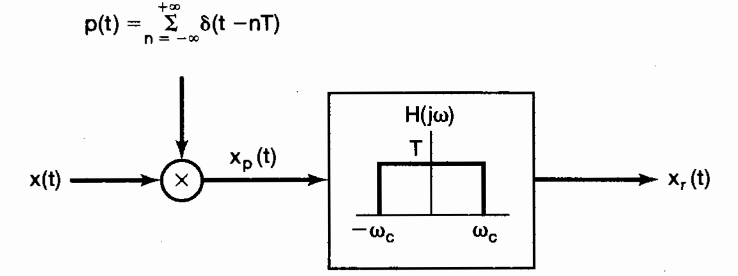


Figura P7.25

Para obtener este resultado, considere la ecuación (7.11), la cual expresa a $x_r(t)$ en términos de las muestras de $x(t)$:

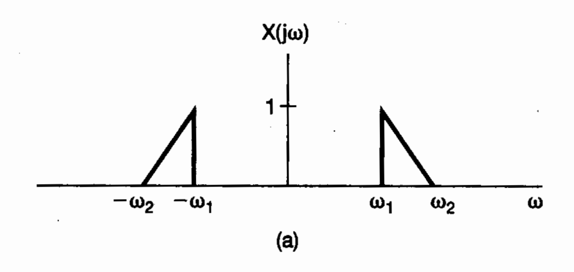
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)T\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\text{sen}[\omega_c(t-nT)]}{\omega_c(t-nT)}.$$

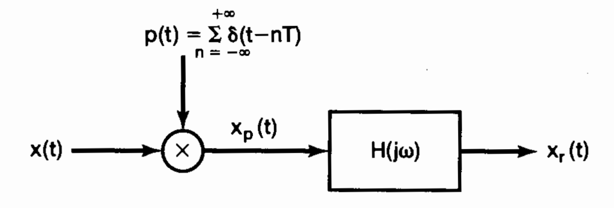
Con $\omega_c = \omega_s/2$, ésta se convierte en

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\text{sen}\left[\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}. \qquad \text{(P7.25-1)}$$

Considerando los valores de α para los cuales $[\text{sen}(\alpha)]/\alpha = 0$, demuestre de la ecuación (P7.25-1) que, sin cualquier restricción de $x(t)$, $x_r(kT) = x(kT)$ para cualquier valor entero de k.

7.26. El teorema de muestreo, como lo hemos deducido, establece que una señal $x(t)$ debe ser muestreada a una velocidad mayor que su ancho de banda (o, de manera equivalente, a una velocidad mayor que el doble de su frecuencia más alta). Esto implica que si $x(t)$ tiene un espectro como el indicado en la figura P7.26(a), entonces $x(t)$ debe ser muestreada a una velocidad mayor que $2\omega_2$. Sin embargo, ya que la señal tiene la mayor parte de su energía concentrada en una banda angosta, parecería razonable esperar que una velocidad de muestreo más baja que el doble de la frecuencia más alta pudiera ser usada. A una señal cuya energía está concentrada en una banda de frecuencias a menudo se le conoce como una *señal paso banda*. Hay una gran variedad de técnicas de muestreo para dichas señales, y estas técnicas son generalmente conocidas como *técnicas de muestreo paso banda*.





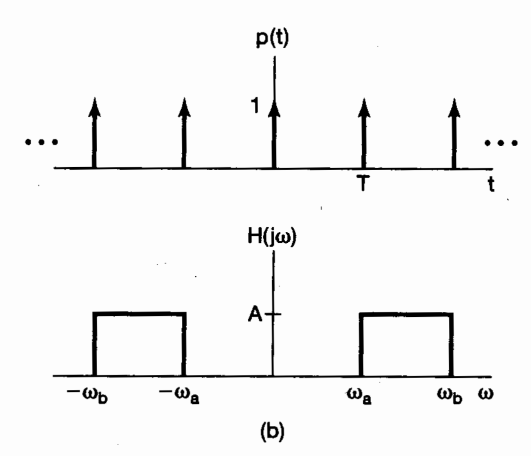


Figura P7.26

Para examinar la posibilidad de muestrear una señal paso banda a una velocidad menor que el ancho de banda total, considere el sistema mostrado en la figura P7.26(b). Suponiendo que $\omega_1 > \omega_2 - \omega_1$, encuentre el valor máximo de T y los valores de las constantes A, ω_a y ω_b tales que $x_r(t) = x(t)$.

7.27. En el problema 7.26 consideramos un procedimiento para el muestreo y la reconstrucción paso banda. Otro procedimiento que se usa cuando $x(t)$ es real consiste en multiplicar $x(t)$ por una exponencial compleja y entonces muestrear el producto. El sistema de muestreo aparece en la figura P7.27(a). Con $x(t)$ real y con $X(j\omega)$ diferente de cero sólo para $\omega_1 < |\omega| < \omega_2$, la frecuencia se selecciona como $\omega_0 = (1/2)(\omega_1 + \omega_2)$, y el filtro paso bajas $H_1(j\omega)$ tiene la frecuencia de corte $(1/2)(\omega_2 - \omega_1)$.

(a) Para $X(j\omega)$ como se muestra en la figura P7.27(b), dibuje $X_p(j\omega)$.

(b) Determine el periodo de muestreo máximo T tal que $x(t)$ se pueda recuperar a partir de $x_p(t)$.

(c) Determine un sistema para recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

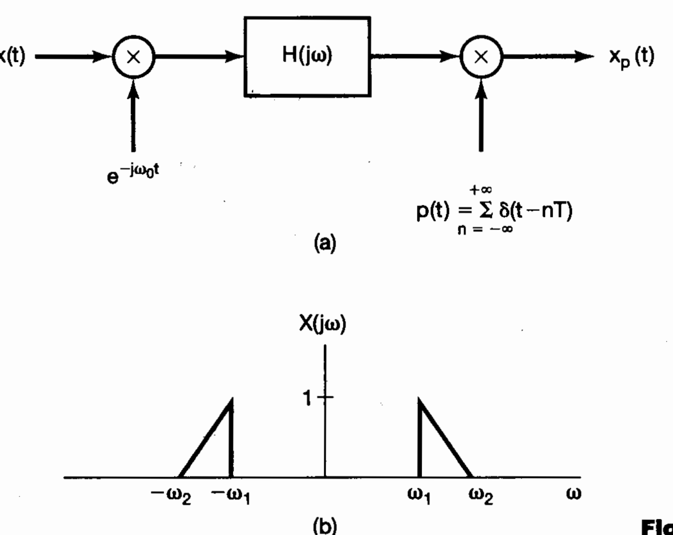


Figura P7.27

7.28. La figura P7.28(a) muestra un sistema que convierte una señal continua en una señal discreta. La entrada $x(t)$ es periódica con periodo de 0.1 segundo. Los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$ son

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, \quad -\infty < k < +\infty.$$

El filtro paso bajas $H(j\omega)$ tiene la respuesta en frecuencia mostrada en la figura P7.28(b). El periodo de muestreo $T = 5 \times 10^{-3}$ segundos.

(a) Demuestre que $x[n]$ es una secuencia periódica y determine su periodo.

(b) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de $x[n]$.

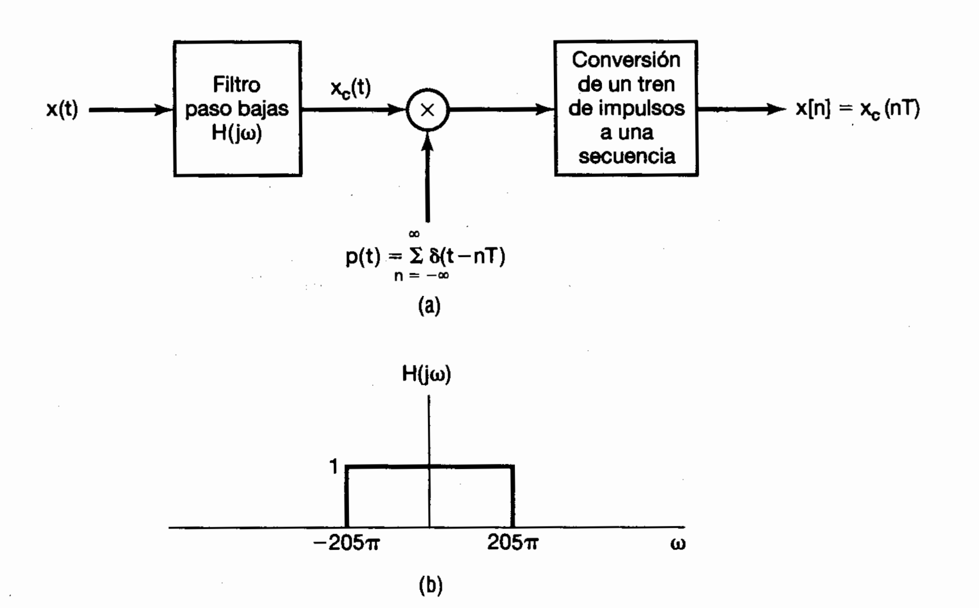


Figura P7.28

7.29. En la figura P7.29(a) se muestra el sistema completo para el filtrado de una señal continua usando un filtro discreto. Si $X_c(j\omega)$ y $H(e^{j\omega})$ son como se muestra en la figura P7.29(b) con $1/T = 20$ kHz, dibuje $X_p(j\omega)$, $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$, $Y_p(j\omega)$ y $Y_c(j\omega)$.

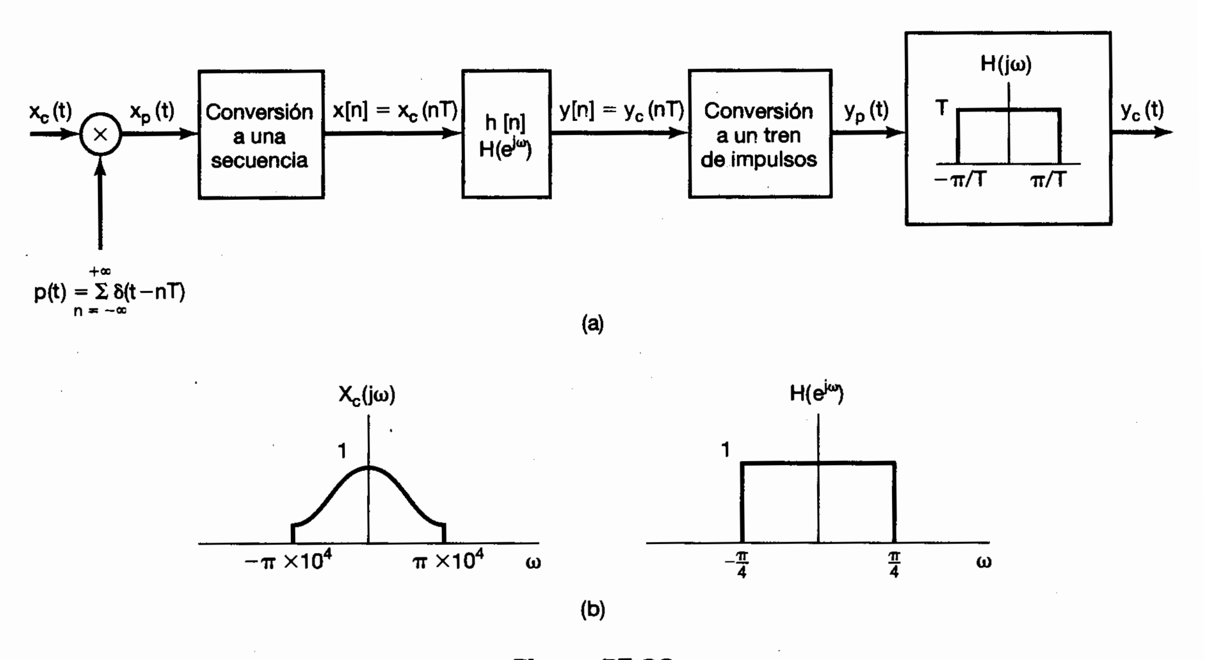


Figura P7.29

7.30. En la figura P7.30 se muestra un sistema que consiste en un sistema LTI continuo, seguido por un muestreador, la conversión a una secuencia y un sistema LTI discreto. El sistema LTI continuo es causal y satisface la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$\frac{dy_c(t)}{dt} + y_c(t) = x_c(t).$$

La entrada $x_c(t)$ es un impulso unitario $\delta(t)$.

(a) Determine $y_c(t)$.

(b) Determine la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ y la respuesta al impulso $h[n]$ tales que $w[n] = \delta[n]$.

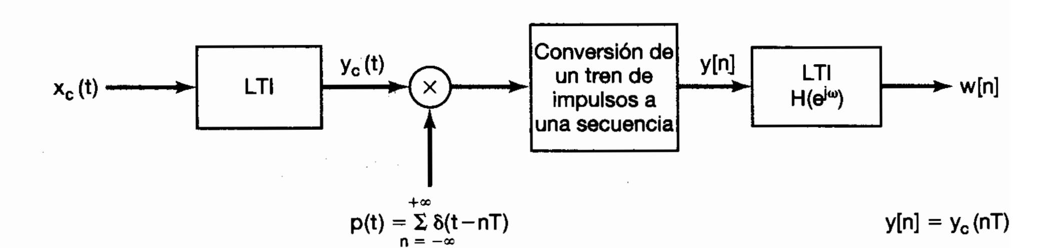


Figura P7.30

7.31. En la figura P7.31 se muestra un sistema que procesa señales continuas usando un filtro digital $h[n]$ que es lineal y causal con la ecuación de diferencias

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n].$$

Para señales de entrada que son de banda limitada tales que $X_c(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \pi/T$, el sistema de la figura resulta equivalente a un sistema LTI continuo.

Determine la respuesta en frecuencia $H_c(j\omega)$ del sistema equivalente completo con entrada $x_c(t)$ y salida $y_c(t)$.

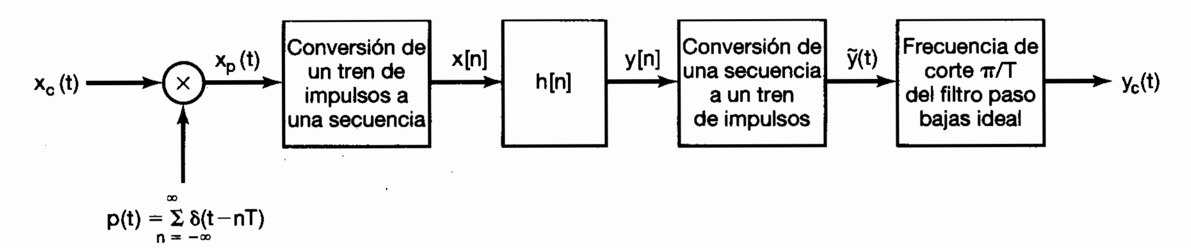


Figura P7.31

7.32. Una señal $x[n]$ tiene una transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ que es cero para $(\pi/4) \leq |\omega| \leq \pi$. Otra señal

$$g[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 1 - 4k]$$

se genera. Especifique la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ de un filtro paso bajas que produce $x[n]$ como salida cuando $g[n]$ es la entrada.

7.33. Una señal $x[n]$ con transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ tiene la propiedad de que

$$\left(x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 3k]\right) * \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}n}{\frac{\pi}{3}n}\right) = x[n].$$

¿Para qué valores de ω se garantiza que $X(e^{j\omega}) = 0$?

7.34. Una señal discreta $x[n]$ de valor real tiene una transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ que es cero para $3\pi/14 \leq |\omega| \leq \pi$. La porción diferente de cero de la transformada de Fourier de un periodo $X(e^{j\omega})$ puede configurarse de manera tal que ocupe la región $|\omega| < \pi$ realizando primero sobremuestreo por un factor de L y posteriormente llevando a cabo un submuestreo por un factor de M. Especifique los valores de L y M.

7.35. Considere una secuencia de tiempo discreto $x[n]$ a partir de la cual formamos dos nuevas secuencias, $x_p[n]$ y $x_d[n]$, donde $x_p[n]$ corresponde a muestrear $x[n]$ con un periodo de muestreo de 2 y $x_d[n]$ corresponde a decimar $x[n]$ por un factor de 2, de manera que

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \\ 0, & n = \pm 1, \pm 3, \ldots \end{cases}$$

y

$$x_d[n] = x[2n].$$

(a) Si $x[n]$ es como se ilustra en la figura P7.35(a), dibuje las secuencias $x_p[n]$ y $x_d[n]$.
(b) Si $X(e^{j\omega})$ es como se muestra en la figura P7.35(b), dibuje $X_p(e^{j\omega})$ y $X_d(e^{j\omega})$.

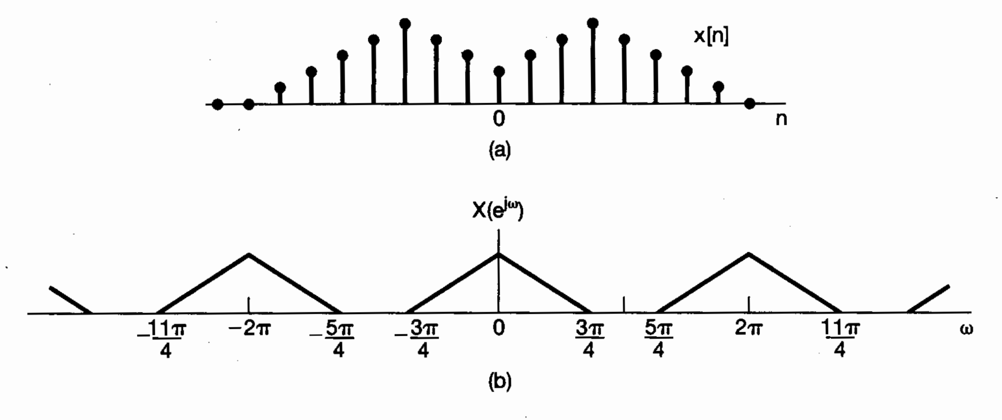


Figura P7.35

PROBLEMAS AVANZADOS

7.36. Sea $x(t)$ una señal de banda limitada tal que $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \frac{\pi}{T}$.
(a) Si $x(t)$ se muestrea usando un periodo de muestreo de T, determine una función

de interpolación $g(t)$ tal que

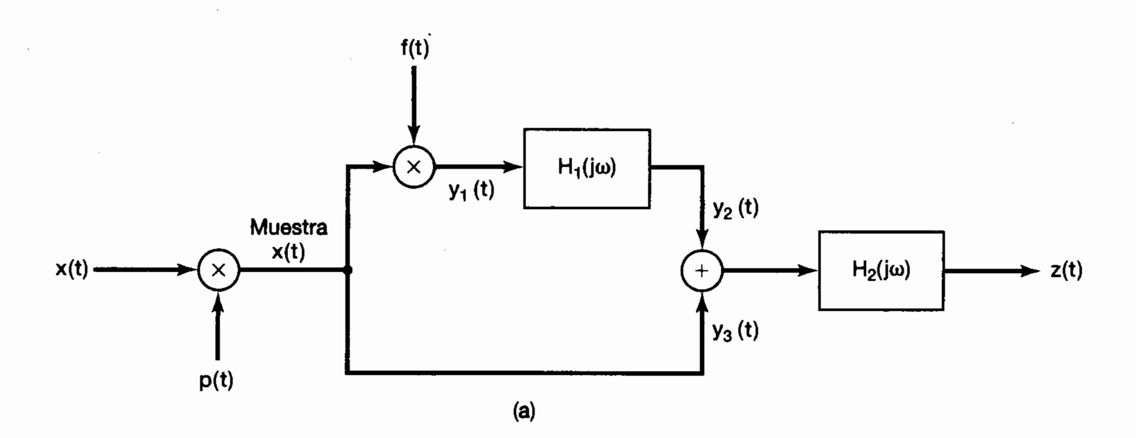
$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)g(t-nT).$$

(b) ¿La función $g(t)$ es única?

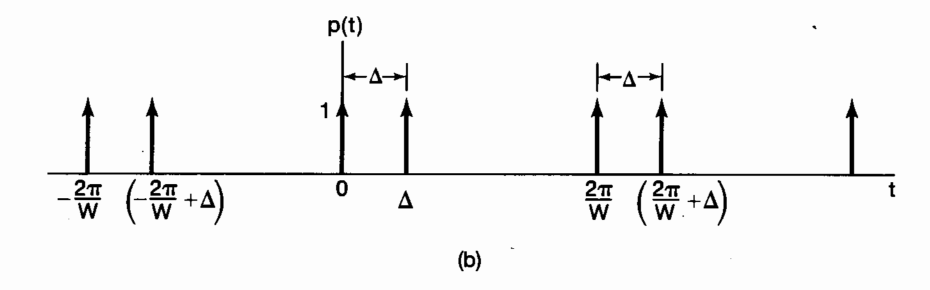
7.37. Una señal limitada en ancho de banda a $|\omega| < W$ puede recuperarse a partir de muestras espaciadas de manera no uniforme, siempre y cuando la densidad de la muestra promedio sea $2(W/2\pi)$ muestras por segundo. Este problema ilustra un ejemplo particular de muestreo no uniforme. Suponga que en la figura P7.37(a):

1. $x(t)$ es de banda limitada; $X(j\omega) = 0$, $|\omega| > W$.
2. $p(t)$ es un tren de impulsos periódicos espaciados de manera no uniforme, como se muestra en la figura P7.37(b).
3. $f(t)$ es una forma de onda periódica con periodo $T = 2\pi/W$. Puesto que $f(t)$ multiplica un tren de impulsos, sólo sus valores $f(0) = a$ y $f(\Delta) = b$, en $t = 0$ y $t = \Delta$, respectivamente, son significativos.
4. $H_1(j\omega)$ es un desplazador de fase de 90°; esto es,

$$H_1(j\omega) = \begin{cases} j, & \omega > 0 \\ -j, & \omega < 0 \end{cases}.$$



(a)



(b)

Figura P7.37

5. $H_2(j\omega)$ es un filtro paso bajas ideal; esto es

$$H_2(j\omega) = \begin{cases} K, & 0 < \omega < W \\ K^*, & -W < \omega < 0, \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

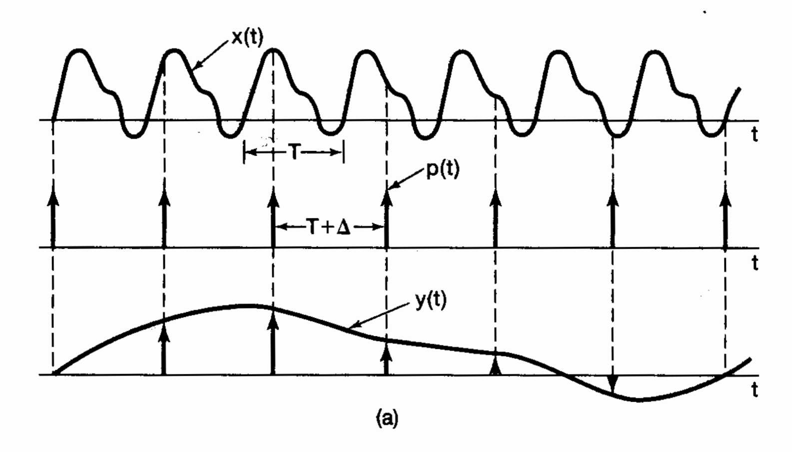
donde K es una constante (posiblemente compleja).

(a) Encuentre la transformada de Fourier de $p(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ y $y_3(t)$.

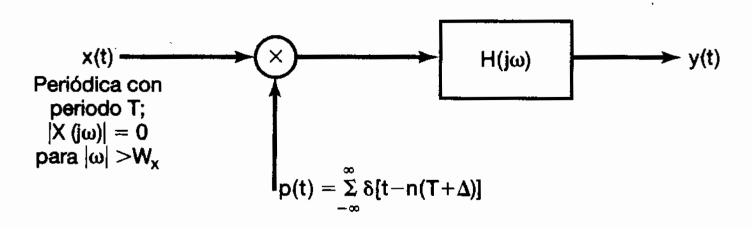
(b) Especifique los valores de a, b y K en función de Δ tales que $z(t) = x(t)$ para cualquier $x(t)$ de banda limitada y cualquier Δ tal que $0 < \Delta < \pi/W$.

7.38. A menudo es necesario desplegar en una pantalla de osciloscopio las formas de onda que tienen estructuras de tiempo muy cortas, por ejemplo, en la escala de milésimas de nanosegundo. Debido a que el tiempo de subida del osciloscopio más rápido es más largo que tales intervalos, este tipo de despliegue no se puede lograr directamente. Sin embargo, si la forma de onda es periódica, el resultado deseado puede obtenerse de manera indirecta usando un instrumento llamado osciloscopio de muestreo.

La idea, como se muestra en la figura P7.38(a), es muestrear la forma de onda $x(t)$ rápida una vez cada periodo, pero en puntos sucesivos posteriores y en periodos sucesivos. El incremento Δ debe ser un intervalo de muestreo seleccionado apropiadamente en relación con el ancho de banda de $x(t)$. Si el tren de impulsos resultante se pasa entonces a través de un filtro de interpolación paso bajas ade-



(a)



(b)

Figura P7.38

cuado, la salida $y(t)$, será proporcional a la forma de onda rápida original, haciéndola más lenta o alargada en tiempo [es decir, $y(t)$ es proporcional a $x(at)$, donde $a < 1$].

Para $x(t) = A + B\cos[(2\pi/T)t + \theta]$, encuentre un intervalo de valores de Δ de manera que $y(t)$ en la figura P7.38(b) sea proporcional a $x(at)$ con $a < 1$. También, determine el valor de a en términos de T y Δ.

7.39. Una señal $x_p(t)$ se obtiene a través de un muestreo con tren de impulsos de una señal senoidal $x(t)$ cuya frecuencia es igual a la mitad de la frecuencia de muestreo ω_s.

$$x(t) = \cos\left(\frac{\omega_s}{2}t + \phi\right)$$

y

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

donde $T = 2\pi/\omega_s$.

(a) Encuentre $g(t)$ tal que

$$x(t) = \cos(\phi)\cos\left(\frac{\omega_s}{2}t\right) + g(t).$$

(b) Demuestre que

$$g(nT) = 0 \qquad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(c) Usando los resultados de las partes previas, demuestre que si $x_p(t)$ se aplica como entrada a un filtro paso bajas ideal con frecuencia de corte $\omega_s/2$, la salida resultante es

$$y(t) = \cos(\phi)\cos\left(\frac{\omega_s}{2}t\right).$$

7.40. Considere un disco en el cual están pintados cuatro ciclos de una senoide. El disco gira aproximadamente a 15 revoluciones por segundo, de manera que la senoide tiene una frecuencia de 60 Hz cuando se ve a través de una rendija angosta.

El arreglo se indica en la figura P7.40. Sea que $v(t)$ denota la posición de la línea vista a través de la rendija. Entonces

$$v(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi),\ \omega_0 = 120\pi.$$

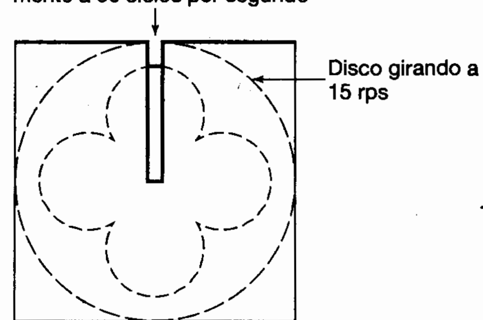


Figura P7.40

Para facilitar la notación, normalizaremos $v(t)$ de manera que $A = 1$. A 60 Hz, el ojo no es capaz de seguir $v(t)$, y supondremos que este efecto puede explicarse modelando el ojo como un filtro paso bajas ideal con frecuencia de corte a 20 Hz.

El muestreo de la senoide se puede realizar mediante la iluminación del disco con una luz estroboscópica. Así, la iluminación puede representarse mediante un tren de impulsos; es decir,

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT),$$

donde $1/T$ es la frecuencia del estroboscopio en hertz. La señal muestreada resultante es el producto $r(t) = v(t)i(t)$. Sea que $R(j\omega)$, $V(j\omega)$ e $I(j\omega)$ denotan las transformadas de Fourier de $r(t)$, $v(t)$ e $i(t)$, respectivamente.

(a) Trace $V(j\omega)$, indicando claramente el efecto de los parámetros ϕ y ω_0.

(b) Dibuje $I(j\omega)$, indicando el efecto de T.

(c) De acuerdo con el teorema de muestreo, hay un valor máximo de T en términos de ω_0 tal que $v(t)$ se puede recuperar a partir de $r(t)$ mediante el uso de un filtro paso bajas. Determine este valor de T y la frecuencia de corte del filtro paso bajas. Trace $R(j\omega)$ cuando T es ligeramente menor que ese valor.

Si el periodo de muestreo T se hace mayor que el valor determinado en la parte (c), se presenta un traslape del espectro. Como resultado de dicho traslape, percibimos una senoide de frecuencia más baja.

(d) Suponga que $2\pi/T = \omega_0 + 20\pi$. Trace $R(j\omega)$ para $|\omega| < 40\pi$. Denote mediante $v_a(t)$ la posición aparente de la línea como la percibimos. Suponiendo que el ojo se comporta como un filtro paso bajas ideal con frecuencia de corte a 20 Hz y ganancia unitaria, exprese $v_a(t)$ en la forma

$$v_a(t) = A_a \cos(\omega_a + \phi_a),$$

donde A_a es la amplitud aparente, ω_a es la frecuencia aparente y ϕ_a la fase aparente de $v_a(t)$.

(e) Repita la parte (d) para $2\pi/T = \omega_0 - 20\pi$.

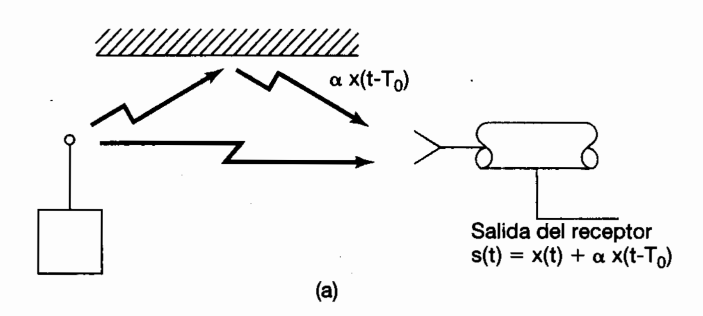
7.41. En muchas situaciones prácticas una señal se graba en presencia de un eco, el cual nos gustaría eliminar mediante un procesamiento adecuado. Por ejemplo, en la figura P7.41(a) ilustramos un sistema en el cual un receptor recibe de manera simultánea una señal $x(t)$ y un eco representado por una réplica retrasada y atenuada de $x(t)$. De este modo, la salida del receptor es $s(t) = x(t) + \alpha x(t - T_0)$, donde $|\alpha| < 1$. Esta salida debe ser procesada para recuperar $x(t)$ convirtiéndola primero a una secuencia y usando después un filtro digital apropiado $h[n]$, como se indica en la figura P7.41(b).

Suponga que $x(t)$ es de banda limitada [es decir, $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$] y que $|\alpha| < 1$.

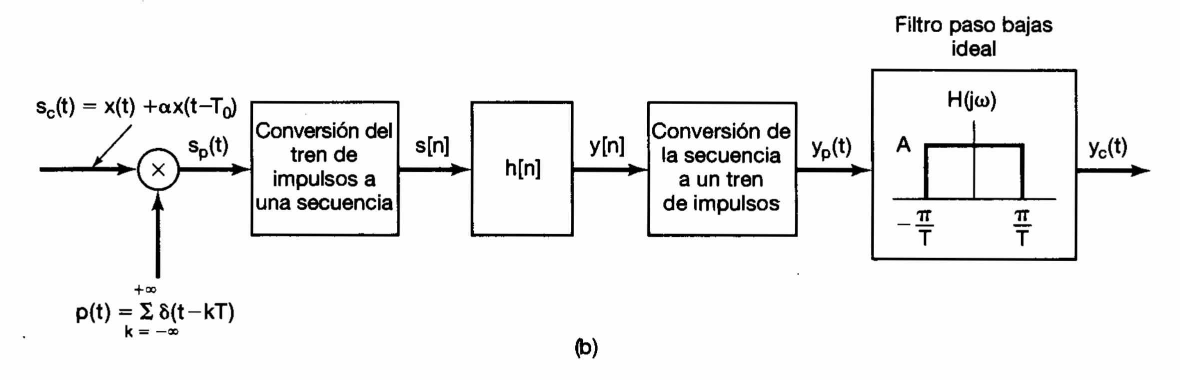
(a) Si $T_0 < \pi/\omega_M$, y el periodo de muestreo se elige como igual a T_0 (es decir, $T = T_0$), determine la ecuación de diferencias para el filtro digital $h[n]$ de manera que $y_c(t)$ sea proporcional a $x(t)$.

(b) Con las consideraciones de la parte (a), especifique la ganancia A del filtro paso bajas ideal de manera que $y_c(t) = x(t)$.

(c) Suponga ahora que $\pi/\omega_M < T_0 < 2\pi/\omega_M$. Determine una selección para el periodo de muestreo T, la ganancia A del filtro paso bajas y la respuesta en frecuencia para el filtro digital $h[n]$ tal que $y_c(t)$ sea proporcional a $x(t)$.



(a)



(b)

Figura P7.41

7.42. Considere una señal de banda limitada $x_c(t)$ la cual se muestrea a una velocidad mayor que la razón de Nyquist. Las muestras, espaciadas T segundos, son entonces convertidas a una secuencia $x[n]$, como se indica en la figura P7.42.

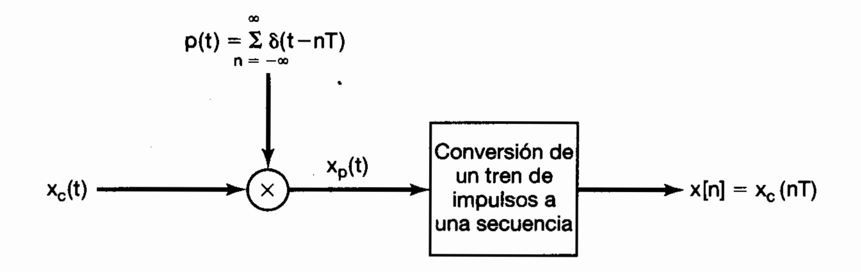


Figura P7.42

Determine la relación entre la energía E_d de la secuencia, la energía E_c de la señal original y el intervalo de muestreo T. La energía de una secuencia $x[n]$ está definida como

$$E_d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2,$$

y la energía en una función de tiempo continuo $x_c(t)$ se define como

$$E_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_c(t)|^2 \, dt.$$

7.43. En la figura P7.43(a) se muestra un sistema para el cual la entrada y la salida son señales discretas. La entrada discreta $x[n]$ se convierte en un tren de impulsos continuo $x_p(t)$. La señal continua $x_p(t)$ es entonces filtrada por un sistema LTI para producir la salida $y_c(t)$, la cual es entonces convertida a la señal discreta $y[n]$. El sistema LTI con entrada $x_c(t)$ y salida $y_c(t)$ es causal y está caracterizado por la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$\frac{d^2y_c(t)}{dt^2} + 4\frac{dy_c(t)}{dt} + 3y_c(t) = x_c(t).$$

El sistema total es equivalente a un sistema LTI causal discreto, como se indica en la figura P7.43(b).

Determine la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ y la respuesta a la muestra unitaria $h[n]$ del sistema LTI equivalente.

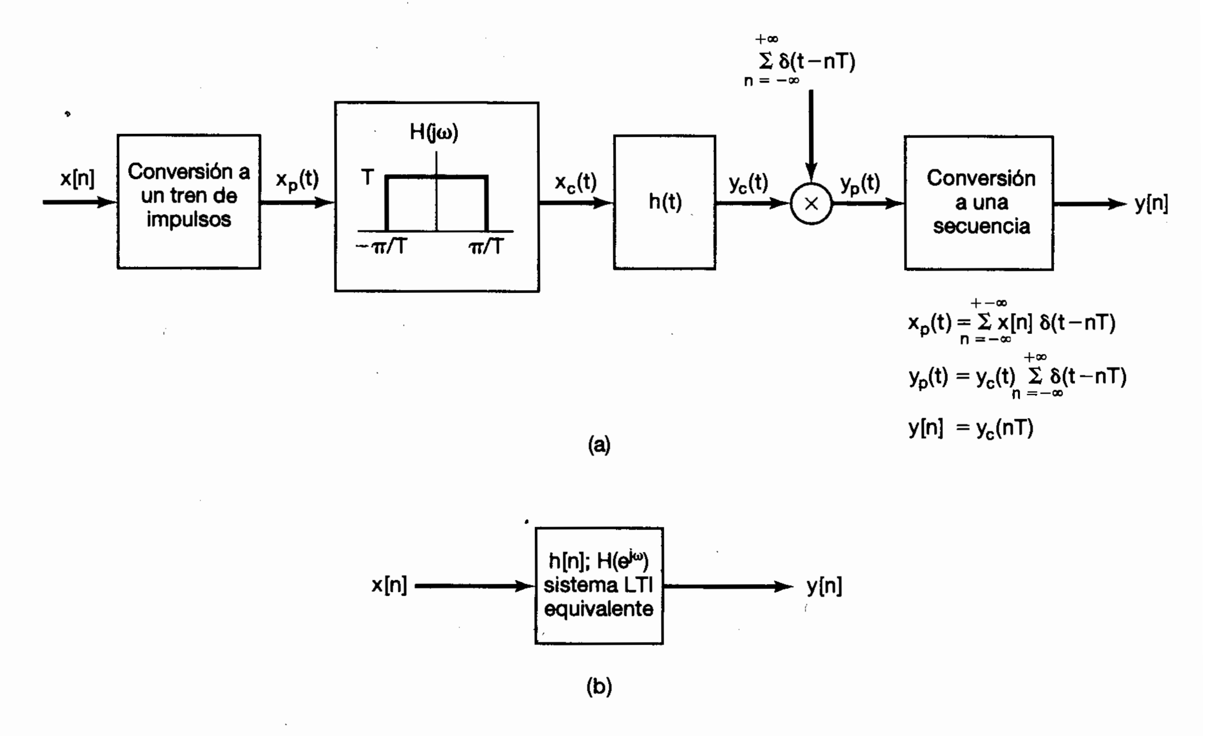


Figura P7.43

7.44. Deseamos diseñar un generador de tiempo continuo que es capaz de producir señales senoidales a cualquier frecuencia que satisface

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2,$$

donde ω_1 y ω_2 son números positivos dados.

Nuestro diseño adopta la siguiente forma: hemos almacenado una onda coseno discreta de periodo N; esto es, tenemos almacenadas $x[0], \ldots, x[N-1]$, donde

$$x[k] = \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right).$$

Cada T segundos sacamos un impulso ponderado con un valor de $x[k]$, en donde procedemos en forma cíclica a través de los valores de $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Esto es,

$$y(kT) = x(k \text{ es módulo de } N),$$

o, de manera equivalente,

$$y(kT) = \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right),$$

y

$$y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \delta(t - kT).$$

(a) Demuestre que, ajustando T, podemos ajustar la frecuencia de la señal coseno que está siendo muestreada. En concreto, demuestre que

$$y_p(t) = (\cos \omega_0 t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT),$$

donde $\omega_0 = 2\pi/NT$. Determine un intervalo de valores de T de manera que $y(t)$ pueda representar muestras de una señal coseno con una frecuencia que es variable sobre el intervalo total

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2.$$

(b) Bosqueje $Y_p(j\omega)$.

El sistema completo para la generación de una senoide continuo está representado en la figura P7.44(a). $H(j\omega)$ es un filtro paso bajas ideal con ganancia unitaria en su banda de paso; esto es,

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

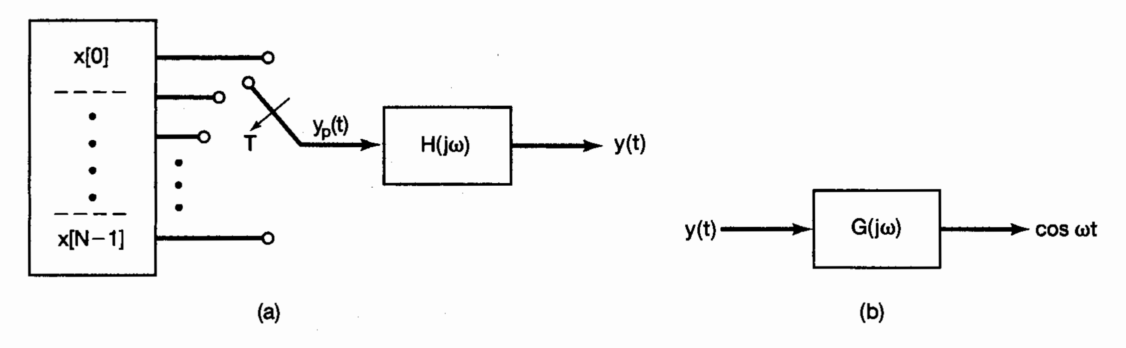


Figura P7.44

El parámetro ω_c se determina de manera que $y(t)$ sea una señal coseno continua en la banda de frecuencia deseada.

(c) Considere cualquier valor de T en el intervalo determinado en la parte (a). Determine el mínimo valor de N y algún valor de ω_c de manera que $y(t)$ sea una señal coseno en el intervalo de $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$.

(d) La amplitud de $y(t)$ variará, dependiendo del valor de ω escogido entre ω_1 y ω_2. Así, debemos diseñar un sistema $G(j\omega)$ que normalice la señal, como se muestra en la figura P7.44(b). Encuentre dicho sistema.

7.45. En el sistema mostrado en la figura P7.45, la entrada $x_c(t)$ es de banda limitada con $X_c(j\omega) = 0, |\omega| > 2\pi \times 10^4$. El filtro digital $h[n]$ está descrito por la relación entrada-salida

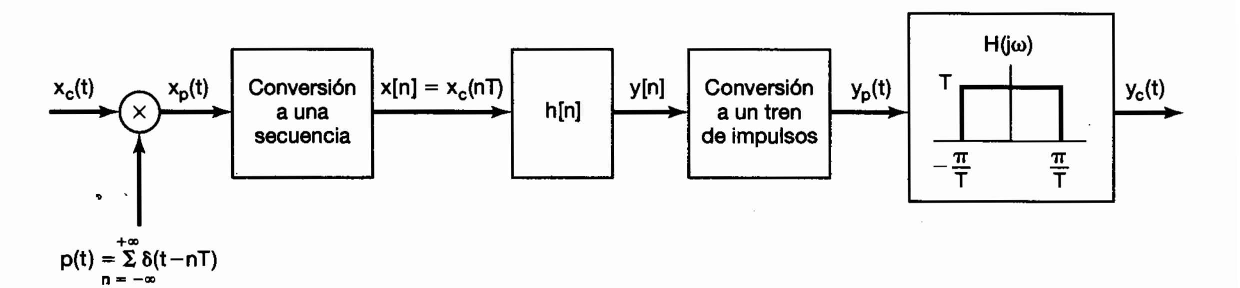


Figura P7.45

$$y[n] = T \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]. \tag{P7.45-1}$$

(a) ¿Cuál es el valor máximo de T permitido si se quiere evitar el traslape en la transformación de $x_c(t)$ a $x_p(t)$?

(b) Con el sistema LTI discreto especificado mediante la ecuación (P7.45-1), determine su respuesta al impulso $h[n]$.

(c) Determine si hay algún valor de T para el cual

$$\lim_{n \to \infty} y[n] = \lim_{t \to \infty} \int_{-\infty}^{t} x_c(\tau)\, d\tau. \tag{P7.45-2}$$

Si es así, determine el *máximo* valor. Si no, explique y especifique cómo se debe escoger T para que la igualdad en la ecuación (P7.45-2) sea la mejor aproximación. (Piense cuidadosamente en esta parte; ¡es fácil llegar a una conclusión equivocada!)

7.46. Una señal $x[n]$ es muestreada en tiempo discreto como se muestra en la figura P7.46. $h_r[n]$ es un filtro paso bajas ideal con respuesta en frecuencia

$$H_r(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{N} \\ 0, & \frac{\pi}{N} < |\omega| < \pi \end{cases}$$

A partir de las ecuaciones (7.46) y (7.47), la salida del filtro se expresa como

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] h_r[n-kN] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] \frac{N\omega_c}{\pi} \frac{\operatorname{sen} \omega_c(n-kN)}{\omega_c(n-kN)}$$

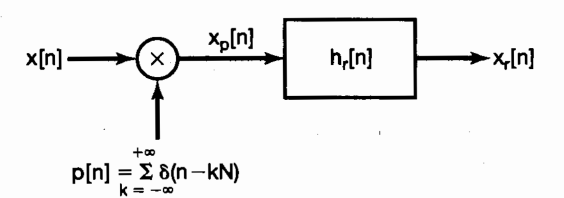


Figura P7.46

donde $\omega_c = 2\pi/N$. Demuestre que, independientemente de si la secuencia $x[n]$ es muestreada por arriba o por abajo de la razón de Nyquist, $x_r[mN] = x[mN]$, donde m es cualquier entero positivo o negativo.

7.47. Suponga que $x[n]$ tiene una transformada de Fourier que es cero para $\pi/3 \leq |\omega| \leq \pi$. Demuestre que

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[3k]\left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}(n-3k))}{\frac{\pi}{3}\,(n-3k)}\right).$$

7.48. Si $x[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n + \phi_0)$ con $0 \leq \phi_0 < 2\pi$ y $g[n] = x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$, ¿qué restricciones adicionales se deben imponer a ϕ_0 para asegurar que

$$g[n] * \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}n}{\frac{\pi}{4}\,n}\right) = x[n]?$$

7.49. Como se analizó en la sección 7.5 e ilustró en la figuras 7.37, el procedimiento de interpolación o sobremuestreo por un factor entero N puede considerarse como la conexión en cascada de dos operaciones. La primera operación, que involucra al sistema A, corresponde a insertar $N-1$ valores de secuencia cero entre cada valor de secuencia de $x[n]$, tal que

$$x_p[n] = \begin{cases} x_d\left[\frac{n}{N}\right], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Para la interpolación de banda limitada exacta, $H(e^{j\omega})$ es un filtro paso bajas ideal.

(a) Determine si el sistema A es o no lineal.

(b) Determine si el sistema A es o no invariante en el tiempo.

(c) Para $X_d(e^{j\omega})$ como se muestra en la figura P7.49 y con $N = 3$, trace $X_p(e^{j\omega})$.

(d) Para $N = 3$, $X_d(e^{j\omega})$ como se muestra en la figura P7.49, y $H(e^{j\omega})$ seleccionada adecuadamente para una interpolación de banda limitada exacta, trace $X(e^{j\omega})$.

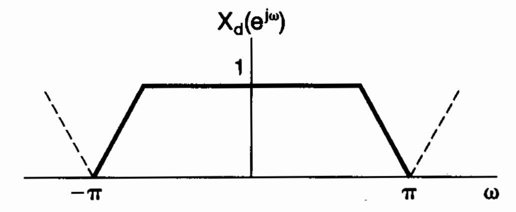


Figura P7.49

7.50. En este problema consideramos la contraparte discreta del retenedor de orden cero y del retenedor de primer orden, los cuales fueron analizados para el caso continuo en las secciones 7.1.2 y 7.2.

Sea $x[n]$ una secuencia en la cual ha sido aplicado un muestreo discreto como el ilustrado por la figura 7.31. Supongamos que las condiciones del teorema de muestreo discreto se satisfacen; esto es, $\omega_s > 2\omega_M$ donde ω_s es la frecuencia de muestreo y $X(e^{j\omega}) = 0$, $\omega_M < |\omega| \leq \pi$. La secuencia original $x[n]$ es entonces exactamente recuperable a partir de $x_p[n]$ mediante un filtrado paso bajas ideal, el cual, como se analizó en la sección 7.5, corresponde a una interpolación de banda limitada.

El retenedor de orden cero representa una interpolación aproximada en donde cada valor de la muestra es repetido (o retenido) $N - 1$ tiempos sucesivos, como se ilustra en la figura P7.50(a) para el caso de $N = 3$. El retenedor de primer orden representa una interpolación lineal entre muestras como se ilustra en la misma figura.

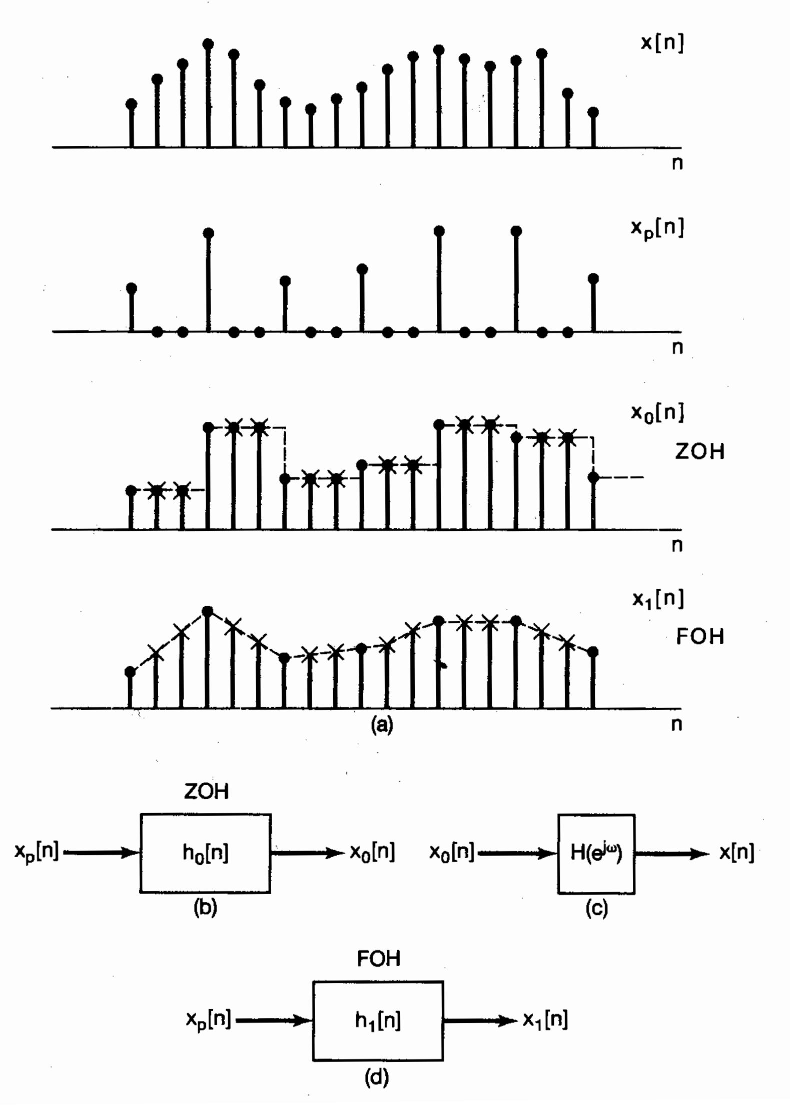


Figura P7.50

(a) El retenedor de orden cero se puede representar como una interpolación en la forma de la ecuación (7.42) o el sistema de la figura P7.50(b). Determine y trace $h_0[n]$ para el caso general de un muestreo de periodo N.

(b) $x[n]$ se puede recuperar exactamente a partir de la secuencia $x_0[n]$ del retenedor de orden, utilizando un filtro LTI $H(e^{j\omega})$ apropiado, como se indica en la figura P7.50(c). Determine y trace $H(e^{j\omega})$.

(c) El retenedor de primer orden (interpolación lineal) se puede representar como una interpolación en la forma de la ecuación (7.42) o de manera equivalente, el sistema de la figura P7.50(d). Determine y trace $h_1[n]$ para el caso general de un periodo N de muestreo.

(d) $x[n]$ puede recuperarse exactamente a partir de la secuencia $x_1[n]$ del retenedor de primer orden usando un filtro LTI apropiado con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$. Determine y trace $H(e^{j\omega})$.

7.51. Como se muestra en la figura 7.37 y como se analizó en la sección 7.5.2, el procedimiento para interpolación o sobremuestreo por un factor entero N se puede considerar como una conexión en cascada de dos operaciones. Para la interpolación de banda limitada exacta, el filtro $H(e^{j\omega})$ de la figura 7.37 es un filtro paso bajas ideal. En cualquier aplicación específica sería necesario construir un filtro paso bajas aproximado. En este problema exploramos algunas limitaciones útiles que son a menudo impuestas en el diseño de estos filtros paso bajas aproximados.

(a) Consideremos primero que aproximamos $H(e^{j\omega})$ mediante un filtro FIR de fase cero. El filtro será diseñado con la restricción de que los valores de la secuencia original $x_d[n]$ sean reproducidos *exactamente*; esto es,

$$x[n] = x_d\left[\frac{n}{L}\right], \; n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots. \qquad \text{(P7.51-1)}$$

Esto garantiza que aun cuando la interpolación entre los valores de la secuencia original pueda no ser exacta, los valores originales serán reproducidos en forma exacta en la interpolación. Determine la restricción en la respuesta al impulso $h[n]$ del filtro paso bajas para garantizar que la ecuación (P7.51-1) se cumpla exactamente para cualquier secuencia $x_d[n]$.

(b) Ahora suponga que la interpolación se llevará a cabo con un filtro FIR de *fase lineal, causal* y *simétrico* de longitud N; esto es,

$$h[n] = 0, \; n < 0, \; n > N - 1, \qquad \text{(P7.51-2)}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega}, \qquad \text{(P7.51-3)}$$

donde $H_R(e^{j\omega})$es real. El filtro se diseñará con la restricción de que los valores de la secuencia original $x_d[n]$ serán reproducidos *exactamente* pero con un retardo α, donde α es entero y es el negativo de la pendiente de la fase de $H(e^{j\omega})$; es decir,

$$x[n] = x_d\left[\frac{n - \alpha}{L}\right], n - \alpha = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots. \qquad \text{(P7.51-4)}$$

Determine si esto impone alguna limitante o si la longitud N del filtro es par o impar.

(c) De nueva cuenta, suponga que la interpolación se llevará a cabo con un filtro FIR de fase lineal, causal y simétrico, de manera que

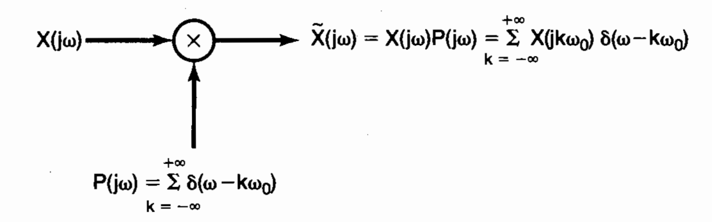
$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega})e^{-j\beta\omega},$$

donde $H_R(e^{j\omega})$ es real. El filtro será diseñado con la limitante de que los valores de la secuencia original $x_d[n]$ se reproducirán exactamente, pero con un retardo M el cual no necesariamente es igual al negativo de la pendiente de la fase; esto es,

$$x[n] = x_d\left[\frac{n-\alpha}{L}\right], \quad n - M = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots.$$

Determine si esto impone alguna limitante o si la longitud N del filtro es par o impar.

7.52. En este problema desarrollamos el dual del teorema de muestreo del dominio del tiempo, en donde una señal de tiempo limitado puede reconstruirse a partir de muestras en el *dominio de la frecuencia*. Para desarrollar este resultado, considere la operación de muestreo en el dominio de la frecuencia en la figura P7.52.



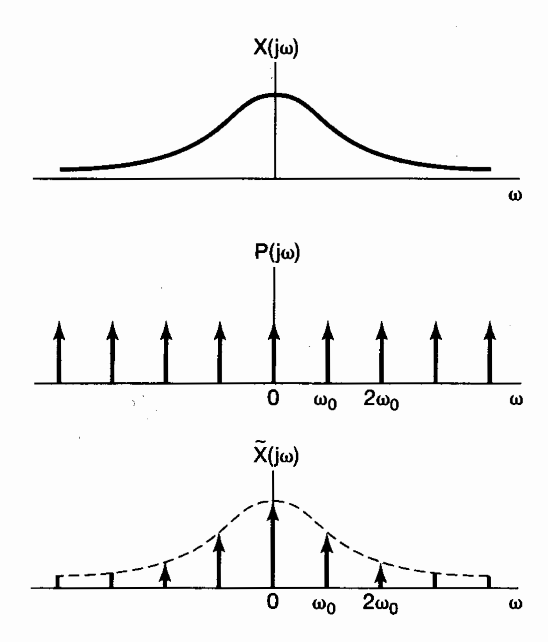


Figura P7.52

(a) Demuestre que

$$\tilde{x}(t) = x(t) * p(t)$$

donde $\tilde{x}(t)$, $x(t)$ y $p(t)$ son las transformadas inversas de Fourier de $\tilde{X}(j\omega)$, $X(j\omega)$ y $P(j\omega)$, respectivamente.

(b) Suponiendo que $x(t)$ es de tiempo limitado, de manera que $x(t) = 0$ para $|t| \geq \frac{\pi}{\omega_0}$, demuestre que $x(t)$ se puede obtener a partir de $\tilde{x}(t)$ mediante una operación de "abrir una ventana de tiempo bajo". Esto es,

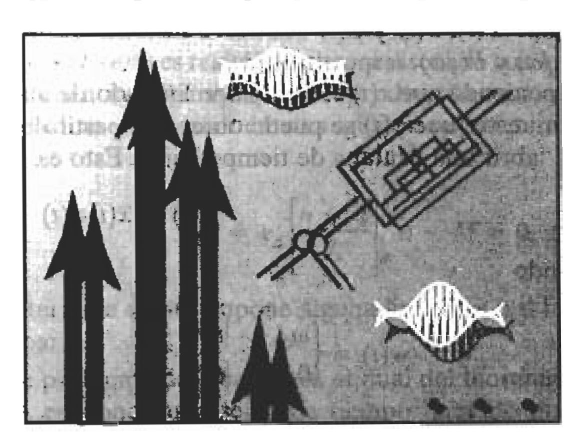
$$x(t) = \tilde{x}(t)w(t)$$

donde

$$w(t) = \begin{cases} \omega_0, & |t| \leq \frac{\pi}{\omega_0} \\ 0, & |t| > -\frac{\pi}{\omega_0} \end{cases}$$

(c) Demuestre que $x(t)$ no se puede recuperar a partir de $\tilde{x}(t)$ si $x(t)$ no está limitada a ser cero para $|t| \geq \frac{\pi}{\omega_0}$.

8
SISTEMAS DE COMUNICACIÓN



8.0 INTRODUCCIÓN

Los sistemas de comunicación juegan un papel fundamental en el mundo moderno en la transmisión de información entre la gente, los sistemas y las computadoras. En términos generales, en todos los sistemas de comunicación la información en la fuente primero se procesa mediante un transmisor o modulador para cambiarla en un forma accesible para la transmisión a través del canal de comunicación. En el receptor, la señal es recuperada posteriormente mediante el procesamiento adecuado. Este procesamiento es necesario por varias razones. En particular, es común que cualquier canal de comunicación específico tenga asociado un intervalo de frecuencia, a través del cual la señal se puede transmitir en condiciones óptimas y fuera del cual la comunicación se degrada en gran medida o resulta imposible. Por ejemplo, la atmósfera atenuará rápidamente las señales en el intervalo de frecuencia audible (10 Hz a 20 kHz), en tanto que propagará señales en un intervalo de frecuencia más alto a través de distancias más grandes. Por esta razón, en la transmisión de señales de audio (como la voz o la música) por medio de un canal de comunicación que depende de la propagación a través de la atmósfera, el transmisor primero inserta la señal, a través de un proceso apropiado, dentro de otra señal de frecuencia más alta.

Muchos de los conceptos y técnicas que hemos desarrollado en los capítulos anteriores de este texto juegan un papel fundamental en el análisis y diseño de los sistemas de comunicación. Como sucede con cualquier concepto que se relaciona con una amplia variedad de importantes aplicaciones, hay una gran cantidad de aspectos detallados que deben tomarse en cuenta y, como se indica en la bibliografía, también existen muchos excelentes textos sobre el tema. Si bien un análisis completo y detallado de los sistemas de comunicación va más allá del propósito del presente análisis, gracias a los fundamentos de los capítulos anteriores nos encontramos ahora en posición de presentar algunos principios y temas básicos que se encuentran en el diseño y análisis de estos sistemas.

Al proceso general mediante el cual una señal que contiene información se inserta en una segunda señal se le conoce como *modulación*. Al proceso de extraer la señal que

contiene información se le conoce como *demodulación*. Como veremos más adelante, las técnicas de modulación no sólo nos permiten insertar información en las señales que se pueden transmitir de manera efectiva, sino también hacen posible la transmisión simultánea de más de una señal con espectros traslapados sobre un mismo canal, mediante un concepto que se conoce como *multiplexaje*.

Existe una amplia variedad de métodos de modulación que se usan en la práctica, y en este capítulo examinaremos algunos de los más importantes. Muchos métodos de modulación dependen del concepto de *modulación de amplitud*, también conocido como amplitud modulada o AM, en el cual la señal que deseamos transmitir se usa para modular la amplitud de otra señal. Una forma muy común de modulación de amplitud es la *modulación de amplitud senoidal*, la cual examinamos con cierto detalle en las secciones 8.1 a 8.4, junto con los conceptos relacionados de multiplexaje por división de frecuencia. Otra importante clase de sistemas AM involucra la modulación de la amplitud de una señal de pulso, y en las secciones 8.5 y 8.6 examinamos esta forma de modulación así como el concepto de multiplexaje por división de tiempo. En la sección 8.7 analizamos una forma diferente de modulación, llamada *modulación de frecuencia senoidal* en la cual la señal que contiene información se usa para variar la frecuencia de una señal senoidal.

El análisis que realizaremos en adelante y hasta la sección 8.7 centra la atención en las señales continuas, ya que la mayoría de los medios de transmisión, tales como nuestra atmósfera, se consideran como fenómenos continuos. No obstante, no sólo es posible desarrollar técnicas análogas para señales discretas, sino que resulta de enorme importancia práctica considerar conceptos de modulación que involucren esas señales, por lo que en la sección 8.8 examinaremos algunas de la ideas básicas que sustentan la comunicación de señales discretas.

8.1 MODULACIÓN DE AMPLITUD CON EXPONENCIAL COMPLEJA Y SENOIDAL

Muchos sistemas de comunicación dependen del concepto de modulación de amplitud senoidal, lo cual consiste en una señal exponencial compleja o senoidal $c(t)$ cuya amplitud se multiplica (modula) por la señal $x(t)$ que contiene información. A la señal $x(t)$ se le conoce comúnmente como la *señal moduladora* y a la señal $c(t)$ se le conoce como la *señal portadora*. La señal modulada $y(t)$ es entonces el producto de estas dos señales:

$$y(t) = x(t)c(t)$$

Como se explicó en la sección 8.0, un objetivo importante de la modulación consiste en producir una señal cuyo intervalo de frecuencia resulte accesible para su transmisión a través del canal de comunicación que se usará. En sistemas de transmisión telefónica, por ejemplo, la transmisión de larga distancia a menudo se realiza mediante enlaces de microondas o satélite. Las señales individuales de voz se encuentran en el intervalo de frecuencia de 200 Hz a 4 kHz, mientras que un enlace de microondas requiere de señales en el intervalo de 300 megahertz (MHz) a 300 gigahertz (GHz), y los enlaces de satélite de comunicaciones operan en el intervalo de frecuencias que va desde unos pocos cientos de MHz hasta más de 40 GHz. Por lo tanto, para transmitir la información contenida en una señal de voz a través de estos canales, dicha información debe desplazarse a los intervalos de frecuencia más altos que se mencionaron. Como veremos en esta sección, la modulación de amplitud senoidal logra este desplazamiento en frecuencia de una manera muy sencilla.

8.1.1 Modulación de amplitud con una portadora exponencial compleja

Hay dos formas comunes de modulación de amplitud senoidal; en una de ellas, la señal portadora es una exponencial compleja de la forma

$$c(t) = e^{j(\omega_c t + \theta_c)} \tag{8.1}$$

y en la otra, la señal portadora es senoidal cuya forma es

$$c(t) = \cos(\omega_c t + \theta_c). \tag{8.2}$$

En ambos casos, la frecuencia ω_c se conoce como la *frecuencia portadora*. Consideremos primero el caso de una portadora exponencial compleja y, por conveniencia, escojamos $\theta_c = 0$, de manera que la señal modulada sea

$$y(t) = x(t)e^{j\omega_c t}. \tag{8.3}$$

Partiendo de la propiedad de modulación (sección 4.5), y considerando que $X(j\omega)$, $Y(j\omega)$ y $C(j\omega)$ denotan las transformadas de Fourier de $x(t)$, $y(t)$ y $c(t)$, respectivamente,

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * C(j\omega). \tag{8.4}$$

Si $c(t)$ es una exponencial compleja como la que se da en la ecuación (8.1),

$$C(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_c), \tag{8.5}$$

y entonces,

$$Y(j\omega) = X(j\omega - j\omega_c). \tag{8.6}$$

Por lo tanto, el espectro de la salida modulada $y(t)$ es simplemente el de la entrada, desplazado en frecuencia por una cantidad igual a la frecuencia portadora ω_c. Por ejemplo, si tenemos $X(j\omega)$ de banda limitada con la frecuencia más alta ω_M (y ancho de banda $2\omega_M$), como se ilustra en la figura 8.1(a), el espectro de la salida $Y(j\omega)$ es el que se muestra en la figura 8.1(c).

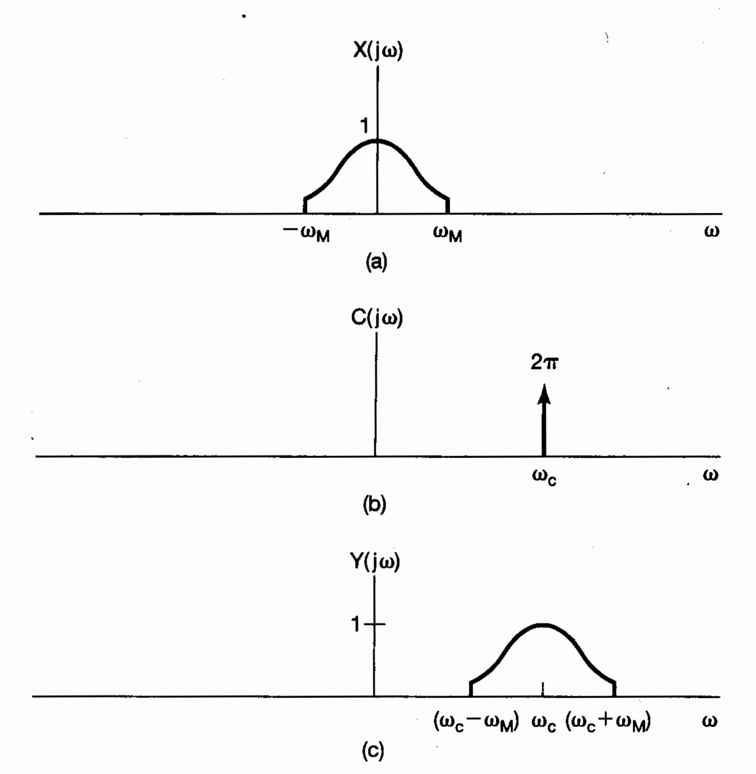


Figura 8.1 Efecto en el dominio de la frecuencia de la modulación de amplitud con una portadora exponencial compleja: (a) espectro de la señal moduladora $x(t)$; (b) espectro de la portadora $c(t) = e^{j\omega_c t}$; (c) espectro de la señal de amplitud modulada $y(t) = x(t)e^{j\omega_c t}$.

Gracias a la ecuación (8.3) resulta claro que $x(t)$ puede recuperarse a partir de la señal modulada $y(t)$, multiplicándola por la exponencial compleja $e^{-j\omega_c t}$; esto es,

$$x(t) = y(t)e^{-j\omega_c t}. \tag{8.7}$$

En el dominio de la frecuencia, esto tiene el efecto de desplazar el espectro de la señal modulada a su posición original en el eje de la frecuencia. Al proceso de recuperar la señal original a partir de la señal modulada se le conoce como *demodulación*, un tema que analizaremos de manera más amplia en la sección 8.2.

Puesto que $e^{j\omega_c t}$ es una señal compleja, la ecuación (8.3) puede rescribirse como

$$y(t) = x(t) \cos \omega_c t + jx(t) \operatorname{sen} \omega_c t. \tag{8.8}$$

Una representación de la ecuación (8.7) o de la (8.8) con $x(t)$ real utiliza dos multiplicadores separados y dos señales portadoras senoidales, las cuales tienen una diferencia de fase de $\pi/2$, como se muestra en la figura 8.2 para la $c(t)$ proporcionada por la ecuación (8.1). En la sección 8.4 damos un ejemplo de una de las aplicaciones en las cuales usar un sistema como el de la figura 8.2, que emplea dos portadoras senoidales con una diferencia de fase de $\pi/2$, ofrece ciertas ventajas particulares.

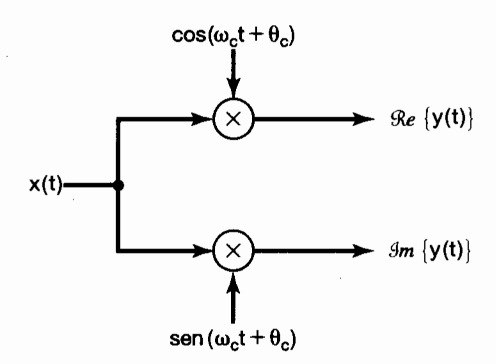


Figura 8.2 Ejecución de la modulación de amplitud con una portadora exponencial compleja: $c(t) = e^{j(\omega_c t + \theta_c)}$.

8.1.2 Modulación de amplitud con una portadora senoidal

En muchas situaciones, a menudo resulta más sencillo e igualmente efectivo usar una portadora senoidal de la forma de la ecuación (8.2) que utilizar una portadora exponencial compleja. De hecho, hacer uso de una portadora senoidal corresponde a conservar sólo la parte real o la parte imaginaria de la salida en la figura 8.2. En la figura 8.3 se muestra un sistema que utiliza una portadora senoidal.

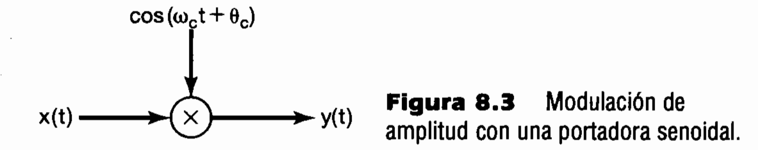


Figura 8.3 Modulación de amplitud con una portadora senoidal.

El efecto de la modulación de amplitud senoidal usando una portadora senoidal de la forma que ofrece la ecuación (8.2) se puede analizar en forma idéntica a la usada en la subsección anterior. Una vez más, por conveniencia escogemos $\theta_c = 0$. En este caso el

espectro de la señal portadora es

$$C(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)], \tag{8.9}$$

y por consiguiente, de la ecuación (8.4),

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}[X(j\omega - j\omega_c) + X(j\omega + j\omega_c)]. \tag{8.10}$$

Con una $X(j\omega)$ como la que se muestra en la figura 8.4(a), el espectro de $y(t)$ es el que se representa en la figura 8.4(c). Observe que ahora hay réplicas del espectro de la señal original, centradas alrededor de $+\omega_c$ y $-\omega_c$. Como una consecuencia de ello, $x(t)$ es recuperable a partir de $y(t)$ sólo si $\omega_M > \omega_c$, ya que de lo contrario las dos réplicas se traslaparían en frecuencia. Esto contrasta con el caso de una portadora exponencial compleja, para la cual una réplica del espectro de la señal original se centra sólo alrededor de ω_c. Específicamente, como vimos en la sección 8.1.1, en el caso de modulación de amplitud con una portadora exponencial compleja, $x(t)$ siempre se puede recuperar a partir de $y(t)$ para cualquier selección de ω_c desplazando el espectro de regreso a su ubicación original mediante su multiplicación por $e^{-j\omega_c t}$, como en la ecuación (8.7). Por otro lado, con una portadora senoidal, como vemos en la figura 8.4, si $\omega_c < \omega_M$ habrá un traslape entre las dos réplicas de $X(j\omega)$. Por ejemplo, la figura 8.5 representa $Y(j\omega)$ para $\omega_c = \omega_M/2$. Se aprecia claramente que el espectro de $x(t)$ ya no se replica en $Y(j\omega)$, y por consiguiente ya no es posible recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$.

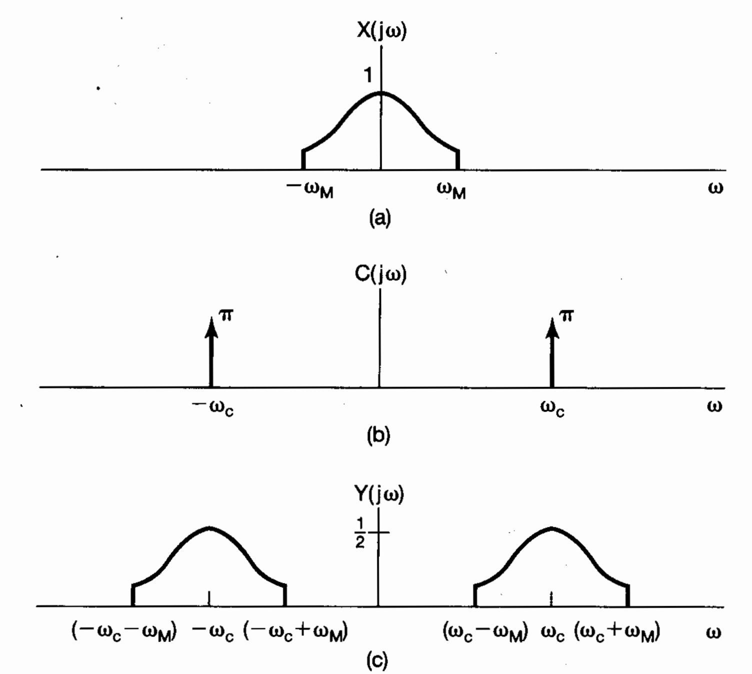


Figura 8.4 Efecto en el dominio de la frecuencia de la modulación de amplitud con una portadora senoidal: (a) espectro de la señal moduladora $x(t)$; (b) espectro de la portadora $c(t) = \cos \omega_c t$; (c) espectro de la señal de amplitud modulada.

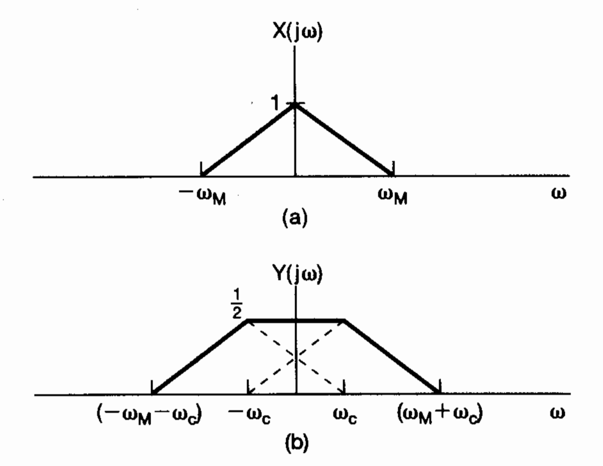


Figura 8.5 Modulación de amplitud senoidal con portadora cos $\omega_c t$ para la cual $\omega_c = \omega_M/2$: (a) espectro de la señal moduladora; (b) espectro de la señal modulada.

8.2 DEMODULACIÓN PARA AM SENOIDAL

En el receptor de un sistema de comunicación, la señal $x(t)$ que contiene información se puede recuperar mediante la demodulación. En esta sección examinamos el proceso de demodulación para la modulación de amplitud senoidal, presentada en la sección anterior. Existen dos métodos usados comúnmente para la demodulación, cada uno con sus propias ventajas y desventajas. En la sección 8.2.1 analizaremos el primero de éstos, un proceso conocido como *demodulación síncrona*, en el cual el transmisor y el receptor se sincronizan en fase. En la sección 8.2.2 describiremos un método alternativo conocido como *demodulación asíncrona*.

8.2.1 Demodulación síncrona

Suponiendo que $\omega_c > \omega_M$, la demodulación de una señal que fue modulada con una portadora senoidal es relativamente directa. En concreto, considere la señal

$$y(t) = x(t) \cos \omega_c t. \tag{8.11}$$

Como se sugirió en el ejemplo 4.21, la señal original se puede recuperar modulando $y(t)$ con la misma portadora senoidal y aplicando al resultado un filtrado paso bajas. Para ver esto, considere

$$w(t) = y(t) \cos \omega_c t. \tag{8.12}$$

La figura 8.6 muestra el espectro de $y(t)$ y $w(t)$, y observamos que $x(t)$ se puede recuperar a partir de $w(t)$ aplicando un filtro paso bajas ideal con una ganancia de 2 y una frecuencia de corte mayor que ω_M y menor que $2\omega_c - \omega_M$. La respuesta en frecuencia del filtro paso bajas está indicada por la línea punteada de la figura 8.6(c).

Las razones para el uso de la ecuación (8.12) y un filtro paso bajas para demodular $y(t)$ también pueden verse algebraicamente. De las ecuaciones (8.11) y (8.12) se desprende que

$$w(t) = x(t) \cos^2 \omega_c t,$$

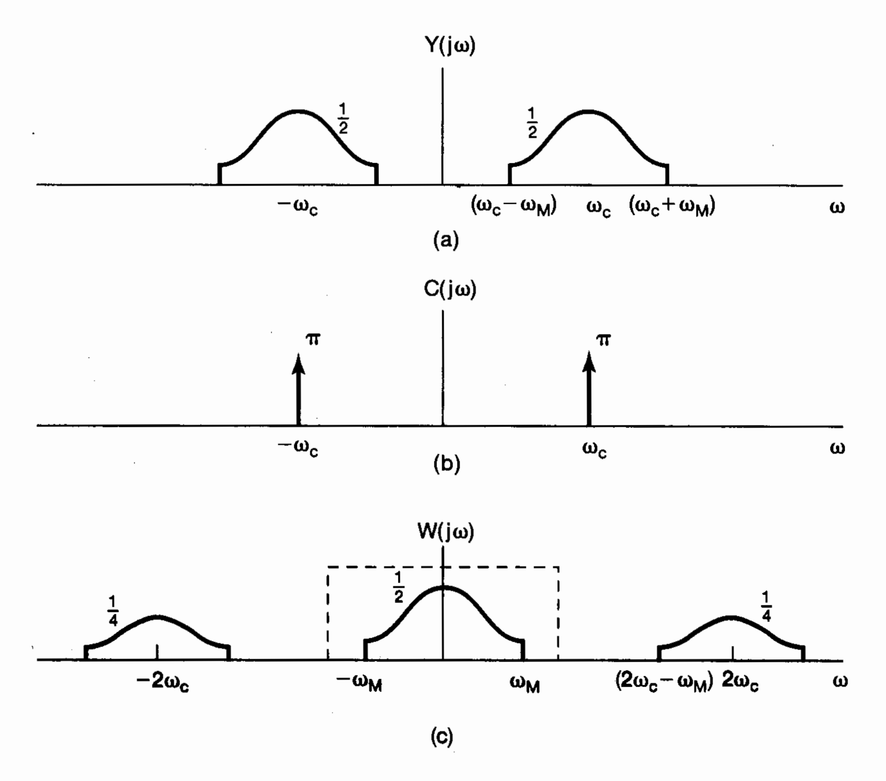


Figura 8.6 Demodulación de una señal de amplitud modulada con una portadora senoidal: (a) espectro de la señal modulada; (b) espectro de la señal portadora; (c) espectro de la señal modulada multiplicada por la portadora. La línea punteada indica la respuesta en frecuencia de un filtro paso bajas usado para extraer la señal demodulada.

o, usando la identidad trigonométrica

$$\cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega_c t,$$

podemos rescribir $w(t)$ como

$$w(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos 2\omega_c t. \tag{8.13}$$

Por lo tanto, $w(t)$ consiste de la suma de dos términos, uno que es un medio de la señal original y el segundo que es un medio de la señal original modulada con una portadora senoidal cuya frecuencia es el doble de la frecuencia de la portadora original ω_c. Ambos términos aparecen en el espectro mostrado en la figura 8.6(c). La aplicación del filtro paso bajas a $w(t)$ corresponde a conservar el primer término del miembro derecho de la ecuación (8.13) eliminando el segundo término.

El sistema completo para modulación y demodulación de amplitud usando una portadora exponencial compleja se ilustra en la figura 8.7, y el sistema completo para modulación y demodulación usando una portadora senoidal se ilustra en la figura 8.8. En ambas figuras hemos indicado el caso más general en el cual, tanto para la portadora exponencial compleja como para la senoidal, se incluye la fase de la portadora θ_c. La modificación del análisis anterior para incluir θ_c es directo y se considera en el problema 8.21.

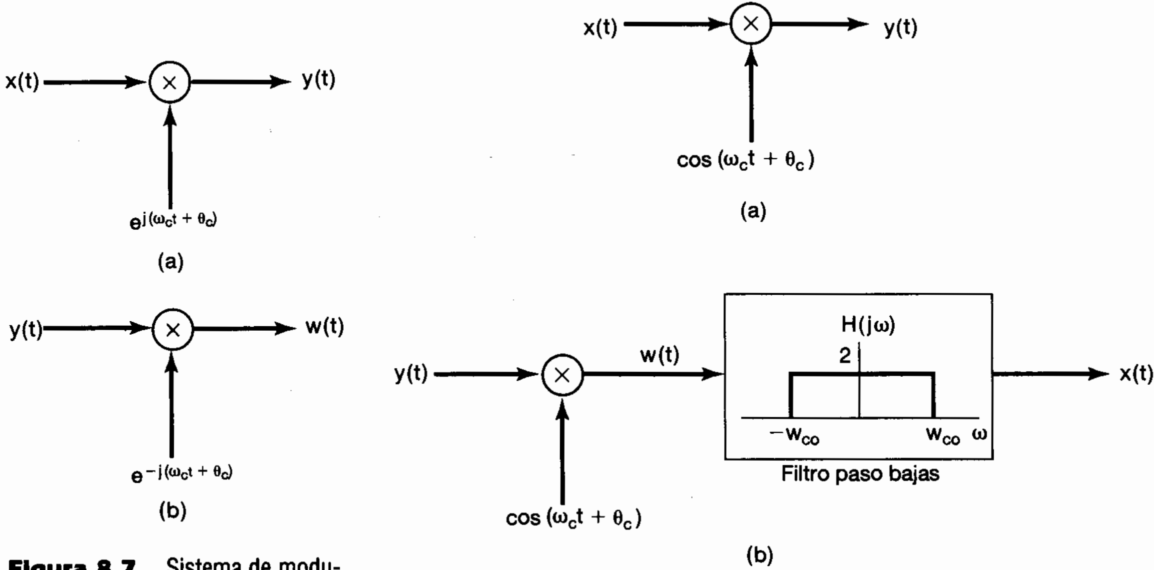


Figura 8.7 Sistema de modulación de amplitud y demodulación que usa una portadora exponencial compleja: (a) modulación; (b) demodulación.

Figura 8.8 Modulación y demodulación de amplitud con una portadora senoidal: (a) sistema de modulación; (b) sistema de demodulación. La frecuencia de corte ω_{co} del filtro paso bajas es mayor que ω_M y menor que $2\omega_c - \omega_M$.

En los sistemas de las figuras 8.7 y 8.8 se da por hecho que la señal demoduladora está sincronizada en fase con la señal moduladora, y en consecuencia el proceso se conoce como *demodulación síncrona*. Sin embargo, consideremos que el modulador y el demodulador no están sincronizados en fase. Para el caso de la portadora exponencial compleja, con θ_c denotando la fase de la portadora moduladora y ϕ_c la fase de la portadora demoduladora,

$$y(t) = e^{j(\omega_c t + \theta_c)}x(t), \tag{8.14}$$

$$w(t) = e^{-j(\omega_c t + \phi_c)}y(t), \tag{8.15}$$

y, en consecuencia,

$$w(t) = e^{j(\theta_c - \phi_c)}x(t). \tag{8.16}$$

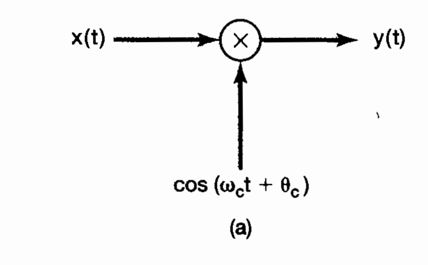
De este modo, si $\theta_c \neq \phi_c$, $w(t)$ tendrá un factor de amplitud complejo. Para el caso particular en el cual $x(t)$ es positiva, $x(t) = |w(t)|$, por lo que $x(t)$ se puede recuperar tomando la magnitud de la señal demodulada.

Para la portadora senoidal, nuevamente sean θ_c y ϕ_c las fases de portadora moduladora y demoduladora respectivamente, como se indica en la figura 8.9. La entrada al filtro paso bajas es ahora

$$w(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c)\cos(\omega_c t + \phi_c), \tag{8.17}$$

o bien, usando la identidad trigonométrica

$$\cos(\omega_c t + \theta_c)\cos(\omega_c t + \phi_c) = \frac{1}{2}\cos(\theta_c - \phi_c) + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t + \theta_c + \phi_c), \tag{8.18}$$



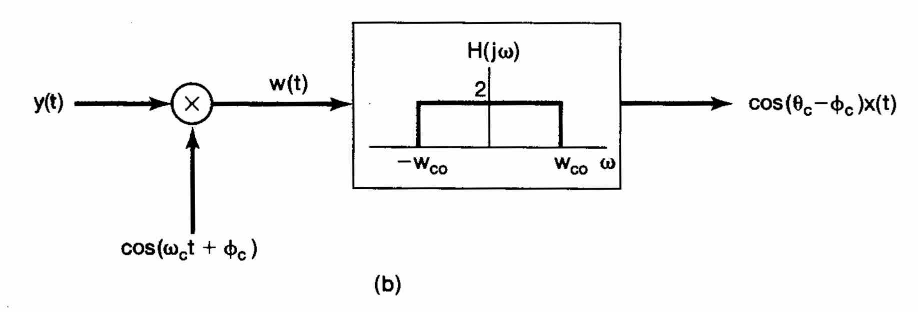


Figura 8.9 Modulación de amplitud senoidal y sistema de demodulación para el cual las señales portadoras y el modulador y demodulador no están sincronizados: (a) modulador; (b) demodulador.

tenemos

$$w(t) = \frac{1}{2}\cos(\theta_c - \phi_c)x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos(2\omega_c t + \theta_c + \phi_c), \tag{8.19}$$

y la salida del filtro paso bajas es entonces $x(t)$ multiplicada por el factor de amplitud $\cos(\theta_c - \phi_c)$. Si los osciladores en el modulador y en el demodulador están en fase, $\theta_c = \phi_c$, y la salida del filtro paso bajas es $x(t)$. Por otro lado, si estos osciladores tienen una diferencia de fase de $\pi/2$, la salida será cero. En general, para una señal de salida máxima los osciladores deben estar en fase. De mayor importancia todavía es que la relación de fase entre estos dos osciladores debe mantenerse en el tiempo, de manera que el factor de amplitud $\cos(\theta_c - \phi_c)$ no varíe. Esto requiere de una cuidadosa sincronización entre el modulador y el demodulador, lo cual es a menudo difícil, en particular cuando están separados geográficamente, como sucede muy a menudo en los sistemas de comunicación. La necesidad de sincronizar no sólo la fase entre el modulador y el demodulador sino las frecuencias entre las señales portadoras, así como sus efectos correspondientes, se exploran en detalle en el problema 8.23.

8.2.2 Demodulación asíncrona

En muchos sistemas que emplean modulación de amplitud senoidal, es común utilizar un procedimiento alternativo de demodulación conocido como *demodulación asíncrona*, con lo cual se evita la necesidad de la sincronización entre el modulador y el demodulador. En particular, suponga que $x(t)$ siempre es positiva y que la frecuencia de la portadora ω_c es mucho más alta que ω_M, la cual es la frecuencia más alta en la señal moduladora. La señal modulada $y(t)$ tendrá entonces la forma general mostrada en la figura 8.10.

En particular, la *envolvente* de $y(t)$, esto es, una curva suave que conecta los picos de $y(t)$, parecería ser una aproximación razonable a $x(t)$. De este modo, $x(t)$ podría recuperarse en forma aproximada mediante el uso de un sistema que rastree estos picos para extraer la envolvente. Este tipo de sistema es conocido como *detector de envolvente*. Un ejemplo de un circuito simple que actúa como un detector de envolvente se muestra en la figura 8.11(a). Este circuito generalmente va seguido de un filtro paso bajas para reducir las variaciones que aparecen en la frecuencia portadora, las cuales son evidentes en la figura 8.11(b) y que en general estarán presentes en la salida de un detector de envolvente del tipo indicado en la figura 8.11(a).

Las dos consideraciones básicas requeridas para la demodulación asíncrona son que $x(t)$ sea positiva y que varíe lentamente comparada con ω_c, de manera que la envolvente pueda rastrearse con facilidad. Esta segunda condición se satisface, por ejemplo, en transmisiones de audio sobre un canal de radio frecuencia (RF) donde la frecuencia más alta presente en $x(t)$ sea típicamente de 15 a 20 kHz y $\omega_c/2\pi$ esté en el intervalo de 500 kHz a 2 MHz. La primera condición, que $x(t)$ sea positiva, puede satisfacerse simplemente sumando a $x(t)$ un valor constante apropiado, o mediante un simple cambio en el modulador, como se muestra en la figura 8.12. Por lo tanto, la salida del detector de envolvente se aproxima a $x(t) + A$, a partir de lo cual $x(t)$ se obtiene con facilidad.

Para usar el detector de envolvente para demodulación, se requiere que A sea lo suficientemente grande como para que $x(t) + A$ sea positiva. Sea K la amplitud máxima de $x(t)$; esto es, $|x(t)| \leq K$. Para que $x(t) + A$ sea positiva, necesitamos que $A > K$. La razón K/A se conoce comúnmente como el *índice de modulación m*. Expresado en porcentaje, se le conoce como *porcentaje de modulación*. En la figura 8.13 se muestra una ilustración de la salida del modulador de la figura 8.12 para $x(t)$ senoidal y para $m = 0.5$ (50% de modulación) y $m = 1.0$ (100% de modulación).

En la figura 8.14 mostramos una comparación de los espectros asociado con la señal modulada demodulación síncrona y cuando se usa demodulación asíncrona. Observamos en particular que la salida del modulador para el sistema asíncrono de la figura 8.12 tiene la componente adicional $A \cos \omega_c t$ la cual no está presente y no es necesaria en el sistema síncrono. Esto se representa en el espectro de la figura 8.14(c) mediante la presencia de impulsos en $+\omega_c$ y $-\omega_c$. Para una amplitud máxima fija K de la señal moduladora, a medida que A disminuye, la cantidad relativa de la portadora presente en la salida modulada disminuye. Puesto que la componente portadora en la salida no contiene información, su

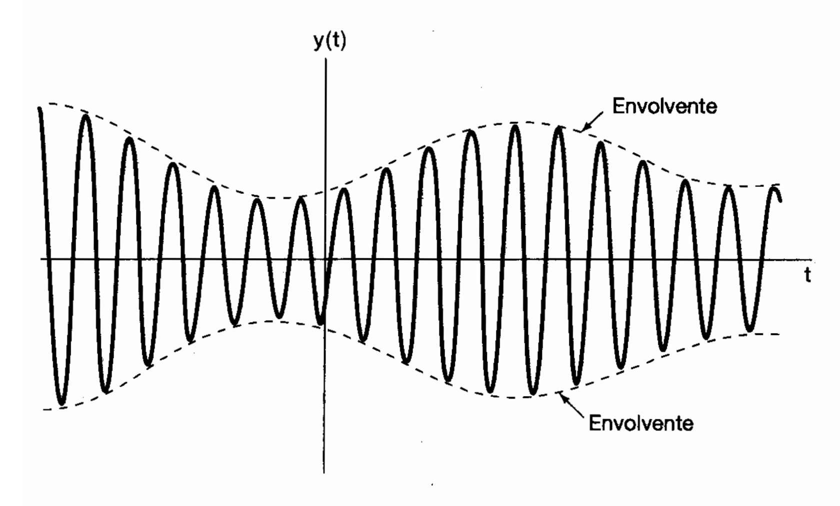
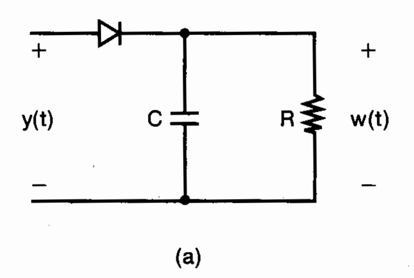


Figura 8.10 Señal de amplitud modulada en la cual la señal moduladora es positiva. La curva punteada representa la envolvente de la señal modulada.



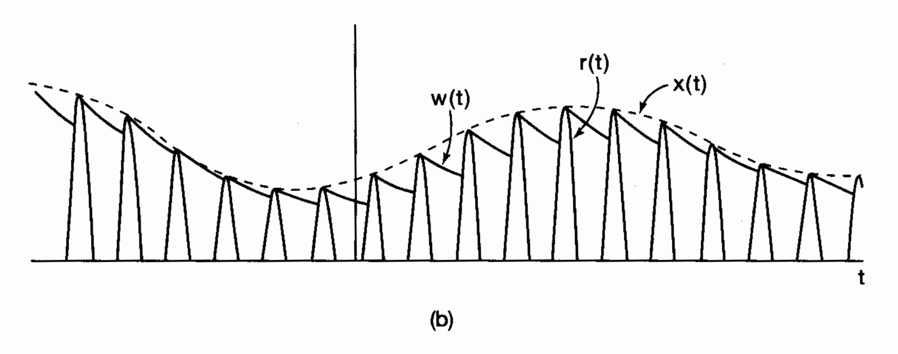


Figura 8.11 Demodulación mediante detección de envolvente: (a) circuito para detección de envolvente que usa una rectificación de media onda; (b) formas de onda asociadas con el detector de envolvente en (a): $r(t)$ es la señal rectificada de media onda, $x(t)$ es la envolvente real y $w(t)$ es la envolvente obtenida a partir del circuito en (a). La relación entre $x(t)$ y $w(t)$ ha sido exagerada en (b) para facilitar el ejemplo. En un sistema práctico de demodulación asíncrona, $w(t)$ sería típicamente mucho más aproximada a la representada aquí.

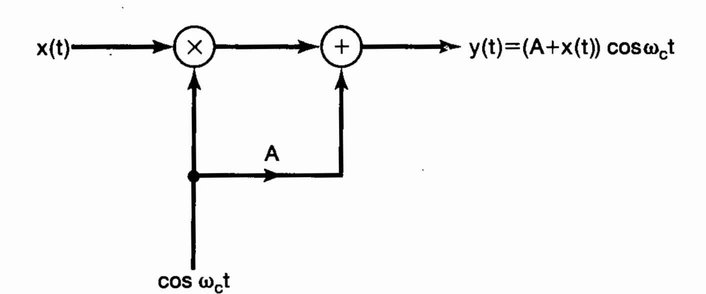
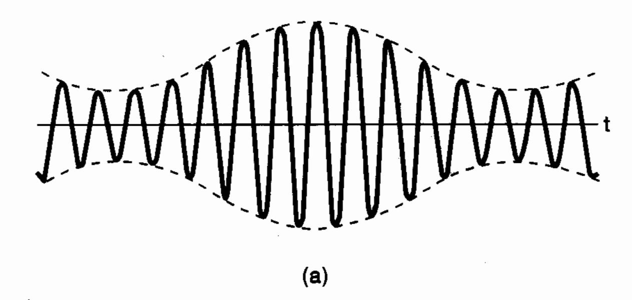


Figura 8.12 Modulador para un sistema de modulación/demodulación asíncrono.

presencia representa una ineficacia (por ejemplo, en la cantidad de potencia requerida para transmitir la señal modulada) y, por lo tanto, en este sentido es conveniente hacer que la razón K/A (es decir, el índice de modulación m) resulte tan grande como sea posible. Por otro lado, la capacidad de un simple detector de envolvente como el de la figura 8.11 para seguir la envolvente y de ahí extraer $x(t)$, mejora conforme el índice de modu-



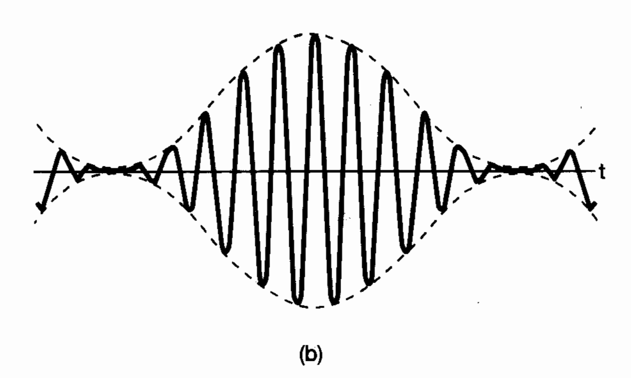


Figura 8.13 Salida del sistema de modulación de amplitud de la figura 8.12: (a) índice de modulación $m = 0.5$; (b) índice de modulación $m = 1.0$.

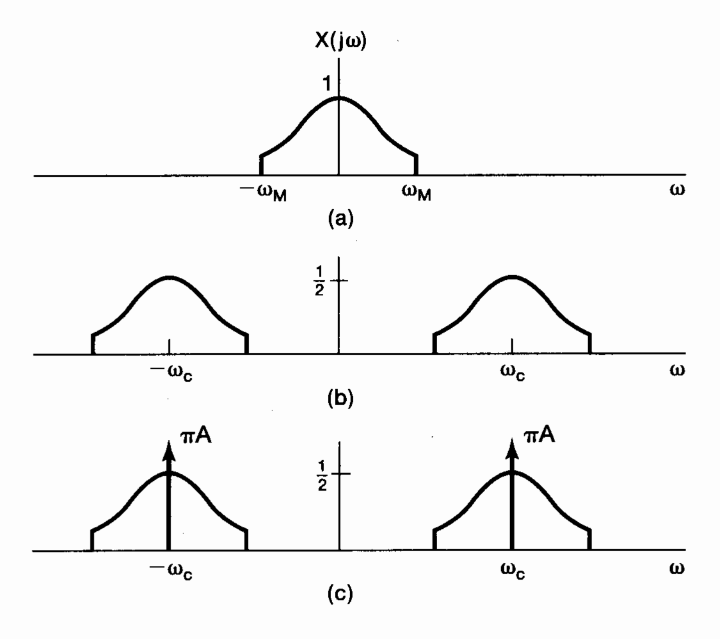


Figura 8.14 Comparación de los espectros de sistemas síncronos y asíncronos de modulación de amplitud senoidal: (a) espectro de la señal moduladora; (b) espectro de $x(t) \cos \omega_c t$ que representa la señal modulada en un sistema síncrono; (c) espectro de $[x(t) + A] \cos \omega_c t$ que representa la señal modulada en un sistema asíncrono.

lación disminuye. Por lo tanto, hay un compromiso entre la eficiencia del sistema, en términos de la potencia en la salida del modulador, y la calidad de la señal demodulada.

En comparación con el sistema síncrono de la figura 8.8, existen varias ventajas y desventajas del sistema de modulación-demodulación asíncrono de las figuras 8.11 y 8.12. El sistema síncrono requiere un demodulador más complejo, ya que su oscilador debe estar sincronizado con el oscilador del modulador, tanto en fase como en frecuencia. Por otro lado, el modulador asíncrono por lo general requiere más potencia de transmisión que el modulador síncrono, ya que, para que el detector de envolvente opere correctamente, la envolvente debe ser positiva, o dicho de otra manera, en la señal transmitida debe estar presente una componente de la portadora. Esto es a menudo más conveniente en casos como el que se relaciona con las transmisiones públicas de radio, para las cuales se desea producir en masa una gran cantidad de receptores (demoduladores) a un costo moderado. El costo adicional en la potencia transmitida se compensa por el ahorro en el costo del receptor. Por otro lado, en situaciones en las cuales los requerimientos de potencia del transmisor son de importancia primordial, como en la comunicación vía satélite, el costo de la construcción de un receptor síncrono más complejo está garantizado.

8.3 MULTIPLEXAJE POR DIVISIÓN DE FRECUENCIA

Muchos sistemas usados para la transmisión de señales proporcionan más ancho de banda del que es requerido para una sola señal. Por ejemplo, un enlace típico de microondas tiene un ancho de banda total de varios gigahertz, lo cual es considerablemente más grande que el ancho de banda requerido para un canal de voz. Si a las señales de voz individuales, las cuales están traslapadas en frecuencia, se les desplaza su contenido de frecuencia por medio de la modulación de amplitud senoidal de manera que los espectros de las señales moduladas no se traslapen, entonces pueden transmitirse de *manera simultánea* a través de un solo canal de banda ancha. El concepto resultante se conoce como *multiplexión por división de frecuencia* (FDM, por sus siglas en inglés). En la figura 8.15 se ilustra la multiplexión por división de frecuencia usando una portadora senoidal. Se supone que las señales individuales que se van a transmitir son de banda li-

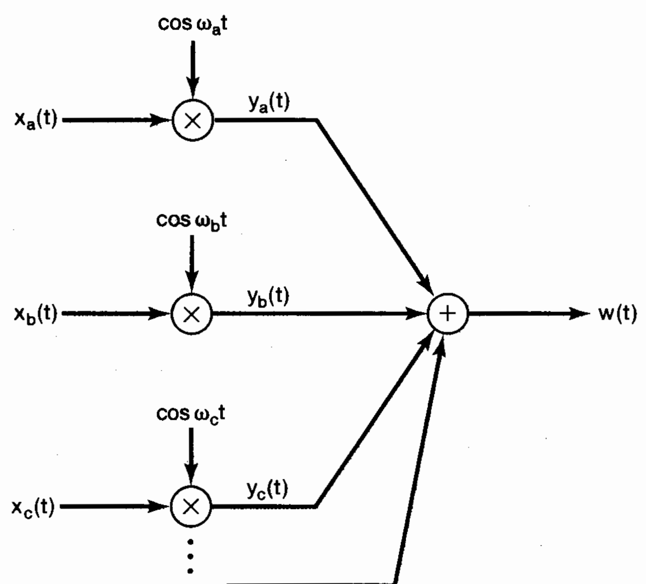


Figura 8.15 Multiplexión por división de frecuencia usando modulación de amplitud senoidal.

mitada y están moduladas a diferentes frecuencias portadoras. Estas señales moduladas se suman y son transmitidas de manera simultánea sobre el mismo canal de comunicaciones. Los espectros de los subcanales individuales y la señal multiplexada compuesta se ilustran en la figura 8.16. Por medio de este proceso de multiplexaje, a las señales de entrada individuales se les coloca en distintos segmentos de la banda de frecuencia. Para recuperar los canales individuales en el proceso de desmultiplexaje se siguen dos pasos básicos: el filtrado paso banda para extraer la señal modulada correspondiente a un canal específico, seguido por la demodulación para recuperar la señal original. Esto se representa en la figura 8.17 para recuperar el canal *a* donde, para fines ilustrativos, se considera una demodulación síncrona.

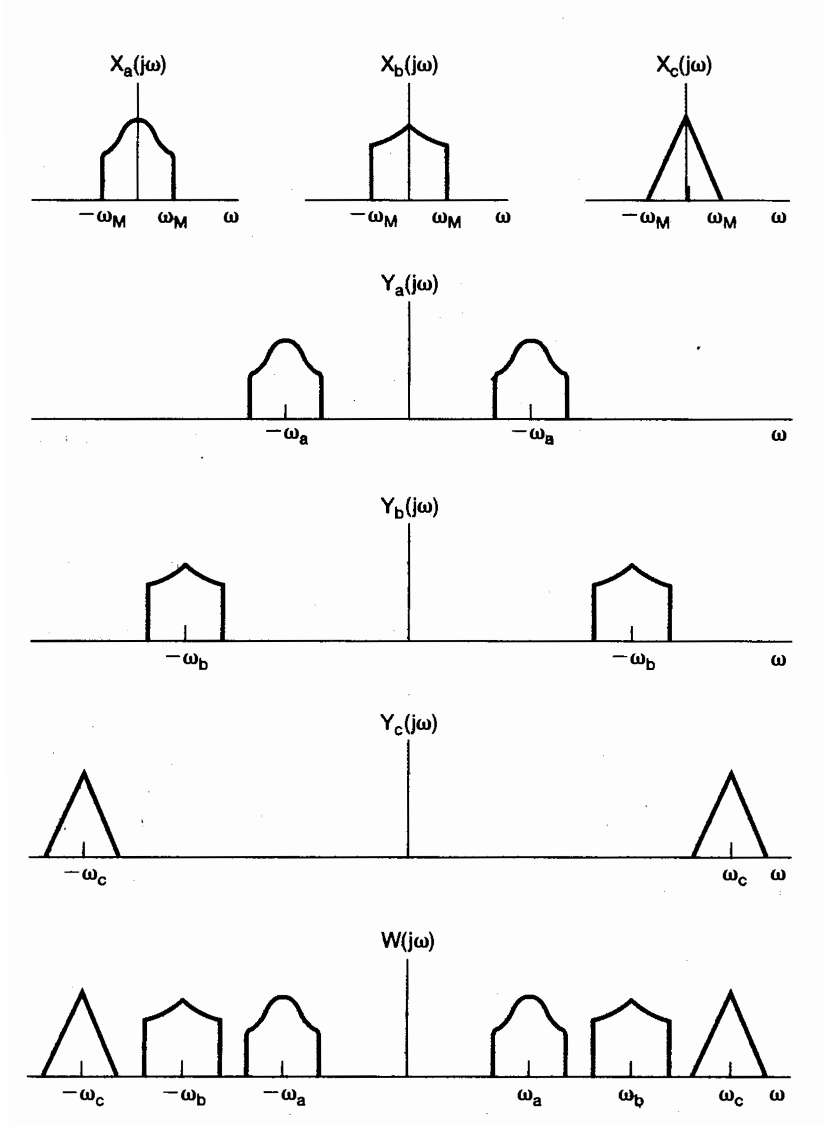


Figura 8.16 Espectros asociados con el sistema de multiplexión por división de frecuencia de la figura 8.15.

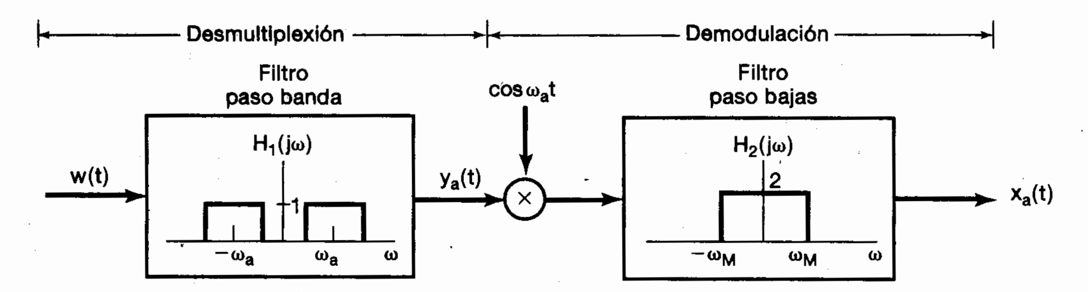


Figura 8.17 Desmultiplexión y demodulación de una señal multiplexada por división de frecuencia.

Las comunicaciones telefónicas son una importante aplicación del multiplexaje por división de frecuencia. Otra aplicación se encuentra en la transmisión de señales a través de la atmósfera en la banda de radiofrecuencia (RF). En Estados Unidos, el uso de las radiofrecuencias para la transmisión de señales en el intervalo de 10 kHz a 275 GHz, está controlado por la Comisión Federal de Comunicaciones, y las diferentes porciones del intervalo de frecuencia están asignadas para diferentes propósitos. La ubicación actual de frecuencias se muestra en la figura 8.18. Como se indica, el intervalo de frecuencias en las cercanías de 1 MHz está asignado a la banda de transmisión de AM, donde AM se refiere en concreto al uso de modulación de amplitud senoidal. Cada estación de radio de AM tiene asignada una frecuencia específica dentro de la banda AM, y de este modo muchas estaciones pueden transmitir de manera simultánea mediante el uso de multiplexión por división de frecuencia. En principio, en el receptor, se puede seleccionar una estación de radio particular mediante la desmultiplexión y demodulación como se ilustra en la figura 8.17. El sintonizador en el receptor controlaría entonces tanto la frecuencia central de filtro paso banda como la frecuencia del oscilador de demodulación. De hecho, para la transmisión pública, se usa la modulación y demodulación asíncrona para simplificar el receptor y reducir su costo. Además, la desmultiplexión en la figura 8.17 requiere de un filtro paso banda con frecuencias de corte abruptas y frecuencia central variable. Los filtros selectores de frecuencia variable son difíciles de construir, y en consecuencia, se usa en su lugar un filtro fijo así como una etapa intermedia de modulación y filtrado [conocida en los receptores de radio como la etapa de *frecuencia intermedia* (IF, por sus siglas en inglés)]. El uso de la modulación para deslizar el espectro de la señal frente a un filtro paso banda fijo reemplaza el uso de un filtro paso banda variable en una forma similar al procedimiento analizado en la sección 4.5.1. Este procedimiento básico se incorpora en los típicos receptores de radio de AM domésticos. Algunos de los problemas involucrados se consideran con mayor detalle en el problema 8.36.

Como se ilustra en la figura 8.16, en el sistema de multiplexión por división de frecuencia de la figura 8.15 el espectro de cada señal individual se duplica en ambas frecuencias, positiva y negativa, y entonces la señal modulada ocupa el doble del ancho de banda del original. Esto representa un uso ineficiente del ancho de banda. En la próxima sección examinaremos una forma alternativa de la modulación de amplitud senoidal, la cual conduce a un uso más eficiente del ancho de banda a expensas del costo de un sistema de modulación más complicado.

Intervalo de frecuencias	Designación	Usos comunes	Método de propagación	Características del canal
30–300 Hz	ELF (frecuencia extremadamente baja)	Microondas, comunicación submarina	Ondas megamétricas	Penetración de tierra y agua de mar conductoras
0.3–3 kHz	VF (frecuencia de voz)	Terminales de datos, telefonía	Alambre de cobre	
3–30 kHz	VLF (frecuencia muy baja)	Navegación, telefonía, telegrafía, estándares de frecuencia y tiempo	Ducto superficial (onda terrestre)	Baja atenuación, poco desvanecimiento de la propagación, fase y frecuencia extremadamente estables, grandes antenas
30–300 kHz	LF (frecuencia baja)	Comunicación industrial (a través de líneas de potencia), navegación aeronáutica y marítima de largo alcance, radiofaros	Principalmente ducto superficial	Ligero desvanecimiento de la propagación, alto ruido atmosférico
0.3–3 MHz	MF (frecuencia media)	Móvil, transmisión de AM, radioaficionados y seguridad pública	Reflexión en ductos e ionosférica (onda celeste o espacial)	Incremento del desvanecimiento de la propagación, pero confiable
3–30 MHz	HF (frecuencia alta)	Comunicación militar, móviles de aeronáutica, fija internacional, bandas de radioaficionados y de uso público general, industrial	Onda celeste de reflexión ionosférica, altitudes de 50 a 400 km	Desvanecimiento intermitente y selectivo de la frecuencia, trayectoria de propagación múltiple
30–300 MHz	VHF (frecuencia muy alta)	Transmisión de FM y TV, transporte terrestre (taxis, autobuses, ferrocarril)	Onda celeste (dispersión ionosférica y troposférica)	Desvanecimiento de la propagación, dispersión y trayectoria de propagación múltiple
0.3–3 GHz	UHF (ultra alta frecuencia)	TV UHF, telemetría espacial, radar, militar	Dispersión troposférica transhorizonte y enlaces de trayectoria directa	
3–30 GHz	SHF (super alta frecuencia)	Comunicación por satélite y en el espacio, empresas de telecomunicaciones (CC), microondas	Penetración de ionosfera trayectoria óptica directa	Penetración ionosférica, ruido extraterrestre, alta directividad
30–300 GHz	EHF (extremadamente alta frecuencia)	Investigación, gobierno, radioastronomía	Trayectoria óptica directa	Vapor de agua y absorción del oxígeno
10^3–10^7 GHz	Infrarrojo, luz visible, ultravioleta	Comunicaciones ópticas	Trayectoria óptica directa	

Figura 8.18 Asignación de frecuencias en el espectro de RF.

8.4 MODULACIÓN DE AMPLITUD SENOIDAL DE BANDA LATERAL ÚNICA

Para los sistemas de modulación de amplitud senoidal analizados en la sección 8.1, el ancho de banda total de la señal original $x(t)$ es $2\omega_M$, incluyendo las frecuencias positiva y negativa, donde ω_M es la frecuencia más alta presente en $x(t)$. Con el uso de una portadora exponencial compleja, el espectro se traslada a ω_c y el ancho total de la banda de frecuencia dentro de la cual está la energía de la señal sigue siendo $2\omega_M$, aunque la señal modulada es ahora compleja. Por otro lado, con una portadora senoidal el espectro de la señal se desplaza a $+\omega_c$ y $-\omega_c$, por lo que se necesita entonces el doble del ancho de banda. Esto sugiere que hay una redundancia básica en la señal modulada que emplea una portadora senoidal. Usando una técnica conocida como *modulación de banda lateral única*, esta redundancia se puede eliminar.

El espectro de $x(t)$ se ilustra en la figura 8.19(a), donde hemos sombreado de forma diferente los componentes de frecuencia positiva y negativa para distinguirlos. El espec-

tro en la figura 8.19(b) resulta de la modulación con una portadora senoidal, siendo posible identificar una banda lateral superior y una inferior para cada una de las porciones del espectro centradas en $+\omega_c$ y en $-\omega_c$. Comparando las figuras 8.19(a) y (b) resulta evidente que $X(j\omega)$ se puede recuperar si se conservan sólo las bandas laterales superiores en las frecuencias positiva y negativa, o, de manera alternativa, si se conservan sólo las bandas laterales inferiores en las frecuencias positiva y negativa. En la figura 8.19(c) se muestra el espectro resultante si sólo se mantienen las bandas superiores, y en la figura 8.19(d) se muestra el espectro resultante si solamente se conservan las bandas laterales inferiores. La conversión de $x(t)$ a las formas señaladas en las figuras 8.19(c) o (d) se conoce como *modulación de banda lateral única* (SSB, por sus siglas en inglés), en contraste con la *modulación de doble banda lateral* (DSB, por sus siglas en inglés) de la figura 8.19(b), en la cual se conservan ambas bandas laterales.

Hay varios métodos por medio de los cuales se puede obtener la señal de banda lateral única. Uno consiste en aplicar de un filtro paso banda o paso altas con frecuencias de corte abruptas a la señal de doble banda lateral de la figura 8.19(b) para eliminar las bandas no deseadas, tal como se ilustra en la figura 8.20. El segundo consiste en usar un

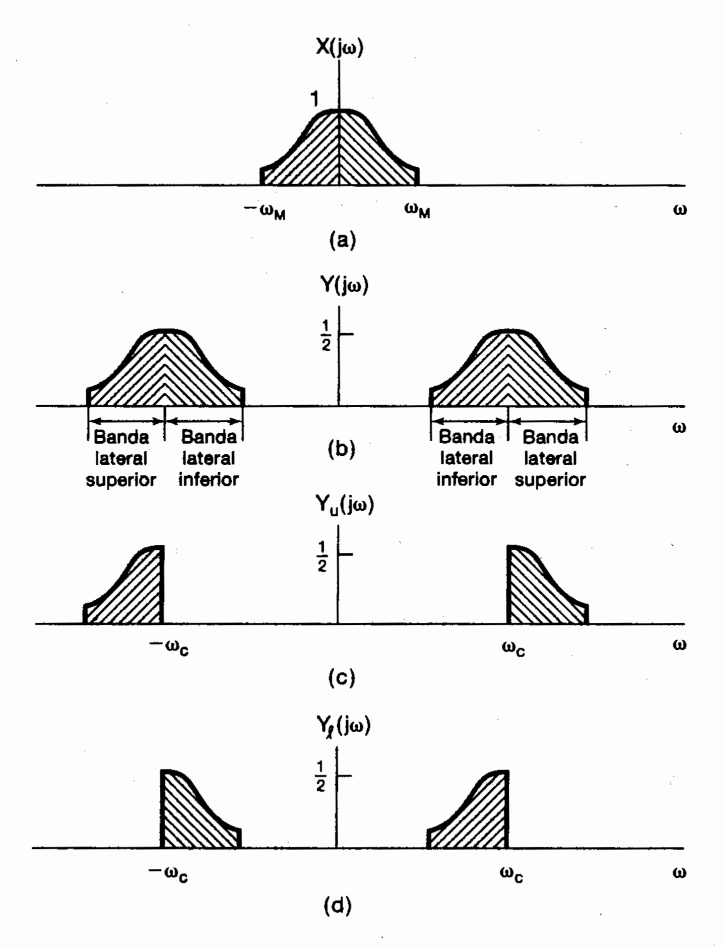


Figura 8.19 Modulación de banda lateral única y doble banda lateral: (a) espectro de la señal moduladora; (b) espectro después de la modulación con una portadora senoidal; (c) espectro con las bandas laterales superiores únicamente; (d) espectro con las bandas laterales inferiores únicamente.

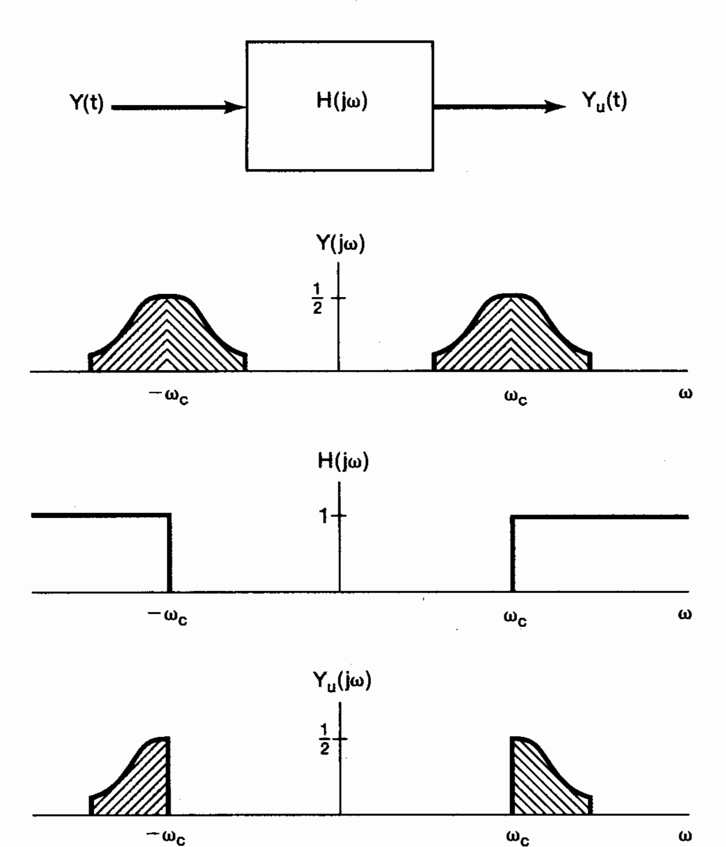


Figura 8.20 Sistema para mantener las bandas laterales superiores usando un filtrado paso altas ideal.

procedimiento que utiliza un desplazamiento de fase. La figura 8.21 muestra un sistema diseñado para conservar las bandas laterales inferiores. El sistema $H(j\omega)$ en la figura se conoce como una "red de desplazamiento de fase de 90°", cuya respuesta en frecuencia es de la forma

$$H(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases}. \tag{8.20}$$

Los espectros de $x(t), y_1(t) = x(t) \cos \omega_c t, y_2(t) = x_p(t)$ sen $\omega_c t$ y $y(t)$ se ilustran en la figura 8.22. Como se señala en el problema 8.28, para conservar las bandas laterales superiores en lugar de las bandas laterales inferiores, la característica de fase de $H(j\omega)$ se invierte de manera que

$$H(j\omega) = \begin{cases} j, & \omega > 0 \\ -j, & \omega < 0 \end{cases}. \tag{8.21}$$

Como se explora en el problema 8.29, los sistemas de demodulación síncrona de banda lateral única se pueden realizar de una manera idéntica a los sistemas de demodulación síncrona de doble banda lateral. El precio que se paga por incrementar la eficiencia de los sistemas de banda lateral única es la complejidad adicional del modulador.

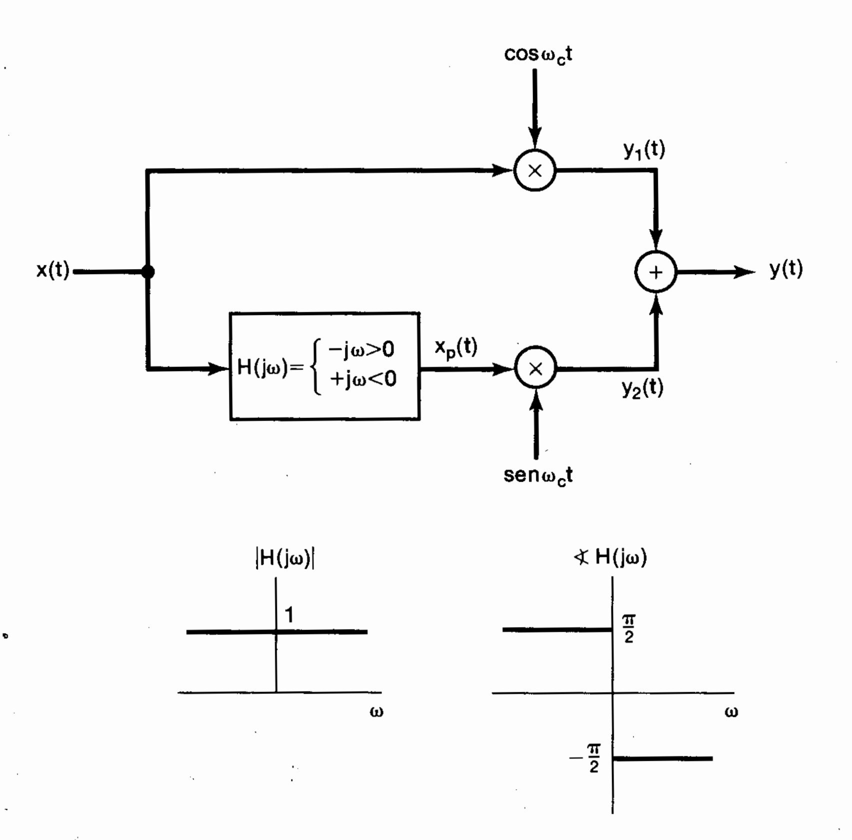


Figura 8.21 Sistema para la modulación de amplitud de banda lateral única, que usa una red de desplazamiento de fase de 90°, en la cual solamente se conservan las bandas laterales inferiores.

En resumen, en las secciones 8.1 a 8.4 hemos visto diversas variantes de la modulación de amplitud exponencial compleja y senoidal. Con la demodulación asíncrona, analizada en la sección 8.2.2, se debe agregar una constante a la señal moduladora de manera que sea positiva. Esto da como resultado la presencia de la señal portadora como un componente en la salida modulada, que requiere más potencia para la transmisión, pero deriva en un demodulador más sencillo que el requerido en un sistema síncrono. De manera alternativa, sólo las bandas laterales superiores o inferiores pueden ser conservadas en la salida modulada, lo cual hace un uso más eficiente del ancho de banda y la potencia del transmisor, pero requiere de un modulador más complejo. La modulación de amplitud senoidal con ambas bandas laterales y la presencia de una portadora se abrevia típicamente como AM-DSB/WC (modulación de amplitud, doble banda lateral/con portadora) y como AM-DSB/SC (modulación de amplitud, doble banda lateral/portadora suprimida) cuando la portadora se suprime o está ausente. Los sistemas correspondientes de banda lateral única son abreviados como AM-SSB/WC y AM-SSB/SC.

Las secciones 8.1 a 8.4 tienen como objetivo proporcionar una introducción a muchos de los conceptos básicos asociados con modulación de amplitud senoidal. Hay muchas variaciones en detalles y construcciones y el lector puede remitirse a la bibliografía para recibir una indicación sobre los muchos excelentes libros que exploran este tema con mayor detalle.

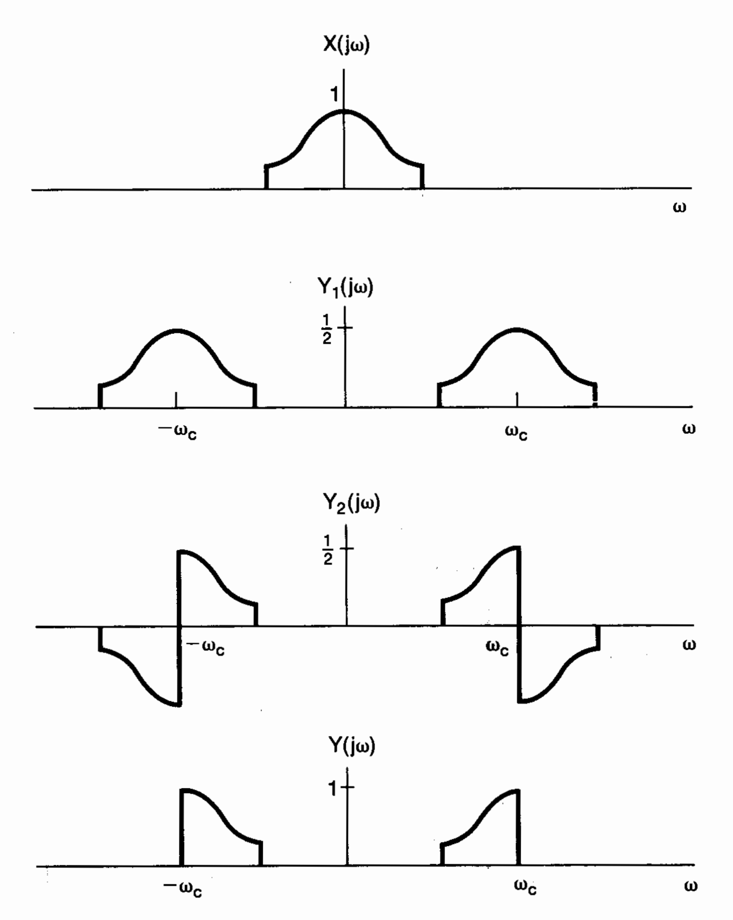


Figura 8.22 Espectros asociados con el sistema de banda lateral única de la figura 8.21.

8.5 MODULACIÓN DE AMPLITUD CON UNA PORTADORA DE TREN DE PULSOS

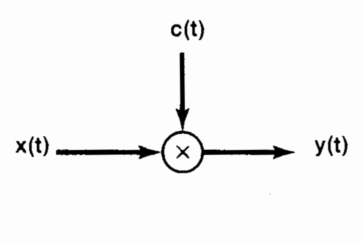
8.5.1 Modulación de una portadora de tren de pulsos

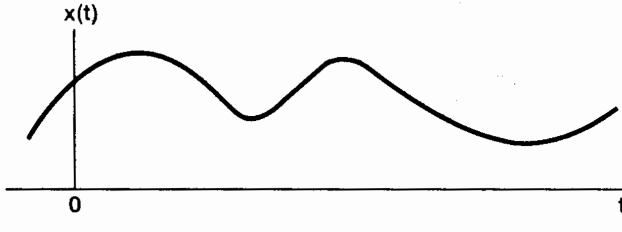
En las secciones anteriores examinamos la modulación de amplitud con una portadora senoidal. Otra clase importante de técnica de modulación de amplitud corresponde al uso de una señal portadora que es un tren de pulsos, como se ilustra en la figura 8.23; la modulación de amplitud de este tipo corresponde en efecto a la transmisión de secciones de $x(t)$ igualmente espaciadas en el tiempo. En general, no esperaríamos que una señal arbitraria pudiera recuperarse a partir de tal conjunto de secciones en tiempo. Sin embargo, nuestro análisis del concepto de muestreo en el capítulo 7 sugiere que esto debe ser posible si $x(t)$ es de banda limitada y la frecuencia de repetición de pulsos es lo bastante alta.

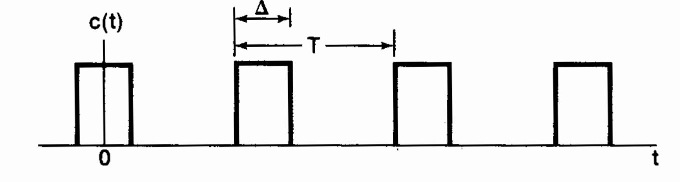
De la figura 8.23,

$$y(t) = x(t)c(t); \tag{8.22}$$

es decir, la señal modulada $y(t)$ es el producto de $x(t)$ con la portadora $c(t)$. De la propiedad de multiplicación, y con $Y(j\omega)$, $X(j\omega)$ y $C(j\omega)$ que representan las transformadas de







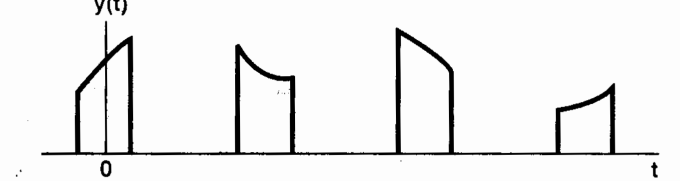


Figura 8.23 Modulación de amplitud de un tren de pulsos.

Fourier de cada una de estas señales, se desprende que

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * C(j\omega). \tag{8.23}$$

Puesto que $c(t)$ es periódica con periodo T, $C(j\omega)$ consiste de impulsos espaciados en frecuencia por $2\pi/T$; esto es,

$$C(j\omega) = 2\pi \sum_{K=-\infty}^{-\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_c), \tag{8.24}$$

donde $\omega_c = 2\pi/T$ y los coeficientes a_k son los coeficientes de la serie de Fourier de $c(t)$, los cuales, del ejemplo 3.5, son

$$a_k = \frac{\operatorname{sen}(k\omega_c\Delta/2)}{\pi k}. \tag{8.25}$$

El espectro de $c(t)$ se muestra en la figura 8.24(b). Con el espectro de $x(t)$ como se ilustra en la figura 8.24(a), el espectro resultante de la señal modulada $y(t)$ se muestra en la figura 8.24(c). A partir de las ecuaciones (8.23) y (8.24), $Y(j\omega)$ es una suma de réplicas escaladas y desplazadas de $X(j\omega)$:

$$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(j(\omega - k\omega_c)). \tag{8.26}$$

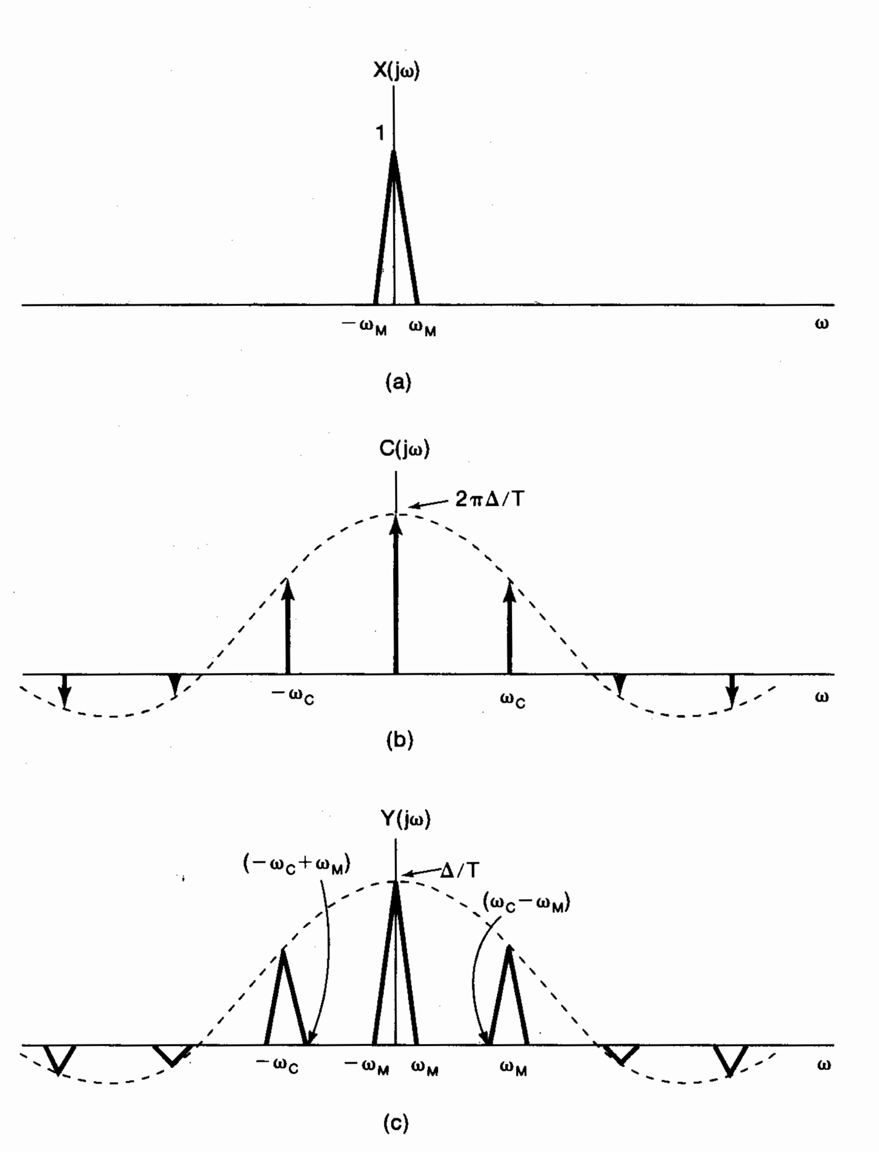


Figura 8.24 Espectros asociados con la modulación de amplitud de un tren de pulsos: (a) espectro de una señal de banda limitada $x(t)$; (b) espectro de la señal portadora de pulso $c(t)$ de la figura 8.23; (c) espectro del tren de pulsos modulado $y(t)$.

Comparando la ecuación (8.26) con la ecuación (7.6) y la figura 8.24 con la figura 7.3(c), vemos que el espectro de $y(t)$ es muy similar en forma al espectro resultante del muestreo con un tren de impulsos periódicos, siendo la única diferencia los valores de los coeficientes de Fourier del tren de pulsos. Para el tren de impulsos periódicos usado en el capítulo 7, todos los coeficientes de Fourier son iguales a un valor de $1/T$, mientras que para el tren de pulsos $c(t)$ en la figura 8.23, los coeficientes de Fourier están dados por la ecuación (8.25). En consecuencia, las réplicas de $X(j\omega)$ no se traslapan en tanto $\omega_c > 2\omega_M$, lo cual corresponde a la condición del teorema de muestreo de Nyquist. Si esta restricción se satisface, entonces, como sucede con el muestreo con el tren de impulsos, $x(t)$ se puede recuperar a partir de $y(t)$ mediante el uso de un filtro paso bajas con frecuencia de corte mayor que ω_M y menor que $\omega_c - \omega_M$.

Observe que la misma conclusión se cumple para una amplia variedad de otras formas de onda portadoras similares al pulso: si $c(t)$ es *cualquier* señal periódica con transformada de Fourier como en la ecuación (8.24) para algún conjunto de coeficientes de Fourier a_k, entonces $Y(j\omega)$ está dada por la ecuación (8.26). Por consiguiente, en tanto que $\omega_c = 2\pi/T > 2\omega_M$, las réplicas de $X(j\omega)$ no se traslapan, permitiéndonos recuperar $x(t)$ con un filtrado paso bajas siempre y cuando el coeficiente de Fourier de CD a_0 sea diferente de cero. Como se muestra en el problema 8.11, si a_0 es cero o demasiado pequeño como para ser aceptado, entonces, al usar un filtro paso banda para seleccionar una de las réplicas desplazadas de $X(j\omega)$ con un valor más grande de a_k, obtenemos una señal senoidal de AM con una versión escalada de $x(t)$ como la señal moduladora. Usando los métodos de demodulación descritos en la sección 8.2, podemos entonces recuperar $x(t)$.

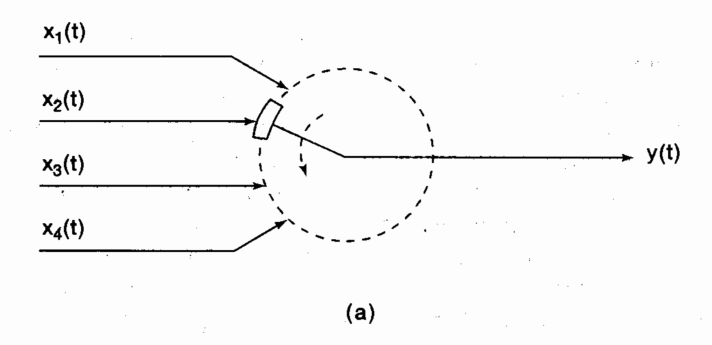
8.5.2 Multiplexaje por división de tiempo

La modulación de amplitud con una portadora de tren de pulsos se usa a menudo para transmitir varias señales a través de un solo canal. Como se indica en la figura 8.23, la señal de salida modulada $y(t)$ es diferente de cero sólo cuando la señal portadora $c(t)$ activa (es decir, no es cero). Durante los intervalos en los cuales $c(t)$ esté inactiva, se pueden transmitir otras señales moduladas de manera similar. Dos representaciones equivalentes de este proceso se muestran en la figura 8.25. En esta técnica para la transmisión de varias señales sobre un solo canal, cada señal es por supuesto asignada a un conjunto de espacios de tiempo de duración Δ que se repite cada T segundos y que no se traslapa con otros espacios de tiempo asignados a otras señales. Entre más pequeña sea la razón de Δ/T, mayor será el número de señales que se puedan transmitir por un canal. Este procedimiento se conoce como *multiplexaje por división de tiempo* (TDM, por sus siglas en inglés). Si bien el multiplexaje por división de frecuencia, analizado en la sección 8.3, asigna diferentes intervalos de *frecuencia* a señales individuales, el multiplexaje por división de tiempo asigna diferentes intervalos de *tiempo* a señales individuales. La demultiplexión de las señales individuales a partir de la señal compuesta en la figura 8.25 se lleva a cabo mediante un proceso de selección de ventana en tiempo, para seleccionar los espacios de tiempo particulares asociados a cada señal individual.

8.6 MODULACIÓN DE AMPLITUD DE PULSOS

8.6.1 Señales moduladas por amplitud de pulsos

En la sección 8.5 describimos un sistema de modulación en el cual una señal $x(t)$ continua modula un tren de pulsos periódico, la cual corresponde a transmitir secciones de $x(t)$ de duración Δ segundos cada T segundos. Como vimos en el análisis y en nuestra investi-



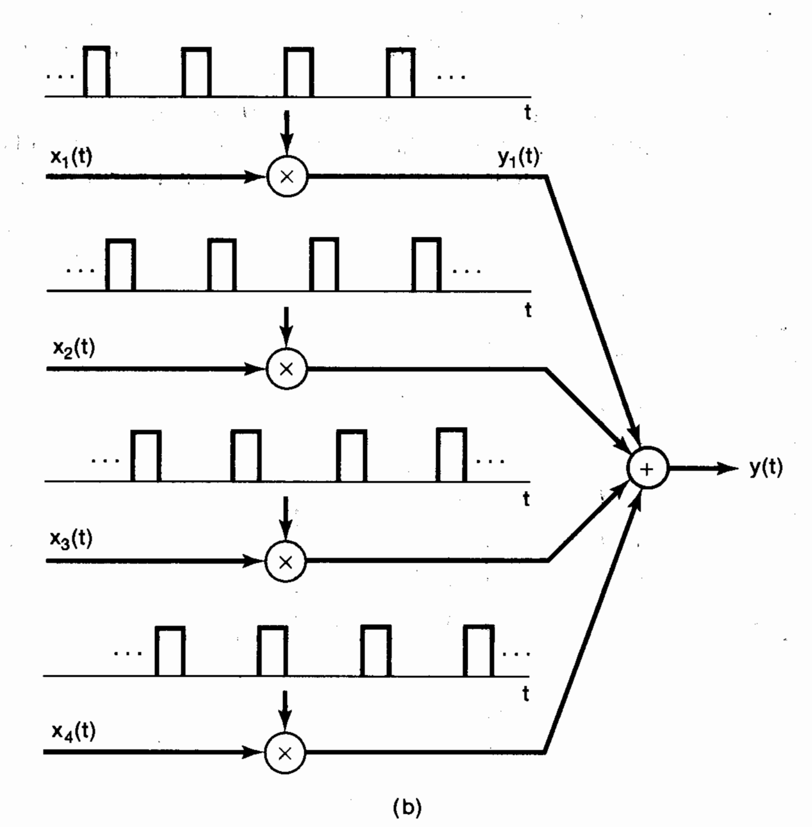


Figura 8.25 Multiplexión por división de tiempo.

gación del muestreo en el capítulo 7, la capacidad para recuperar $x(t)$ a partir de estas secciones de tiempo no depende de su duración Δ, sino de su frecuencia $2\pi/T$, la cual debe exceder la razón de Nyquist para asegurar una reconstrucción libre de traslapes de $x(t)$. Esto es en principio, sólo necesitamos transmitir las muestras $x(nT)$ de la señal $x(t)$.

De hecho, en los sistemas modernos de comunicación, los valores muestreados de la señal $x(t)$ que contiene información son transmitidos más comúnmente que las secciones de tiempo. Por razones prácticas, hay limitaciones sobre la amplitud máxima que se puede transmitir sobre un canal de comunicación, por lo que la transmisión de versiones de $x(t)$ muestreadas por impulsos no resulta práctica. En realidad, las muestras $x(nT)$ se usan para modular la amplitud de una secuencia de pulsos, lo cual da como resultado lo que se conoce como sistema de *modulación de amplitud de pulsos* (PAM, por sus siglas en inglés).

El uso de pulsos rectangulares corresponde a una estrategia de muestreo y retención en la que se transmiten los pulsos de duración Δ y amplitud proporcional a los valores de muestra instantáneos de $x(t)$. La forma de onda resultante para un solo canal PAM de este tipo se ilustra en la figura 8.26. En ésta, la curva punteada representa la señal $x(t)$. Al igual que el esquema de modulación en la sección 8.5, las señales PAM se pueden multiplexar en tiempo. Esto se ilustra en la figura 8.27, la cual representa la forma de onda transmitida con tres canales multiplexados en tiempo. Los pulsos asociados con cada canal se diferencian por el sombreado, así como por el número de canal indicado arriba del pulso. Para un determinado periodo T de repetición del pulso, a medida que el ancho del pulso disminuye, más canales multiplexados en tiempo se pueden transmitir sobre el mismo canal o medio de comunicación. Sin embargo, conforme el ancho del pulso disminuye, comúnmente se hace necesario incrementar la amplitud de los pulsos transmitidos de manera que una cantidad razonable de energía sea transmitida en cada pulso.

Además de tomar en cuenta la energía, se deben considerar otros aspectos en el diseño de una señal PAM. En particular, siempre que la frecuencia de muestreo exceda la razón de Nyquist, sabremos que $x(t)$ se puede reconstruir con exactitud a partir de sus

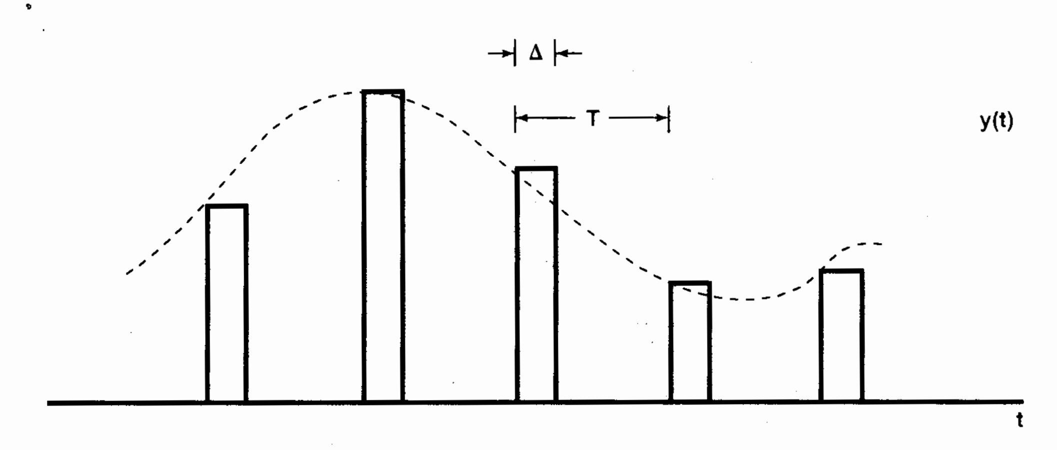


Figura 8.26 Forma de onda transmitida para un solo canal PAM. La curva punteada representa la señal $x(t)$.

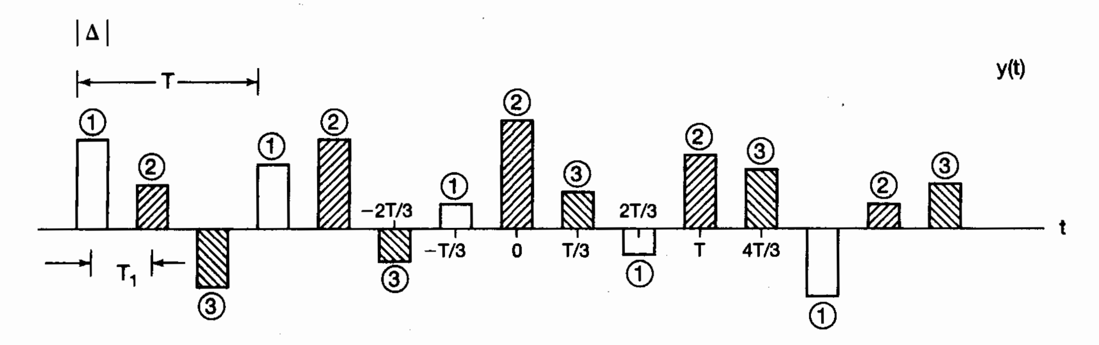


Figura 8.27 Forma de onda transmitida con tres canales PAM multiplexados en tiempo. Los pulsos asociados con cada canal se distinguen por el sombreado, así como por el número de canal arriba de cada pulso. Aquí, el espacio intersímbolo es $T_1 = T/3$.

muestras, y en consecuencia podemos usar estas muestras para modular la amplitud de una secuencia de pulsos de cualquier forma. La selección de la forma del pulso se establece por consideraciones tales como la selectividad de frecuencia del medio de comunicación que se usa y el problema de interferencia intersímbolo que analizaremos en seguida.

8.6.2 Interferencia intersímbolo en sistemas PAM

En el sistema de modulación de amplitud de pulso TDM que se describió un poco antes, el receptor puede, en principio, separar los canales muestreando la forma de onda multiplexada en tiempo en instantes adecuados. Por ejemplo, considere la señal multiplexada en tiempo de la figura 8.27, la cual consiste en versiones moduladas en amplitud de pulsos de tres señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$. Si muestreamos $y(t)$ en tiempos apropiados, por ejemplo en los puntos medios de cada pulso, podemos separar las muestras de las tres señales. Esto es

$$\begin{aligned} y(t) &= Ax_1(t), \qquad t = 0, \pm 3T_1, \pm 6T_1, \ldots, \\ y(t) &= Ax_2(t), \qquad t = T_1, T_1 \pm 3T_1, T_1 \pm 6T_1, \ldots, \\ y(t) &= Ax_3(t), \qquad t = 2T_1, 2T_1 \pm 3T_1, T_1 \pm 6T_1, \ldots, \end{aligned} \tag{8.27}$$

donde T_1 es el espaciamiento intersímbolo, que aquí es igual a $T/3$, y donde A es la constante de proporcionalidad apropiada. En otras palabras, las muestras de $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ se pueden obtener mediante el muestreo apropiado de la señal PAM recibida multiplexada en tiempo.

La estrategia indicada en el párrafo anterior supone que los pulsos transmitidos permanecen distintos conforme se propagan por el canal de comunicación. Sin embargo, en la transmisión a través de cualquier canal real, se puede esperar que los pulsos se distorsionen por efectos como ruido aditivo y filtrado. De hecho, el ruido aditivo en el canal introducirá errores en la amplitud en los tiempos de muestreo. El filtrado que ocurre a causa de la respuesta en frecuencia no ideal de un canal provoca que los pulsos individuales se dispersen, lo que puede ocasionar que los pulsos recibidos se traslapen en tiempo. Esta interferencia se ilustra en la figura 8.28 y se conoce como *interferencia intersímbolo*.

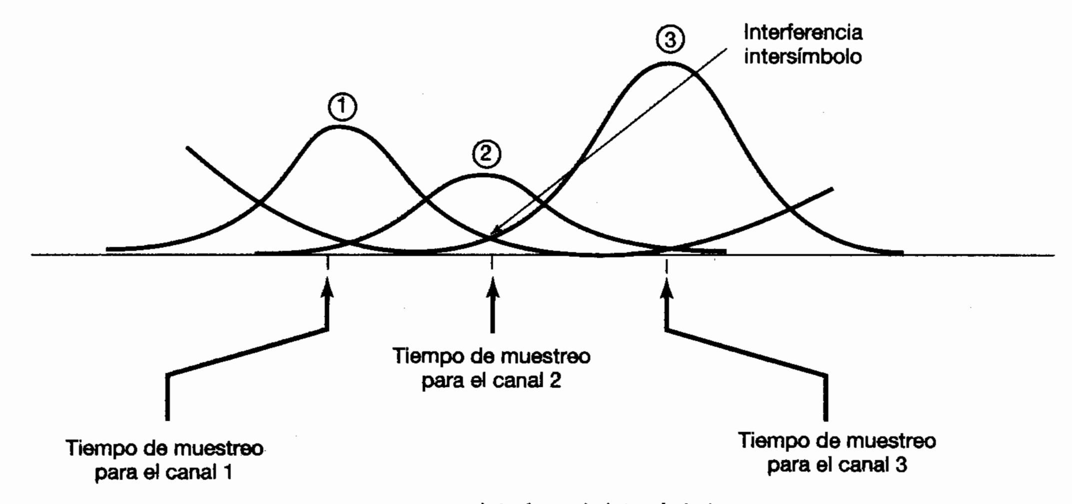


Figura 8.28 Interferencia intersímbolo.

La dispersión en el tiempo de los pulsos idealizados de la figura 8.27 puede provenir de las restricciones del ancho de banda del canal o de la dispersión de fase causada por un retardo de grupo no constante, como se analizó en la sección 6.2.2. (Véase en particular, el ejemplo 6.1.) Si la interferencia intersímbolo se debe sólo al ancho de banda limitado del canal, una alternativa consiste en usar una forma de pulso $p(t)$ que es en sí misma de banda limitada y, por lo tanto, no se ve afectada (o sólo en forma mínima) por el restringido ancho de banda del canal. En particular, si el canal tiene una respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ que no tiene distorsión sobre una banda de frecuencia especificada (es decir, si $H(j\omega) = 1$ para $|\omega| < W$) y si el pulso que se usa es de banda limitada (o bien, si $P(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq W$), cada señal PAM será recibida sin distorsión. Por otro lado, al usar ese pulso, ya no tenemos pulsos sin traslape como en la figura 8.27. No obstante, la interferencia intersímbolo se puede evitar en el dominio del tiempo, aun con un pulso de banda limitada, si la forma del pulso se restringe a tener cruces por cero en los otros tiempos de muestreo [de manera que la ecuación (8.27) se siga cumpliendo]. Por ejemplo, considere el pulso sinc

$$p(t) = \frac{T_1 \operatorname{sen}(\pi t/T_1)}{\pi t}$$

y su espectro correspondiente presentado en la figura 8.29. Ya que el pulso es cero en múltiplos enteros del espaciamiento de símbolo T_1, como se indica en la figura 8.30, no habrá interferencia intersímbolo en esos instantes. Es decir, si muestreamos la señal recibida en $t = kT_1$, entonces las contribuciones a este valor muestreado por parte de todos los otros pulsos, es decir, de $p(t - mT_1)$ para $m \neq k$, serán cero. Por supuesto que

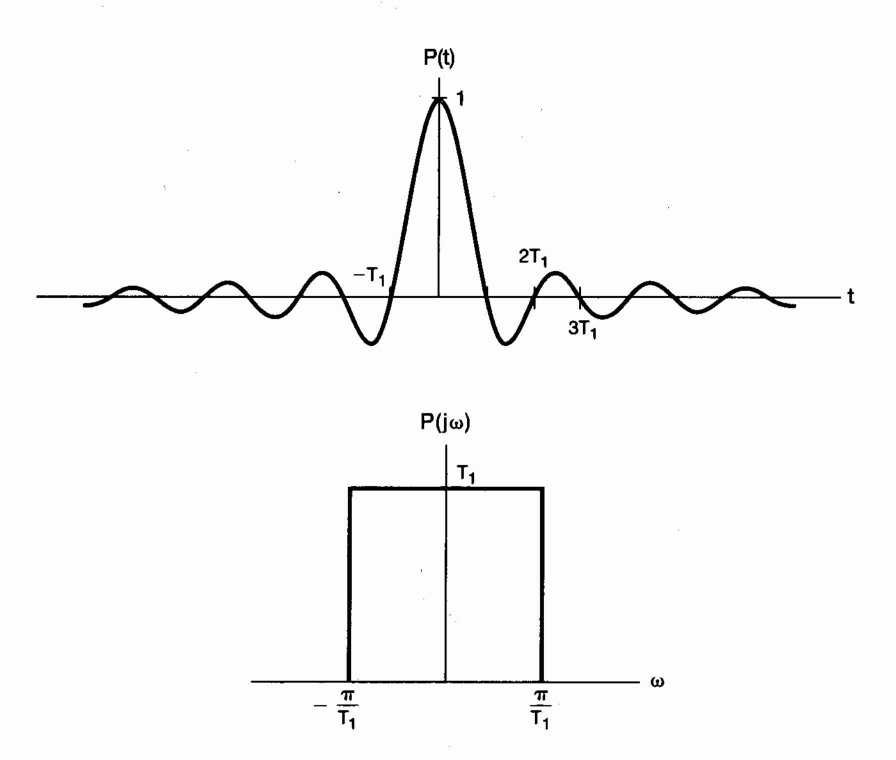


Figura 8.29 Un pulso sinc y su espectro correspondiente.

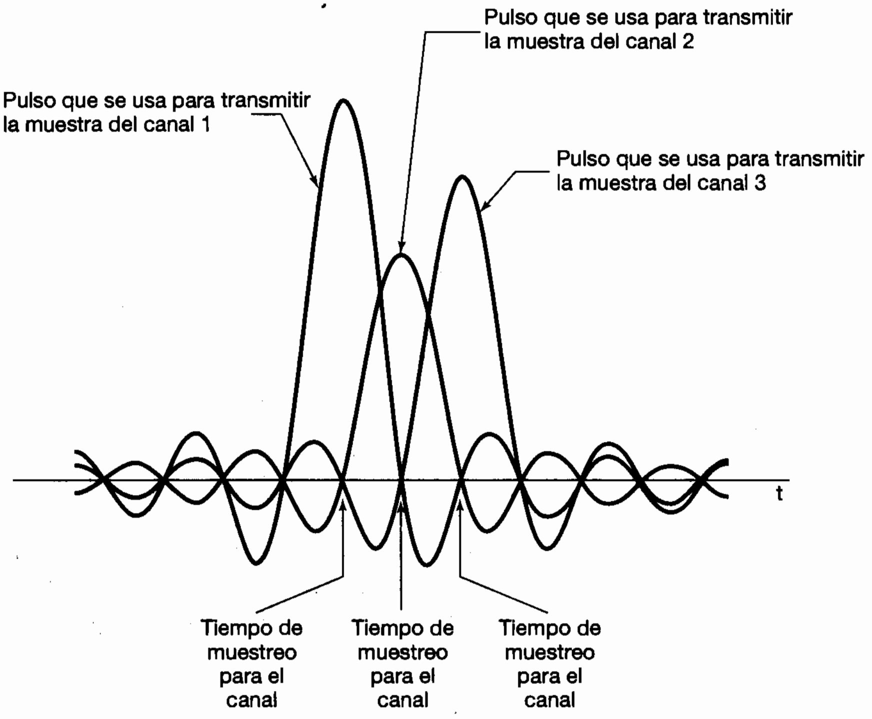


Figura 8.30 Ausencia de interferencia intersímbolo cuando se utilizan los pulsos sinc con una correcta selección de cruces por cero.

el evitar la interferencia de los símbolos adyacentes requiere de una gran exactitud en los tiempos de muestreo, por lo que el muestreo tiene lugar en el cruce por cero de los símbolos adyacentes.

El pulso sinc es sólo uno de los muchos pulsos de banda limitada con cruce por cero en el dominio del tiempo a $\pm T_1$, $\pm 2T_1$, etc. De manera más general, considere un pulso $p(t)$ cuyo espectro tiene la forma

$$P(j\omega) = \begin{cases} 1 + P_1(j\omega), & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_1}, \\ P_1(j\omega), & \frac{\pi}{T_1} < |\omega| \leq \frac{2\pi}{T_1} \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases} \tag{8.28}$$

y donde $P_1(j\omega)$ tiene simetría impar alrededor de π/T_1, tal que

$$P_1\left(-j\omega + j\frac{\pi}{T_1}\right) = -P_1\left(j\omega + j\frac{\pi}{T_1}\right) \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_1}, \tag{8.29}$$

como se ilustra en la figura 8.31. Si $P_1(j\omega) = 0$, $p(t)$ es el pulso sinc en sí mismo. De un modo más general, como se explora en el problema 8.42, para cualquier $P(j\omega)$ que satisface las condiciones en las ecuaciones (8.28) y (8.29), $p(t)$ tendrá cruce por cero a $\pm T_1$, $\pm 2T_2, \ldots$.

Mientras que las señales que satisfacen las ecuaciones (8.28) y (8.29) nos permiten superar el problema del ancho de banda limitado del canal, pueden tener lugar otras distorsiones en el canal que requieran de una selección diferente de la forma de onda del pulso o de algún procesamiento adicional de la señal recibida antes de la separación de las diferentes señales TDM. En particular, si $|H(j\omega)|$ no es constante sobre la banda de paso, puede haber la necesidad de realizar una *ecualización del canal*, es decir el filtrado de la

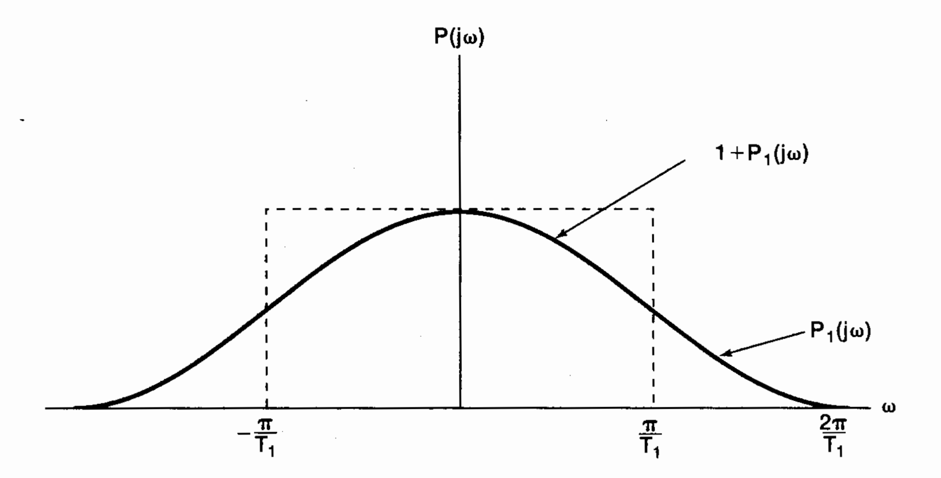


Figura 8.31 Simetría impar alrededor de π/T como se definió en la ecuación (8.29).

señal recibida para corregir la ganancia del canal no constante. Asimismo, si el canal tiene una fase no lineal, puede producirse distorsión que conduzca a la interferencia intersímbolo, a menos que se realice un proceso de compensación de la señal. Los problemas 8.43 y 8.44 ilustran estos efectos.

8.6.3 Modulación digital por amplitud de pulsos y por codificación de pulsos

El sistema PAM descrito en las secciones anteriores involucra el uso de un conjunto discreto de muestras para modular una secuencia de pulsos. Este conjunto de muestras puede considerarse como una señal $x[n]$ discreta, y en muchas aplicaciones $x[n]$ es, de hecho, almacenada o generada en un sistema digital. En tales casos, la longitud limitada de palabra de un sistema digital implica que $x[n]$ puede tomar sólo un conjunto finito de valores discretos, dando como resultado sólo un conjunto finito de posibles amplitudes para los pulsos modulados.

De hecho, en muchos casos, esta forma discreta de PAM digital se reduce a un sistema que usa sólo unos pocos (por lo general sólo dos) valores de amplitud. En particular, si cada muestra de $x[n]$ se representa como un número binario (es decir, una cadena finita de ceros y unos), entonces un pulso con uno de dos posibles valores (un valor correspondiente a cero y el otro a uno) puede fijarse para cada dígito binario, o *bit*, en la cadena. De manera más general, como medida de protección contra errores de transmisión o para proporcionar una comunicación segura, la secuencia de dígitos binarios que representan a $x[n]$ puede primero transformarse o *codificarse* en otra secuencia de ceros y unos antes de la transmisión. Por ejemplo, un mecanismo muy sencillo de detección de error consiste en transmitir un pulso modulado adicional en cada muestra de $x[n]$, representando una verificación de *paridad*. Es decir, este bit adicional debe ser 1 si la representación binaria de $x[n]$ tiene un número impar de unos y cero si es un número par de unos. El receptor puede entonces verificar el bit de paridad recibido contra los otros bits recibidos para detectar inconsistencias. Ciertamente se pueden emplear esquemas de codificación y corrección de errores más complejos, y el diseño de códigos con propiedades particularmente deseables es un componente importante en el diseño de sistemas de comunicación. Por obvias razones, un sistema PAM modulado por una secuencia codificada de ceros y unos se conoce como sistema de *modulación por codificación de pulsos* (PCM, por sus siglas en inglés).

8.7 MODULACIÓN DE FRECUENCIA SENOIDAL

En las secciones anteriores examinamos varios sistemas específicos de modulación de amplitud en los cuales la señal moduladora se utilizó para variar la amplitud de una portadora senoidal o de pulsos. Como ya hemos visto, tales sistemas son susceptibles a un análisis detallado usando las técnicas del dominio de la frecuencia que hemos desarrollado en capítulos anteriores. Otra clase muy importante de técnicas de modulación es conocida como *modulación de frecuencia* o *frecuencia modulada* (*FM*), en la cual la señal moduladora se utiliza para controlar la frecuencia de una portadora senoidal. Los sistemas de modulación de este tipo ofrecen muchas ventajas sobre los sistemas de modulación de amplitud senoidal. Como muestra la figura 8.10, con la modulación de amplitud senoidal la amplitud pico de la envolvente de la portadora depende directamente de la amplitud de la señal moduladora $x(t)$, la cual puede tener un amplio rango dinámico, es decir, puede variar de manera significativa. Con la modulación de frecuencia, la envolvente de la portadora es constante. En consecuencia, un transmisor FM puede operar siempre a la potencia pico. Además, en los sistemas FM, las variaciones de amplitud introducidas en un canal de transmisión que se deben a perturbaciones aditivas o a desvanecimiento pueden eliminarse en gran medida en el receptor. Por esta razón, en la transmisión pública y en una amplia variedad de otros contextos, la recepción de FM es por lo general mejor que la recepción de AM. Por otro lado, como veremos más tarde, la modulación de frecuencia generalmente requiere de mayor ancho de banda que la modulación de amplitud senoidal.

Los sistemas de modulación de frecuencia son altamente no lineales y en consecuencia su análisis no es tan directo como el de los sistemas de modulación de amplitud examinados en las secciones anteriores. Sin embargo, los métodos que hemos desarrollado nos permiten lograr cierto conocimiento sobre la naturaleza y operación de estos sistemas.

Empezaremos introduciendo la noción general de *modulación angular*. Considere una señal portadora senoidal expresada en la forma

$$c(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_c) = A\cos\theta(t), \tag{8.30}$$

donde $\theta(t) = \omega_c t + \theta_c$, ω_c es la frecuencia y θ_c la fase de la portadora. En general, la modulación angular corresponde a usar la señal moduladora para cambiar o variar el ángulo $\theta(t)$. Una forma en la que algunas veces se lleva a cabo es usando la señal moduladora $x(t)$ para variar la fase θ_c de manera que la señal modulada adopte la forma

$$y(t) = A\cos[\omega_c t + \theta_c(t)], \tag{8.31}$$

donde θ_c es ahora una función del tiempo, específicamente de la forma

$$\theta_c(t) = \theta_0 + k_p x(t). \tag{8.32}$$

Por ejemplo, si $x(t)$ es constante, la fase de $y(t)$ será también constante y proporcional a la amplitud de $x(t)$. La modulación angular definida por la ecuación (8.31) se conoce como *modulación de fase*. Otra forma de la modulación angular corresponde a variar la *derivada* del ángulo proporcionalmente con la señal moduladora, esto es,

$$y(t) = A\cos\theta(t), \tag{8.33}$$

donde

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_f x(t). \tag{8.34}$$

Para $x(t)$ constante, $y(t)$ es senoidal con una frecuencia que está desplazada de la frecuencia portadora ω_c por una cantidad proporcional a la amplitud de $x(t)$. Por esta razón, la modulación angular definida por las ecuaciones (8.33) y (8.34) comúnmente se conoce como *modulación de frecuencia.*

Aunque la modulación de fase y la modulación de frecuencia son formas diferentes de la modulación angular, pueden relacionarse fácilmente. A partir de las ecuaciones (8.31) y (8.32), para la modulación de fase

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_p \frac{dx(t)}{dt}, \tag{8.35}$$

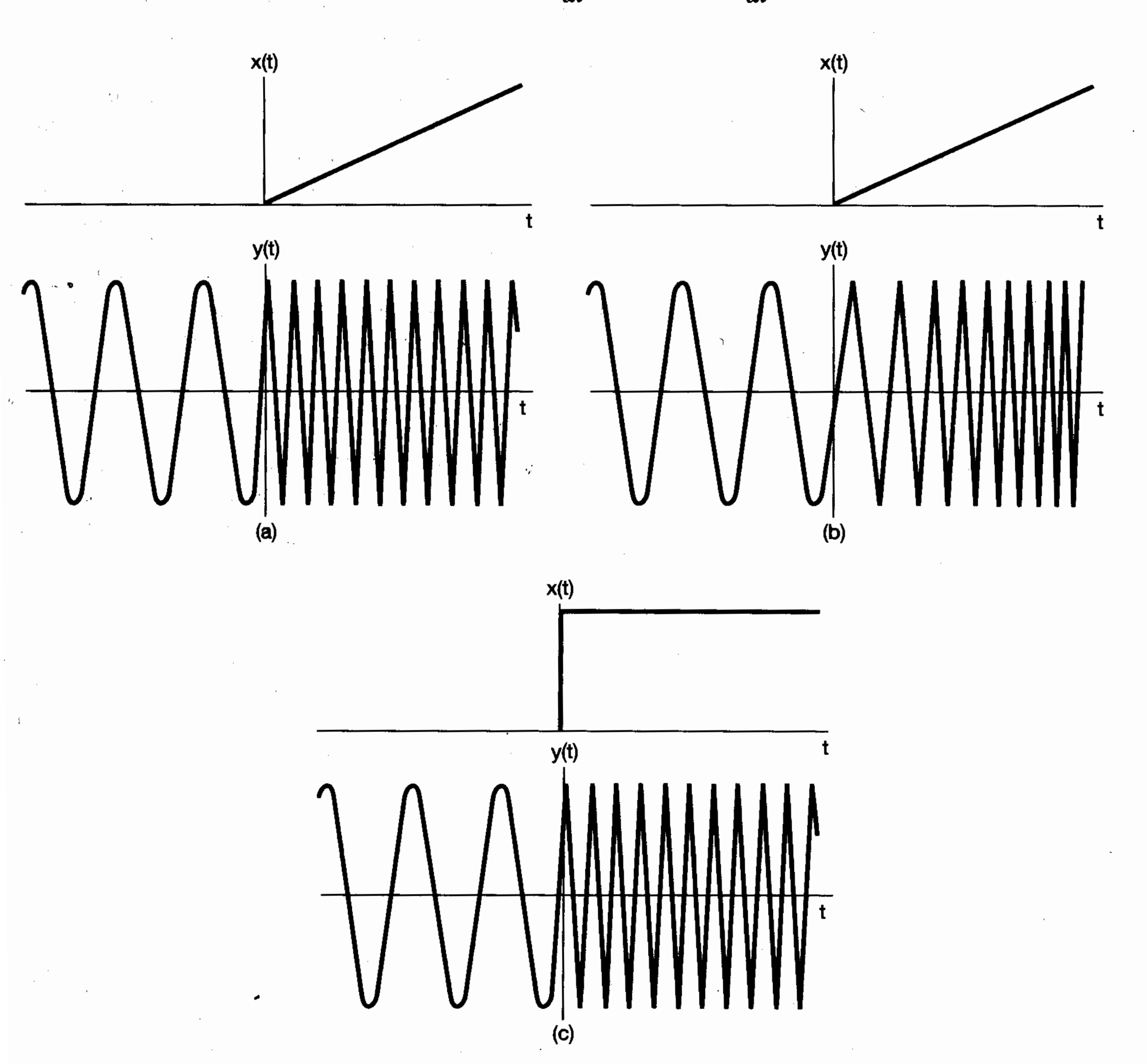


Figura 8.32 Modulación de fase, modulación de frecuencia y sus relaciones: (a) modulación de fase con una rampa como la señal moduladora; (b) modulación de frecuencia con una rampa como la señal moduladora; (c) modulación de frecuencia con un escalón (la derivada de una rampa) como la señal moduladora.

y de este modo, comparando las ecuaciones (8.34) y (8.35), se observa que la modulación de fase con $x(t)$ es idéntica a la modulación de frecuencia con la derivada de $x(t)$. De igual forma, la modulación de frecuencia con $x(t)$ es idéntica a la modulación de fase con la integral de $x(t)$. Un ejemplo de la modulación de fase y de la modulación de frecuencia se muestra en las figuras 8.32(a) y (b). En ambos casos, la señal moduladora es $x(t) = tu(t)$ (es decir, una señal rampa que se incrementa de forma lineal en el tiempo para $t > 0$). En la figura 8.32(c) se muestra un ejemplo de la modulación de frecuencia con un escalón (la derivada de una rampa) como la señal moduladora [es decir, $x(t) = u(t)$]. La correspondencia entre las figuras 8.32(a) y (c) debería ser evidente.

La modulación de frecuencia con un escalón corresponde a la frecuencia de la portadora senoidal cambiando instantáneamente de un valor a otro cuando $x(t)$ cambia de valor en $t = 0$, de manera parecida al cambio que ocurre en la frecuencia de un oscilador cuando se modifica instantáneamente su control de frecuencia. Cuando la modulación de frecuencia se efectúa mediante una rampa, como en la figura 8.32(b), la frecuencia cambia linealmente con el tiempo. Esta noción de una frecuencia variable en el tiempo a menudo se expresa mejor en términos del concepto de *frecuencia instantánea*. Para

$$y(t) = A\cos\theta(t), \tag{8.36}$$

la frecuencia instantánea de la senoide se define como

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}. \tag{8.37}$$

Así, para $y(t)$ senoidal [es decir, $\theta(t) = (\omega_c t + \theta_0)$], la frecuencia instantánea es ω_c como era de esperarse. Para la modulación de fase, tal como se expresó en las ecuaciones (8.31) y (8.32), la frecuencia instantánea es $\omega_c + k_p(dx(t)/dt)$, y para la modulación de frecuencia, como se expresa en las ecuaciones (8.33) y (8.34), la frecuencia instantánea es $\omega_c + k_f x(t)$.

Puesto que la modulación de frecuencia y la modulación de fase se relacionan fácilmente, describiremos el resto del tema en términos de la modulación de frecuencia, únicamente. Para comprender mejor cómo el espectro de la señal modulada en frecuencia se ve afectado por la señal moduladora $x(t)$, resulta útil considerar dos casos en los cuales la señal moduladora es lo suficientemente simple como para que algunas de las propiedades esenciales de la modulación de frecuencia son evidentes.

8.7.1 Modulación de frecuencia de banda angosta

Consideremos el caso de la modulación de frecuencia con una señal

$$x(t) = A\cos\omega_m t. \tag{8.38}$$

De las ecuaciones (8.34) y (8.37), la frecuencia instantánea es

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f A\cos\omega_m t, \tag{8.39}$$

la cual varía senoidalmente entre $\omega_c + k_f A$ y $\omega_c - k_f A$. Con

$$\Delta\omega = k_f A,$$

tenemos

$$\omega_i(t) = \omega_c + \Delta\omega\cos\omega_m t,$$

y

$$y(t) = \cos[\omega_c t + \int x(t)dt]$$
$$= \cos\left(\omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m}\,\text{sen}\,\omega_m t + \theta_0\right), \quad (8.40)$$

donde θ_0 es una constante de integración. Por conveniencia escogeremos $\theta_0 = 0$, de manera que

$$y(t) = \cos\left[\omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m}\,\text{sen}\,\omega_m t\right]. \quad (8.41)$$

El factor $\Delta\omega/\omega_m$, el cual denotaremos con m, se define como el *índice de modulación* para la modulación de frecuencia. Las propiedades de los sistemas de FM tienden a ser diferentes dependiendo de si el índice de modulación m es pequeño o grande. El caso para el cual m es pequeño se conoce como *FM de banda angosta*. En general, podemos rescribir la ecuación (8.41) como

$$y(t) = \cos(\omega_c t + m\,\text{sen}\,\omega_m t) \quad (8.42)$$

o

$$y(t) = \cos\omega_c t\cos(m\,\text{sen}\,\omega_m t) - \text{sen}\,\omega_c t\,\text{sen}(m\,\text{sen}\,\omega_m t). \quad (8.43)$$

Cuando m es lo suficientemente pequeña ($\ll \pi/2$), podemos hacer las siguientes aproximaciones:

$$\cos(m\,\text{sen}\,\omega_m t) \simeq 1, \quad (8.44)$$
$$\text{sen}(m\,\text{sen}\,\omega_m t) \simeq m\,\text{sen}\,\omega_m t, \quad (8.45)$$

de manera que la ecuación (8.42) se convierte en

$$y(t) \simeq \cos\omega_c t - m(\text{sen}\,\omega_m t)(\text{sen}\,\omega_c t). \quad (8.46)$$

El espectro $y(t)$ basado en esta aproximación se muestra en la figura 8.33. Podemos observar que tiene una similitud con la AM-DSB/WC en que la frecuencia de la portadora está presente en el espectro y hay bandas laterales que representan el espectro de la señal moduladora en la ecuación (8.38). Sin embargo, en la AM-DSB/WC la portadora adicional introducida está en fase con la portadora modulada, mientras que, como vemos en la ecuación (8.46) para el caso de FM de banda angosta, la señal portadora tiene una diferencia de fase de $\pi/2$ en relación con la portadora de amplitud modulada. Las formas de onda correspondientes a la AM-DSB/WC y a la FM también son muy diferentes. La figura 8.34(a) ilustra la forma de onda de la FM de banda angosta correspondiente a la ecuación (8.46). Para su comparación, en la figura 8.34(b) mostramos la señal AM-DSB/WC

$$y_2(t) = \cos\omega_c t + m(\cos\omega_m t)(\cos\omega_c t). \quad (8.47)$$

Para la señal FM de banda angosta descrita por la ecuación (8.46), el ancho de banda de las bandas laterales es igual al ancho de banda de la señal moduladora y, en particular, aunque la aproximación en la ecuación se basa en la consideración de que $m \ll \pi/2$, el ancho de banda de las bandas laterales es, en cualquier otro caso, independiente del índice de modulación m (es decir, depende sólo del ancho de banda de la señal moduladora, no de su amplitud). Un enunciado similar se aplica para la FM de banda angosta con una señal moduladora más general.

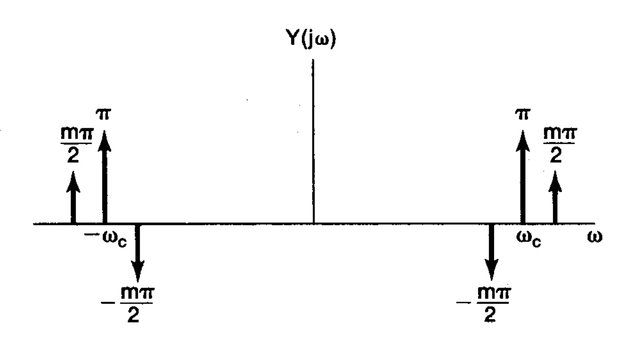
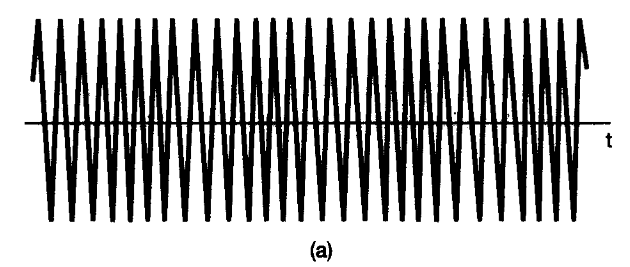


Figura 8.33 Espectro aproximado para FM de banda angosta.



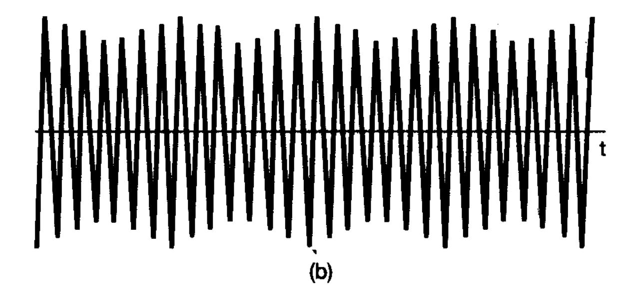


Figura 8.34 Comparación de FM de banda angosta y AM-DSB/WC: (a) FM de banda angosta; (b) AM-DSB/WC.

8.7.2 Modulación de frecuencia de banda ancha

Cuando m es grande, la aproximación que conduce a la ecuación (8.46) ya no se aplica y el espectro de $y(t)$ depende tanto de la amplitud como del espectro de la señal moduladora $x(t)$. Con $y(t)$ expresada en la forma de la ecuación (8.43), notamos que los términos $\cos[m \text{ sen } \omega_m t]$ y $\text{sen}[m \text{ sen } \omega_m t]$ son señales periódicas con frecuencia fundamental ω_m. Por lo tanto, la transformada de Fourier de cada una de estas señales es un tren de impulsos con los impulsos situados en múltiplos enteros de ω_m y amplitudes proporcionales a los coeficientes de la serie de Fourier. Los coeficientes para estas dos señales periódicas involucran una clase de funciones conocidas como funciones Bessel de primera clase. El primer término de la ecuación (8.43) corresponde a una portadora senoidal de la forma $\cos \omega_c t$ modulada en amplitud por la señal periódica $\cos[m \text{ sen } \omega_m t]$, y el segundo término es una portadora senoidal $\text{sen } \omega_c t$ modulada en amplitud por la señal periódica $\text{sen}[m \text{ sen } \omega_m t]$. La multiplicación por las señales portadoras tiene el efecto, en el dominio de la frecuencia, de trasladar el espectro de la ecuación (8.43) a la frecuencia de la portadora, de modo que éste se centra en más y menos ω_c. En la figura 8.35(a) y (b) ilustramos, para $\omega > 0$, la magnitud de los espectros de los dos términos individuales de la

ecuación (8.43), y en la figura 8.35(c) la magnitud del espectro combinado que representa la señal modulada $y(t)$. El espectro de $y(t)$ consiste de impulsos a frecuencias $\pm\omega_c + n\omega_m$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y no es, estrictamente hablando, de banda limitada alrededor de $\pm\omega_c$. Sin embargo, el comportamiento de los coeficientes de la serie de Fourier de $\cos[m \text{ sen } \omega_m t]$ y $\text{sen}[m \text{ sen } \omega_m t]$ es tal que la amplitud de la $n$ésima armónica para $|n| > m$ puede considerarse despreciable, y de este modo, el ancho de banda total B de cada banda lateral centrada alrededor de $+\omega_c$ y $-\omega_c$ estará efectivamente limitado a $2m\omega_m$. Es decir,

$$B \simeq 2m\omega_m, \tag{8.48}$$

o, ya que $m = k_f A/\omega_m = \Delta\omega/\omega_m$,

$$B \simeq 2k_f A = 2\Delta\omega. \tag{8.49}$$

Comparando las ecuaciones (8.39) y (8.49), podemos observar que el ancho de banda efectivo de cada banda lateral es igual a la excursión total de la frecuencia instan-

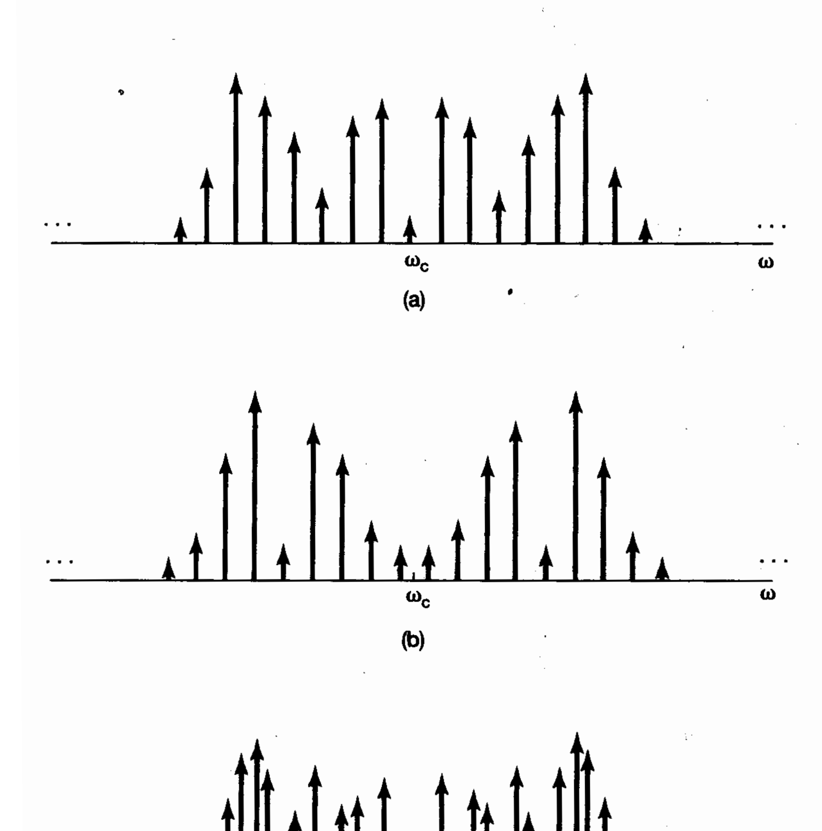


Figura 8.35 Magnitud del espectro de la modulación de frecuencia de banda amplia con $m = 12$: (a) magnitud del espectro de $\cos \omega_c t \cos[m \text{sen } \omega_m t]$; (b) espectro de $\text{sen } \omega_c t \text{ sen}[m \text{sen } \omega_m t]$; (c) magnitud del espectro combinado de $\cos[\omega_c t + m \text{sen } \omega_m t]$.

tánea alrededor de la frecuencia de la portadora. Por lo tanto, para FM de banda ancha, ya que damos por sentado que m es grande, el ancho de banda de la señal modulada es mucho más grande que el ancho de banda de la señal moduladora y, en contraste con el caso de banda angosta, el ancho de banda de la señal transmitida en FM de banda amplia es directamente proporcional a la amplitud A de la señal moduladora y al factor de ganancia k_f.

8.7.3 Señal moduladora de onda cuadrada periódica

Otro ejemplo que nos ayuda a profundizar en el conocimiento de las propiedades de la modulación de frecuencia es el caso de una onda cuadrada periódica que sea una señal moduladora. Remitiéndonos a la ecuación (8.39), sea $k_f = 1$ tal que $\Delta\omega = A$, y sea $x(t)$ como se proporcionó en la figura 8.36. La señal modulada $y(t)$ se muestra en la figura 8.37. La frecuencia instantánea es $\omega_c + \Delta\omega$ cuando $x(t)$ es positiva, y $\omega_c - \Delta\omega$ cuando $x(t)$ es negativa. Así, $y(t)$ también puede escribirse como

$$y(t) = r(t)\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t] + r\left(t - \frac{T}{2}\right)\cos[(\omega_c - \Delta\omega)t], \tag{8.50}$$

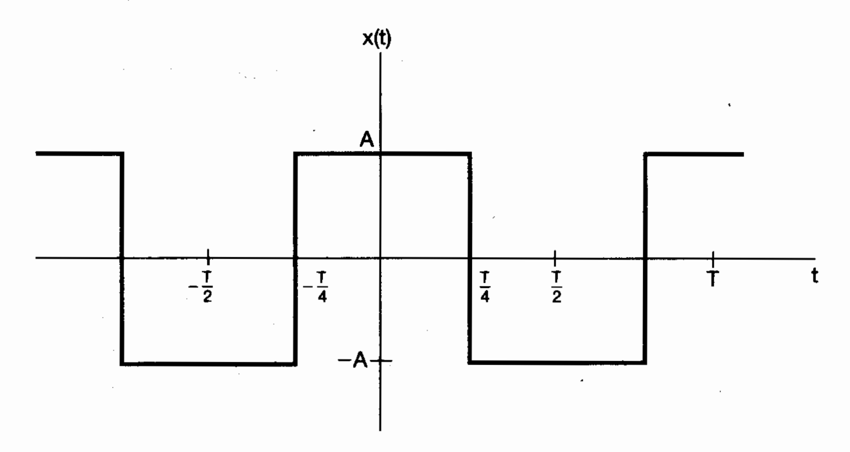


Figura 8.36 Onda cuadrada periódica simétrica.

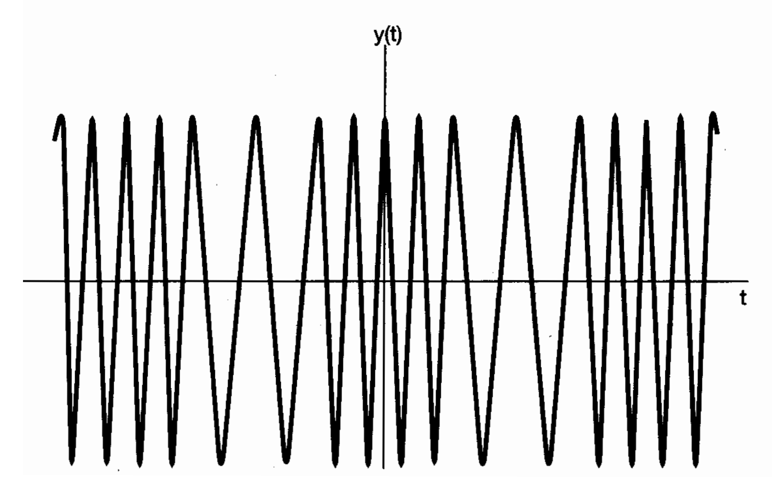


Figura 8.37 Modulación de frecuencia con una señal moduladora de onda cuadrada periódica.

donde $r(t)$ es la onda cuadrada simétrica mostrada en la figura 8.38. Así, para esta señal moduladora particular, podemos replantear el problema de definir el espectro de la señal FM $y(t)$ como la determinación del espectro de la suma de las dos señales de AM de la ecuación (8.50). En concreto,

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}[R(j\omega + j\omega_c + j\Delta\omega) + R(j\omega - j\omega_c - j\Delta\omega)] + \frac{1}{2}[R_T(j\omega + j\omega_c - j\Delta\omega) + R_T(j\omega - j\omega_c + j\Delta\omega)], \quad (8.51)$$

donde $R(j\omega)$ es la transformada de Fourier de la onda cuadrada periódica $r(t)$ de la figura 8.38 y $R_T(j\omega)$ es la transformada de Fourier de $r(t - T/2)$. Del ejemplo 4.6, con $T = 4T_1$,

$$R(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{2k+1}(-1)^k \delta\left[\omega - \frac{2\pi(2k+1)}{T}\right] + \pi\delta(\omega) \quad (8.52)$$

y

$$R_T(j\omega) = R(j\omega)e^{-j\omega T/2}. \quad (8.53)$$

La magnitud del espectro de $Y(j\omega)$ se ilustra en la figura 8.39. Al igual que la FM de banda ancha, el espectro tiene la apariencia general de dos bandas laterales centradas alrededor de $\omega_c \pm \Delta\omega$, las cuales decaen para $\omega < \omega_c - \Delta\omega$ y para $\omega > \omega_c + \Delta\omega$.

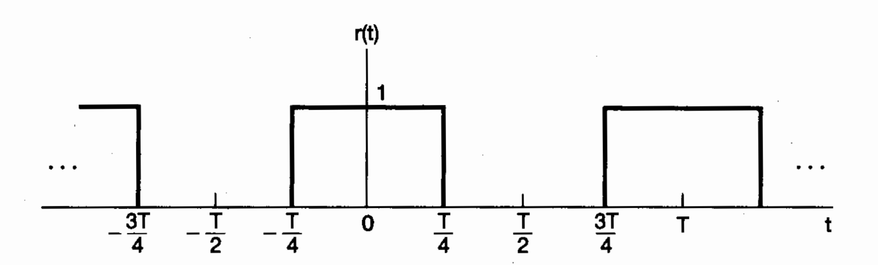


Figura 8.38 Onda cuadrada simétrica $r(t)$ en la ecuación (8.50).

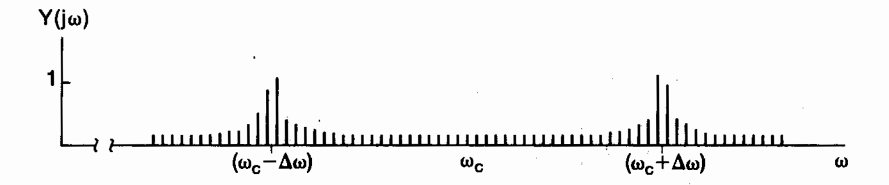


Figura 8.39 Magnitud del espectro para $\omega > 0$ correspondiente a la modulación de frecuencia con una señal moduladora de onda cuadrada. Cada línea vertical en la figura representa un impulso de área proporcional a la altura de la línea.

Los sistemas de demodulación de las señales de FM generalmente son de dos tipos. Uno que corresponde a convertir la señal de FM en una señal de AM mediante diferenciación, mientras que el otro rastrea directamente la fase o la frecuencia de la señal modulada. La explicación anterior proporciona únicamente una breve introducción sobre las características de la modulación de frecuencia, y una vez más visto cómo las técnicas básicas desarrolladas en los primeros capítulos pueden explotarse para analizar y desarrollar con mayor profundidad esta importante clase de sistemas.

8.8 MODULACIÓN DISCRETA

8.8.1 Modulación de amplitud senoidal discreta

En la figura 8.40 se muestra un sistema de modulación de amplitud discreta en el cual $c[n]$ es la portadora y $x[n]$ es la señal moduladora. La base para nuestro análisis de la modulación de amplitud de tiempo continuo fue la propiedad de multiplicación de las transformadas de Fourier (específicamente, el hecho de que la multiplicación en el dominio de tiempo corresponde a la convolución en el dominio de la frecuencia). Como se analizó en la sección 5.5, existe una propiedad correspondiente para señales discretas que podemos usar para analizar la modulación de amplitud discreta. Específicamente, considere

$$y[n] = x[n]c[n].$$

Con $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$ y $C(e^{j\omega})$ denotando las transformadas de Fourier de $x[n]$, $y[n]$ y $c[n]$, respectivamente, $Y(e^{j\omega})$ es proporcional a la convolución periódica de $X(e^{j\omega})$ y $C(e^{j\omega})$, esto es,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})C(e^{j(\omega-\theta)})d\theta. \tag{8.54}$$

Puesto que $X(e^{j\omega})$ y $C(e^{j\omega})$ son periódicas con periodo de 2π, la integración se puede realizar sobre cualquier intervalo de frecuencia de longitud 2π.

Consideremos primero la modulación de amplitud senoidal con una portadora exponencial compleja, de manera que

$$c[n] = e^{j\omega_c n}. \tag{8.55}$$

Como vimos en la sección 5.2, la transformada de Fourier de $c[n]$ es un tren periódico de impulsos, es decir,

$$C(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_c + k2\pi), \tag{8.56}$$

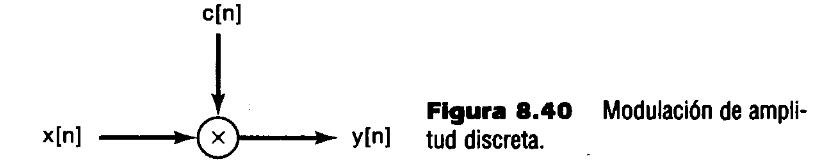


Figura 8.40 Modulación de amplitud discreta.

la cual ha sido dibujada en la figura 8.41(b). Con $X(e^{j\omega})$ como se ilustró en la figura 8.41(a), el espectro de la señal modulada será como el mostrado en la figura 8.41(c). En particular, notamos que $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega - \omega_c)})$. Ésta es la contraparte discreta de la figura 8.1, y una vez más, para $x[n]$ real la señal modulada será compleja. La demodulación se realiza multiplicando por $e^{-j\omega_c n}$ para trasladar el espectro a su localización original en el eje de frecuencia, de manera tal que

$$x[n] = y[n]e^{-j\omega_c n}. \tag{8.57}$$

Como se exploró en el problema 6.43, si $\omega = \pi$ de manera que $c[n] = (-1)^n$, el resultado de la modulación en el dominio del tiempo es cambiar el signo algebraico de $x[n]$ para valores impar de n, en tanto que en el dominio de la frecuencia la consecuencia consiste en intercambiar de altas a bajas frecuencias. El problema 6.44 explora el uso de este tipo de modulación cuando se hace uso de un filtro paso bajas con el fin de llevar a cabo el filtrado paso altas, y viceversa.

Como una alternativa al uso de un portadora exponencial compleja podemos valernos de una portadora senoidal, en cuyo caso, con $x[n]$ real, la señal modulada $y[n]$ también será real. Con $c[n] = \cos \omega_c n$, el espectro de la portadora consiste de pares de impul-

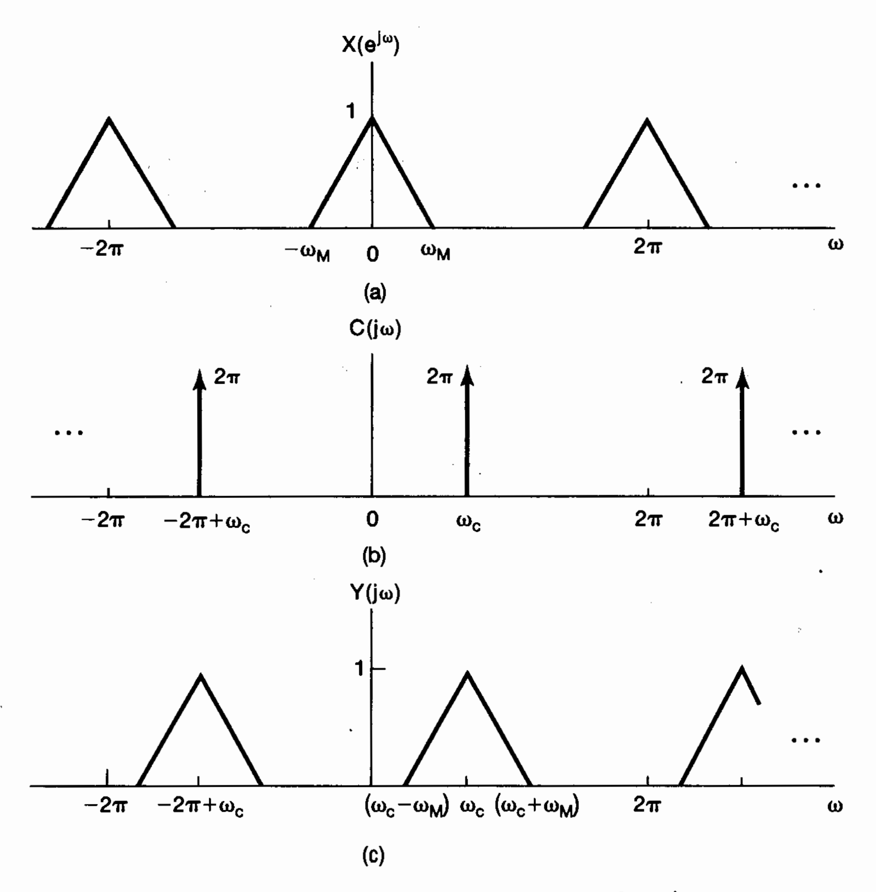


Figura 8.41 (a) Espectro de $x[n]$; (b) espectro de $c[n] = e^{j\omega_c n}$; (c) espectro de $y[n] = x[n]c[n]$.

sos repetidos periódicamente en $\omega = \pm\omega_c + k2\pi$, lo cual se ilustra en la figura 8.42(b). Con $X(e^{j\omega})$ como aparece en la figura 8.42(a), el espectro resultante para la señal modulada es el que se muestra en la figura 8.42(c) y, en particular, corresponde a duplicar $X(e^{j\omega})$ a las frecuencias $\omega = \pm\omega_c + k2\pi$. Para que los duplicados individuales de $X(e^{j\omega})$ no se traslapen, necesitamos que

$$\omega_c > \omega_M \tag{8.58}$$

y

$$2\pi - \omega_c - \omega_M > \omega_c + \omega_M$$

lo que equivale a

$$\omega_c < \pi - \omega_M. \tag{8.59}$$

La primera condición es idéntica a la de la sección 8.2 para la modulación de amplitud senoidal continua, mientras que la segunda proviene de la periodicidad inherente de los

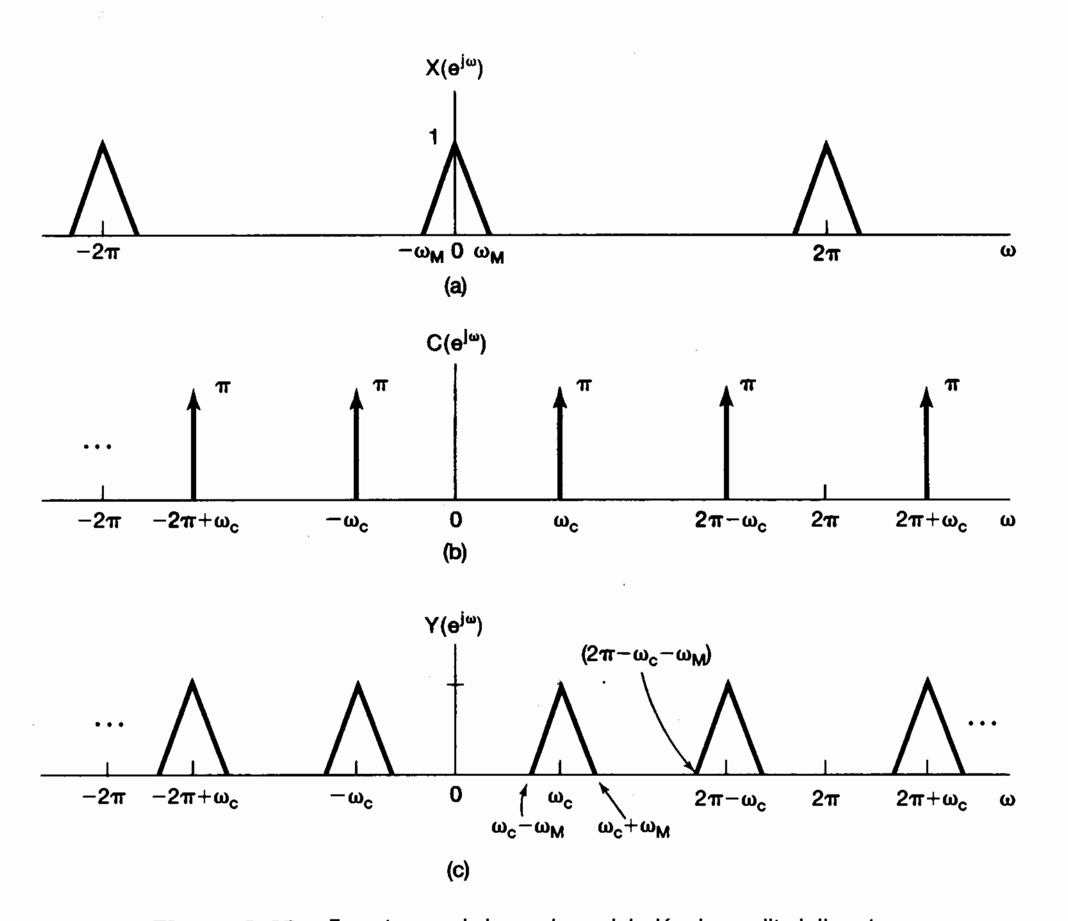


Figura 8.42 Espectro asociado con la modulación de amplitud discreta usando una portadora senoidal: (a) espectro de una señal $x[n]$ de banda limitada; (b) espectro de una señal portadora senoidal $c[n] = \cos \omega_c n$; (c) espectro de la señal modulada $y[n] = x[n]c[n]$.

espectros discretos. Combinando las ecuaciones (8.58) y (8.59), vemos que para la modulación de amplitud con una portadora senoidal, debemos restringir ω_c de manera que

$$\omega_M < \omega_c < \pi - \omega_M. \tag{8.60}$$

La demodulación se puede realizar de una manera similar a la que se emplea en el caso continuo. Como se representa en la figura 8.43, la multiplicación de $y[n]$ con la misma portadora usada en el modulador da como resultado varios duplicados del espectro de la señal original, uno de los cuales está centrado alrededor de $\omega = 0$. La señal demodulada se obtiene mediante un filtrado paso bajas para eliminar los duplicados no deseados de $X(e^{j\omega})$.

Después de la explicación anterior, debería resultar evidente que el análisis de la modulación de amplitud discreta se realiza de una manera muy similar al de la modulación de amplitud continua, con algunas ligeras diferencias. Por ejemplo, como se exploró en el problema 8.47, en el sistema síncrono de modulación y demodulación, el efecto de la diferencia de fase o la diferencia de frecuencia entre la portadora senoidal en el modulador y en el demodulador es idéntica tanto en el caso discreto como en el continuo. Además, al igual que en el caso continuo, podemos usar una AM senoidal discreta

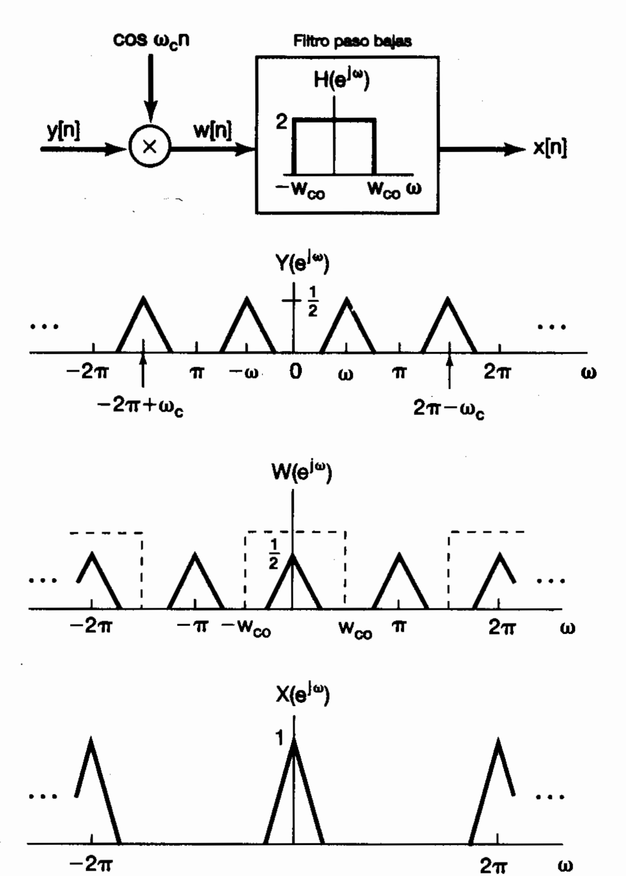


Figura 8.43 Sistema de demodulación síncrona discreta y espectro asociado.

como la base para el multiplexaje por división de frecuencia en el caso discreto. Además, como exploramos en el problema 8.48, también podemos considerar el uso de una señal discreta para modular un tren de pulsos, lo cual conduce al multiplexaje por división de tiempo de las señales discretas.

La construcción de sistemas de multiplexión discretos proporcionan un excelente ejemplo de la flexibilidad, del procesamiento discreto en general y la importancia de la operación del sobremuestreo (véase la sección 7.5.2) en particular. Considere un sistema FDM discreto con M secuencias que deseamos multiplexar por división en frecuencia. Con M canales, se requiere que la energía espectral de cada canal de entrada $x_i[n]$ sea de banda limitada; esto es,

$$X_i(\omega) = 0, \qquad \frac{\pi}{M} < |\omega| < \pi. \tag{8.61}$$

Si las secuencias originalmente ocupaban la banda de frecuencia completa que correspondía, por ejemplo, a tener muestreado un conjunto de señales continuas a la razón de Nyquist, entonces debían haber sido convertidas primero a una velocidad de muestreo más alta (es decir, sobremuestreadas) antes de multiplexar por división de frecuencia. Esta idea se explora con más detalle en el problema 8.33.

8.8.2 Transmodulación de tiempo discreto

Un contexto en el cual la modulación discreta se usa ampliamente junto con las operaciones de decimación, sobremuestreo e interpolación, que presentamos en el capítulo 7, se encuentra en los sistemas de comunicación digital. En general, en dichos sistemas las señales continuas son transmitidas a través de canales de comunicación en forma de señales discretas obtenidas mediante muestreo. Las señales continuas a menudo tienen la forma de señales multiplexadas por división de tiempo (TDM) o multiplexadas por división de frecuencia (FDM). Las señales son entonces convertidas en secuencias discretas cuyos valores se representan en forma digital para su almacenamiento o transmisión a larga distancia. En algunos sistemas, debido a las diferentes restricciones o requerimientos de la transmisión y la recepción, o debido a los conjuntos de señales que han sido multiplexadas individualmente mediante diferentes métodos, y después son multiplexadas juntas, a menudo se presenta la necesidad de convertir secuencias representadas en señales TDM en secuencias que representan señales FDM, o viceversa. Esta conversión de una modulación o esquema de multiplexaje a otro se conoce como *transmodulación* o *transmultiplexaje*. En el contexto de los sistemas de comunicación digital, una manera obvia de realizar el transmultiplexaje es convertir de nuevo en señales continuas, desmultiplexar y demodular, y después modular y multiplexar como se requiera. Sin embargo, si la nueva señal es convertida una vez más en una señal discreta, claramente resulta más eficiente para el proceso completo llevarlo a cabo directamente en el dominio discreto. La figura 8.44 muestra, en forma de diagrama de bloques, los pasos involucrados en la conversión de una señal TDM discreta a una señal FDM discreta. Observe que, después de desmultiplexar la señal TDM, cada canal debe sobremuestrearse como un paso previo a la multiplexión por división de frecuencia.

8.9 RESUMEN

En este capítulo hemos examinado varios conceptos básicos asociados con los sistemas de comunicación. En particular, hemos examinado el concepto de modulación, según el

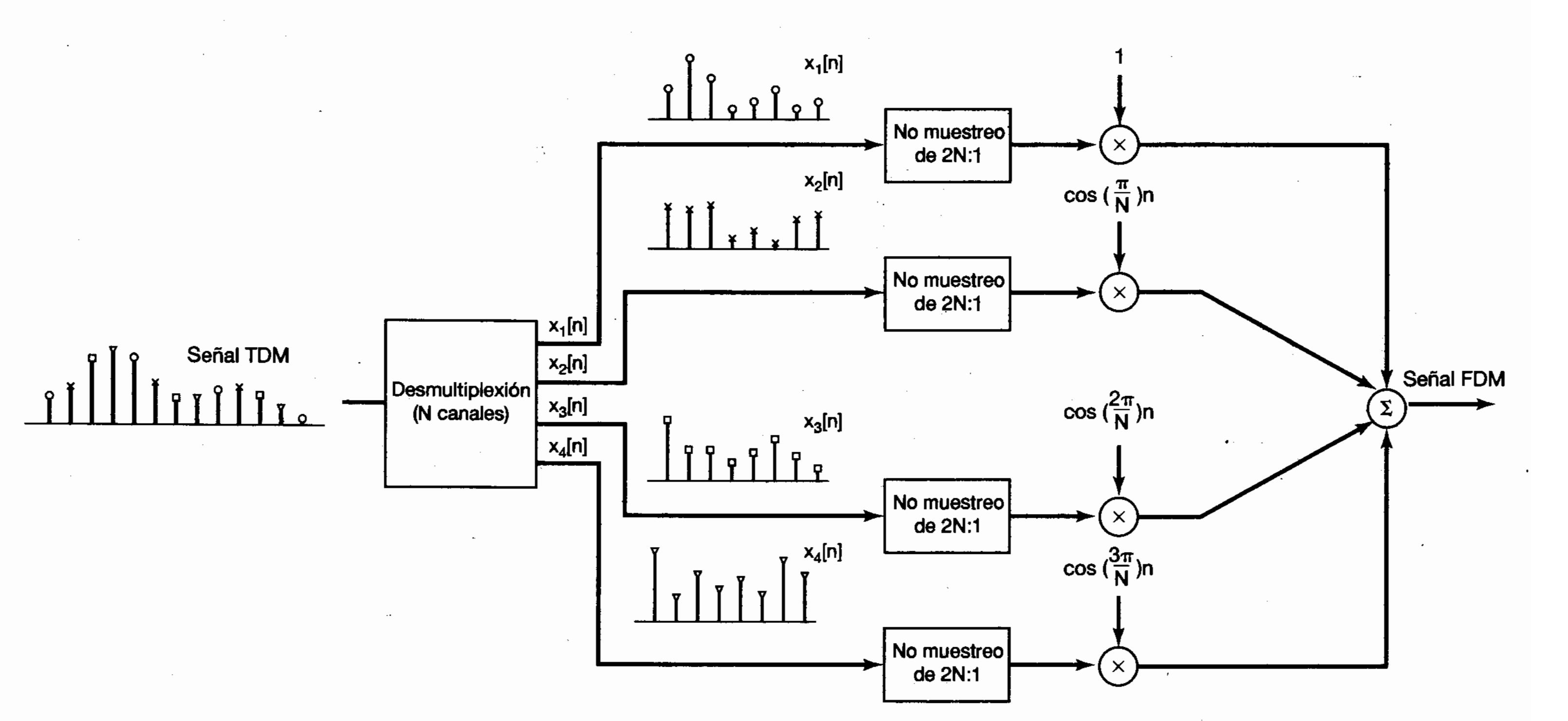


Figura 8.44 Diagrama de bloques para transmultiplexaje TDM a FDM.

cual una señal que deseamos comunicar se usa para modular una segunda señal a la que se denomina portadora, además de que hemos revisado con detalle el concepto de modulación de amplitud. Las propiedades de modulación de amplitud se pueden interpretar más fácilmente en el dominio de la frecuencia gracias a la propiedad de multiplicación de la transformada de Fourier. La modulación de amplitud con una portadora exponencial compleja o una portadora senoidal se usa a menudo para desplazar el espectro de una señal en frecuencia y se aplica, por ejemplo, en sistemas de comunicación para colocar el espectro en un intervalo de frecuencia accesible para la transmisión y permitir la multiplexión por división de frecuencia. También analizamos las variaciones de la modulación de amplitud senoidal, tales como la inserción de una señal portadora para los sistemas asíncronos y los sistemas de una banda y doble banda lateral.

Además examinamos otras formas de comunicación basada en la modulación. A este respecto, presentamos brevemente los conceptos de modulación de frecuencia y de fase. Aunque estas formas de modulación son más difíciles de analizar en detalle, es posible obtener un conocimiento significativo sobre sus características mediante el dominio de la frecuencia.

Examinamos con cierto detalle la modulación de amplitud de una señal de pulso, lo cual nos condujo a los conceptos de multiplexión por división de tiempo y de modulación de amplitud de pulsos, en la cual se usan muestras sucesivas de una señal discreta para modular la amplitud de una secuencia de pulsos. Esto condujo a su vez a un análisis de la modulación discreta y de la comunicación digital, en que la flexibilidad del procesamiento discreto facilita el diseño y la puesta en práctica de sistemas de comunicación más complejos que involucran conceptos tales como modulación por codificación de pulsos y transmodulación.

Capítulo 8 Problemas

La primera sección de problemas comprende la categoría básica, y las respuestas se proporcionan al final del libro. Las dos secciones restantes contienen problemas que abarcan las categorías básica y avanzada, respectivamente.

PROBLEMAS BÁSICOS CON RESPUESTAS

8.1. Sea $x(t)$ una señal para la cual $X(j\omega) = 0$ cuando $|\omega| > \omega_M$. Se especifica otra señal $y(t)$ la cual tiene transformada de Fourier $Y(j\omega) = 2X(j(\omega - \omega_c))$. Determine una señal $m(t)$ tal que

$$x(t) = y(t)m(t).$$

8.2. Sea $x(t)$ una señal de valor real para la cual $X(j\omega) = 0$ cuando $|\omega| > 1{,}000\pi$. Suponiendo que $y(t)$ 5 $e^{j\omega_c t} x(t)$, responda las siguientes preguntas:

(a) ¿Qué restricción debe imponerse sobre ω_c para asegurar que $x(t)$ se pueda recuperar a partir de $y(t)$?

(b) ¿Qué restricción debe imponerse sobre ω_c para asegurar que $x(t)$ se pueda recuperar a partir de $\mathcal{R}e\{y(t)\}$?

8.3. Sea $x(t)$ una señal de valor real para la cual $X(j\omega) = 0$ cuando $|\omega| > 2{,}000\pi$. La modulación de amplitud se lleva a cabo para producir la señal

$$g(t) = x(t)\,\text{sen}(2{,}000\pi t).$$

Proponemos una técnica de modulación, la cual propuesta se ilustra en la figura P8.3 donde $g(t)$ es la entrada, $y(t)$ es la salida y el filtro paso bajas ideal presenta frecuencia de corte de $2{,}000\pi$ y una ganancia de la banda de paso de 2. Determine $y(t)$.

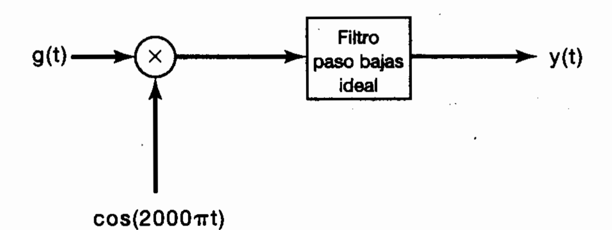


Figura P8.3

8.4. Suponga que

$$x(t) = \text{sen}\,200\pi t + 2\,\text{sen}\,400\pi t$$

y

$$g(t) = x(t)\,\text{sen}\,400\pi t.$$

Si el producto $g(t)(\text{sen}\,400\pi t)$ se pasa a través de un filtro paso bajas ideal con frecuencia de corte de 400π y ganancia de 2 en la banda de paso, determine la señal obtenida a la salida del filtro paso bajas.

8.5. Suponga que deseamos transmitir la señal

$$x(t) = \frac{\text{sen}\,1{,}000\pi t}{\pi t}$$

utilizando un modulador que genere la señal

$$w(t) = (x(t) + A)\cos(10{,}000\pi t).$$

Determine el valor más grande permisible del índice de modulación m que permita hacer uso de la demodulación asíncrona usar para recuperar $x(t)$ a partir de $w(t)$. Para este problema, usted debe suponer que la magnitud máxima adoptada por un lóbulo lateral de una función sinc ocurre en el instante de tiempo que se encuentra exactamente a la mitad del camino entre los dos cruces por cero que encierran al lóbulo lateral.

8.6. Suponga que $x(t)$ es una señal cuya transformada de Fourier $X(j\omega)$ es cero para $|\omega| > \omega_M$. La señal $g(t)$ se puede expresar en términos de $x(t)$ como

$$g(t) = x(t)\cos\omega_c t - \left\{ x(t)\cos\omega_c t * \left(\frac{\text{sen}\,\omega_c t}{\pi t}\right)\right\},$$

donde $*$ denota la convolución y $\omega_c > \omega_M$. Determine el valor de la constante A tal que

$$x(t) = (g(t) \cos \omega_c t) * \frac{A \text{ sen } \omega_M t}{\pi t}.$$

8.7. Un sistema AM-SSB/SC se aplica a una señal $x(t)$ cuya transformada de Fourier $X(j\omega)$ es cero para $|\omega| > \omega_M$. La frecuencia portadora ω_c que se usa en el sistema es mayor que ω_M. Consideremos que $g(t)$ denota la salida del sistema, dando por sentado que sólo las bandas laterales *superiores* se retienen. Consideremos también que $q(t)$ denota la salida del sistema y demos por hecho que sólo las bandas laterales *inferiores* se retienen. El sistema en la figura P8.7 se propone para convertir $g(t)$ en $q(t)$. ¿Cómo debería estar relacionado el parámetro ω_0 en la figura con ω_c? ¿Cuál debe ser el valor de la ganancia A de la banda de paso?

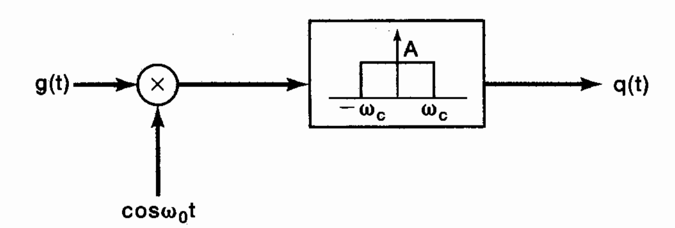


Figura P8.7

8.8. Considere el sistema de modulación mostrado en la figura P8.8. La señal de entrada $x(t)$ tiene una transformada de Fourier $X(j\omega)$ que es cero para $|\omega| > \omega_M$. Suponiendo que $\omega_c > \omega_M$, responda las siguientes preguntas:

(a) ¿Se garantiza que $y(t)$ es real si $x(t)$ es real?

(b) ¿Puede recuperarse $x(t)$ a partir de $y(t)$?

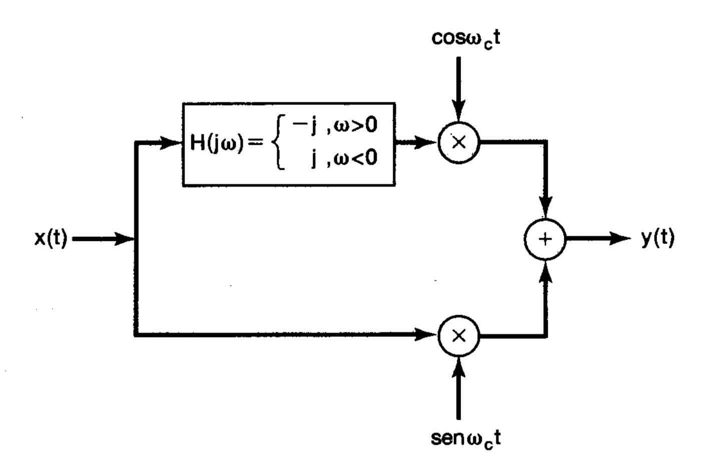


Figura P8.8

8.9. Dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, cada una con transformada de Fourier que es cero para $|\omega| > \omega_c$, se combinarán usando el multiplexaje por división de frecuencia. La técnica AM-SSB/SC de la figura 8.21 se aplica a cada señal en una forma tal que retiene las bandas laterales más bajas. Las frecuencias portadoras usadas para $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son ω_c y $2\omega_c$, respectivamente. Las dos señales moduladas se suman entonces para obtener la señal FDM $y(t)$.

(a) ¿Para qué valores de ω se garantiza que $Y(j\omega)$ sea cero?
(b) Especifique los valores de A y ω_0 de manera que

$$x_1(t) = \left[\left\{ y(t) * \frac{\operatorname{sen} \omega_0 t}{\pi t} \right\} \cos \omega_0 t \right] * \frac{A \operatorname{sen} \omega_c t}{\pi t},$$

donde $*$ denota la convolución.

8.10. Una señal $x(t)$ se multiplica por el tren de pulsos rectangular $c(t)$ mostrado en la figura P8.10.

(a) ¿Qué restricción debe imponerse sobre $X(j\omega)$ para asegurar que $x(t)$ se pueda recuperar a partir del producto $x(t)c(t)$ usando un filtro paso bajas ideal?
(b) Especifique la frecuencia de corte ω_c y la ganancia A de la banda de paso del filtro paso bajas ideal que se necesita para recuperar $x(t)$ a partir de $x(t)c(t)$. [Suponga que $X(j\omega)$ satisface la restricción determinada en la parte (a).]

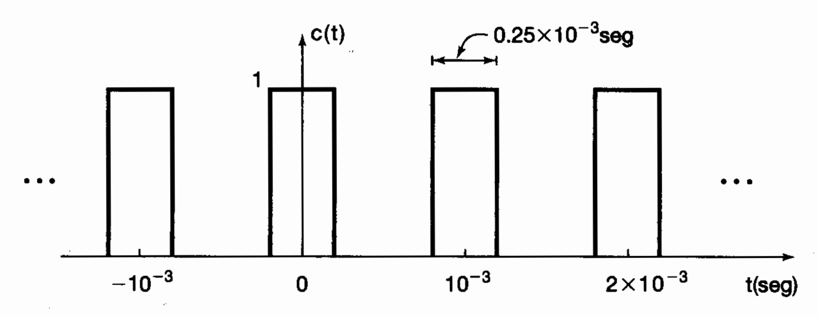


Figura P8.10

8.11. Sea

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_c t},$$

una señal periódica de valor real, donde $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$. También, sea $x(t)$ una señal con $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \omega_c/2$. La señal $x(t)$ se usa para modular la portadora $c(t)$ para obtener

$$y(t) = x(t)c(t).$$

(a) Especifique la banda de paso y la ganancia de la banda de paso de un filtro paso banda ideal tal que, con la entrada $y(t)$, la salida del filtro sea

$$g(t) = (a_1 e^{j\omega_c t} + a_1 e^{-j\omega_c t})x(t).$$

(b) Si $a_1 = |a_1|e^{j\sphericalangle a_1}$, demuestre que

$$g(t) = A \cos(\omega_c t + \phi)x(t),$$

y exprese A y ϕ en términos de $|a_1|$ y $\sphericalangle a_1$.

8.12. Considere un conjunto de 10 señales, $x_i(t), i = 1, 2, 3, \ldots, 10$. Suponga que cada $x_i(t)$ tiene transformada de Fourier tal que $X_i(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq 2{,}000\pi$. Las 10 señales serán multiplexadas por división de tiempo después de que cada una sea multiplicada por la portadora $c(t)$ que se muestra en la figura P8.12. Si el periodo T de $c(t)$ se selecciona para que tenga el valor máximo permisible, ¿cuál es el valor más grande de Δ para que las 10 señales se puedan multiplexar por división de tiempo?

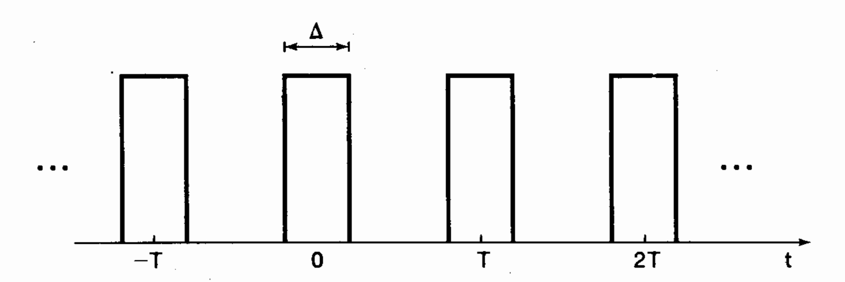


Figura P8.12

8.13. Una clase de pulsos muy usados en PAM son los que tienen una respuesta en frecuencia *coseno elevado*. La respuesta en frecuencia de un miembro de esta clase es

$$P(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\omega T_1}{2}\right), & 0 \le |\omega| \le \frac{2\pi}{T_1} \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases},$$

donde T_1 es el espaciamiento intersímbolo.

(a) Determine $p(0)$.

(b) Determine $p(kT_1)$, donde $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

8.14. Considere la señal modulada en frecuencia

$$y(t) = \cos(\omega_c t + m \cos \omega_m t),$$

donde $\omega_c >> \omega_m$ y $m << \pi/2$. Especifique una aproximación a $Y(j\omega)$ para $\omega > 0$.

8.15. ¿Para qué valores de ω_0 en el intervalo de $-\pi < \omega_0 \le \pi$ la modulación de amplitud con portadora $e^{j\omega_0 n}$ equivale a la modulación de amplitud con portadora $\cos \omega_0 n$?

8.16. Suponga que $x[n]$ es una señal discreta de valor real cuya transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ muestra la propiedad de que

$$X(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{para } \frac{\pi}{8} \le \omega \le \pi.$$

Usamos $x[n]$ para modular una portadora senoidal $c[n] = \text{sen}(5\pi/2)n$ para producir

$$y[n] = x[n]c[n].$$

Determine los valores de ω en el intervalo $0 \le \omega \le \pi$ para el cual se garantiza que $Y(e^{j\omega})$ sea cero.

8.17. Considere una señal arbitraria de duración finita $x[n]$ con transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$. Generamos una señal $g[n]$ mediante la inserción de muestras de valor cero:

$$g[n] = x_{(4)}[n] = \begin{cases} x[n/4], & n = 0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \ldots \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

La señal $g[n]$ se pasa a través de un filtro paso bajas ideal con frecuencia de corte $\pi/4$ y ganancia unitaria en la banda de paso para producir una señal $q[n]$. Por último, obtenemos

$$y[n] = q[n] \cos\left(\frac{3\pi}{4} n\right).$$

¿Para qué valores de ω se garantiza que $Y(e^{j\omega})$ sea cero?

8.18. Sea $x[n]$ una señal discreta de valor real cuya transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ es cero para $\omega \geq \pi/4$. Deseamos obtener una señal $y[n]$ cuya transformada de Fourier tenga la propiedad de que, en el intervalo $-\pi < \omega \leq \pi$,

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} X(e^{j(\omega - \frac{\pi}{2})}), & \frac{\pi}{2} < \omega \leq \frac{3\pi}{4} \\ X(e^{j(\omega + \frac{\pi}{2})}), & -\frac{3\pi}{4} < \omega \leq -\frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Proponemos el sistema de la figura P8.18 para obtener $y[n]$ a partir de $x[n]$. Determine las restricciones que la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del filtro en la figura debe satisfacer para que el sistema propuesto funcione.

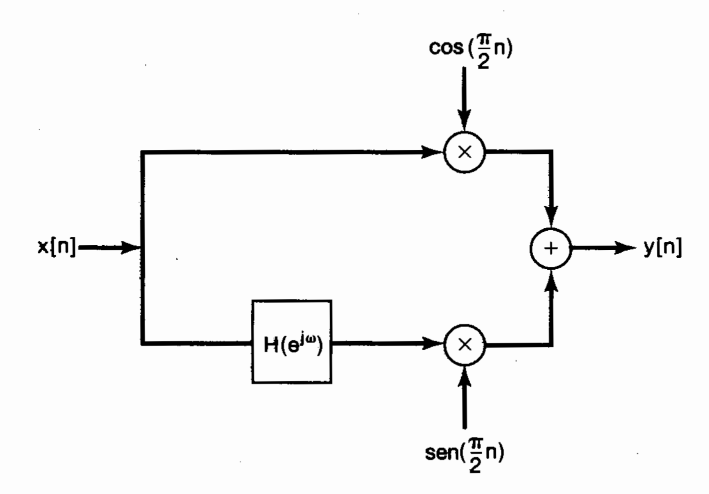


Figura P8.18

8.19. Considere 10 señales arbitrarias de valor real $x_i[n]$, $i = 1, 2, \ldots, 10$. Suponga que cada $x_i[n]$ se sobremuestrea por un factor de N, y después se le aplica una modulación de amplitud senoidal con una frecuencia portadora $\omega_i = i\pi/10$. Determine el valor de N que garantice que las 10 señales moduladas se pueden sumar para obtener una señal FDM $y[n]$ a partir de la cual cada $x_i[n]$ pueda ser recuperada.

8.20. Sean $v_1[n]$ y $v_2[n]$ dos señales discretas obtenidas mediante el muestreo (sin traslape) de señales continuas. Sea

$$y[n] = \hat{v}_1[n] + \hat{v}_2[n-1]$$

una señal TDM donde, para $i = 1, 2$,

$$\hat{v}_i[n] = \begin{cases} v_i\left[\frac{n}{2}\right], & n = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

La señal $y[n]$ se procesa mediante el sistema S representado en la figura P8.20 para obtener una señal $g[n]$. Para los dos filtros usados en S,

$$H_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \omega \leq \pi \end{cases}.$$

Determine la señal $p[n]$ usada en S tal que $g[n]$ represente la multiplexión por división de frecuencia de $v_1[n]$ y $v_2[n]$.

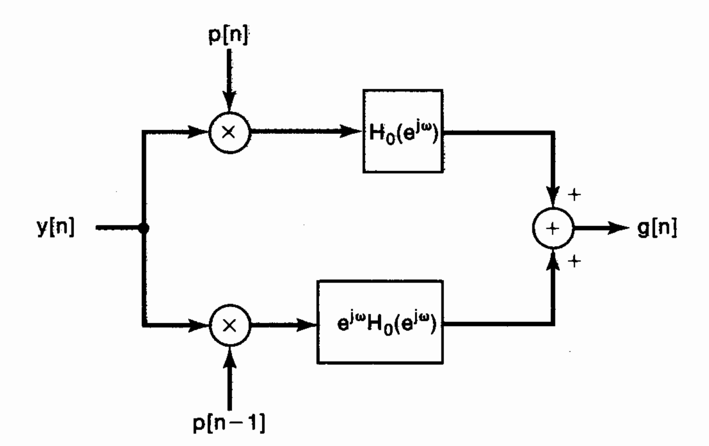


Figura P8.20

PROBLEMAS BÁSICOS

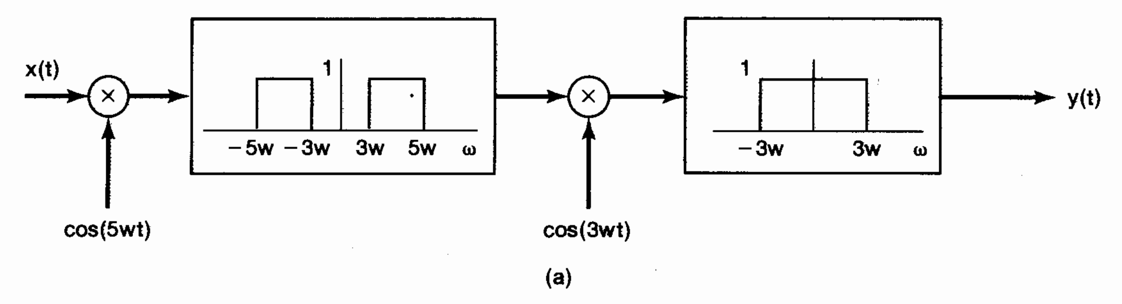
8.21. En las secciones 8.1 y 8.2 analizamos el sistema de modulación y demodulación de amplitud senoidal de la figura 8.8, considerando que la fase θ_c de la señal portadora era cero.

(a) Para el caso más general de una fase arbitraria θ_c en la figura, demuestre que la señal en el sistema de demodulación puede expresarse como

$$w(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos(2\omega_c t + 2\theta_c).$$

(b) Si $x(t)$ tiene un espectro que es cero para $|\omega| \geq \omega_M$, determine las relaciones que debe haber entre w_{co} [la frecuencia de corte del filtro paso bajas ideal de la figura 8.8(b)], ω_c (la frecuencia portadora) y ω_M de manera que la salida del filtro paso bajas sea proporcional a $x(t)$. ¿Su respuesta depende de la fase θ_c de la portadora?

8.22. En la figura P8.22(a) aparece un sistema con una señal de entrada $x(t)$ y una señal de salida $y(t)$. La señal de entrada tiene la transformada de Fourier $X(j\omega)$ mostrada en la figura P8.22(b). Determine y trace $Y(j\omega)$, el espectro de $y(t)$.



(a)

Figura P8.22

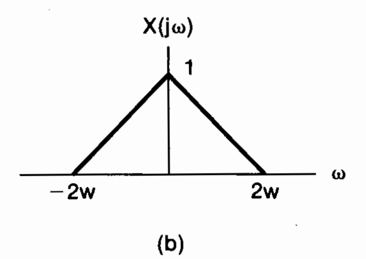


Figura P8.22 *Continuación*

8.23. En la sección 8.2 analizamos el efecto que una pérdida de sincronización en la fase entre las señales portadoras del modulador y del demodulador tiene sobre la modulación de amplitud senoidal. Mostramos que la salida de la demodulación se atenúa por el coseno de la diferencia de fase, y en particular, cuando el modulador y el demodulador tienen una diferencia de fase de $\pi/2$, la salida del demodulador es cero. Como demostraremos en este problema, también es importante tener sincronización de *frecuencia* entre el modulador y el demodulador.

Examine los sistemas de modulación y demodulación de amplitud de la figura 8.8 con $\theta_c = 0$ y con un cambio en la *frecuencia* de la portadora del demodulador de manera que

$$w(t) = y(t) \cos \omega_d t,$$

donde

$$y(t) = y(t) \cos \omega_c t.$$

Señalemos la diferencia de frecuencia entre el modulador y el demodulador como $\Delta\omega$ (es decir, $\omega_d - \omega_c = \Delta\omega$). También suponga que $x(t)$ tiene banda limitada con $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \omega_M$, y suponga que la frecuencia de corte de w_{co} del filtro paso bajas en el demodulador satisface la siguiente desigualdad:

$$\omega_M + \Delta\omega < w_{co} < 2\omega_c + \Delta\omega - \omega_M.$$

(a) Demuestre que la salida del filtro paso bajas del demodulador es proporcional a $x(t)\cos(\Delta\omega t)$.

(b) Si el espectro de $x(t)$ es el que se muestra en la figura P8.23, trace el espectro de la salida del demodulador.

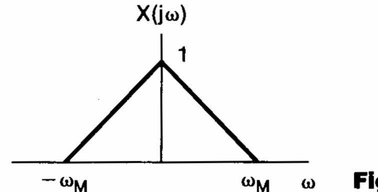


Figura P8.23

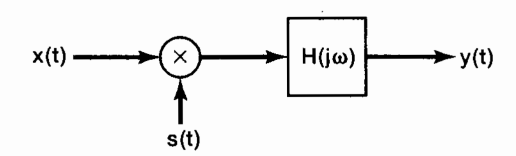
8.24. En la figura P8.24 se muestra un sistema usado para modulación de amplitud senoidal, donde $x(t)$ es de banda limitada con frecuencia máxima ω_M tal que $X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$.

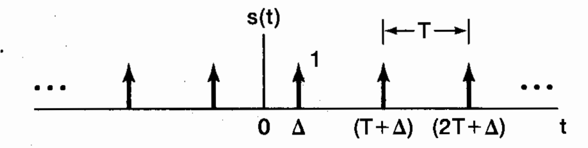
Como se indica, la señal $s(t)$ es un tren de impulsos periódicos con periodo T y un desvío a partir de $t = 0$ de Δ. El sistema $H(j\omega)$ es un filtro paso banda.

(a) Con $\Delta = 0$, $\omega_M = \pi/2T$, $\omega_l = \pi/T$ y $\omega_h = 3\pi/T$, demuestre que $y(t)$ es proporcional a $x(t)\cos\omega_c t$, donde $\omega_c = 2\pi/T$.

(b) Si ω_M, ω_l y ω_h son las mismas que en la parte (a), pero Δ no necesariamente es cero, demuestre que $y(t)$ es proporcional a $x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c)$, y determine ω_c y θ_c como una función de T y Δ.

(c) Determine el valor máximo permisible de ω_M en relación con T de manera que $y(t)$ sea proporcional a $x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c)$.





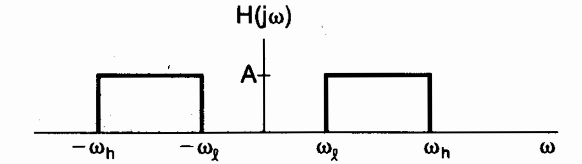


Figura P8.24

8.25. Un sistema comúnmente usado para asegurar la privacidad en la comunicación hablada es el *codificador de voz*. Como se ilustra en la figura P8.25(a), la entrada al sistema es una señal normal de voz $x(t)$ y la salida es la versión codificada $y(t)$. La señal $y(t)$ es transmitida y entonces decodificada en el receptor.

Demos por hecho que todas las entradas al codificador de voz son reales y de banda limitada a la frecuencia ω_M, esto es, $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$. Dada cualquiera de tales entradas, nuestro codificador propuesto permuta diferentes bandas del espectro de la señal de entrada. Además, la señal de salida es real y de banda limitada a la misma banda de frecuencia; es decir, $Y(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$. El algoritmo de permutación específico para el codificador es

$$Y(j\omega) = X(j(\omega - \omega_M)), \quad \omega > 0,$$
$$Y(j\omega) = X(j(\omega + \omega_M)), \quad \omega < 0.$$

(a) Si $X(j\omega)$ está dada por el espectro mostrado en la figura P8.25(b), trace el espectro de la señal codificada $y(t)$.

(b) Usando amplificadores, multiplicadores, sumadores, osciladores y cualquier filtro ideal que sea necesario, dibuje el diagrama de bloques para ese codificador ideal.

(c) De nueva cuenta, usando amplificadores, multiplicadores, sumadores, osciladores y filtros ideales, dibuje un diagrama de bloques para el decodificador asociado.

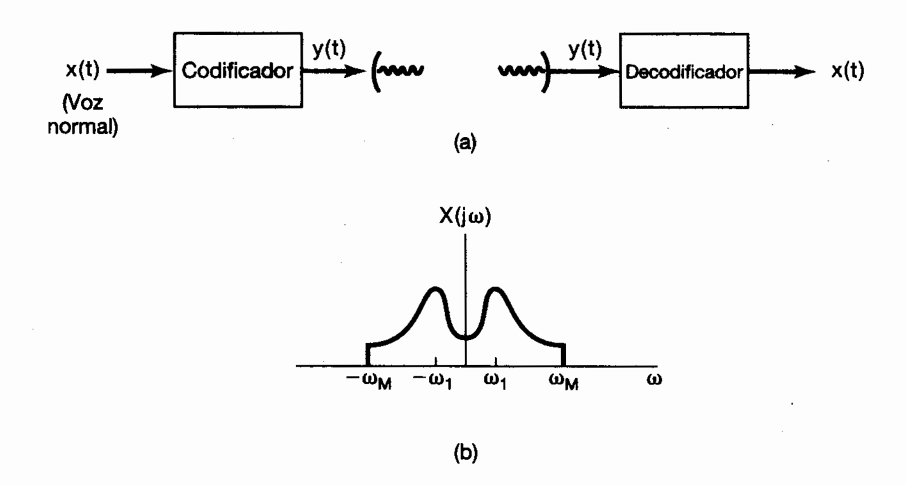


Figura P8.25

8.26. En la sección 8.2.2 analizamos el uso de un detector de envolvente para la demodulación asíncrona de una señal AM con la forma $y(t) = [x(t) + A]\cos(\omega_c t + \theta_c)$. Un sistema de demodulación alternativo, el cual tampoco requiere de sincronización de fase pero sí requiere de sincronización de frecuencia, se muestra en forma de diagrama de bloques en la figura P8.26. Los dos filtros paso bajas tienen una frecuencia de corte de ω_c. La señal $y(t) = [x(t) + A]\cos(\omega_c t + \theta_c)$ con θ_c constante pero desconocida. La señal $x(t)$ es de banda limitada con $X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$ y con $\omega_M < \omega_c$. Como se requirió para el uso del detector de envolvente, $x(t) + A > 0$ para toda t.

Demuestre que el sistema de la figura P8.26 puede usarse para recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$ sin conocer la fase θ_c del modulador.

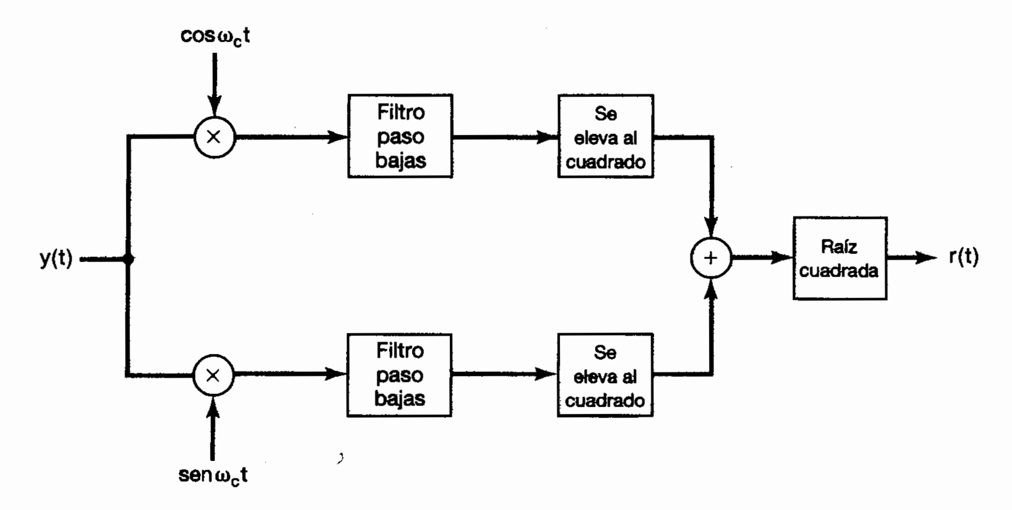


Figura P8.26

8.27. Como se analizó en la sección 8.2.2, la modulación-demodulación asíncrona requiere la aplicación de una señal portadora de manera que la señal moduladora tenga de la forma

$$y(t) = [A + x(t)] \cos(\omega_c t + \theta_c), \tag{P8.27-1}$$

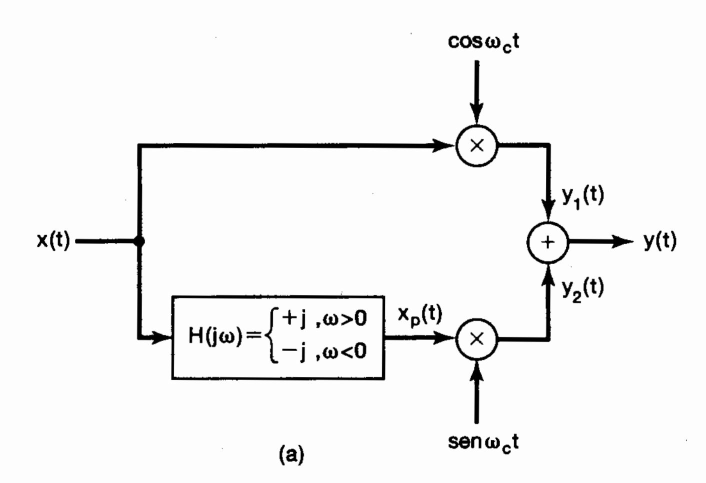
donde $A + x(t) > 0$ para toda t. La presencia de la portadora significa que se requiere más potencia del transmisor, lo cual representa una ineficacia.

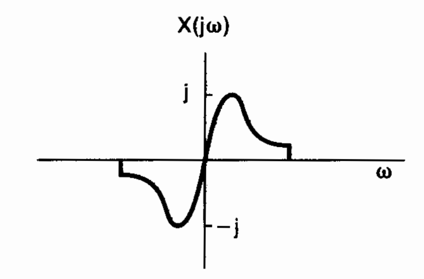
(a) Sea $x(t) = \cos \omega_M t$ con $\omega_M < \omega_c$ y $A + x(t) > 0$. Para una señal periódica $y(t)$ con periodo T, la potencia promedio en el tiempo se define como $P_y = (1/T) \int_T y^2(t)dt$. Determine y trace P_y para $y(t)$ en la ecuación (P8.27-1). Exprese su respuesta como una función del índice de modulación m, definido como el valor máximo absoluto de $x(t)$ dividido entre A.

(b) La eficiencia de transmisión de una señal de amplitud modulada se define como la razón entre la potencia en las bandas laterales de la señal y la potencia total de la señal. Con $x(t) = \cos \omega_M t$, con $\omega_M < \omega_c$ y $A + x(t) > 0$, determine y trace la eficiencia de la señal modulada como una función del índice de modulación m.

8.28. En la sección 8.4 analizamos la puesta en práctica de la modulación de banda lateral única usando redes de desplazamiento de fase de 90°, y en las figuras 8.21 y 8.22 ilustramos específicamente el sistema y los espectros asociados que se necesitan para retener las bandas laterales inferiores.

En la figura P8.28(a) se muestra el sistema correspondiente para conservar las bandas laterales superiores.





(b)

Figura P8.28

(a) Con la misma $X(j\omega)$ ilustrada en la figura 8.22, trace $Y_1(j\omega)$, $Y_2(j\omega)$ y $Y(j\omega)$ para el sistema de la figura P8.28(a), y demuestre que sólo las bandas laterales superiores son retenidas.

(b) Para una $X(j\omega)$ imaginaria, como se ilustra en la figura P8.28(b), trace $Y_1(j\omega)$, $Y_2(j\omega)$ y $Y(j\omega)$ para el sistema de la figura P8.28(a), y demuestre que para este caso, también únicamente las bandas laterales superiores son retenidas.

8.29. La modulación de banda lateral única se utiliza comúnmente en la comunicación telefónica punto a punto (entre estaciones fijas). Ofrece muchas ventajas, que incluyen el uso efectivo de la potencia disponible, la conservación del ancho de banda y la insensibilidad a algunas formas de desvanecimiento aleatorio en el canal. En los sistemas de doble banda lateral con portadora suprimida (DSB/SC) el espectro de la señal moduladora aparece en su totalidad en dos lugares del espectro transmitido. La modulación de banda lateral única elimina esta redundancia, conservando así el ancho de banda e incrementando la razón señal a ruido dentro de la parte restante del espectro que es transmitido.

En la figura P8.29(a) se muestran dos métodos de generación de la señal de amplitud modulada de banda lateral única. El sistema en la parte superior se puede usar para generar una señal de banda lateral única para el cual la banda lateral inferior es retenida, y el sistema de la parte inferior puede producir una señal de banda lateral única para la cual la banda lateral superior es la que se retiene.

(a) Para $X(j\omega)$ como se muestra en la figura P8.29(b), determine y trace $S(j\omega)$, la transformada de Fourier de la señal modulada de la banda lateral inferior, y $R(j\omega)$, la transformada de Fourier de la señal modulada de la banda lateral superior. Suponga que $\omega_c > \omega_3$.

El esquema de la modulación de banda lateral superior es particularmente útil en comunicaciones de voz, y cualquier filtro real tiene una región de transición finita para la frecuencia de corte (es decir, cerca de ω_c). Esta región puede ser acomodada con distorsión despreciable, ya que la señal de voz no tiene energía significativa cerca de $\omega = 0$ (es decir, para $|\omega| < \omega_1 = 2\pi \times 40$ Hz).

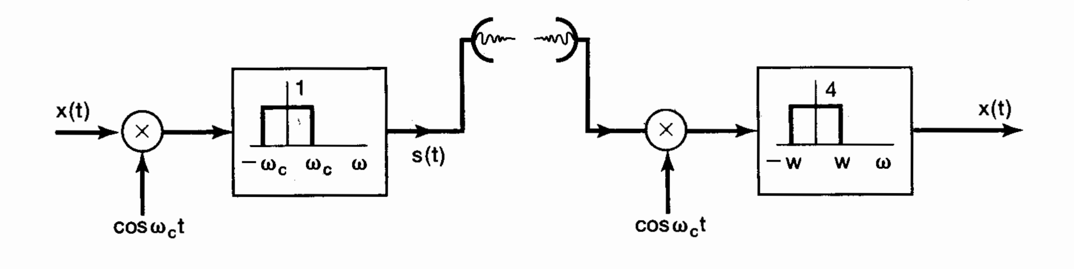
(b) Otro procedimiento para generar una señal de banda lateral única es llamado el *método de desplazamiento de fase* y se ilustra en la figura P8.29(c). Demuestre que la señal de banda lateral única generada es proporcional a la generada por el esquema de modulación de banda lateral inferior de la figura P8.29(a) [es decir, $p(t)$ es proporcional a $s(t)$].

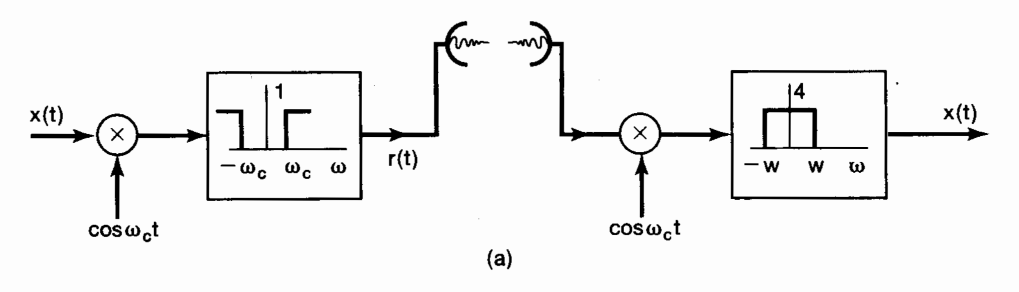
(c) Las tres señales AM-SSB pueden ser demoduladas usando el esquema mostrado en el lado derecho de la figura P8.29(a). Demuestre que cuando la señal recibida es $s(t)$, $r(t)$ o $p(t)$, mientras que el oscilador en el receptor esté en fase con los osciladores en el transmisor, y $w = \omega_c$, la salida del demodulador será $x(t)$.

La distorsión que se produce cuando el oscilador no está en fase con el transmisor, llamada *distorsión de cuadratura*, puede ser muy problemática en la comunicación de datos.

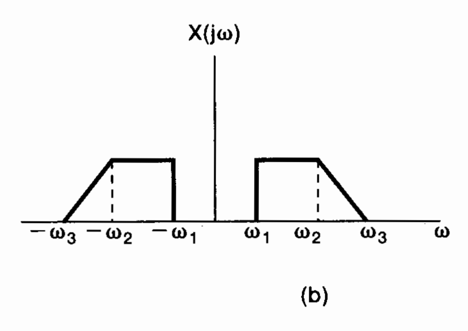
8.30. Un sistema de modulación de amplitud de pulsos con una portadora de tren de pulsos puede modelarse como en la figura P8.30(a). La salida del sistema es $q(t)$.

(a) Sea $x(t)$ una señal de banda limitada [es decir, $X(j\omega) = 0$, $|\omega| \geq \pi/T$], como se muestra en la figura P8.30(b). Determine y dibuje $R(j\omega)$ y $Q(j\omega)$.

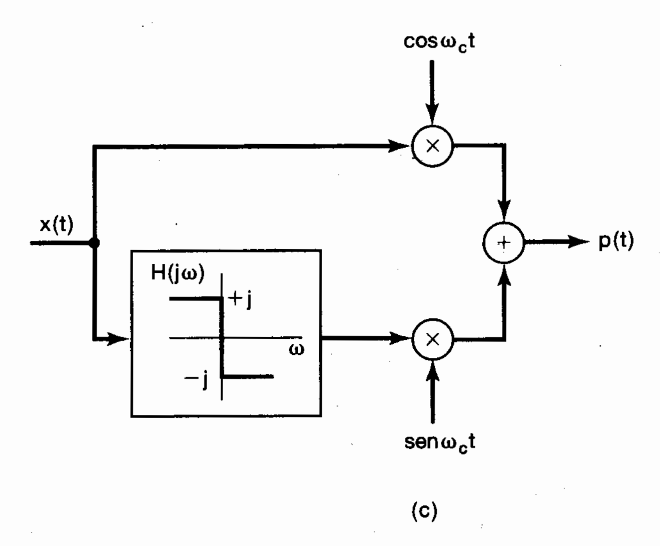




(a)



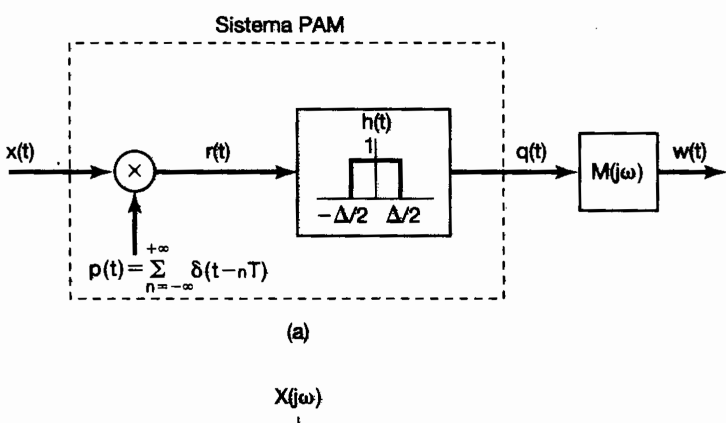
(b)



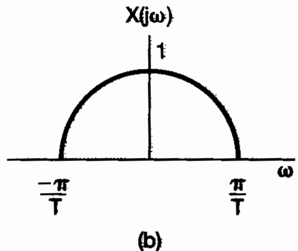
(c)

Figura P8.29

(b) Encuentre el valor máximo de Δ tal que $w(t) = x(t)$ con un filtro apropiado $M(j\omega)$.
(c) Determine y trace un filtro compensador $M(j\omega)$ tal que $w(t) = x(t)$.



(a)



(b)

Figura P8.30

8.31. Considere una señal $x[n]$ discreta con espectro $X(e^{j\omega})$, y sea $p(t)$ una función de pulso continua con espectro $P(j\omega)$. Formamos la señal

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,p(t-n).$$

(a) Determine el espectro $Y(j\omega)$ en términos de $X(e^{j\omega})$ y $P(j\omega)$.
(b) Si

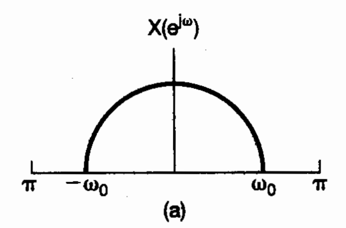
$$p(t) = \begin{cases} \cos 8\pi t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases},$$

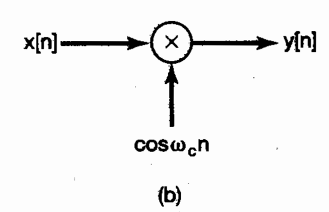
determine $P(j\omega)$ y $Y(j\omega)$.

8.32. Considere una señal $x[n]$ discreta con transformada de Fourier, como aparece en la figura P8.32(a). La señal es modulada en amplitud por una secuencia senoidal, como se indica en la figura P8.32(b).

(a) Determine y trace $Y(e^{j\omega})$, que es la transformada de Fourier de $y[n]$.

(b) Un sistema de demodulación propuesto se muestra en la figura P8.32(c). ¿Para qué valor de θ_c, ω_{lp} y G $\hat{x}[n]$ será igual a $x[n]$? ¿Será necesario establecer alguna restricción en ω_c y ω_{lp} para garantizar que $x[n]$ pueda recuperarse a partir de $y[n]$?





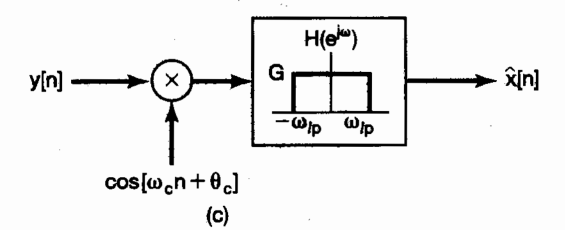


Figura P8.32

8.33. Consideremos el multiplexaje por división de frecuencia de las señales discretas $x_i[n]$, $i = 0, 1, 2, 3$. Además, cada $x_i[n]$ ocupa potencialmente la banda de frecuencia completa $(-\pi < \omega < \pi)$. La modulación senoidal de las versiones sobremuestreadas de cada una de estas señales se puede llevar a cabo usando técnicas de doble banda lateral o de banda lateral única.

(a) Suponga que cada señal $x_i[n]$ se muestrea en forma apropiada y después se modula con $\cos[i(\pi/4)n]$. ¿Cuál es la cantidad mínima de sobremuestreo que se debe llevar a cabo en cada $x_i[n]$, para asegurar que el espectro de la señal FDM no tenga traslape?

(b) Si el sobremuestreo de cada $x_i[n]$ se restringe a estar por un factor de 4, ¿cómo usaría usted las técnicas de banda lateral única para asegurar que la señal FDM no tenga ningún traslape? *Sugerencia:* Vea el problema 8.17.

PROBLEMAS AVANZADOS

8.34. En el análisis de los sistemas de modulación de amplitud, la modulación y la demodulación se efectuaron mediante el uso de un multiplicador. Debido a que los multiplicadores a menudo son difíciles de poner en práctica, muchos sistemas reales usan un elemento no lineal. En este problema ilustramos el concepto básico.

En la figura P8.34 mostramos uno de dichos sistemas no lineales para la modulación de amplitud. El sistema implica elevar al cuadrado la *suma* de la señal moduladora y la portadora, y después pasarla a través de un filtro paso banda para obtener la señal de amplitud modulada.

Suponga que $x(t)$ es de banda limitada de manera que $X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$. Determine los parámetros del filtro paso banda A, ω_l y ω_h tales que $y(t)$ sea una versión de amplitud modulada de $x(t)$ [es decir, de manera que $y(t) = x(t) \cos \omega_c t$]. Especifique las restricciones necesarias, si es que las hay, sobre ω_c y ω_M.

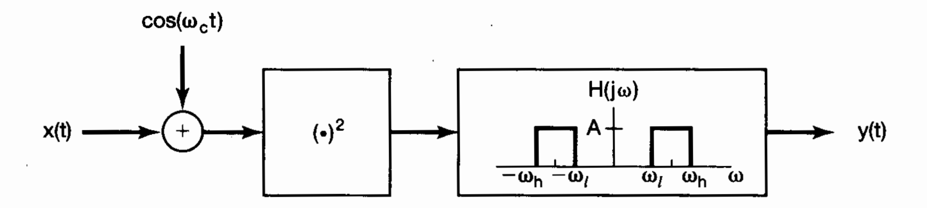


Figura P8.34

8.35. El esquema de modulación-demodulación propuesto a continuación es similar a la modulación de amplitud senoidal, excepto que la demodulación se realiza con una onda cuadrada con el mismo cruce por cero que $\cos \omega_c t$. El sistema se muestra en la figura P8.35(a); donde la relación entre $\cos \omega_c t$ y $p(t)$ se muestra en la figura P8.35(b). Sea la señal de entrada $x(t)$ una señal de banda limitada con frecuencia máxima $\omega_M < \omega_c$, como se muestra en la figura P8.35(c).

(a) Trace y dimensione las partes real e imaginaria de $Z(j\omega)$, $P(j\omega)$ y $Y(j\omega)$, que corresponden a las transformadas de Fourier de $z(t)$, $p(t)$ y $y(t)$, respectivamente.

(b) Trace y dimensione un filtro $H(j\omega)$ de manera que $v(t) = x(t)$.

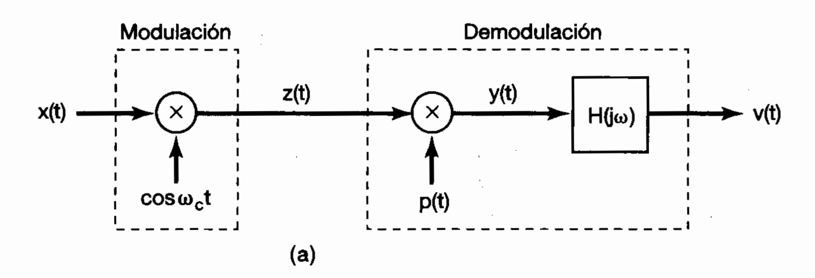


Figura P8.35

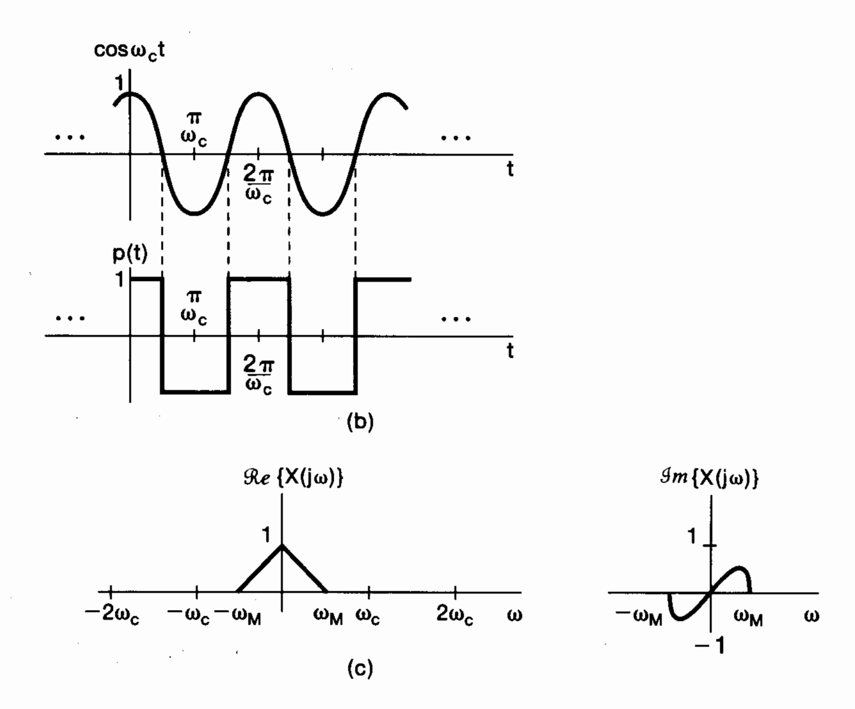


Figura P8.35 *Continuación*

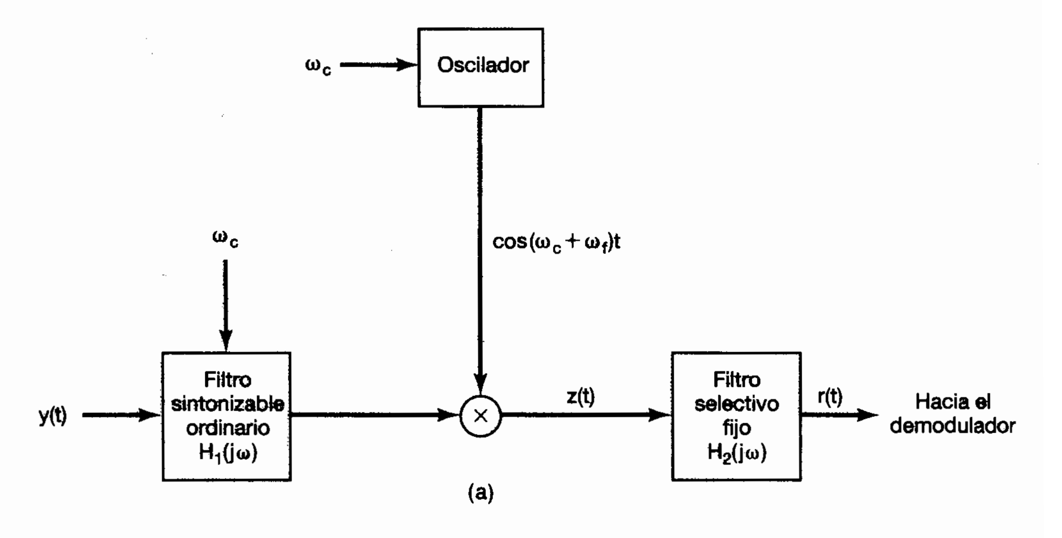
8.36. La exactitud en la demultiplexión y demodulación de las señales de radio y televisión por lo general se logra mediante el uso de un sistema llamado receptor superheterodino, el cual es equivalente a un filtro sintonizable. El sistema básico se muestra en la figura P8.36(a).

(a) La señal de entrada $y(t)$ consiste de la superposición de muchas señales de amplitud modulada que han sido multiplexadas utilizando multiplexión por división de frecuencia, de manera que cada una ocupa un canal de frecuencia determinado. Consideremos uno de dichos canales, el cual contiene la señal de amplitud modulada $y_1(t) = x_1(t) \cos \omega_c t$ con espectro $Y_1(j\omega)$ como se representa en la figura P8.36(b). Queremos demultiplexar y demodular $y_1(t)$ para recuperar la señal moduladora $x_1(t)$, usando el sistema de la figura P8.36(a). El filtro sintonizable ordinario tiene el espectro $H_1(j\omega)$ mostrado en la figura P8.36(b). Determine el espectro de $Z(j\omega)$ de la señal de entrada al filtro selectivo de frecuencia fija $H_2(j\omega)$. Trace y señale el espectro $Z(j\omega)$ para $\omega > 0$.

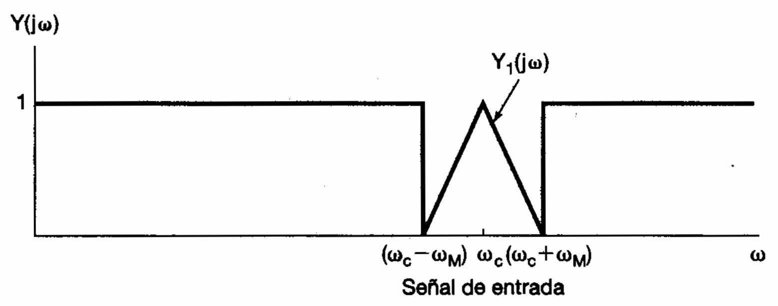
(b) El filtro selectivo de frecuencia fija es del tipo paso banda centrado alrededor de la frecuencia fija ω_f, como se muestra en la figura P8.36(c). Nos gustaría que la salida del filtro con espectro $H_2(j\omega)$ sea $r(t) = x_1(t) \cos \omega_f t$. En términos de ω_c y ω_M, ¿qué restricción debe satisfacer ω_T para garantizar que un espectro distorsionado de $x_1(t)$ esté centrado alrededor de $\omega = \omega_f$?

(c) ¿Qué valores deben tener G, α y β en la figura P8.36(c) para que sea $r(t) = x_1(t)$ $\cos \omega_f t$?

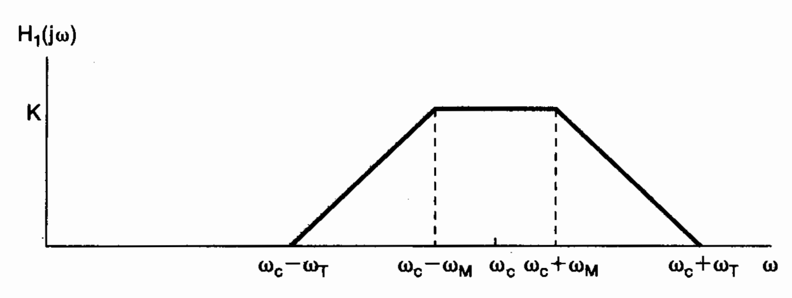
8.37. Se ha propuesto el siguiente esquema para realizar la modulación de amplitud: La señal de entrada $x(t)$ se suma a la señal portadora $\cos \omega_c t$ y después se pasa a través de un dispositivo no lineal, de manera que la salida $z(t)$ esté relacionada con la



(a)



Señal de entrada



Filtro sintonizable ordinario

(b)

H2(jω)

G

α ωf β ω

(c)

Figura P8.36

entrada mediante

$$z(t) = e^{y(t)} - 1,$$
$$y(t) = x(t) + \cos \omega_c t.$$

Lo anterior se ilustra en la figura P8.37(a). Una relación no lineal de este tipo puede llevarse a cabo mediante las características de corriente-voltaje de un diodo donde, considerando a $i(t)$ y $v(t)$ como la corriente y el voltaje del diodo, respectivamente,

$$i(t) = I_0 e^{av(t)} - 1 \quad (a \text{ real}).$$

Para estudiar los efectos de la no linealidad, podemos examinar el espectro de $z(t)$ y la forma en que se relaciona con $X(j\omega)$ y ω_c. Para lograrlo, usaremos la serie de potencias de e^y, la cual es

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \cdots.$$

(a) Si el espectro de $x(t)$ dado por la figura P8.37(b), y si $\omega_c = 100\omega_1$, trace e indique $Z(j\omega)$, el espectro de $z(t)$, usando los primeros cuatro términos de la serie de potencias de e^y.

(b) El filtro paso banda tiene parámetros como los que se muestran en la figura P8.37(c). Determine el intervalo de α y el intervalo de β tales que $r(t)$ sea una versión de amplitud modulada de $x(t)$.

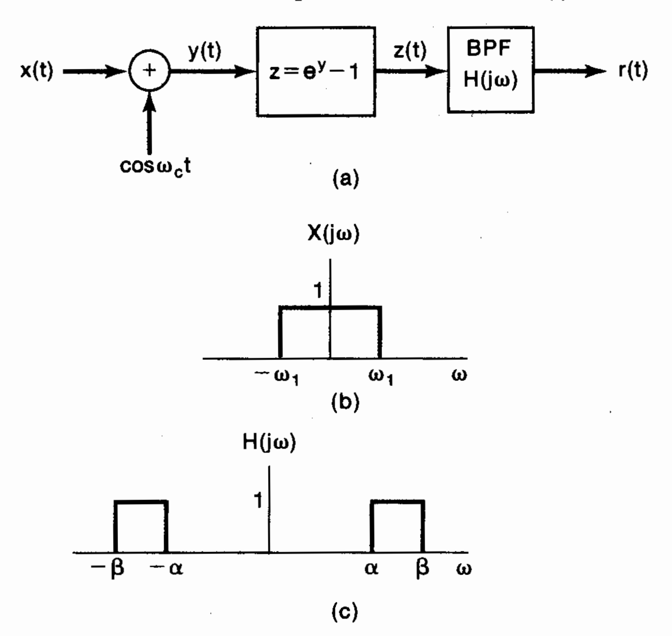


Figura P8.37

8.38. En la figura P8.38(a) se muestra un sistema de comunicación que transmite una señal de banda limitada $x(t)$ en forma de ráfagas periódicas de energía de alta frecuencia. Suponga que $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$. Se van a considerar dos posibles selecciones para la señal moduladora $m(t)$, las cuales denotaremos como $m_1(t)$ y $m_2(t)$. $m_1(t)$ es un tren periódico de pulsos senoidales, cada uno de duración D, como aparece en la figura P8.38(b). Esto es,

$$m_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - kT),$$

donde

$$p(t) = \begin{cases} \cos \omega_c t, & |t| < (D/2) \\ 0, & |t| > (D/2) \end{cases}.$$

$m_2(t)$ es cos $\omega_c t$ periódicamente borrada a través de una compuerta; es decir, $m_2(t) = g(t)$ cos $\omega_c t$ donde $g(t)$ es como se muestra en la figura P8.38(b).

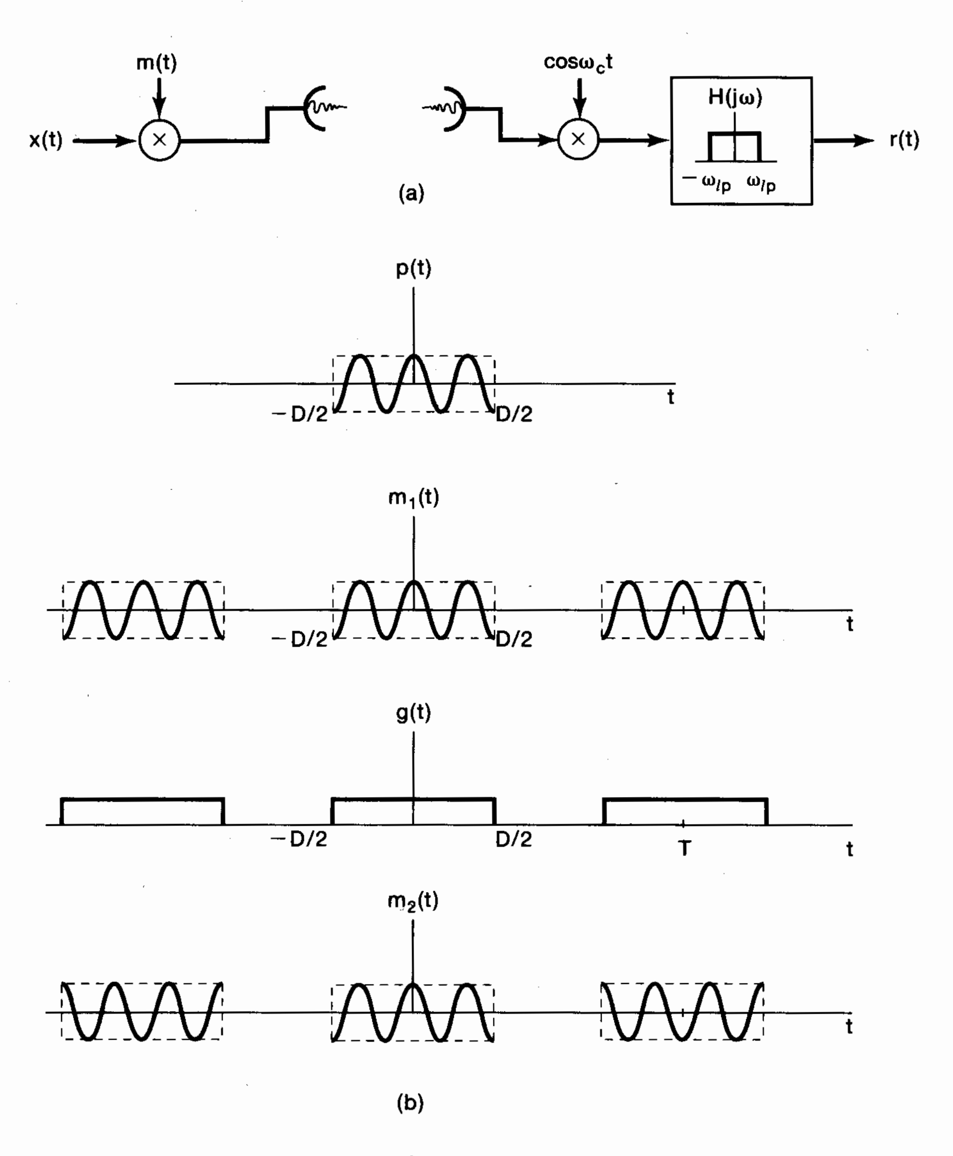


Figura P8.38

Damos por hecho que las siguientes relaciones entre los parámetros T, D, ω_c y ω_M, son:

$$D < T,$$

$$\omega_c >> \frac{2\pi}{D},$$

$$\frac{2\pi}{T} > 2\omega_M.$$

Considere también que $[\text{sen}(x)]/x$ es despreciable para $x >> 1$.

Determine si, para alguna selección de ω_{lp}, $m_1(t)$ o $m_2(t)$ derivarán en una señal demodulada $x(t)$. En caso de que su respuesta sea afirmativa, determine un rango aceptable para ω_{lp}.

8.39. Deseamos comunicar uno de dos posibles mensajes, el mensaje m_0 o el mensaje m_1. Para llevarlo a cabo, enviaremos una ráfaga de una de dos frecuencias sobre un intervalo de tiempo de longitud T. Observe que T es independiente del mensaje que está siendo transmitido. Para el mensaje m_0 enviaremos cos $\omega_0 t$ y para el mensaje m_1 enviaremos cos $\omega_1 t$. De este modo, aparecerá una ráfaga $b(t)$, como se muestra en la figura P8.39(a). Tal sistema de comunicación es llamado de *manipulación por desplazamiento de frecuencia* (FSK, por sus siglas en inglés). Cuando la ráfaga

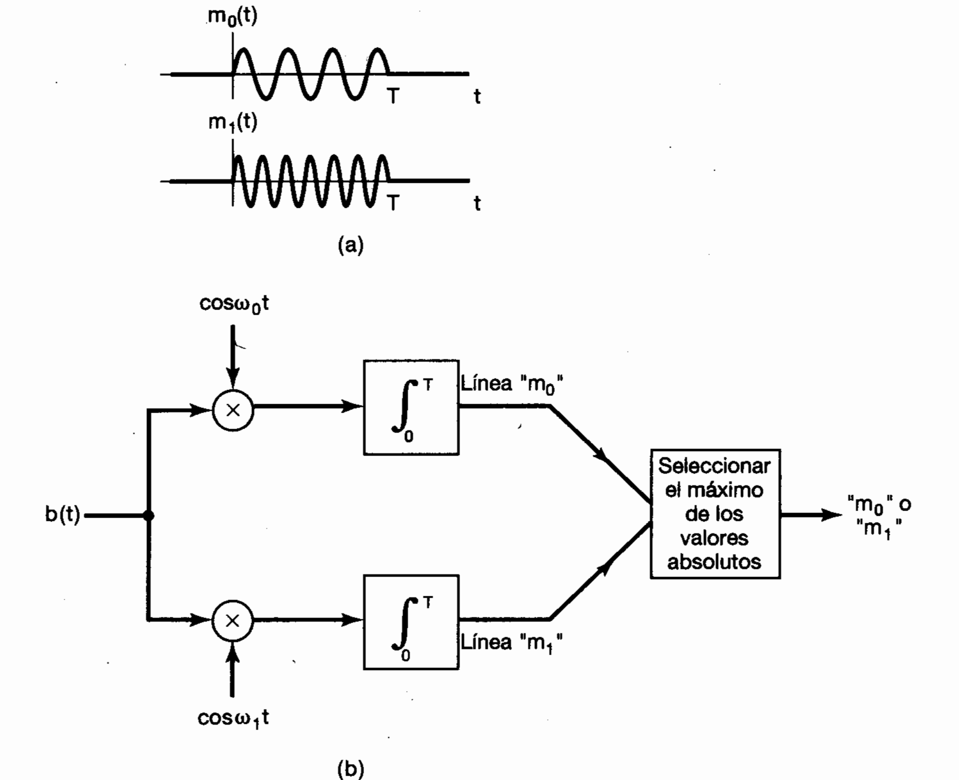


Figura P8.39

de la frecuencia $b(t)$ se recibe, deseamos determinar si ésta representa el mensaje m_0 o el mensaje m_1. Para lograrlo, usaremos un sistema como el de la figura P8.39(b).

(a) Demuestre que la máxima diferencia entre los valores absolutos de las dos líneas en la figura P8.39(b) ocurre cuando cos $\omega_0 t$ y cos $\omega_1 t$ presentan la relación

$$\int_0^T \cos \omega_0 t \cos \omega_1 t \, dt = 0.$$

(b) ¿Es posible seleccionar ω_0 y ω_1 de tal manera que *no* haya un intervalo de longitud T para el cual

$$\int_0^T \cos \omega_0 t \cos \omega_1 t \, dt = 0?$$

8.40. En la sección 8.3 examinamos el uso de la modulación de amplitud senoidal para la multiplexión por división de frecuencia, por medio de la cual varias señales son desplazadas en diferentes bandas de frecuencias y posteriormente son sumadas para su transmisión simultánea. Con este problema exploramos otro concepto de multiplexión, conocido como *multiplexión en cuadratura.* En este procedimiento de multiplexión dos señales pueden transmitirse simultáneamente en la misma banda de frecuencia si las dos señales portadoras están desfasadas 90°. El sistema de multiplexión se muestra en la figura P8.40(a) y el sistema de desmultiplexión en la figura P8.40(b). Las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se consideran de banda limitada con frecuencia máxima ω_M, de manera que $X_1(j\omega) = X_2(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$. Se da por sentado que la frecuencia de la portadora ω_c es mayor que ω_M. Demuestre que $y_1(t) = x_1(t)$ y $y_2(t) = x_2(t)$.

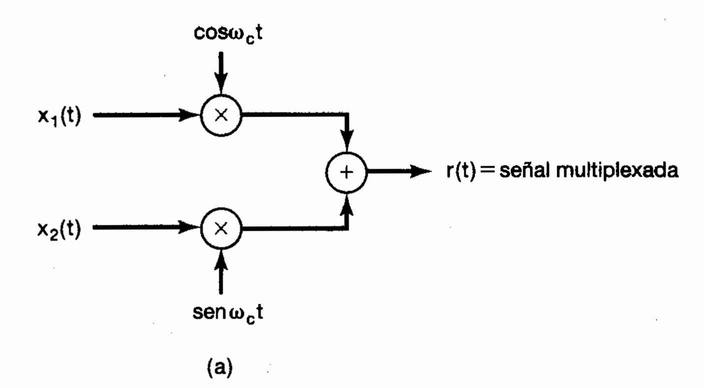
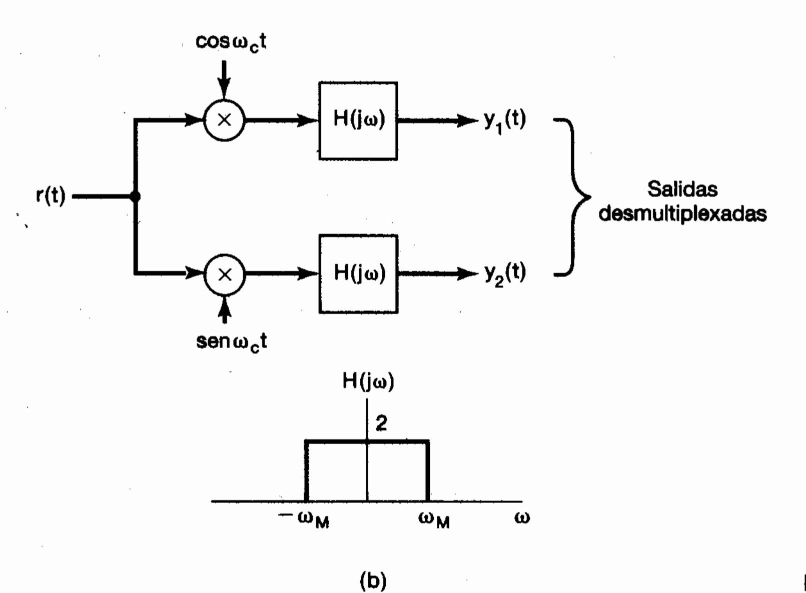


Figura P8.40

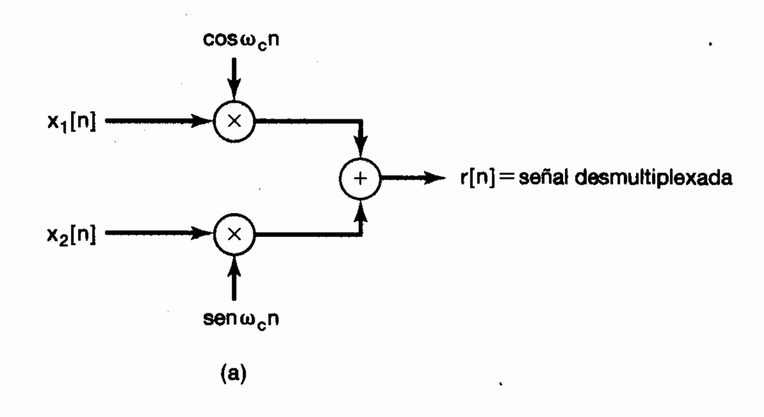
8.41. En el problema 8.40 presentamos el concepto de multiplexión en cuadratura, mediante el cual dos señales son sumadas después de que cada una ha sido modulada con señales portadoras de idéntica frecuencia, pero con una diferencia de fase de 90°. El multiplexor y el desmultiplexor discretos correspondientes se muestran en la figura P8.41. Las señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$ se consideran de banda limitada con frecuencia máxima ω_M, de manera que

$$X_1(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) = 0 \text{ para } \omega_M < \omega < 2\pi - \omega_M.$$

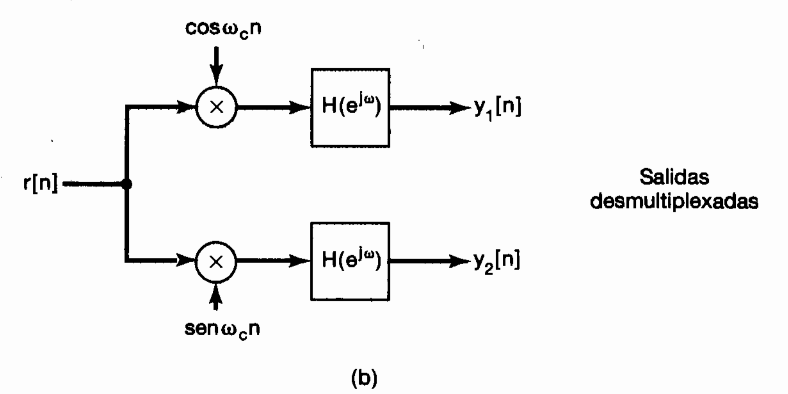


(b)

Figura P8.40 *Continuación*



(a)



(b)

Figura P8.41

(a) Determine el intervalo de valores de ω_c tales que $x_1[n]$ y $x_2[n]$ puedan recuperarse a partir de $r[n]$.

(b) Si ω_c satisface las condiciones de la parte (a), determine una $H(e^{j\omega})$ tal que $y_1[n] = x_1[n]$ y $y_2[n] = x_2[n]$.

8.42. Para evitar la interferencia intersímbolo, los pulsos que se usan en los sistemas PAM se designan como cero en múltiplos enteros del espaciamiento del símbolo T_1. En este problema desarrollaremos una clase de pulsos los cuales son cero en $t = kT_1, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Considere un pulso $p_1(t)$ que sea real, y par y tenga una transformada de Fourier $P_1(j\omega)$. También considere que

$$P_1\left(-j\omega + j\frac{\pi}{T_1}\right) = -P_1\left(j\omega + j\frac{\pi}{T_1}\right), \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_1}.$$

(a) Defina una secuencia periódica $\tilde{p}_1(t)$ con transformada de Fourier

$$\tilde{P}_1(j\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_1\left(j\omega - jm\frac{4\pi}{T_1}\right),$$

y demuestre que

$$\tilde{P}_1(j\omega) = -\tilde{P}_1\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T_1}\right).$$

(b) Use el resultado de la parte anterior como muestra de que, para alguna T

$$\tilde{p}_1(t) = 0, \; t = kT, \; k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots.$$

(c) Use el resultado de la parte anterior para demostrar que

$$p_1(kT_1) = 0, \; k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$$

(d) Demuestre que un pulso $p(t)$ con transformada de Fourier

$$P(j\omega) = \begin{cases} 1 + P_1(j\omega), & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_1} \\ P_1(j\omega), & \frac{\pi}{T_1} \leq |\omega| \leq \frac{2\pi}{T_1} \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

también presenta la propiedad de que

$$p(kT_1) = 0, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$$

8.43. La respuesta al impulso de un canal usado para la comunicación PAM está especificada por

$$h(t) = 10{,}000e^{-1{,}000t}u(t).$$

Damos por sentado que la respuesta de fase del canal es aproximadamente lineal en el ancho de banda del canal. Un pulso que se recibe después de pasar a través del canal se procesa usando un sistema LTI S con respuesta al impulso $g(t)$ para compensar la ganancia no uniforme sobre el ancho de banda del canal.

(a) Verifique si $g(t)$ tiene la transformada de Fourier

$$G(j\omega) = A + jB\omega,$$

donde A y B son constantes reales, entonces $g(t)$ puede compensar la ganancia no uniforme sobre el ancho de banda del canal. Determine los valores de A y B.

(b) Se ha propuesto poner a S en práctica con un sistema como el mostrado en la figura P8.43. Determine los valores de los factores de ganancia α y β en este sistema.

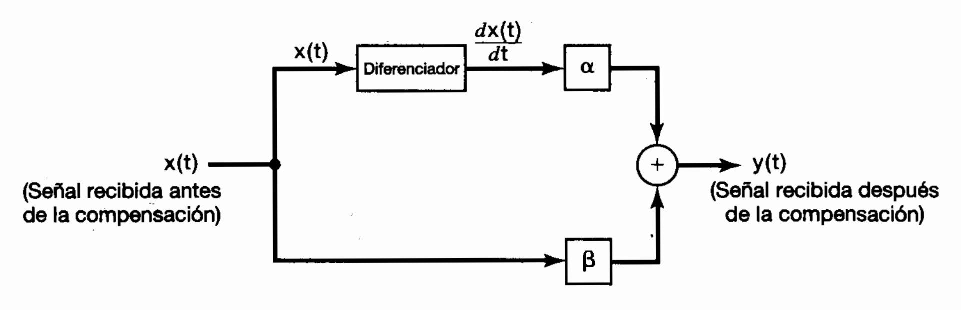


Figura P8.43

8.44. En este problema exploramos un método de *ecualización* que se usa para evitar la interferencia intersímbolo causada en los sistemas PAM debido a canales que tienen fase no lineal sobre su ancho de banda.

Cuando un pulso PAM con cruces por cero en múltiplos enteros del espacio del símbolo T_1 se pasa a través de un canal con fase no lineal, el pulso recibido puede ya no tener cruces por cero en tiempos que son múltiplos enteros de T_1. Por lo tanto, para evitar la interferencia intersímbolo, el pulso recibido se pasa a través de un *ecualizador de fuerza cero*, el cual obliga al pulso a que tenga cruces por cero en múltiplos enteros de T_1. Este ecualizador genera un nuevo pulso $y(t)$ sumando las versiones ponderadas y desplazadas del pulso recibido de $x(t)$. El pulso $y(t)$ está dado por

$$y(t) = \sum_{l=-N}^{N} a_l x(t - lT_1), \qquad \text{(P8.44-1)}$$

donde las a_l son reales y se seleccionan de manera que

$$y(kT_1) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm N \end{cases}.$$

(a) Demuestre que el ecualizador es un filtro y determine su respuesta al impulso.

(b) Para ilustrar la selección de los pesos a_l, consideremos un ejemplo. Si $x(0T_1) = 0.0$, $x(-T_1) = 0.2$, $x(T_1) = -0.2$ y $x(kT_1) = 0$ para $|k| > 1$, determine los valores de a_0, a_1 y a_{-1} tales que $y(\pm T_1) = 0$.

8.45. Una señal de banda limitada $x(t)$ se transmitirá usando técnicas de FM de banda angosta. Esto es, el índice de modulación m, como se definió en la sección 8.7, es mucho menor que $\pi/2$. Antes de que $x(t)$ sea transmitida al modulador, se procesa de manera que $X(j\omega)|_{\omega=0} = 0$ y $|x(t)| < 1$. Esta $x(t)$ normalizada se usa ahora para modular en ángulo una portadora para formar la señal de FM

$$y(t) = \cos\left(\omega_c t + m\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right).$$

(a) Determine la frecuencia instantánea ω_i.

(b) Usando las ecuaciones (8.44) y (8.45), la suposición de una banda angosta ($m << \pi/2$) y las condiciones de normalización citadas anteriormente, demuestre que

$$y(t) \approx \cos \omega_c t - \left(m\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau\right) \text{sen } \omega_c t.$$

(c) ¿Cuál es la relación entre el ancho de banda de $y(t)$, el ancho de banda de $x(t)$ y la frecuencia de la portadora ω_c?

8.46. Considere la función de tiempo exponencial compleja

$$s(t) = e^{j\theta(t)}, \tag{P8.46-1}$$

donde $\theta(t) = \omega_0 t^2/2$.

Puesto que la frecuencia instantánea $\omega_i = d\theta/dt$ es también una función del tiempo, la señal $s(t)$ se puede considerar como una señal FM. En particular, ya que la señal barre linealmente con respecto al tiempo del espectro en frecuencia, a menudo se le llama una frecuencia de barrido (chirp) o señal con barrido en frecuencia.

(a) Determine la frecuencia instantánea.

(b) Determine y trace la magnitud y fase de la transformada de Fourier de la señal con barrido en frecuencia. Para evaluar la integral de la transformada de Fourier, puede serle útil completar el cuadrado del exponente en el integrando y usar la relación

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jz^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 + j).$$

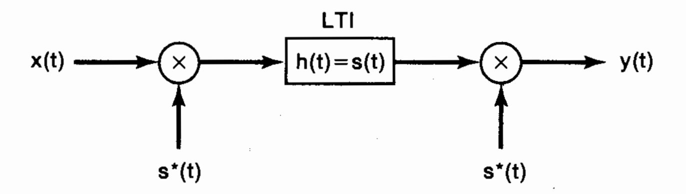


Figura P8.46

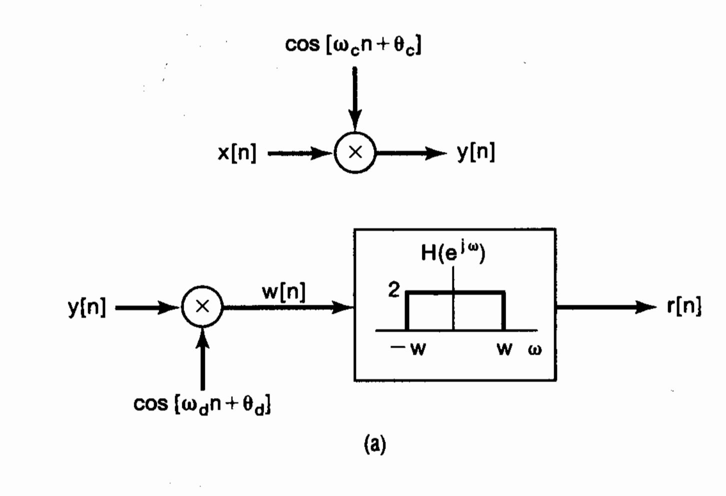
(c) Examine el sistema de la figura P8.46, donde $s(t)$ es la señal con barrido en frecuencia en la ecuación (P8.46-1). Demuestre que $y(t) = X(j\omega_0 t)$, donde $X(j\omega)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$.
(*Nota:* El sistema de la figura P8.46 se conoce como el *algoritmo de la transformada de la señal con barrido en frecuencia* y se usa a menudo en la práctica para obtener la transformada de Fourier de una señal.)

8.47. En la sección 8.8 consideramos la modulación y la demodulación síncrona discreta con una portadora senoidal. En este problema deseamos considerar el efecto de una pérdida en la sincronización en fase y/o en frecuencia. Los sistemas de modulación y demodulación se muestran en la figura P8.47(a), donde se indica una diferencia tanto de fase como de frecuencia entre los portadores del modulador y del demodulador. Denotemos la diferencia de frecuencia $\omega_d - \omega_c$ como $\Delta\omega$ y la diferencia de fase $\theta_d - \theta_c$ como $\Delta\theta$.

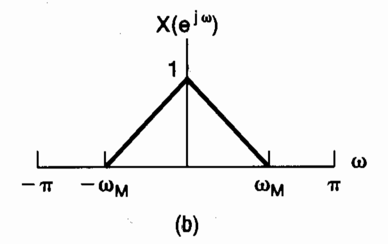
(a) Si el espectro de $x[n]$ es el que se muestra en la figura P8.47(b), trace el espectro de $w[n]$, considerando $\Delta\omega = 0$.

(b) Si $\Delta\omega = 0$, demuestre que w puede escogerse de manera que la salida $r[n]$ sea $= x[n] \cos \Delta\theta$. En particular, ¿cuál es $r[n]$ si $\Delta\theta = \pi/2$?

(c) Para $\Delta\theta = 0$ y $w = \omega_M + \Delta\omega$, demuestre que la salida $r[n] = x[n] \cos [\Delta\omega n]$ (suponga que $\Delta\omega$ es pequeña).



(a)



(b)

Figura P8.47

8.48. En este problema consideramos el análisis de la modulación de amplitud discreta de una portadora de tren de pulsos. El sistema que vamos a examinar se muestra en la figura P8.48(a).

(a) Determine y trace la transformada de Fourier de tiempo discreto de la señal $p[n]$ de onda cuadrada periódica en la figura P8.48(a).

(b) Suponga que $x[n]$ tiene el espectro mostrado en la figura P8.48(b). Con $\omega_m = \pi/2N$ y con $M = 1$ en la figura P8.48(a), trace $Y(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier de $y[n]$.

(c) Ahora suponga que $X(e^{j\omega})$ es de banda limitada con $X(e^{j\omega}) = 0$, $\omega_M < \omega < 2\pi - \omega_M$, pero no se especifica otro valor. Para el sistema de la figura P8.48(a) determine, como una función de N, el valor máximo permisible de ω_M que permitirá recuperar $x[n]$ a partir de $y[n]$. Indique si su resultado depende de M.

(d) Con ω_M y N que satisfacen la condición determinada en la parte (c), establezca o muestre en diagrama de bloques cómo recuperar $x[n]$ a partir de $y[n]$.

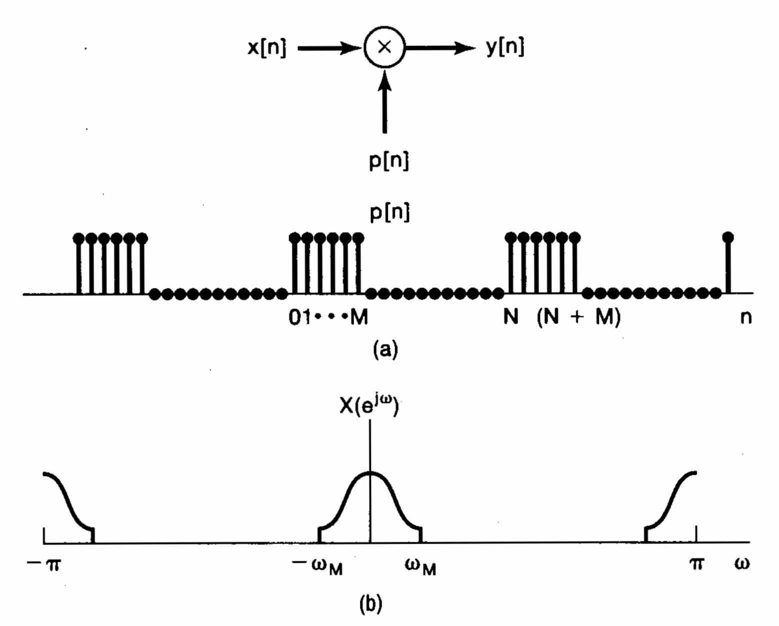


Figura P8.48

8.49. En la práctica, a menudo es difícil construir un amplificador que opere a muy bajas frecuencias. En consecuencia, los amplificadores de bajas frecuencias típicamente se basan en los principios de modulación de amplitud para desplazar la señal a una banda de frecuencia más alta. Dichos amplificadores son conocidos como *amplificadores de interrupción periódica* (*chopper*) y se ilustran en forma de diagrama de bloques en la figura P8.49.

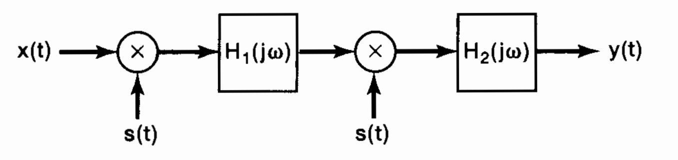


Figura P8.49

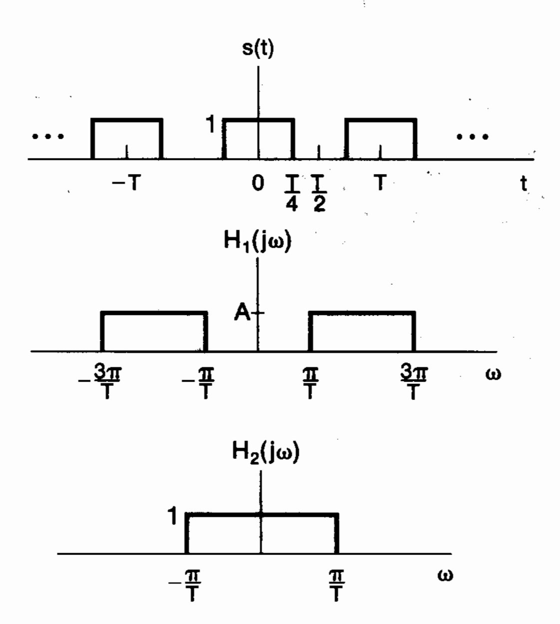
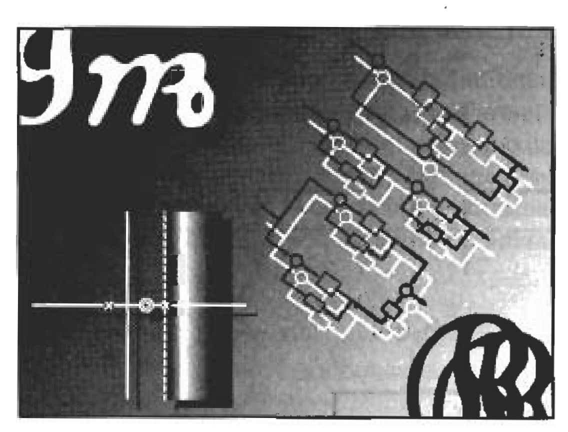


Figura P8.49 *Continuación*

(a) Determine, en términos de T, la frecuencia admisible más alta presente en $x(t)$ si $y(t)$ debe ser proporcional a $x(t)$ (es decir, si el sistema total debe ser equivalente a un amplificador).

(b) Si la banda de $x(t)$ está limitada como se especificó en la parte (a), determine la ganancia del sistema total de la figura P8.49 en términos de A y de T.

9
LA TRANSFORMADA DE LAPLACE



9.0 INTRODUCCIÓN

En los capítulos precedentes hemos visto que las herramientas del análisis de Fourier son en extremo útiles para el estudio de muchos problemas de importancia práctica que involucran señales y sistemas LTI. Esto se debe en gran parte al hecho de que una amplia clase de señales se puede representar mediante una combinación lineal de exponenciales complejas, y éstas son funciones propias de los sistemas LTI. La transformada continua de Fourier proporciona una representación para señales como combinaciones lineales de exponenciales complejas de la forma e^{st} con $s = j\omega$. Sin embargo, la propiedad de las funciones propias presentada en la sección 3.2, así como muchas de sus consecuencias, continúan siendo aplicables a valores arbitrarios de s y no sólo a valores que son puramente imaginarios. Esta observación couduce a una generalización de la transformada continua de Fourier, conocida como la transformada de Laplace, la cual desarrollamos en este capítulo. En el siguiente capítulo desarrollaremos la generalización correspondiente discreta conocida como la transformada z.

Como veremos más adelante, las transformadas de Laplace y z poseen muchas de las propiedades que hacen del análisis de Fourier una herramienta tan útil. Además, estas transformadas no sólo proporcionan herramientas y conocimientos adicionales para las señales y sistemas que pueden analizarse con el uso de la transformada de Fourier, sino que también pueden aplicarse en algunos contextos muy importantes en los cuales no se puede usar las transformadas de Fourier. Por ejemplo, las transformadas de Laplace y z se pueden aplicar al análisis de muchos sistemas inestables y en consecuencia juegan un papel importante en la investigación de la estabilidad e inestabilidad de sistemas. Este hecho, junto con las propiedades algebraicas que las transformadas de Laplace y z comparten con las transformadas de Fourier, conduce a un conjunto muy importante de herramientas para el análisis de sistemas y, en particular, para el análisis de los sistemas retroalimentados, los cuales desarrollaremos en el capítulo 11.

9.1 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En el capítulo 3 vimos que la respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo con respuesta al impulso $h(t)$ a una exponencial compleja con forma e^{st} es

$$y(t) = H(s)e^{st}, \tag{9.1}$$

donde

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt. \tag{9.2}$$

Para una s imaginaria (es decir, $s = j\omega$), la integral en la ecuación (9.2) corresponde a la transformada de Fourier de $h(t)$. Con valores generales de la variable compleja s, se le conoce como la *transformada de Laplace* de la respuesta el impulso $h(t)$.

La transformada de Laplace de una señal general $x(t)$ se define como[1]

$$\boxed{X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt,} \tag{9.3}$$

y podemos observar que, en particular, es una función de la variable independiente s, la cual corresponde a la variable compleja en el exponente de e^{-st}. La variable compleja s puede escribirse como $s = \sigma + j\omega$, siendo σ y ω las partes real e imaginaria, respectivamente. Para nuestra comodidad, algunas veces denotaremos la transformada de Laplace en forma de operador como $\mathfrak{L}\{x(t)\}$ y denotaremos la relación de transformación entre $x(t)$ y $X(s)$ como

$$x(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} X(s). \tag{9.4}$$

Cuando $s = j\omega$, la ecuación (9.3) se convierte en

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt, \tag{9.5}$$

que corresponde a la *transformada de Fourier* de $x(t)$; esto es,

$$X(s)\big|_{s=j\omega} = \mathfrak{F}\{x(t)\}. \tag{9.6}$$

La transformada de Laplace también conlleva una relación directa con la transformada de Fourier cuando la variable compleja s no es puramente imaginaria. Para ver esta relación, considere una $X(s)$ tal como se especifica en la ecuación (9.3), con s expresada como $s = \sigma + j\omega$, de manera que

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt, \tag{9.7}$$

[1]La transformada definida por la ecuación (9.3) a menudo se conoce como la *transformada bilateral de Laplace*, para distinguirla de la transformada unilateral de Laplace, la cual analizaremos en la sección 9.9. La transformada bilateral en la ecuación (9.3) involucra una integración desde $-\infty$ hasta $+\infty$, mientras que la transformada unilateral tiene una forma similar a la de la ecuación (9.3) pero con límites de integración desde 0 hasta $+\infty$. Como estamos interesados principalmente en la transformada bilateral, omitiremos la palabra "bilateral", excepto donde sea necesario en la sección 9.9 para evitar ambigüedades.

o

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{9.8}$$

Reconocemos el miembro derecho de la ecuación (9.8) como la transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$; es decir, la transformada de Laplace de $x(t)$ puede interpretarse como la transformada de Fourier de $x(t)$ después de multiplicarla por una señal exponencial real. La exponencial real $e^{-\sigma t}$ puede ser creciente o decreciente en el tiempo, dependiendo de que σ sea positiva o negativa.

Para explicar la transformada de Laplace y su relación con la transformada de Fourier, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.1

Considere la señal $x(t) = e^{-at}u(t)$. Gracias al ejemplo 4.1 sabemos que la transformada de Fourier $X(j\omega)$ converge para $a > 0$ y está dada por

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{j\omega + a}, \quad a > 0. \tag{9.9}$$

La ecuación (9.3) muestra que la transformada de Laplace es

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{(-s+a)t}\, dt, \tag{9.10}$$

o, con $s = \sigma + j\omega$,

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-j\omega t}\, dt. \tag{9.11}$$

Si la comparamos con la ecuación (9.9), reconoceremos en la ecuación (9.11) a la transformada de Fourier de $e^{-(\sigma+a)t}u(t)$ y, por lo tanto,

$$X(\sigma + j\omega) = \frac{1}{(\sigma + a) + j\omega}, \quad \sigma + a > 0, \tag{9.12}$$

o, de manera equivalente, puesto que $s = \sigma + j\omega$ y $\sigma = \mathcal{R}e\{s\}$,

$$X(s) = \frac{1}{s + a}, \mathcal{R}e\{s\} > -a. \tag{9.13}$$

Esto es,

$$e^{at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s + a}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -a. \tag{9.14}$$

Por ejemplo, para $a = 0$, $x(t)$ es el escalón unitario con transformada de Laplace $X(s) = 1/s$, $\mathcal{R}e\{s\} > 0$.

En particular, observamos que, así como la transformada de Fourier no converge para todas las señales, la transformada de Laplace puede converger para algunos valores de $\mathcal{R}e\{s\}$ pero no para otros. En la ecuación (9.13), la transformada de Laplace converge sólo para $\sigma = \mathcal{R}e\{s\} > -a$. Si a es positiva, entonces $X(s)$ se puede evaluar en $\sigma = 0$ para

obtener

$$X(0 + j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}. \tag{9.15}$$

Como se indica en la ecuación (9.6), para $\sigma = 0$ la transformada de Laplace es igual a la transformada de Fourier, lo cual resulta evidente en el ejemplo anterior si comparamos las ecuaciones (9.9) y (9.15). Si a es negativa o es cero, la transformada de Laplace aún existe pero no así la transformada de Fourier.

Ejemplo 9.2

Como comparación con el ejemplo 9.1, consideremos como un segundo ejemplo la señal

$$x(t) = -e^{-at}u(-t). \tag{9.16}$$

Entonces

$$\begin{aligned} X(s) &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}e^{-st}u(-t)dt \\ &= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}\,dt, \end{aligned} \tag{9.17}$$

o

$$X(s) = \frac{1}{s + a}. \tag{9.18}$$

Para convergencia en este ejemplo, necesitamos que $\mathcal{R}e\{s + a\} < 0$, o $\mathcal{R}e\{s\} < -a$; esto es,

$$-e^{-at}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s + a}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} < -a. \tag{9.19}$$

Comparando las ecuaciones (9.14) y (9.19), vemos que la expresión algebraica para la transformada de Laplace es idéntica para las señales examinadas en los ejemplos 9.1 y 9.2. Sin embargo, de las mismas ecuaciones vemos que el conjunto de valores de s para el cual la expresión es válida resulta muy diferente en los dos ejemplos. Esto sirve para explicar el hecho de que, cuando se especifica la transformada de Laplace de una señal, se requiere tanto la expresión algebraica como el intervalo de valores de s para el cual esta expresión es válida. En general, el intervalo de valores de s para el cual la integral en la ecuación (9.3) converge se conoce como la *región de convergencia* (que abreviaremos como ROC, por sus siglas en inglés) de la transformada de Laplace. Es decir, la ROC consiste en aquellos valores de $s = \sigma + j\omega$ para los cuales la transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$ converge. Tendremos bastante más que decir acerca de la ROC conforme vayamos desarrollando algunas ideas sobre las propiedades de la transformada de Laplace.

Una forma muy conveniente de representar la ROC se muestra en la figura 9.1. La variable s es un número complejo, y en la figura presentamos el plano complejo, que se conoce comúnmente como el plano s asociado con esta variable compleja. Los ejes de las coordenadas son $\mathcal{R}e\{s\}$ en el eje horizontal y $\mathcal{I}m\{s\}$ en el eje vertical. Los ejes horizontal y vertical algunas veces son llamados eje σ y eje $j\omega$, respectivamente. La región sombreada en la figura 9.1(a) representa el conjunto de puntos en el plano s que corresponden a la región de convergencia para el ejemplo 9.1. La región sombreada en la figura 9.1(b) indica la región de convergencia del ejemplo 9.2.

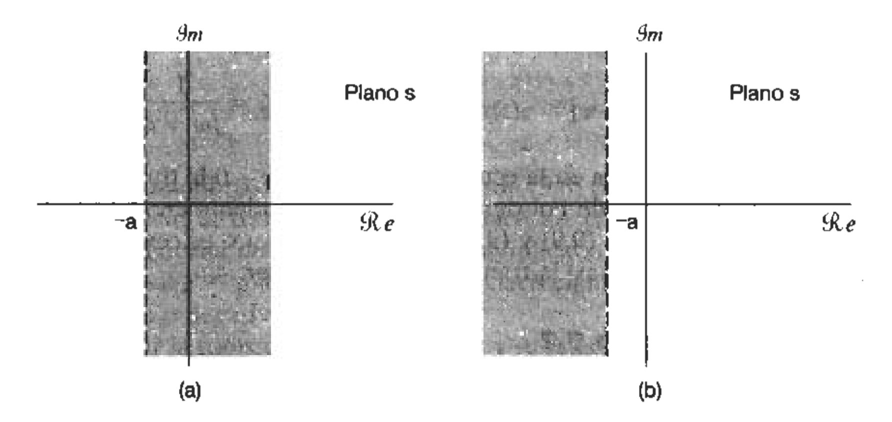


Figura 9.1 (a) ROC del ejemplo 9.1; (b) ROC del ejemplo 9.2.

Ejemplo 9.3

En este ejemplo examinamos una señal que es la suma de dos exponenciales reales:

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t). \tag{9.20}$$

La expresión algebraica para la transformada de Laplace es entonces

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)\right] e^{-st}\, dt \\ &= 3\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}e^{-st}u(t)dt - 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}e^{-st}u(t)dt. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Cada una de las integrales en la ecuación (9.21) tiene la misma forma que la integral en la ecuación (9.10) y, en consecuencia, podemos usar el resultado del ejemplo 9.1 para obtener

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}. \tag{9.22}$$

Para determinar la ROC debemos observar que $x(t)$ es la suma de dos exponenciales reales, y de la ecuación (9.21) se desprende que $X(s)$ es la suma de las transformadas de Laplace de cada uno de los términos individuales. El primer término es la transformada de Laplace de $3e^{-2t}u(t)$ y el segundo término es la transformada de Laplace de $-2e^{-t}u(t)$. A partir del ejemplo 9.1 sabemos que

$$e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \qquad \mathscr{R}e\{s\} > -1,$$

$$e^{-2t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \qquad \mathscr{R}e\{s\} > -2.$$

El conjunto de valores de $\mathscr{R}e\{s\}$ para el cual las transformadas de Laplace de ambos términos convergen es $\mathscr{R}e\{s\} > -1$ y, por lo tanto, combinando los dos términos del miembro derecho de la ecuación (9.22), obtenemos

$$3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{s-1}{s^2+3s+2}, \qquad \mathscr{R}e\{s\} > -1. \tag{9.23}$$

Ejemplo 9.4

En este ejemplo consideramos una señal que es la suma de una exponencial real y una compleja:

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t). \tag{9.24}$$

Haciendo uso de la relación de Euler, podemos escribir

$$x(t) = \left[e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-(1-3j)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+3j)t}\right]u(t),$$

y por consiguiente, la transformada de Laplace de $x(t)$ puede expresarse como

$$\begin{aligned} X(s) = &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}u(t)e^{-st}\,dt \\ &+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-3j)t}u(t)e^{-st}\,dt \\ &+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+3j)t}u(t)e^{-st}\,dt. \end{aligned} \tag{9.25}$$

Cada una de las integrales de la ecuación (9.25) representa la transformada de Laplace del tipo que encontramos en el ejemplo 9.1. De ello se desprende que

$$e^{-2t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \qquad \Re e\{s\} > -2, \tag{9.26}$$

$$e^{-(1-3j)t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+(1-3j)}, \qquad \Re e\{s\} > -1, \tag{9.27}$$

$$e^{-(1+3j)t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+(1+3j)}, \qquad \Re e\{s\} > -1. \tag{9.28}$$

Para que las tres transformadas de Laplace converjan de manera simultánea, debemos tener $\Re e\{s\} > -1$. En consecuencia, la transformada de Laplace de $x(t)$ es

$$\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1-3j)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1+3j)}\right), \qquad \Re e\{s\} > -1, \tag{9.29}$$

o, con los términos combinados dentro de un denominador común,

$$e^{-2t}u(t) + e^{-2t}(\cos 3t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)}, \quad \Re e\{s\} > -1. \tag{9.30}$$

En cada uno de los cuatro ejemplos anteriores, la transformada de Laplace es racional, es decir, una relación de polinomios de la variable compleja s tal que

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \tag{9.31}$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son el polinomio del numerador y el polinomio del denominador, respectivamente. Como sugieren los ejemplos 9.3 y 9.4, $X(s)$ será racional siempre que $x(t)$ sea una combinación lineal de exponenciales reales o complejas. Como veremos en la sección 9.7, las transformadas racionales también surgen cuando examinamos los sistemas LTI especificados en términos de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes

constantes. Excepto por un factor de escala, los polinomios del numerador y del denominador en una transformada racional de Laplace pueden especificarse por sus raíces; por lo tanto, marcar la localización de las raíces de $N(s)$ y $D(s)$ en el plano s indicando la ROC proporciona una forma gráfica conveniente para describir la transformada de Laplace. Por ejemplo, en la figura 9.2(a) mostramos la representación en el plano s de la transformada de Laplace del ejemplo 9.3, señalando con una "×" la localización de cada raíz del polinomio del denominador de la ecuación (9.23) y con una "o" la localización de la raíz del polinomio del numerador en la ecuación (9.23). La gráfica que corresponde a las raíces de los polinomios del numerador y denominador para la transformada de Laplace en el ejemplo 9.4 se encuentra en la figura 9.2(b). La región de convergencia para cada uno de estos ejemplos se ha indicado con un área sombreada en la gráfica correspondiente.

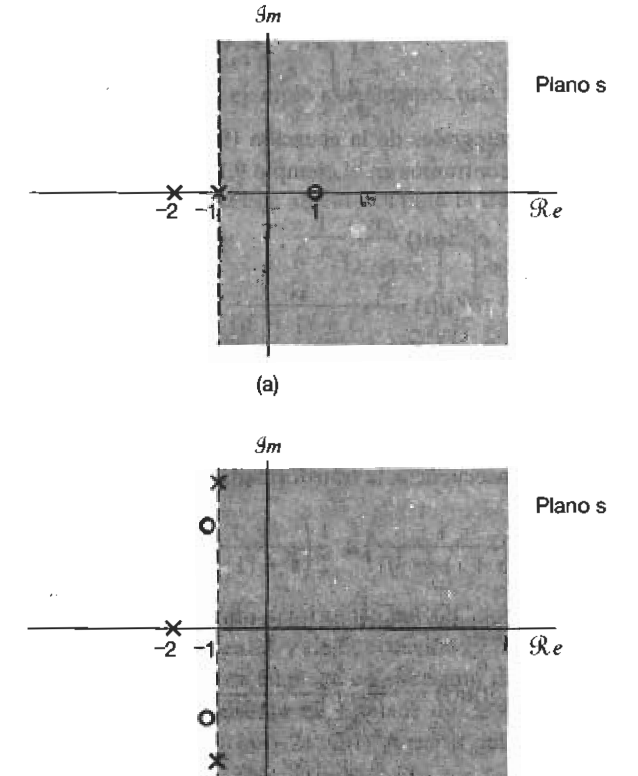


Figura 9.2 Representación en el plano s de las transformadas de Laplace para (a) el ejemplo 9.3 y (b) el ejemplo 9.4. Cada "×" en estas figuras marca la ubicación de un polo de la transformada de Laplace correspondiente, es decir, la raíz del denominador. De manera similar, cada marca "o" indica un cero, una raíz del numerador. La región sombreada indica la ROC.

Para las transformadas racionales de Laplace, las raíces del polinomio del numerador son comúnmente conocidas como *ceros* de $X(s)$, ya que para esos valores de s, $X(s) = 0$. Las raíces del polinomio del denominador son conocidas como los *polos* de $X(s)$, y para esos valores de s, $X(s)$ tiende a ser infinita. Los polos y ceros de $X(s)$ en el plano s finito caracterizan por completo la expresión algebraica para $X(s)$ dentro de un factor de escala. La representación de $X(s)$ mediante sus polos y ceros en el plano s se conoce

como el *diagrama de polos y ceros* de $X(s)$. Sin embargo, como vimos en los ejemplos 9.1 y 9.2, el conocimiento de la forma algebraica de $X(s)$ por sí sola no identifica la ROC para la transformada de Laplace. Es decir, una especificación completa que llegue hasta dentro de un factor escala de una transformada racional de Laplace consiste de un diagrama de polos y ceros de la transformada junto con su ROC (la cual, por lo general, se muestra como una región sombreada en el plano s, como en las figuras 9.1 y 9.2).

Asimismo, si bien los polos y ceros no son necesarios para especificar la forma algebraica de una transformada racional $X(s)$, algunas veces resulta conveniente referirse a ellos en el infinito. En concreto, si el orden del polinomio del denominador es mayor que el orden del polinomio del numerador, entonces $X(s)$ tiende a cero conforme s se aproxima a infinito. Por lo contrario, si el orden del polinomio del numerador es mayor que el orden del denominador, entonces $X(s)$ será ilimitada conforme s se aproxime a infinito. Este comportamiento se puede interpretar como los ceros o polos en el infinito. Por ejemplo, la transformada de Laplace de la ecuación (9.23) tiene un denominador de orden 2 y un numerador de sólo orden 1, así que en este caso $X(s)$ tiene un cero en el infinito. Lo mismo es válido para la transformada de la ecuación (9.30), en la cual el numerador es de orden 2 y el denominador es de orden 3. En general, si el orden del denominador excede el orden del numerador por k, $X(s)$ tendrá k ceros en el infinito. De manera similar, si el orden del numerador excede el orden del denominador por k, $X(s)$ tendrá polos en el infinito.

Ejemplo 9.5

Sea

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t). \tag{9.32}$$

La transformada de Laplace del segundo y el tercer términos del miembro derecho de la ecuación (9.32) se pueden evaluar a partir del ejemplo 9.1. La transformada de Laplace del impulso unitario se determina directamente como

$$\mathfrak{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = 1, \tag{9.33}$$

la cual es válida para cualquier valor de s. Esto es, la ROC de $\mathfrak{L}\{\delta(t)\}$ es el plano completo de s. Usando este resultado, junto con las transformadas de Laplace de los otros dos términos en la ecuación (9.32) obtenemos

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > 2, \tag{9.34}$$

o

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > 2, \tag{9.35}$$

donde la ROC es el conjunto de valores de s para el cual convergen los tres términos en las transformadas de Laplace de $x(t)$. El diagrama de polos y ceros para este ejemplo se muestra en la figura 9.3 junto con la ROC. También, puesto que los grados del numerador y del denominador de $X(s)$ son iguales, $X(s)$ no tiene polos ni ceros en el infinito.

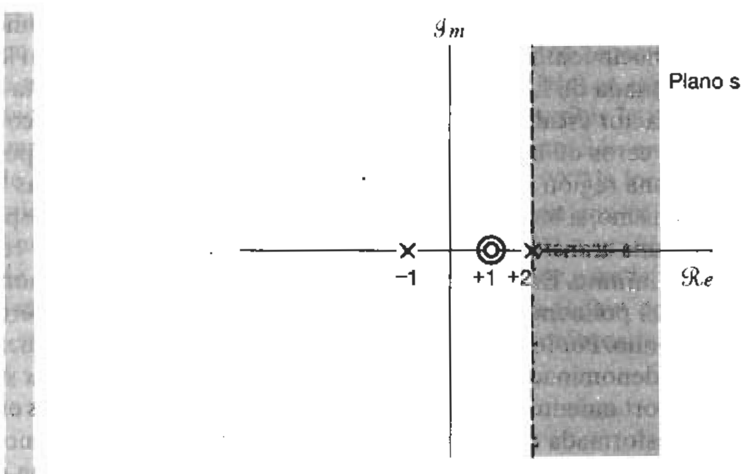


Figura 9.3 Diagrama de polos y ceros y ROC del ejemplo 9.5.

Recordemos, de la ecuación (9.6), que para $s = j\omega$ la transformada de Laplace corresponde a la transformada de Fourier. Sin embargo, si la ROC de la transformada de Laplace no incluye el eje $j\omega$ (es decir, $\mathcal{R}e\{s\} = 0$), entonces la transformada de Fourier no converge. Como vemos en la figura 9.3, de hecho éste es el caso en el ejemplo 9.5, el cual es consistente con el hecho de que el término $(1/3)e^{2t}u(t)$ en $x(t)$ no tiene una transformada de Fourier. Observe también en este ejemplo que los dos ceros en la ecuación (9.35) ocurren en el mismo valor de s. En general, nos referiremos al *orden* de un polo o de un cero como el número de veces que se repite en una ubicación dada. En el ejemplo 9.5 hay un cero de segundo orden en $s = 1$ y dos polos de primer orden, uno en $s = -1$ y el otro en $s = 2$. En este ejemplo, la ROC queda a la derecha del polo situado más hacia la derecha. En general, para las transformadas racionales de Laplace hay una estrecha relación entre las localizaciones de los polos y las posibles ROC que pueden ser asociadas con un diagrama dado de polos y ceros. Las restricciones específicas en la ROC están estrechamente ligadas a las propiedades de $x(t)$ en el dominio del tiempo. En la próxima sección exploraremos algunas de estas restricciones y propiedades.

9.2 LA REGIÓN DE CONVERGENCIA PARA LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

En la sección anterior vimos que una especificación completa de la transformada de Laplace requiere no sólo de la expresión algebraica de $X(s)$, sino también de la región de convergencia asociada. Como es evidente por los ejemplos 9.1 y 9.2, dos señales muy diferentes pueden tener idénticas expresiones algebraicas para $X(s)$, de manera que sus transformadas de Laplace se podrían distinguir *únicamente* por la región de convergencia. En esta sección exploramos algunas restricciones específicas de la ROC para varias clases de señales. Como veremos más adelante, la comprensión de estas restricciones a menudo nos permite especificar de manera implícita o reconstruir la ROC únicamente a partir del conocimiento de la expresión algebraica $X(s)$ y de ciertas características generales de $x(t)$ en el dominio del tiempo.

Propiedad 1: La ROC de $X(s)$ consiste en bandas paralelas al eje $j\omega$ en el plano s.

La validez de esta propiedad radica en el hecho de que la ROC de $X(s)$ consiste de aquellos valores de $s = \sigma + j\omega$ para los cuales la transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$ converge. Esto es, la ROC de la transformada de Laplace de $x(t)$ consiste de aquellos valores

de s para los cuales $x(t)e^{-\sigma t}$ es absolutamente integrable:[2]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma t}\, dt < \infty. \tag{9.36}$$

Y de ello se deriva la propiedad 1, ya que esta condición depende sólo de σ, la parte real de s.

Propiedad 2: Para transformadas racionales de Laplace, la ROC no contiene ningún polo.

Esta propiedad se observa fácilmente en todos los ejemplos estudiados hasta ahora. Puesto que $X(s)$ es infinita en un polo, la integral en la ecuación (9.3) claramente no converge a un polo y, por lo tanto, la ROC no puede contener valores de s en esos polos.

Propiedad 3: Si $x(t)$ es de duración finita y es absolutamente integrable, entonces la ROC es el plano s completo.

La intuición de este resultado se sugiere en las figuras 9.4 y 9.5. Específicamente, una señal de duración finita tiene la propiedad de ser cero fuera de un intervalo de duración finita, tal como se ilustra en la figura 9.4. En la 9.5(a) mostramos la $x(t)$ de la figura 9.4 multiplicada por una exponencial decreciente y en la 9.5(b) la misma señal multiplicada por una exponencial creciente. Puesto que el intervalo sobre el cual $x(t)$ es diferente de

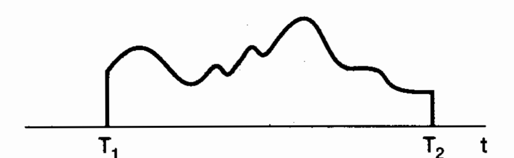
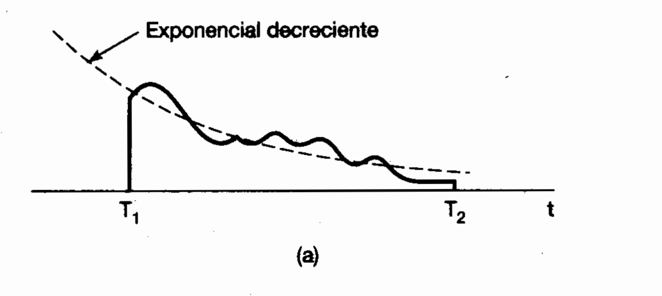


Figura 9.4 Señal de duración finita.



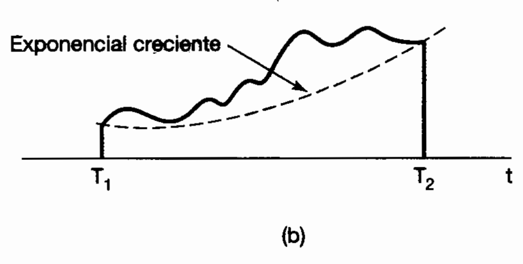


Figura 9.5 (a) Señal de duración finita de la figura 9.4 multiplicada por una exponencial decreciente; (b) señal de duración finita de la figura 9.4 multiplicada por una exponencial creciente.

[2]Para un tratamiento más completo y formal de las transformadas de Laplace y sus propiedades matemáticas, incluyendo la convergencia, vea E. D. Rainville, *The Laplace Transform: An Introduction* (Nueva York: Macmillan, 1963), y R. V. Churchill y J. W. Brown, *Complex Variables and Applications* (5ª edición)(Nueva York: McGraw-Hill, 1990). Observe que la condición de integrabilidad absoluta es una de las condiciones de Dirichlet presentadas en la sección 4.1 en el contexto de nuestro análisis sobre la convergencia de las transformadas de Fourier.

cero es finito, la exponencial ponderada nunca es ilimitada, y en consecuencia, resulta razonable que la integrabilidad de $x(t)$ no se altere por esta ponderación exponencial.

Una verificación más formal de la propiedad 3 es la siguiente: Suponga que $x(t)$ es absolutamente integrable, de manera que

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|dt < \infty. \tag{9.37}$$

Para que $s = \sigma + j\omega$ esté en la ROC, requerimos que $x(t)e^{-\sigma t}$ sea absolutamente integrable, es decir,

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma t}dt < \infty. \tag{9.38}$$

La ecuación (9.37) verifica que s está en la ROC cuando $\mathcal{R}e\{s\} = \sigma = 0$. Para $\sigma > 0$, el máximo valor de $e^{-\sigma t}$ sobre el intervalo en el cual $x(t)$ es diferente de cero es $e^{-\sigma T_1}$, y entonces podemos escribir

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma t}\, dt < e^{-\sigma T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|\, dt. \tag{9.39}$$

Ya que el miembro derecho de la ecuación (9.39) está limitado, también lo estará el miembro izquierdo; por lo tanto, el plano de s para $\mathcal{R}e\{s\} > 0$ debe estar también en la ROC. Mediante un argumento similar, si $\sigma < 0$, entonces

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma t}\, dt < e^{-\sigma T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|\, dt, \tag{9.40}$$

y de nuevo $x(t)e^{-\sigma t}$ es absolutamente integrable. En consecuencia, la ROC incluye el plano s completo.

Ejemplo 9.6

Sea

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}. \tag{9.41}$$

Entonces,

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s+a}[1 - e^{-(s+a)T}]. \tag{9.42}$$

Puesto que en este ejemplo $x(t)$ es de longitud finita, de la propiedad 3 se desprende que la ROC está en el plano de s completo. En la forma de la ecuación (9.42), $X(s)$ parecería tener un polo en $s = -a$, lo cual, de acuerdo con la propiedad 2, sería incongruente con una ROC que consiste del plano s completo. Sin embargo, en la expresión algebraica en la ecuación (9.42), tanto el numerador como el denominador son cero en $s = -a$, y por consiguiente, para determinar $X(s)$ en $s = -a$ podemos usar la regla de l'Hôpital para obtener

$$\lim_{s \to -a} X(s) = \lim_{s \to -a} \left[\frac{\frac{d}{ds}(1 - e^{-(s+a)T})}{\frac{d}{ds}(s+a)} \right] = \lim_{s \to -a} Te^{-aT} e^{-sT},$$

de manera que

$$X(-a) = T. \tag{9.43}$$

Es importante reconocer que, para asegurarse de que la ponderación exponencial esté limitada sobre un intervalo en el cual $x(t)$ sea diferente de cero, el análisis anterior depende en gran medida del hecho de que $x(t)$ es de duración finita. Con las próximas dos propiedades examinamos una modificación del resultado de la propiedad 3 cuando $x(t)$ es de extensión finita sólo en la dirección positiva o en la dirección negativa del eje del tiempo.

Propiedad 4: Si $x(t)$ está en el miembro derecho y si la línea $\mathcal{R}e\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de s para los cuales $\mathcal{R}e\{s\} > \sigma_0$ también estarán en la ROC.

Una *señal del lado derecho* o simplemente *derecha* es aquella para la cual $x(t) = 0$ antes de algún tiempo finito T_1, como se ilustra en la figura 9.6. Es posible que para tal señal no haya un valor de s en el que la transformada de Laplace converja. Un ejemplo es la señal $x(t)= e^{t^2}u(t)$. Sin embargo, suponga que la transformada de Laplace converge para algún valor de σ, el cual señalamos como σ_0. Entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}\,dt < \infty, \tag{9.44}$$

o, de forma equivalente, ya que $x(t)$ es derecha,

$$\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}\,dt < \infty. \tag{9.45}$$

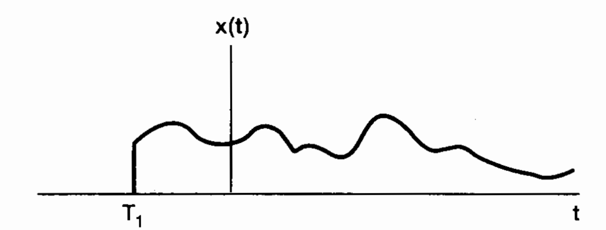


Figura 9.6 Señal derecha.

Por consiguiente, si $\sigma_1 > \sigma_0$, también debe ser cierto que $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ es absolutamente integrable, ya que $e^{-\sigma_1 t}$ decae más rápido que $e^{-\sigma_0 t}$ conforme $t \rightarrow +\infty$, como se ilustra en la figura 9.7. Formalmente, podemos decir que con $\sigma_1 > \sigma_0$,

$$\begin{aligned}\int_{T_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_1 t}\,dt &= \int_{T_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}\,dt \\ &\leq e^{-(\sigma_1-\sigma_0)T_1}\int_{T_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}\,dt.\end{aligned} \tag{9.46}$$

Dado que T_1 es finito, de la ecuación (9.45) se desprende que el lado derecho de la desigualdad en la ecuación (9.46) es finito, y por tanto $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ es absolutamente integrable.

Observe que en la argumentación anterior nos apoyamos explícitamente en el hecho de que $x(t)$ es derecha, de manera que, aunque con $\sigma_1 > \sigma_0$, $e^{-\sigma_1 t}$ diverge más rápido que $e^{-\sigma_0 t}$ conforme $t \rightarrow -\infty$, $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ no puede crecer sin límite en la dirección negativa de tiempo, ya que $x(t) = 0$ para $t < T_1$. También, en este caso, si un punto s está en la

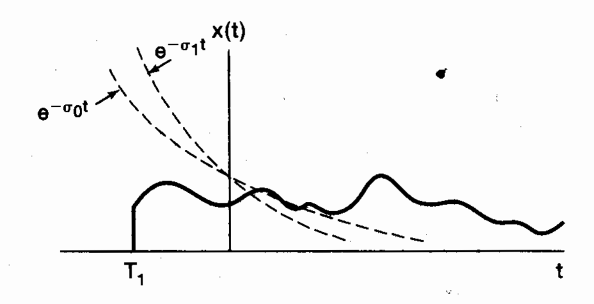


Figura 9.7 Si $x(t)$ es derecha y $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ es absolutamente integrable, entonces $x(t)e^{-\sigma_1 t}$, $\sigma_1 > \sigma_0$ también será absolutamente integrable.

ROC, entonces todos los puntos a la derecha de s, es decir, todos los puntos con partes reales más grandes, están en la ROC. Por esta razón, la ROC en el presente caso se conoce comúnmente como *semiplano derecho*.

> **Propiedad 5:** Si $x(t)$ es izquierda y si la línea $\mathcal{Re}\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de s para los cuales $\mathcal{Re}\{s\} < \sigma_0$ también estarán en la ROC.

Una señal *del lado izquierdo* o simplemente *izquierda* es aquella en la cual $x(t) = 0$ después de algún tiempo finito T_2, como se ilustra en la figura 9.8. El argumento y la intuición que sustentan esta propiedad son exactamente análogos a los de la propiedad 4. Asimismo, para una señal izquierda, la ROC se conoce por lo general como *semiplano izquierdo*, ya que si un punto s está en la ROC, todos los puntos a la izquierda de s estarán en la ROC.

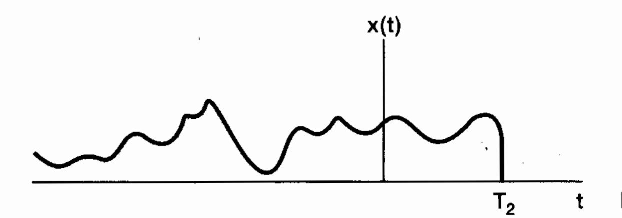


Figura 9.8 Señal izquierda.

> **Propiedad 6:** Si $x(t)$ es bilateral y si la línea $\mathcal{Re}\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces la ROC consistirá de una banda en el plano s que incluya la línea $\mathcal{Re}\{s\} = \sigma_0$.

Una *señal bilateral* es aquella que tiene extensión infinita tanto para $t > 0$ como para $t < 0$, tal como se ilustra en la figura 9.9(a). Para tales señales, la ROC puede examinarse escogiendo un tiempo arbitrario T_0 y dividiendo $x(t)$ en la suma de una señal derecha $x_R(t)$ y una señal izquierda $x_L(t)$ como se indica en las figuras 9.9(b) y (c). La transformada de Laplace de $x(t)$ converge para valores de s en los cuales las transformadas de *ambas* señales $[x_R(t)$ y $x_L(t)]$ convergen. De acuerdo con la propiedad 4, la ROC de $\mathfrak{L}\{x_R(t)\}$ consiste en un semiplano definido por $\mathcal{Re}\{s\} > \sigma_R$ para algún valor de σ_R, de acuerdo con la propiedad 5 la ROC de $\mathfrak{L}\{x_L(t)\}$ consiste en un semiplano definido por $\mathcal{Re}\{s\} < \sigma_L$ para algún valor de σ_L. La ROC de $\mathfrak{L}\{x(t)\}$ es entonces la superposición de estos dos semiplanos, como se indica en la figura 9.10. Con lo anterior se da por hecho que $\sigma_R < \sigma_L$, de manera que hay algo de traslape. Si éste no es el caso, entonces no existirá la transformada de Laplace de $x(t)$, aun cuando las transformadas de Laplace de $x_R(t)$ y $x_L(t)$ existan en forma individual.

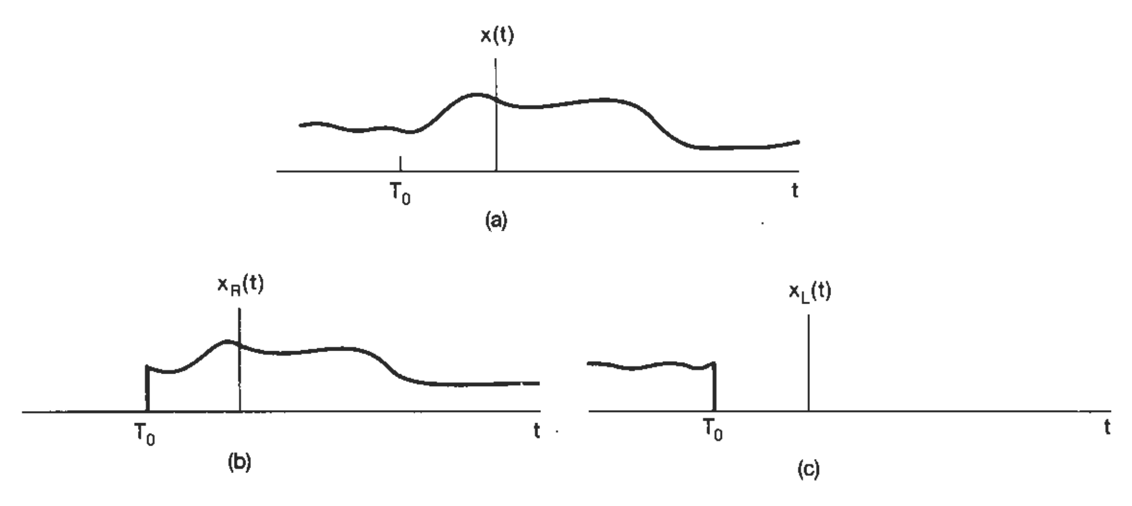


Figura 9.9 Señal bilateral dividida en la suma de una señal derecha y una izquierda: (a) señal bilateral $x(t)$; (b) la señal derecha igual a $x(t)$ para $t > T_0$ e igual a 0 para $t < T_0$; (c) la señal izquierda igual a $x(t)$ para $t < T_0$ e igual a 0 para $t > T_0$.

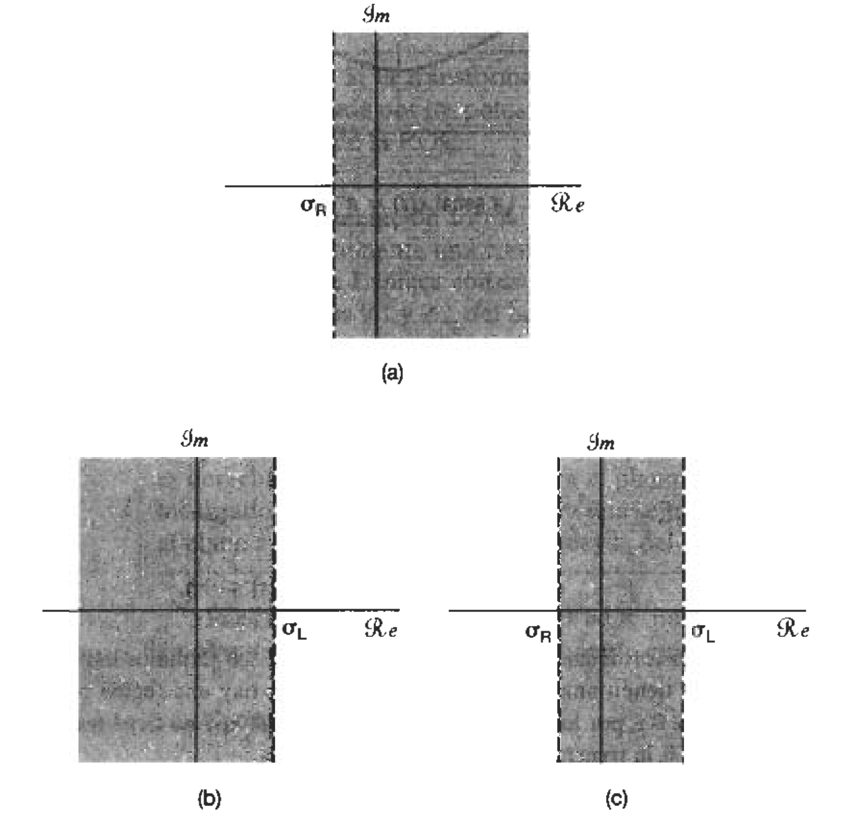


Figura 9.10 (a) ROC de $x_R(t)$ en la figura 9.9; (b) la ROC de $x_L(t)$ en la figura 9.9; (c) ROC de $x(t) = x_R(t) + x_L(t)$, suponiendo que las ROC en (a) y (b) se traslapan.

Ejemplo 9.7

Sea

$$x(t) = e^{-b|t|}, \tag{9.47}$$

como se ilustra en la figura 9.11 para $b > 0$ y $b < 0$. Ya que ésta es una señal bilateral, la dividiremos en la suma de una señal derecha y una izquierda; esto es,

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{+bt}u(-t). \tag{9.48}$$

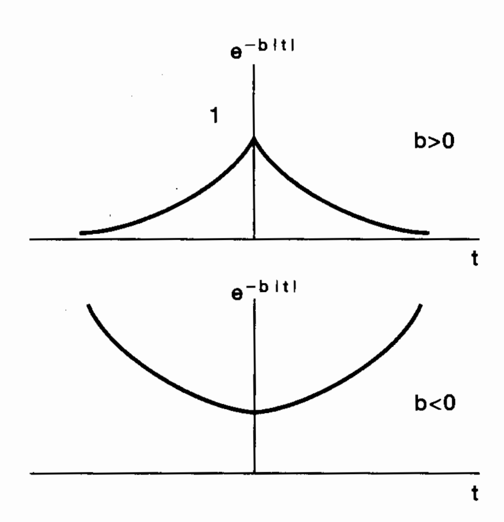


Figura 9.11 La señal $x(t) = e^{-b|t|}$ para $b > 0$ y $b < 0$.

Del ejemplo 9.1,

$$e^{-bt}u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+b}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -b, \tag{9.49}$$

y del ejemplo 9.2,

$$e^{+bt}u(-t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{-1}{s-b}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} < +b. \tag{9.50}$$

Aunque las transformadas de Laplace de cada uno de los términos individuales en la ecuación (9.48) tienen una región de convergencia, no hay una región *común* de convergencia si $b \leq 0$ y, por lo tanto, para esos valores de b, $x(t)$ no tiene transformada de Laplace. Si $b > 0$, la transformada de Laplace de $x(t)$ es

$$e^{-b|t|} \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2-b^2}, \qquad -b < \mathcal{R}e\{s\} < +b. \tag{9.51}$$

El diagrama de polos y ceros correspondiente se muestra en la figura 9.12, con cuya área sombreada se indica la ROC.

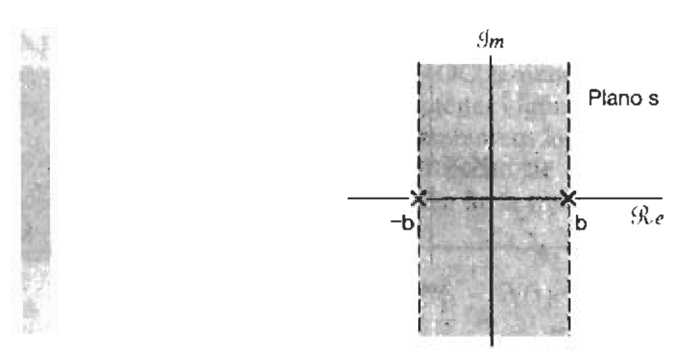


Figura 9.12 Diagrama de polos y ceros y ROC para el ejemplo 9.7.

Observe que cualquier señal, o no tiene transformada de Laplace o cae en una de las cuatro categorías cubiertas por las propiedades 3 a 6. Por lo tanto, para cualquier señal que tenga transformada de Laplace, la ROC *debe* ser el plano s completo (para señales de longitud finita), o el semiplano izquierdo (para señales del lado izquierdo), o el semiplano derecho (para señales del lado derecho), o una sola franja (para señales bilaterales). En todos los ejemplos que hemos considerado, la ROC tiene la propiedad adicional de que en cada dirección (es decir, $\mathcal{Re}\{s\}$ se incrementa y $\mathcal{Re}\{s\}$ disminuye) está limitada por polos o se extiende al infinito. De hecho, esto *siempre* es cierto para transformadas racionales de Laplace.

Propiedad 7: Si la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ es racional, entonces su ROC está limitada por los polos o se extiende al infinito. Además, ningún polo de $X(s)$ está contenido en la ROC.

Una argumentación formal para esta propiedad resulta un tanto tediosa, pero su validez es esencialmente una consecuencia del hecho de que una señal con una transformada racional de Laplace consiste de una combinación lineal de exponenciales y, a partir de los ejemplos 9.1 y 9.2, del hecho de que la ROC de la transformada de los términos individuales en esta combinación lineal debe tener esta propiedad. Como consecuencia de la propiedad 7, junto con las propiedades 4 y 5, tenemos la

Propiedad 8: Si la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ es racional, entonces si $x(t)$ es derecha, la ROC será la región en el plano s que se encuentra a la derecha del polo localizado más hacia la derecha. Para una señal $x(t)$ izquierda, la ROC será la región en el plano s que se encuentra a la izquierda del polo localizado más hacia la izquierda.

Para ilustrar cómo las diferentes ROC pueden estar asociadas con un mismo patrón de polos y ceros, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9.8

Sea

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \tag{9.52}$$

con el patrón de polos y ceros asociado mostrado en la figura 9.13(a). Como indican las figuras 9.13(b) a (d), hay tres posibles ROC que pueden estar asociadas con esta expre-

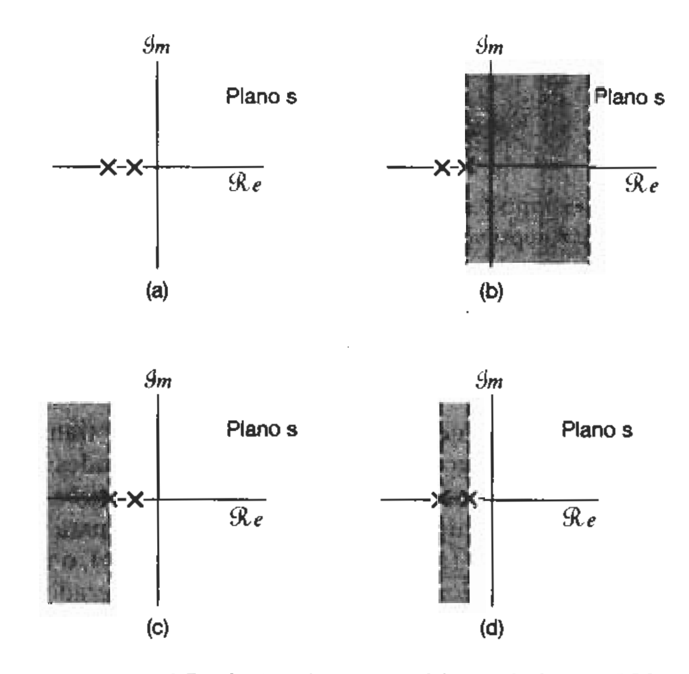


Figura 9.13 (a) Patrón de polos y ceros del ejemplo 9.8; (b) ROC correspondiente a una secuencia derecha; (c) ROC correspondiente a una secuencia izquierda; (d) ROC correspondiente a una secuencia bilateral.

sión algebraica, las cuales corresponden a tres señales distintas. La señal asociada con el patrón de polos y ceros de la figura 9.13(b) es derecha. Puesto que la ROC incluye el eje $j\omega$, la transformada de Fourier de esta señal converge. La figura 9.13(c) corresponde a una señal izquierda y la 9.13(d) a una señal bilateral. Ninguna de estas dos señales tiene transformada de Fourier, ya que la ROC no incluye el eje $j\omega$.

9.3 LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

En la sección 9.1 analizamos la interpretación de la transformada de Laplace de una señal como la transformada de Fourier de una versión exponencialmente ponderada de la señal; esto es, cuando s se expresa como $s = \sigma + j\omega$, la transformada de Laplace de una señal $x(t)$ está dada por

$$X(\sigma + j\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\,dt \tag{9.53}$$

para valores de $s = \sigma + j\omega$ en la ROC. Podemos invertir esta relación usando la transformada inversa de Fourier dada en la ecuación (4.9). Tenemos

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathfrak{F}^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega, \tag{9.54}$$

o, multiplicando ambos lados por $e^{\sigma t}$, obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}\,d\omega. \tag{9.55}$$

Esto es, podemos recuperar $x(t)$ a partir de su transformada de Laplace evaluada para un conjunto de valores de $s = \sigma + j\omega$ en la ROC, teniendo una σ fija y con una ω que varía de $-\infty$ a $+\infty$. Podemos remarcar esto y obtener algún aprendizaje adicional sobre la forma de recuperar $x(t)$ a partir de $X(s)$ si cambiamos la variable de integración en la ecuación (9.55), de ω a s, y nos valemos del hecho de que σ es constante, de modo que $ds = j\,d\omega$. El resultado es la ecuación básica de la transformada inversa de Laplace:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}\,ds.} \tag{9.56}$$

Esta ecuación indica que $x(t)$ puede representarse como una integral ponderada de exponenciales complejas. El contorno de la integración en la ecuación (9.56) es la línea recta en el plano s, correspondiente a todos los puntos s que satisfacen $\mathcal{R}e\{s\} = \sigma$. Esta línea es paralela al eje $j\omega$. Además, podemos seleccionar cualquier línea en la ROC, es decir, podemos seleccionar cualquier valor de σ tal que $X(\sigma + j\omega)$ converja. La evaluación formal de la integral para una $X(s)$ general requiere del uso de la integración de contornos en el plano complejo, un tema que no consideraremos aquí. Sin embargo, para la clase de transformadas racionales, la transformada inversa de Laplace se puede determinar sin la evaluación directa de la ecuación (9.56), utilizando la técnica de expansión por fracciones parciales de una manera similar a la que se usó en el capítulo 4 para determinar la transformada inversa de Fourier. Básicamente, el procedimiento consiste en expandir la expresión algebraica racional en una combinación de términos de menor orden.

Por ejemplo, suponiendo que no hay polos de orden múltiple y que el orden del polinomio del denominador es mayor que el orden del polinomio del numerador, $X(s)$ se puede expandir en la siguiente forma:

$$X(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{s + a_i}. \tag{9.57}$$

A partir de la ROC de $X(s)$ se puede inferir la ROC de cada uno de los términos individuales en la ecuación (9.57) y entonces, a partir de los ejemplos 9.1 y 9.2 se puede determinar la transformada inversa de Laplace de los términos individuales. Hay dos posibles selecciones para la transformada inversa de cada término $A_i/(s + a_i)$ en la ecuación. Si la ROC se encuentra a la derecha del polo en $s = -a_i$, entonces la transformada inversa de este términos es $A_i e^{-a_i t} u(t)$, una señal derecha. Si la ROC está a la izquierda del polo en $s = -a_i$, entonces la transformada inversa de este términos es $-A_i e^{-a_i t} u(t)$, una señal izquierda. Sumando las transformadas inversas de los términos individuales en la ecuación (9.57) se obtiene la transformada inversa de $X(s)$. Es más conveniente presentar los detalles del procedimiento mediante varios ejemplos.

Ejemplo 9.9

Sea

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -1. \tag{9.58}$$

Para obtener la transformada inversa de Laplace, primero realizamos una expansión en fracciones parciales para obtener

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}. \tag{9.59}$$

Como se analiza en el apéndice, podemos evaluar los coeficientes A y B multiplicando ambos miembros de la ecuación (9.59) por $(s + 1)(s + 2)$ y después igualando los coeficientes de igual potencia de s en ambos lados. De manera alterna, podemos usar la relación

$$A = [(s + 1)X(s)]|_{s=-1} = 1, \tag{9.60}$$

$$B = [(s + 2)X(s)]|_{s=-2} = -1. \tag{9.61}$$

Por lo tanto, la expansión en fracciones parciales de $X(s)$ es

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}. \tag{9.62}$$

A partir de los ejemplos 9.1 y 9.2 sabemos que hay dos posibles transformadas inversas para una transformada de la forma $1/(s + a)$, dependiendo de si la ROC está a la izquierda o a la derecha del polo. En consecuencia, necesitamos determinar la ROC asociada con cada uno de los términos individuales de primer orden de la ecuación (9.62). Esto se realiza haciendo referencia a las propiedades de la ROC desarrolladas en la sección 9.2. Puesto que la ROC para $X(s)$ es $\mathcal{Re}\{s\} > -1$, la ROC para los términos individuales de la expansión en fracciones parciales de la ecuación (9.62) incluye $\mathcal{Re}\{s\} > -1$. La ROC para cada término puede entonces extenderse a la izquierda o a la derecha (o a ambos lados) para quedar limitada por un polo o por el infinito. Esto se ilustra en la figura 9.14. La figura 9.14(a) muestra el diagrama de polos y ceros y la ROC para $X(s)$ especificada en la ecuación (9.58). Las figuras 9.14(b) y 9.14(c) representan los términos individuales de la expansión en fracciones parciales dada en la ecuación (9.62). La ROC de la suma está indicada con un sombreado. Para el término representado por la figura 9.14(c), la ROC para la suma puede extenderse hacia la izquierda como se muestra, de manera que está limitada por un polo.

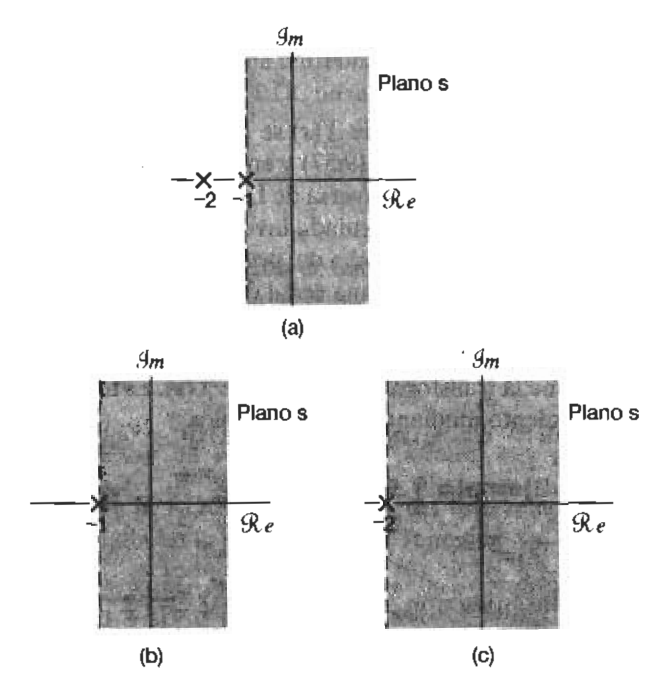


Figura 9.14 Construcción de la ROC para los términos individuales mediante expansión en fracciones parciales de $X(s)$ en el ejemplo 9.8; (a) diagrama de polos y ceros y ROC para $X(s)$; (b) polo en $s = -1$ y su ROC; (c) polo en $s = -2$ y su ROC.

Debido a que la ROC está a la derecha de ambos polos, lo mismo se cumple para cada uno de los términos individuales, como se puede ver en las figuras 9.14(b) y (c). En consecuencia, a partir de la propiedad 8 en la sección anterior, sabemos que cada uno de estos términos corresponde a una señal derecha. La transformada inversa de los términos individuales de la ecuación (9.62) se obtiene haciendo referencia al ejemplo 9.1:

$$e^{-t}u(t) \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -1, \tag{9.63}$$

$$e^{-2t}u(t) \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -2. \tag{9.64}$$

Así obtenemos

$$[e^{-t} - e^{-2t}]u(t) \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -1. \tag{9.65}$$

Ejemplo 9.10

Ahora supongamos que la expresión algebraica para $X(s)$ es nuevamente la de la ecuación (9.58), pero la ROC es ahora el plano izquierdo $\mathcal{R}e\{s\} < -2$. La expansión en fracciones parciales de $X(s)$ se relaciona sólo con la expresión algebraica, de manera que la ecuación (9.62) aún es válida. Sin embargo, con esta nueva ROC, que está a la *izquierda* de ambos polos, lo mismo debe cumplirse para cada uno de los términos en la ecuación. Esto es, la ROC para el término correspondiente al polo en $s = -1$ es $\mathcal{R}e\{s\} < -1$, mientras que la ROC para el término con el polo en $s = -2$ es $\mathcal{R}e\{s\} < -2$. Entonces, del ejemplo 9.2,

$$-e^{-t}u(-t) \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \quad \mathcal{R}e\{s\} < -1, \tag{9.66}$$

$$-e^{-2t}u(-t) \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \quad \mathcal{R}e\{s\} < -2, \tag{9.67}$$

de modo que

$$x(t) = [-e^{-t} + e^{-2t}]u(-t) \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \mathcal{R}e\{s\} < -2. \tag{9.68}$$

Ejemplo 9.11

Finalmente, supongamos que la ROC de $X(s)$ en la ecuación (9.58) es $-2 < \mathcal{R}e\{s\} < -1$. En este caso, la ROC está a la izquierda del polo en $s = -1$ por lo que este término corresponde a una señal izquierda en la ecuación (9.66), mientras que la ROC está a la derecha del polo en $s = -2$ de manera que este término corresponde a la señal derecha en la ecuación (9.64). Combinando ambos resultados encontramos que

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad -2 < \mathcal{R}e\{s\} < -1. \tag{9.69}$$

Como analizamos en el apéndice, cuando $X(s)$ tiene polos de orden múltiple, o cuando el denominador no es de un grado mayor que el numerador, la expansión de $X(s)$ por fracciones parciales incluirá otros términos además de los de primer orden considerados en los ejemplos 9.9 a 9.11. En la sección 9.5, después de discutir las propiedades de la transformada de Laplace, desarrollaremos algunos otros pares de transformadas de Laplace los cuales, junto con las propiedades nos permiten extender el método de la transformada inversa descrito en el ejemplo 9.9 para transformadas racionales arbitrarias.

9.4 EVALUACIÓN GEOMÉTRICA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER A PARTIR DEL DIAGRAMA DE POLOS Y CEROS

Como vimos en la sección 9.1, la transformada de Fourier de una señal constituye la transformada de Laplace evaluada sobre el eje $j\omega$. En esta sección analizamos un procedimiento para evaluar geométricamente la transformada de Fourier y, de manera más general, la transformada de Laplace en cualquier conjunto de valores a partir del patrón de polos y ceros asociado con la transformada racional de Laplace. Para desarrollar el procedimiento, consideremos primero una transformada de Laplace con un solo cero [es decir, $X(s) = s - a$], la cual evaluamos en un valor específico de s, digamos $s = s_1$. La expresión algebraica $s_1 - a$ es la suma de dos números complejos, s_1 y $-a$, cada uno de los cuales se puede representar como un vector en el plano complejo, tal como se ilustra en la figura 9.15. El vector que representa el número complejo $s_1 - a$ es por consiguiente el vector suma de $\mathbf{s}_1$ y $-\mathbf{a}$, el cual vemos en la figura como el vector que va desde el cero localizado en $s = a$ hasta el punto s_1. El valor de $X(s_1)$ tiene entonces una magnitud igual a la longitud de este vector y un ángulo que consiste en el ángulo del vector con respecto al eje real. Si en lugar de un cero, $X(s)$ tiene un solo polo en $s = a$ [es decir, $X(s) = 1/(s - a)$], entonces el denominador estaría representado por el mismo vector suma de $\mathbf{s}_1$ y $-\mathbf{a}$, y el valor de $X(s_1)$ tendría una magnitud que es el *recíproco* de la longitud del vector desde el polo en $s = s_1$ y un ángulo que es el *negativo* del ángulo del vector con el eje real.

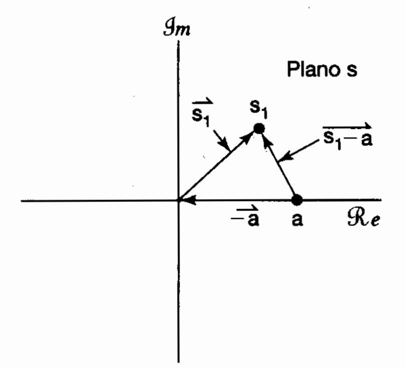


Figura 9.15 Representación en el plano complejo de los vectores $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{s}_1 - \mathbf{a}$ que representan los números complejos s_1, a y $s_1 - a$, respectivamente.

Una transformada racional de Laplace más general consiste en un producto de términos constituidos por polos y ceros de la forma discutida mencionada en el párrafo anterior; esto es, puede factorizarse de la siguiente forma:

$$X(s) = M\frac{\prod_{i=l}^{R} (s - \beta_i)}{\prod_{j=l}^{P} (s - \alpha_j)}. \tag{9.70}$$

Para evaluar $X(s)$ en $s = s_1$, cada término del producto se representa por un vector que va desde el cero o el polo hasta el punto s_1. La magnitud de $X(s_1)$ es entonces la magnitud del factor de escala M, multiplicado por el producto de las longitudes de los vectores cero (es decir, los vectores desde los ceros hasta s_1) dividido entre el producto de las longitudes de los vectores polos (es decir, los vectores desde los polos hasta s_1). El ángulo del número complejo $X(s_1)$ es la suma de los ángulos de los vectores cero menos la suma de los ángulos de los vectores polo. Si el factor de escala M en la ecuación (9.70) es negativo, debería incluirse un ángulo adicional de π. Si $X(s)$ tiene un polo o un cero múltiple (o ambos), lo cual correspondería a que alguna de las α_j fueran iguales unas a otras o que

algunas de las β_i fueran iguales unas a otras (o ambos casos), las longitudes y ángulos de los vectores de cada uno de estos polos o ceros deben incluirse tantas veces como el número que corresponde al orden del polo o del cero.

Ejemplo 9.12

Sea

$$X(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -\frac{1}{2}. \tag{9.71}$$

La transformada de Fourier es $X(s)|_{s=j\omega}$. Entonces, para este ejemplo, la transformada de Fourier está dada por

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1/2}. \tag{9.72}$$

El diagrama de polos y ceros de $X(s)$ se muestra en la figura 9.16. Para determinar gráficamente la transformada de Fourier, construimos el vector polo como se indica. La magnitud de la transformada de Fourier a la frecuencia ω es el recíproco de la longitud del vector desde el polo hasta el punto $j\omega$ en el eje imaginario. La fase de la transformada de Fourier es el negativo del ángulo del vector. Geométricamente, gracias a la figura 9.16 podemos escribir

$$|X(j\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + (1/2)^2} \tag{9.73}$$

y

$$\sphericalangle X(j\omega) = -\tan^{-1} 2\omega. \tag{9.74}$$

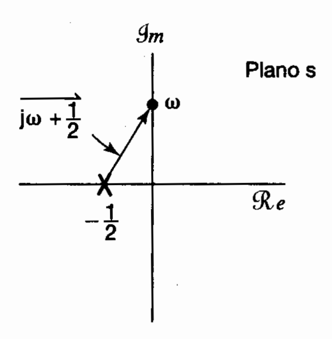


Figura 9.16 El diagrama de polos y ceros del ejemplo 9.12. $|X(j\omega_1)|$ es el recíproco de la longitud del vector mostrado y $\sphericalangle X(j\omega)$ es el negativo del ángulo del vector.

A menudo, parte del valor de la determinación geométrica de la transformada de Fourier reside en su utilidad para obtener una visión aproximada de todas sus características. Por ejemplo, en la figura 9.16 resulta evidente que la longitud del vector polo se

incrementa monotónicamente conforme ω se incrementa, y por lo tanto la magnitud de la transformada de Fourier *disminuirá* monotónicamente conforme ω se incrementa. La facultad para llegar a conclusiones generales acerca del comportamiento de la transformada de Fourier a partir del diagrama de polos y ceros se ilustra mediante la consideración de los sistemas generales de primer y segundo orden.

9.4.1 Sistemas de primer orden

Como una generalización del ejemplo 9.12, consideremos la clase de sistemas de primer orden que analizamos con cierto detalle en la sección 6.5.1. La respuesta al impulso para estos sistemas es

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t), \tag{9.75}$$

y su transformada de Laplace es

$$H(s) = \frac{1}{s\tau + 1}, \qquad \Re e\{s\} > -\frac{1}{\tau}. \tag{9.76}$$

El diagrama de polos y ceros se muestra en la figura 9.17. Observe en la figura que la longitud del vector polo es mínima para $\omega = 0$ y se incrementa de manera monotónica a medida que ω_1 se incrementa. Asimismo, el ángulo del polo se incrementa monotónicamente a partir de 0 a $\pi/2$ conforme ω se incrementa desde 0 hasta ∞.

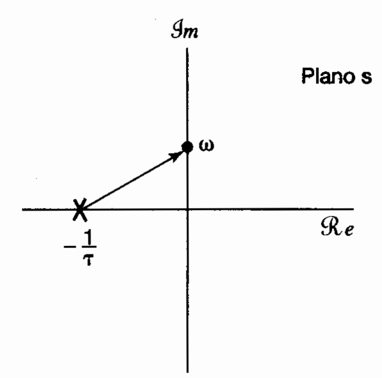
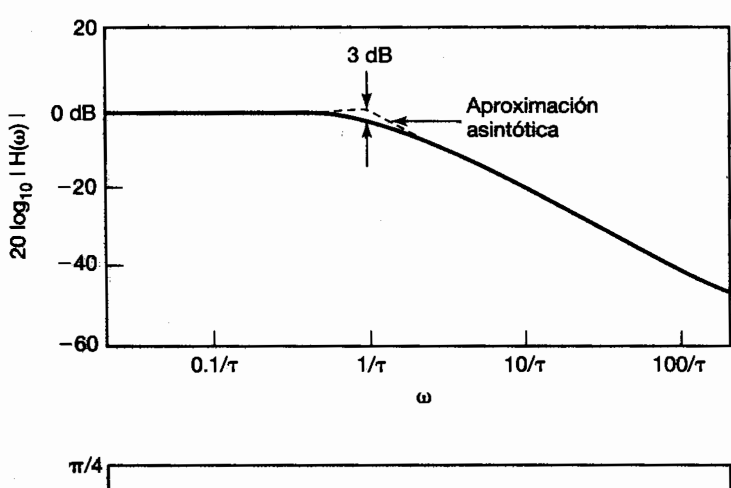


Figura 9.17 El diagrama de polos y ceros para el sistema de primer orden de la ecuación (9.76).

Del comportamiento del vector polo conforme ω varía, resulta claro que la magnitud de la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ disminuye monotónicamente conforme ω se incrementa, mientras que $\sphericalangle H(j\omega)$ disminuye de manera monotónica desde 0 hasta $-\pi/2$, como se muestra en los diagramas de Bode para este sistema en la figura 9.18. Observe también que cuando $\omega = 1/\tau$, las partes real e imaginaria del vector polo son iguales, lo cual produce un valor de la magnitud de la respuesta en frecuencia que se reduce por un factor de $\sqrt{2}$, o aproximadamente 3 dB, a partir de su máximo en $\omega = 0$ y un valor de $\pi/4$ para el ángulo de la respuesta en frecuencia. Esto concuerda con nuestro análisis de los sistemas de primer orden en la sección 6.5.1, donde observamos que $\omega = 1/\tau$ se conoce a menudo como el punto de 3 dB o la frecuencia de corte (es decir, la frecuencia a la cual la aproximación en línea recta del diagrama de Bode de $|H(j\omega)|$ tiene una esquina en su



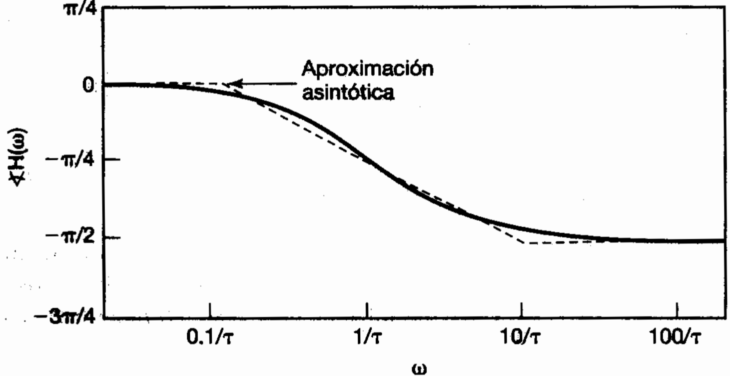


Figura 9.18 Respuesta en frecuencia del sistema de primer orden.

pendiente). Como vimos también en la sección 6.5.1, la constante de tiempo τ controla la velocidad de respuesta de los sistemas de primer orden, y vemos ahora que el polo de dicho sistema en $s = -1/\tau$ se encuentra sobre el eje real negativo, a una distancia del origen que es el recíproco de la constante de tiempo.

A partir de nuestra interpretación gráfica, podemos también ver cómo cambian las características de un sistema de primer orden cuando se modifica la constante de tiempo, o de manera equivalente, la posición del polo de $H(s)$. En particular, conforme el polo se mueve alejándose en el semiplano izquierdo, la frecuencia de esquina y por tanto, la frecuencia de corte efectiva del sistema se incrementan. También, de la ecuación (9.75) y de la figura 6.19, vemos que este mismo movimiento del polo hacia la izquierda corresponde a una disminución en la constante de tiempo τ, lo cual da como resultado un decaimiento más rápido de la respuesta al impulso y por consiguiente un tiempo de subida más rápido en la respuesta al escalón. Esta relación entre la parte real de las diferentes ubicaciones del polo y la velocidad de la respuesta del sistema se cumple de manera más general; esto es, los polos más alejados del eje $j\omega$ se encuentran asociados con términos de respuesta más rápidos en la respuesta al impulso.

9.4.2 Sistemas de segundo orden

En seguida consideramos los sistemas de segundo orden, los cuales analizamos con cierto detalle en la sección 6.5.2. La respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia para el

sistema están dadas originalmente en las ecuaciones (6.37) y (6.33), respectivamente, y son

$$h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t), \tag{9.77}$$

donde

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1},$$
$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1},$$
$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}},$$

y

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}. \tag{9.78}$$

La transformada de Laplace de la respuesta al impulso es

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - c_1)(s - c_2)}. \tag{9.79}$$

Para $\zeta > 1$, c_1 y c_2 son reales y por lo tanto los polos caen en el eje real, como se indica en la figura 9.19(a). El caso de $\zeta > 1$ es en esencia un producto de dos términos de primer orden, como en la sección 9.4.1. En consecuencia, en este caso $|H(j\omega)|$ decrece en forma monotónica conforme $|\omega|$ se incrementa, mientras $\sphericalangle H(j\omega)$ varía desde 0 a $\omega = 0$ hasta $-\pi$ conforme $\omega \to \infty$. Esto puede verificarse gracias a la figura 9.19(a) al observar que la longitud del vector de cada uno de los dos polos en el punto $s = j\omega$ se incrementa monotónicamente conforme ω se incrementa desde 0, y el ángulo de cada vector se incrementa desde 0 hasta $\pi/2$ conforme ω se incrementa desde 0 hasta ∞. Observe también que, a medida que ζ se incrementa, un polo se acerca al eje $j\omega$, indicación de un término en la respuesta al impulso que decae más lentamente, y el otro polo se aleja en el semiplano izquierdo, indicación de un término en la respuesta al impulso que decae de manera más rápida. De este modo, para valores grandes de ζ, el polo más cercano al eje $j\omega$ es el que domina la respuesta del sistema para tiempos grandes. De manera similar, a partir de una consideración de los vectores de polo para $\zeta \gg 1$, como se indica en la figura 9.19(b), para frecuencias bajas la longitud y el ángulo del vector del polo cercano al eje $j\omega$ son mucho más sensibles a cambios en ω que la longitud y ángulo del vector para el polo que está alejado del eje $j\omega$. Por lo tanto, vemos que para frecuencias bajas, las características de la respuesta en frecuencia son influenciadas principalmente por el polo cercano al eje $j\omega$.

Para $0 < \zeta < 1$, c_1 y c_2 son complejas, de manera que el diagrama de polos y ceros es el que se muestra en la figura 9.19(c). En forma correspondiente, la respuesta al impulso y la respuesta al escalón tienen partes oscilatorias. Podemos observar que los dos polos se presentan en localizaciones conjugadas complejas. De hecho, como se considera en la sección 9.5.5, los polos (y ceros) complejos para una señal real siempre ocurren en pares de conjugados complejos. A partir de la figura, particularmente cuando ζ es pequeña de manera que los polos están cercanos al eje $j\omega$, conforme ω se aproxima a $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, el comportamiento de la respuesta en frecuencia está dominado por el vector del polo loca-

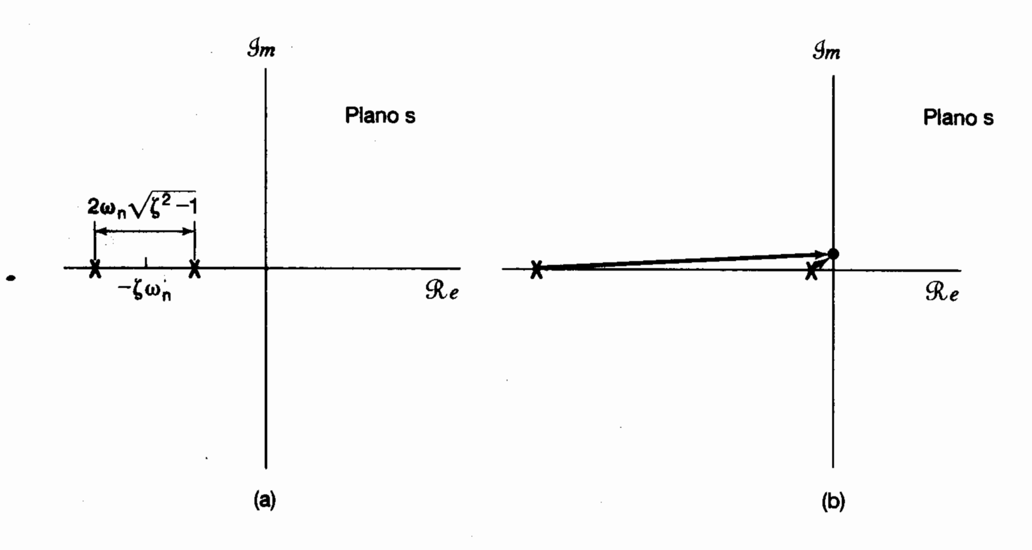


Figura 9.19 (a) Diagrama de polos y ceros para un sistema de segundo orden con $\zeta > 1$; (b) vectores de polo para $\zeta \gg 1$; (c) diagrama de polos y ceros para un sistema de segundo orden con $0 < \zeta < 1$; (d) vectores polo para $0 < \zeta < 1$ para $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ y $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \pm \zeta\omega_n$.

lizado en el segundo cuadrante, y en particular, la longitud del vector de ese polo tiene un mínimo en $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Por lo tanto, de manera cualitativa esperaríamos que la magnitud de la respuesta en frecuencia presentara un pico en la vecindad de esa frecuencia. Debido a la presencia de otros polos, el pico no ocurrirá exactamente en $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, pero sí a una frecuencia ligeramente menor que ésta. Un dibujo cuidadoso de la magnitud de la respuesta en frecuencia se muestra en la figura 9.20(a), para $\omega_n = 1$ y diversos valores de ζ donde el comportamiento esperado en la vecindad de los polos resulta evidente. Lo anterior concuerda con nuestro análisis de sistemas de segundo orden de la sección 6.5.2.

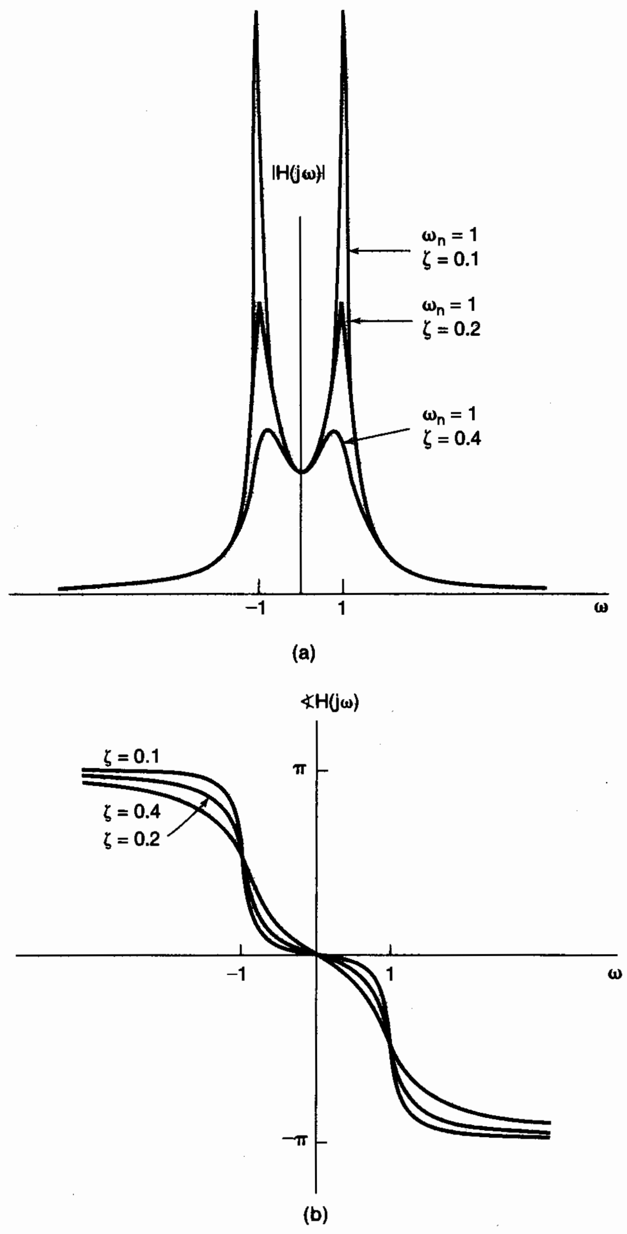


Figura 9.20 (a) Magnitud y (b) fase de la respuesta en frecuencia para un sistema de segundo orden con $0 < \zeta < 1$.

Por lo tanto, para $0 < \zeta < 1$, el sistema de segundo orden es un filtro paso banda no ideal, siendo el parámetro ζ el que controla la agudeza y el ancho del pico en la respuesta en frecuencia. En particular, gracias a la geometría en la figura 9.19(d), vemos que la longitud del vector polo del segundo cuadrante se incrementa por un factor de $\sqrt{2}$ a partir de su mínimo en $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ cuando ω se incrementa o disminuye a partir de este valor por $\zeta\omega_n$. En consecuencia, para valores pequeños de ζ, y despreciando el efecto que el polo lejano del tercer cuadrante pudiera ejercer, $|H(j\omega)|$ está dentro de un factor de $\sqrt{2}$ de su valor pico sobre el intervalo de frecuencia

$$\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} - \zeta\omega_n < \omega < \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\omega_n.$$

Si definimos el ancho de banda relativo B como la longitud de este intervalo de frecuencia dividido entre la frecuencia natural no amortiguada ω_n, vemos que

$$B = 2\zeta.$$

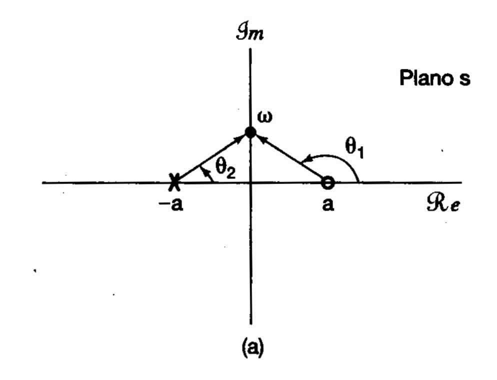
Así, entre más cercano esté ζ, más agudo y angosto será el pico en la respuesta en frecuencia. Observe también que B es el recíproco del factor de calidad Q para los sistemas de segundo orden definidos en la sección 6.5.2. De este modo, conforme se incrementa la calidad, el ancho de banda relativo disminuye y el filtro se hace incrementalmente más selectivo en frecuencia.

Una representación análoga se puede desarrollar para $\sphericalangle H(\omega)$, la cual está representada en la figura 9.20(b) para $\omega_n = 1$ y diversos valores de ζ. Como podemos ver de la figura 9.19(d), el ángulo del vector de polo del segundo cuadrante cambia de $-\pi/4$ a 0 hasta $\pi/4$ conforme ω cambia de $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} - \zeta\omega_n$ a $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ a $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\omega_n$. Para valores pequeños de ζ, el ángulo para el polo del tercer cuadrante cambia muy poco sobre este intervalo de frecuencia, lo cual da como resultado un cambio rápido en $\sphericalangle H(j\omega)$ de aproximadamente $\pi/2$ sobre el intervalo, como puede verse en la figura.

Cuando ω_n varía con ζ fija sólo cambia la escala de frecuencia en el análisis anterior, es decir, $|H(\omega)|$ y $\sphericalangle H(\omega)$ dependen sólo de ω/ω_n. De la figura 9.19(c) podemos determinar con facilidad cómo los polos y las características del sistema cambian a medida que variamos ζ manteniendo ω_n constante. Debido a que $\cos\theta = \zeta$, los polos se mueven alrededor de un semicírculo de radio fijo ω_n. Para $\zeta = 0$, los dos polos están en el eje imaginario. De manera correspondiente, en el dominio del tiempo la respuesta al impulso es senoidal sin amortiguamiento. Conforme ζ se incrementa de 0 a 1, los dos polos permanecen complejos y se mueven en el semiplano izquierdo del plano, y los vectores que van del origen a los polos mantienen constante una magnitud total de ω_n. A medida que la parte real de los polos se hace más negativa, el tiempo de respuesta asociado decaerá más rápidamente conforme $t \to \infty$. Asimismo, como hemos visto, conforme ζ se incrementa desde 0 hacia 1, el ancho de banda relativo de la respuesta en frecuencia se incrementa y la respuesta en frecuencia se hace menos aguda y menos selectiva en frecuencia.

9.4.3 Sistemas pasa todo

Como un ejemplo final de la evaluación geométrica de la respuesta en frecuencia, examinemos un sistema para el cual la transformada de Laplace de la respuesta al impulso tiene el diagrama de polos y ceros que se muestra en la figura 9.21(a). En esta figura resulta evidente que, para cualquier valor a lo largo del eje $j\omega$, los vectores de polos y ceros tienen igual longitud y en consecuencia la magnitud de la respuesta en frecuencia es constante e independiente de la frecuencia. Tales sistemas se conocen comúnmente



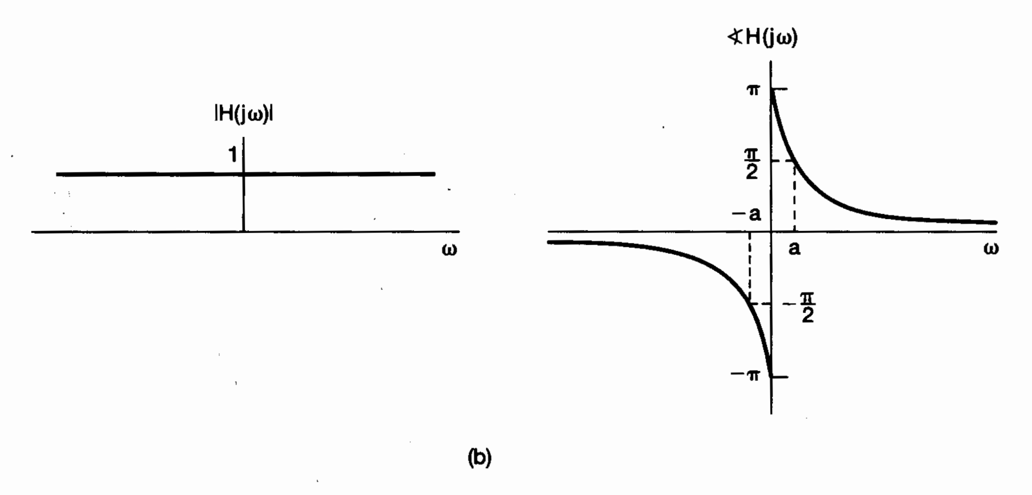


Figura 9.21 (a) Diagrama de polos y ceros de un filtro pasa todo; (b) magnitud y fase de una respuesta en frecuencia del pasa todo.

como *sistemas pasa todo*, ya que dejan pasar todas las frecuencias con igual ganancia (o atenuación). La fase de la respuesta en frecuencia es $\theta_1 - \theta_2$ o, ya que $\theta_1 = \pi - \theta_2$,

$$\sphericalangle H(j\omega) = \pi - 2\theta_2. \tag{9.80}$$

De la figura 9.21(a), $\theta_2 = \tan^{-1}(\omega/a)$ y por consiguiente,

$$\sphericalangle H(j\omega) = \pi - 2\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right). \tag{9.81}$$

La magnitud y la fase de $H(j\omega)$ se ilustran en la figura 9.21(b).

9.5 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Cuando utilizamos la transformada de Fourier nos apoyamos fuertemente en el conjunto de propiedades desarrolladas en la sección 4.3. En esta sección consideramos el conjunto de propiedades correspondiente para la transformada de Laplace. Las deducciones de muchos de estos resultados son análogas a aquellas de las propiedades correspon-

dientes de la transformada de Fourier. Por lo tanto, no presentaremos detalles de las deducciones, pues algunas de éstas se muestran como ejercicios al final del capítulo (véanse los problemas 9.52 a 9.54).

9.5.1 Linealidad de la transformada de Laplace

Si

$$x_1(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s)$$ con una región de convergencia que se señalará como R_1

y

$$x_2(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_2(s)$$ con una región de convergencia que se señalará como R_2,

entonces

$$ax_1(t) + bx_2(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} aX_1(s) + bX_2(s), \quad \text{con la ROC conteniendo } R_1 \cap R_2. \tag{9.82}$$

Como se indica arriba, la región de convergencia de $X(s)$ es al menos la intersección de R_1 y R_2, la cual puede estar vacía, en cuyo caso $X(s)$ no tiene región de convergencia [es decir, $x(t)$ no tiene transformada de Laplace]. Por ejemplo, para una $x(t)$ como en la ecuación (9.47) del ejemplo 9.7, con $b > 0$, la ROC para $X(s)$ es la intersección de la ROC de los dos términos en la suma. Si $b < 0$ no hay puntos comunes en R_1 y R_2; es decir, la intersección se encuentra vacía y por lo tanto $x(t)$ no tiene transformada de Laplace. La ROC también puede se más grande que la intersección. Como un ejemplo sencillo, para $x_1(t) = x_2(t)$ y $a = -b$ en la ecuación (9.82), $x(t) = 0$ y por lo tanto $X(s) = 0$. La ROC de $X(s)$ está entonces en el plano s completo.

La ROC asociada con una combinación lineal de términos siempre se puede construir usando las propiedades de la ROC desarrolladas en la sección 9.2. En concreto, a partir de la intersección de las ROC de los términos individuales (suponiendo que no esté vacía), podemos encontrar una línea o banda que esté en la ROC de la combinación lineal. Entonces, extendemos esto hacia la derecha (incrementando $\mathcal{Re}\{s\}$) y hacia la izquierda (disminuyendo $\mathcal{Re}\{s\}$) hasta los polos más cercanos (los cuales pueden estar en el infinito).

Ejemplo 9.13

En este ejemplo ilustramos el hecho de que la ROC para la transformada de Laplace de una combinación lineal de señales algunas veces puede extenderse más allá de la intersección de las ROC para los términos individuales. Considere

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t), \tag{9.83}$$

donde las transformadas de Laplace de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son, respectivamente,

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad \Re\{s\} > -1, \tag{9.84}$$

y

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \qquad \Re\{s\} > -1. \tag{9.85}$$

El diagrama de polos y ceros, incluyendo la ROC para $X_1(s)$ y $X_2(s)$, se muestra en las figuras 9.22(a) y (b). Partiendo de la ecuación (9.82),

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}. \tag{9.86}$$

Por lo tanto, en la combinación lineal de $x_1(t)$ y $x_2(t)$, el polo en $s = -1$ es cancelado por el cero en $s = -1$. El diagrama de polos y ceros para $X(s) = X_1(s) - X_2(s)$ se muestra en la figura 9.22(c). La intersección de las ROC para $X_1(s)$ y $X_2(s)$ es $\Re e\{s\} > -1$. Sin embargo, en vista de que la ROC está siempre limitada por un polo o por el infinito, para este ejemplo la ROC para $X(s)$ puede extenderse hacia la izquierda para estar limitada por el polo localizado en $s = -2$, como resultado de la cancelación polo-cero en $s = -1$.

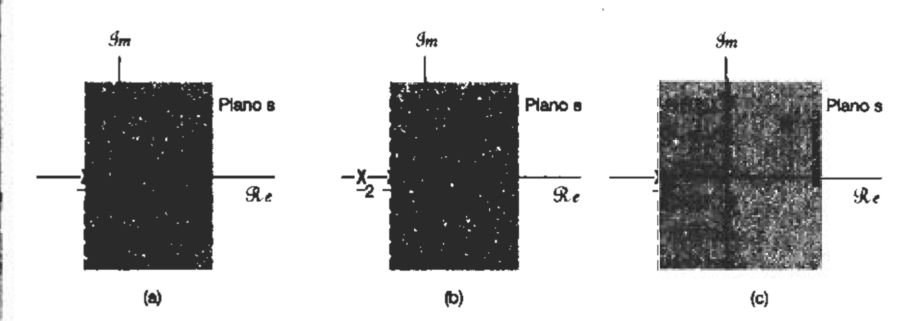


Figura 9.22 Diagramas de polos y ceros y ROC del ejemplo 9.13: (a) $X_1(s)$; (b) $X_2(s)$; (c) $X_1(s) - X_2(s)$. La ROC para $X_1(s) - X_2(s)$ incluye la intersección de R_1 y R_2, la cual puede extenderse para estar limitada por el polo en $s = -2$.

9.5.2 Desplazamiento en el tiempo

Si

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \qquad \text{con ROC} = R,$$

entonces

$$\boxed{x(t - t_0) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{-st_0}X(s), \qquad \text{con ROC} = R.} \tag{9.87}$$

9.5.3 Desplazamiento en el dominio de s

Si

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \qquad \text{con ROC} = R,$$

entonces

$$\boxed{e^{s_0 t}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s - s_0), \qquad \text{con ROC } = R + \mathcal{R}e\{s_0\}.} \tag{9.88}$$

Esto es, la ROC asociada con $X(s - s_0)$ es la de $X(s)$ desplazada por $\mathcal{R}e\{s_0\}$. Por lo tanto, para cualquier valor de s que esté en R, el valor $s + \mathcal{R}e\{s_0\}$ estará en R_1. Lo anterior se ilustra en la figura 9.23. Observe que si $X(s)$ tiene un polo o cero en $s = a$, entonces $X(s - s_0)$ tiene un polo o cero en $s - s_0 = a$, es decir, $s = a + s_0$.

Un caso especial importante de la ecuación (9.88) ocurre cuando $s_0 = j\omega_0$, es decir, cuando una señal $x(t)$ se usa para modular una exponencial compleja periódica $e^{j\omega_0 t}$. En este caso, la ecuación (9.88) se convierte en

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s - j\omega_0), \qquad \text{con ROC } = R. \tag{9.89}$$

El miembro derecho de la ecuación (9.89) se puede interpretar como un desplazamiento en el plano s paralelo al eje $j\omega$. Esto es, si la transformada de Laplace de $x(t)$ tiene un polo o cero en $s = a$, entonces la transformada de Laplace de $e^{j\omega_0 t}$ tiene un polo o cero en $s = a + j\omega_0$.

9.5.4 Escalamiento en tiempo

Si

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \qquad \text{con ROC} = R,$$

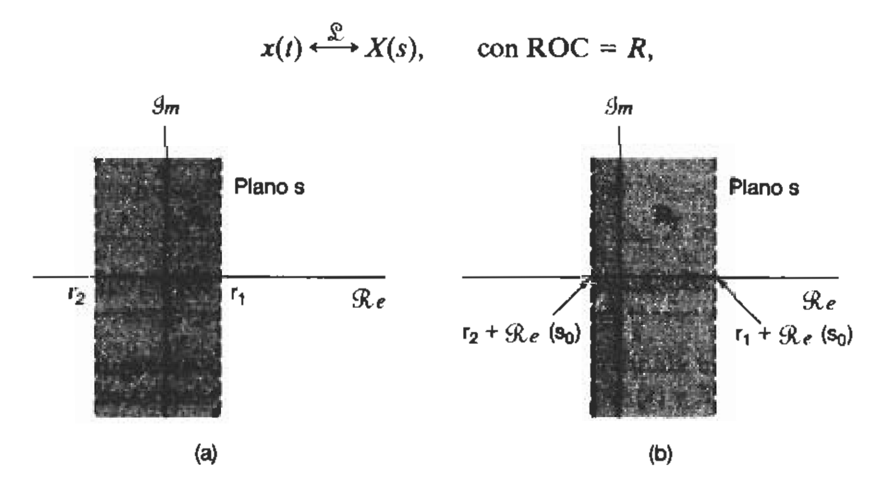
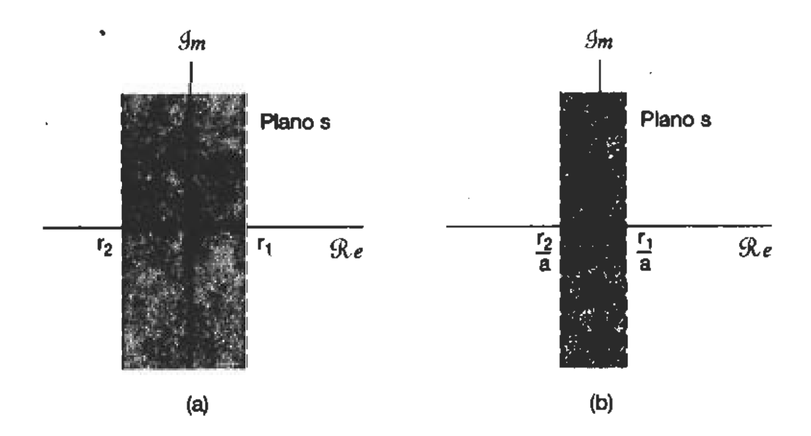


Figura 9.23 Efecto sobre la ROC del desplazamiento en el dominio de s: (a) la ROC de $X(s)$; (b) la ROC de $X(s - s_0)$.

entonces

$$x(at) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{con ROC } R_1 = \frac{R}{a}. \tag{9.90}$$

Esto es, para cualquier valor de s en R [el cual se ilustra en la figura 9.24(a)] el valor s/a estará en R_1, como se muestra en la figura 9.24(b) para un valor positivo de $a > 1$. Observe que, para $a > 1$, existe una compresión en el tamaño de la ROC de $X(s)$ por un factor de $1/a$, como hemos representado en la figura 9.24(b), mientras que para $0 < a < 1$, la ROC se expande por un factor de $1/a$. Además, la ecuación (9.90) implica que si a es negativa, la ROC sufre una inversión más un escalamiento. En particular, como se muestra en la figura 9.24(c), la ROC de $1/|a|X(s/a)$ para $0 > a > -1$ involucra una inversión



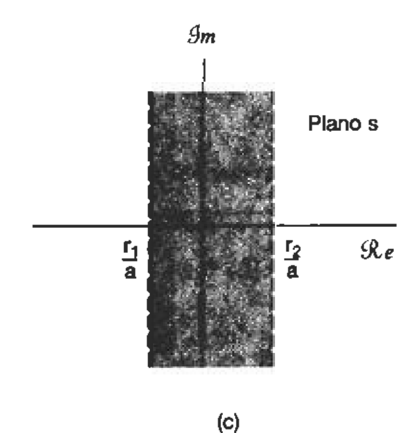


Figura 9.24 Efecto del escalamiento en tiempo sobre la ROC: (a) ROC de $X(s)$; (b) ROC de $(1/|a|)X(s/a)$ para $a > 1$; (c) ROC de $(1/|a|)X(s/a)$ para $0 > a > -1$.

alrededor del eje $j\omega$, junto con un cambio en el tamaño de la ROC por un factor de $1/|a|$. Por lo tanto, la inversión en tiempo de $x(t)$ da como resultado una inversión de la ROC. Esto es,

$$x(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(-s), \quad \text{con ROC} = -R. \tag{9.91}$$

9.5.5 Conjugación

Si

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \quad \text{con ROC} = R, \tag{9.92}$$

entonces

$$\boxed{x^*(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X^*(s^*), \quad \text{con ROC} = R.} \tag{9.93}$$

Por lo tanto,

$$X(s) = X^*(s^*) \quad \text{cuando } x(t) \text{ es real.} \tag{9.94}$$

En consecuencia, si $x(t)$ es real y si $X(s)$ tiene un polo o cero en $s = s_0$ (es decir, si $X(s)$ no está limitada o el cero está en $s = s_0$) entonces $X(s)$ también tiene un polo o cero en el punto conjugado complejo $s = s_0^*$. Por ejemplo, la transformada $X(s)$ para la señal real $x(t)$ en el ejemplo 9.4 tiene polos en $s = 1 \pm 3j$ y ceros en $s = (-5 \pm j\sqrt{71})/2$.

9.5.6 Propiedad de convolución

Si

$$x_1(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s), \quad \text{con ROC} = R_1,$$

y

$$x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_2(s), \quad \text{con ROC} = R_2,$$

entonces

$$\boxed{x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s)X_2(s), \quad \text{con ROC conteniendo } R_1 \cap R_2.} \tag{9.95}$$

De una manera semejante a la propiedad de linealidad definida en la sección 9.5.1, la ROC de $X_1(s)X_2(s)$ incluye la intersección de las ROC de $X_1(s)$ y $X_2(s)$ y puede ser más grande si la cancelación de polos y ceros ocurre en el producto. Por ejemplo, si

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad \mathcal{Re}\{s\} > -2, \tag{9.96}$$

y

$$X_2(s) = \frac{s+2}{s+1}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -1, \tag{9.97}$$

entonces $X_1(s)X_2(s) = 1$ y su ROC es el plano s completo.

Como vimos en el capítulo 4, la propiedad de convolución en el contexto de la transformada de Fourier juega un papel importante en el análisis de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo. En las secciones 9.7 y 9.8 utilizaremos la propiedad de convolución de la transformada de Laplace para el análisis de los sistemas LTI en general, específicamente para la clase de sistemas representados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

9.5.7 Diferenciación en el dominio del tiempo

Si

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \quad \text{con ROC} = R,$$

entonces

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s), \quad \text{con la ROC conteniendo } R.} \tag{9.98}$$

Esta propiedad se deduce al diferenciar ambos miembros de la ecuación (9.56) que expresa la transformada inversa de Laplace. En concreto, sea

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds.$$

Entonces

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX(s)e^{st}ds. \tag{9.99}$$

En consecuencia, $dx(t)/dt$ es la transformada inversa de Laplace de $sX(s)$. La ROC de $sX(s)$ incluye la ROC de $X(s)$ y puede ser más grande si $X(s)$ tiene un polo de primer orden en $s = 0$ que se cancela con la multiplicación por s. Por ejemplo, si $x(t) = u(t)$, entonces $X(s) = 1/s$ con una ROC que es $\mathcal{R}e\{s\} > 0$. La derivada de $x(t)$ es un impulso con transformada de Laplace asociada que es unitaria y una ROC que ocupa por completo el plano s.

9.5.8 Diferenciación en el dominio de s

Si diferenciamos ambos miembros de la ecuación (9.3) de la transformada de Laplace, es decir,

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt,$$

obtenemos

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t)x(t)e^{-st}dt.$$

En consecuencia, si

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \qquad \text{con ROC} = R,$$

entonces

$$-tx(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(s)}{ds}, \qquad \text{con ROC} = R. \tag{9.100}$$

Los dos siguientes ejemplos ilustran esta propiedad.

Ejemplo 9.14

Obtengamos la transformada de Laplace de

$$x(t) = te^{-at}u(t). \tag{9.101}$$

Ya que

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -a,$$

de la ecuación (9.100) se desprende que

$$te^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -a. \tag{9.102}$$

De hecho, mediante la aplicación repetida de la ecuación (9.100) obtenemos

$$\frac{t^2}{2}e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+a)^3}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -a, \tag{9.103}$$

y de manera más general

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+a)^n}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -a. \tag{9.104}$$

Como se demuestra en el siguiente ejemplo, este par específico de transformadas de Laplace es en particular útil cuando se aplica a la expansión en fracciones parciales para determinar la transformada inversa de Laplace de una función racional con polos de orden múltiple.

Ejemplo 9.15

Considere la transformada de Laplace

$$X(s) = \frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -1.$$

Al aplicar el método de expansión en fracciones parciales descrito en el apéndice, podemos escribir

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{3}{s+2}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -1. \tag{9.105}$$



Puesto que la ROC está a la derecha de los polos en $s = -1$ y -2, la transformada inversa de cada uno de los términos es una señal derecha, y al aplicar las ecuaciones (9.14) y (9.104) obtenemos la transformada inversa

$$x(t) = [2te^{-t} - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t).$$

9.5.9 Integración en el dominio del tiempo

Si

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \qquad \text{con ROC} = R,$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}X(s), \qquad \text{con la ROC conteniendo } R \cap \{\Re e\{s\} > 0\}. \tag{9.106}$$

Esta propiedad es el inverso de la propiedad de diferenciación determinada en la sección 9.5.7, lo cual se puede deducir usando la propiedad de convolución presentada en la sección 9.5.6. De manera específica,

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = u(t) * x(t). \tag{9.107}$$

Del ejemplo 9.1, con $a = 0$,

$$u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}, \qquad \Re e\{s\} > 0, \tag{9.108}$$

y por lo tanto, a partir de la propiedad de convolución,

$$u(t) * x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}X(s), \tag{9.109}$$

con una ROC que contiene la intersección de la ROC de $X(s)$ y la ROC de la transformada de Laplace de $u(t)$ en la ecuación (9.108), la cual corresponde a la ROC proporcionada en la ecuación (9.106).

9.5.10 Los teoremas de valor inicial y de valor final

Bajo las restricciones específicas de que $x(t) = 0$ para $t < 0$ y que $x(t)$ no contiene impulsos o funciones singulares de orden mayor en el origen, uno puede calcular directamente, a partir de la transformada de Laplace, el valor inicial $x(0^+)$ [es decir, $x(t)$ a medida que t se aproxima a cero desde valores positivos de t] y el valor final [es decir, el límite cuando $t \to \infty$ de $x(t)$]. El *teorema del valor inicial* establece que

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s), \tag{9.110}$$

mientras que el *teorema del valor final* nos dice que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s). \tag{9.111}$$

La deducción de estos resultados se consideran en el problema 9.53.

Ejemplo 9.16



Los teoremas de valor inicial y final pueden ser de utilidad para verificar si los cálculos de la transformada de Laplace para una señal son correctos. Por ejemplo, considere la señal $x(t)$ en el ejemplo 9.4. A partir de la ecuación (9.24) vemos que $x(0^+) = 2$. Asimismo, usando la ecuación (9.29) encontramos que

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{2s^3 + 5s^2 + 12}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} = 2,$$

lo cual es congruente con el teorema del valor inicial en la ecuación (9.110).

9.5.11 Tabla de propiedades

En la tabla 9.1 resumimos las propiedades desarrolladas en esta sección. En la sección 9.7 muchas de estas propiedades son utilizadas en la aplicación de la transformada de Laplace para el análisis y la caracterización de sistemas lineales invariantes en el tiempo. Como hemos mostrado en varios ejemplos, las diversas propiedades de las transformadas

TABLA 9.1 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sección	Propiedad	Señal	Transformada de Laplace	ROC
		$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$	R R_1 R_2
9.5.1	Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.2	Desplazamiento en tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
9.5.3	Desplazamiento en el dominio de s	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s - s_0)$	Versión desplazada de R (es decir, s está en la ROC si $s - s_0$ está en R)
9.5.4	Escalamiento en tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$	ROC escalada (es decir, s está en la ROC si s/a está en R)
9.5.5	Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
9.5.6	Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.7	Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	Al menos R
9.5.8	Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
9.5.9	Integración en el dominio del tiempo	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d(\tau)$	$\frac{1}{s}X(s)$	Al menos R $\cap$ $\{\Re e\{s\} > 0\}$

Teoremas del valor inicial y final

9.5.10 Si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y $x(t)$ no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en $t = 0$, entonces

$$x(0^+) = \lim_{x\to\infty} sX(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

de Laplace y sus ROC nos proveen de información considerable acerca de una señal y su transformada que puede ser útil ya sea en la caracterización de la señal o en la verificación de los cálculos. En las secciones 9.7 y 9.8 así como en algunos de los problemas al final de este capítulo, damos otros ejemplos del uso de estas propiedades.

9.6 ALGUNOS PARES DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Como indicamos en la sección 9.3, la transformada inversa de Laplace a menudo se puede evaluar mediante la descomposición de $X(s)$ en una combinación lineal de términos más sencillos, de los cuales puede reconocerse con facilidad la transformada inversa de cada uno de ellos. En la tabla 9.2 se enumeran varios pares útiles de transformadas de Laplace. El primer par de transformadas se deduce directamente de la ecuación (9.3). Los pares

TABLA 9.2 TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE FUNCIONES ELEMENTALES

Par de transformadas	Señal	Transformada	ROC
1	$\delta(t)$	1	Toda s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{Re}\{s\} > 0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{Re}\{s\} < 0$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{Re}\{s\} > 0$
5	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{Re}\{s\} < 0$
6	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathcal{Re}\{s\} > -\alpha$
7	$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathcal{Re}\{s\} < -\alpha$
8	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathcal{Re}\{s\} > -\alpha$
9	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathcal{Re}\{s\} < -\alpha$
10	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	Toda s
11	$[\cos \omega_0 t]\, u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{Re}\{s\} > 0$
12	$[\operatorname{sen} \omega_0 t]\, u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{Re}\{s\} > 0$
13	$[e^{-\alpha t}\cos \omega_0 t]\, u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{Re}\{s\} > -\alpha$
14	$[e^{-\alpha t}\operatorname{sen} \omega_0 t]\, u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{Re}\{s\} > -\alpha$
15	$u_n(t) = \frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	Toda s
16	$u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{n \text{ veces}}$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{Re}\{s\} > 0$

de transformada 2 y 6 se obtienen de manera directa a partir del ejemplo 9.1 con $a = 0$ y $a = \alpha$, respectivamente. El par de transformadas 4 se desarrolló en el ejemplo 9.14 mediante la propiedad de diferenciación. El par de transformada 8 se deduce a partir del par 4 usando la propiedad definida en la sección 9.5.3. Los pares de transformada 3, 5, 7 y 9 se basan en los pares 2, 4, 6 y 8, respectivamente, junto con la propiedad de escalamiento en tiempo de la sección 9.5.4 con $a = -1$. De manera similar, los pares de transformadas 10 a 16 pueden obtenerse a partir de los pares anteriores de la tabla usando las propiedades adecuadas de la tabla 9.1 (véase el problema 9.55).

9.7 ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN DE LOS SISTEMAS LTI USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Una de las aplicaciones más importantes de la transformada de Laplace es el análisis y caracterización de los sistemas LTI. Su papel para esta clase de sistemas proviene directamente de la propiedad de convolución (sección 9.5.6). En concreto, las transformadas de Laplace de la entrada y de la salida de un sistema LTI están relacionadas a través de la multiplicación por la transformada de Laplace de la respuesta al impulso del sistema. Por lo tanto,

$$Y(s) = H(s)X(s), \tag{9.112}$$

donde $X(s)$, $Y(s)$ y $H(s)$ son las transformadas de Laplace de la entrada, de la salida y de la respuesta al impulso del sistema, respectivamente. La ecuación (9.112) es la contraparte, en el contexto de las transformadas de Laplace, de la ecuación (4.56) que se desarrolló para la transformada de Fourier. De hecho, para $s = j\omega$, cada una de las transformadas de Laplace en la ecuación (9.112) se reduce a las transformadas de Fourier respectivas y la ecuación corresponde exactamente a la (4.56). Asimismo, a partir de nuestro análisis en la sección 3.2 sobre la respuesta de los sistemas LTI a exponenciales complejas, si la entrada de un sistema LTI es $x(t) = e^{st}$, entonces la salida será $H(s)e^{st}$, es decir, e^{st} es una función propia del sistema con valor propio igual a la transformada de Laplace de la respuesta al impulso.

Para $s = j\omega$, $H(s)$ es la respuesta en frecuencia del sistema LTI. En el contexto más amplio de la transformada de Laplace, $H(s)$ se conoce comúnmente como la *función del sistema* o, de forma alterna, como la *función de transferencia*. Muchas propiedades de los sistemas LTI pueden estar estrechamente asociadas con las características de la función del sistema en el plano s. Ilustramos esto a continuación mediante el examen de varias propiedades y clases importantes de sistemas.

9.7.1 Causalidad

Para un sistema LTI causal, la respuesta al impulso es cero para $t < 0$ y por tanto se encuentra del lado derecho. En consecuencia, gracias al análisis en la sección 9.2, vemos que

La ROC asociada con la función del sistema para un sistema causal es un semiplano derecho.

Sin embargo, debe aclarase que el recíproco de este enunciado no necesariamente se cumple. Esto es, como se ilustrará en el ejemplo 9.19, una ROC a la derecha del polo colo-

cado más hacia la derecha no garantiza que un sistema sea causal; sólo garantiza que la respuesta al impulso es derecha. Sin embargo, si $H(s)$ es *racional*, entonces, como se ilustra en los ejemplos 9.17 y 9.18, podemos determinar si el sistema es causal simplemente verificando que su ROC es un semiplano derecho. Específicamente,

Para un sistema con una función del sistema racional, la causalidad del sistema es equivalente a la ROC que es el semiplano derecho a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha.

Ejemplo 9.17

Considere un sistema con respuesta al impulso

$$h(t) = e^{-t}u(t). \tag{9.113}$$

Ya que $h(t) = 0$ para $t < 0$, este sistema es causal. La función del sistema también se puede obtener del ejemplo 9.1:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad \Re e\{s\} > -1. \tag{9.114}$$

En este caso, la función del sistema es racional y la ROC en la ecuación (9.114) está a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha, lo cual es congruente con nuestro enunciado de que la causalidad para sistemas con funciones racionales de sistema es equivalente a la ROC que está a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha.

Ejemplo 9.18

Considere un sistema con respuesta al impulso

$$h(t) = e^{-|t|}.$$

Puesto que $h(t) \neq 0$ para $t < 0$, este sistema es no causal. También, del ejemplo 9.7, la función del sistema es

$$H(s) = \frac{-2}{s^2 - 1}, \qquad -1 < \Re e\{s\} < +1.$$

Por lo tanto, $H(s)$ es racional y tiene una ROC que *no* está a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha, lo cual es congruente con el hecho de que el sistema es no causal.

Ejemplo 9.19

Considere la función del sistema

$$H(s) = \frac{e^s}{s+1}, \qquad \Re e\{s\} > -1. \tag{9.115}$$

Para este sistema, la ROC está a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha. Por consiguiente, la respuesta al impulso debe ser derecha. Para determinar la respuesta al

impulso, usamos primero el resultado del ejemplo 9.1:

$$e^{-t}u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -1. \tag{9.116}$$

En seguida, a partir de la propiedad de desplazamiento en tiempo, de la sección 9.5.2 [ecuación (9.87)], vemos que el factor e^s en la ecuación (9.115) se puede tomar en consideración en la ecuación (9.116) como un desplazamiento en la función de tiempo. Entonces

$$e^{-(t+1)}u(t+1) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{e^s}{s+1}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -1, \tag{9.117}$$

de manera que la respuesta al impulso asociada con el sistema es

$$h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1), \tag{9.118}$$

la cual es diferente de cero para $-1 < t < 0$. Por lo tanto, el sistema es no causal. Este ejemplo sirve como un recordatorio de que la causalidad implica que la ROC está a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha, pero que el enunciado recíproco en general no se cumple, a menos que la función del sistema sea racional.

De una manera exactamente análoga, podemos definir el concepto de anticausalidad. Un sistema es *anticausal* si su respuesta al impulso $h(t) = 0$ para $t > 0$. Debido a que en ese caso $h(t)$ estaría del lado izquierdo, sabemos, gracias a la sección 9.2, que la ROC de la función del sistema $H(s)$ debe estar en un semiplano izquierdo. Una vez más, en general lo recíproco no se cumple. Es decir, si la ROC de $H(s)$ es un semiplano izquierdo, lo único que sabemos es que $h(t)$ es izquierda. Sin embargo, si $H(s)$ es racional, entonces el tener una ROC a la izquierda del polo ubicado más hacia la izquierda equivale a que el sistema sea anticausal.

9.7.2 Estabilidad

La ROC de $H(s)$ también puede estar relacionada con la estabilidad del sistema. Como se mencionó en la sección 2.3.7, la estabilidad de un sistema LTI es equivalente a que su respuesta al impulso sea absolutamente integrable, en cuyo caso (sección 4.4) la transformada de Fourier de la respuesta al impulso converge. En vista de que la transformada de Fourier de una señal es igual a la transformada de Laplace evaluada a lo largo del eje $j\omega$ tenemos lo siguiente:

> Un sistema LTI es estable si y sólo si la ROC de su función del sistema $H(s)$ incluye el eje $j\omega$ [es decir, $\mathcal{R}e\{s\} = 0$].

Ejemplo 9.20

Considere un sistema LTI con función del sistema

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}. \tag{9.119}$$

Ya que la ROC no ha sido especificada, sabemos, gracias a nuestro análisis en la sección 9.2, que hay varias ROC diferentes y en consecuencia, varias respuestas al impulso del

sistema que son diferentes y pueden estar asociadas con la expresión algebraica para $H(s)$ dada en la ecuación (9.119). Sin embargo, si tenemos información acerca de la causalidad o estabilidad del sistema, la ROC apropiada se puede identificar. Por ejemplo, si se sabe que el sistema es *causal*, la ROC será la indicada en la figura 9.25(a), con respuesta al impulso

$$h(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}\right)u(t). \tag{9.120}$$

Observe que esta selección particular de la ROC no incluye el eje $j\omega$, y en consecuencia el sistema correspondiente es inestable (como puede verificarse al observar que $h(t)$ no es absolutamente integrable). Por otro lado, si se sabe que el sistema es *estable*, la ROC es la dada en la figura 9.25(b), y la correspondiente respuesta al impulso es

$$h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t),$$

la cual es absolutamente integrable. Por último, para la ROC en la figura 9.25(c), el sistema es anticausal e inestable, con

$$h(t) = -\left(\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}\right)u(-t).$$

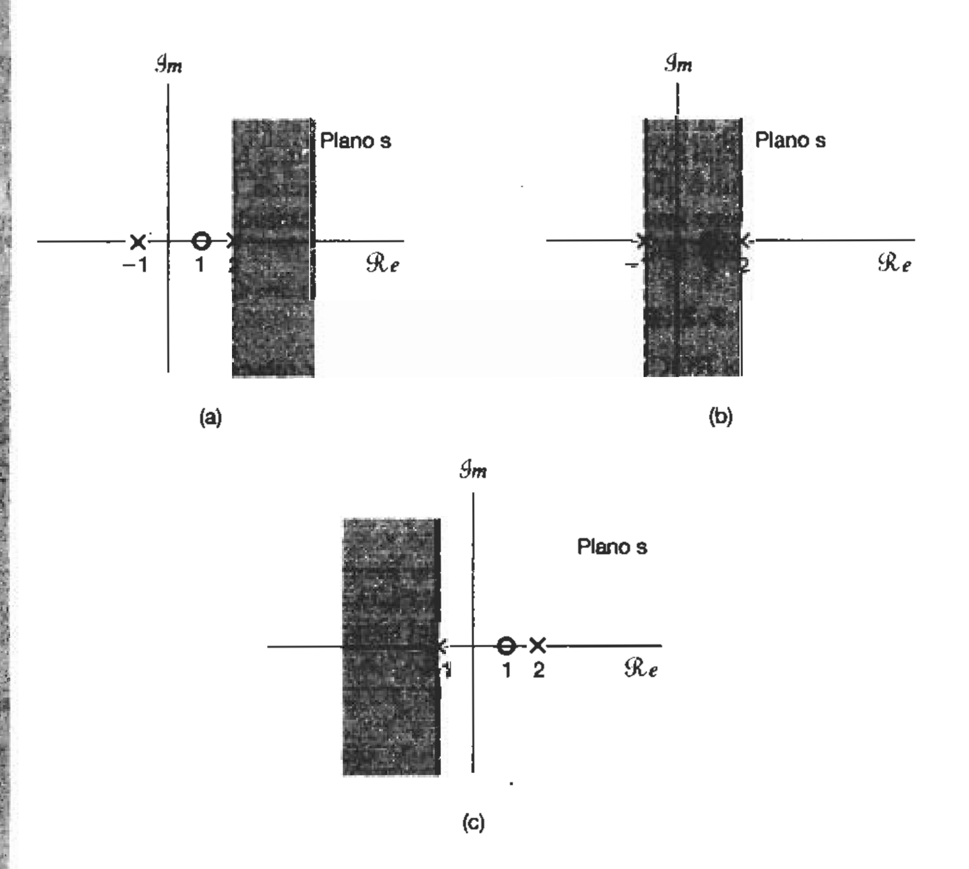


Figura 9.25 Posibles ROC para la función del sistema del ejemplo 9.20 con polos en $s = -1$ y $s = 2$ y un cero en $s = 1$: (a) sistema causal e inestable; (b) sistema no causal y estable; (c) sistema anticausal e inestable.

Es perfectamente posible, por supuesto, para un sistema que sea estable (o inestable) y tenga una función del sistema que no sea racional. Por ejemplo, la función del sistema en la ecuación (9.115) no es racional, y su respuesta al impulso en la ecuación (9.118) es absolutamente integrable, indicando que el sistema es estable. Sin embargo, para sistemas con funciones de sistema racionales, la estabilidad se puede interpretar con facilidad en términos de los polos del sistema. Por ejemplo, para el diagrama de polos y ceros en la figura 9.25, la estabilidad corresponde a la selección de una ROC que está entre los dos polos, de modo que el eje $j\omega$ está contenido en la ROC.

Para una clase particular y muy importante de sistemas, la estabilidad se puede caracterizar en forma muy simple en términos de las localizaciones de los polos. De manera específica, considere un sistema LTI causal con función del sistema $H(s)$ racional. Puesto que el sistema es causal, la ROC está a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha. En consecuencia, para que este sistema sea estable (es decir, para que la ROC incluya el eje $j\omega$), el polo más hacia la derecha de $H(s)$ debe estar a la *izquierda* del eje $j\omega$. Esto es,

> Un sistema causal con función del sistema $H(s)$ racional es estable si y sólo si todos los polos de $H(s)$ caen en la parte izquierda del plano s, es decir, todo los polos tienen parte real negativa.

Ejemplo 9.21

Considere nuevamente el sistema causal del ejemplo 9.17. La respuesta al impulso en la ecuación (9.113) es absolutamente integrable y por lo tanto el sistema es estable. Consistente con esto, vemos que el polo de $H(s)$ en la ecuación (9.114) está en $s = -1$, que se encuentra en la parte izquierda del plano s. En contraste, el sistema causal con respuesta al impulso

$$h(t) = e^{2t}u(t)$$

es inestable, ya que $h(t)$ no es absolutamente integrable. También, en este caso,

$$H(s) = \frac{1}{s-2}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > 2,$$

de modo que el sistema tiene un polo en $s = 2$ en el lado derecho del plano s.

Ejemplo 9.22

Consideremos la clase de sistemas causales de segundo orden que hemos discutido previamente en las secciones 9.4.2 y 6.5.2. La respuesta al impulso y la función del sistema son, respectivamente,

$$h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t) \tag{9.121}$$

y

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s-c_1)(s-c_2)}, \tag{9.122}$$

donde

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \tag{9.123}$$

$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \tag{9.124}$$

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}. \tag{9.125}$$

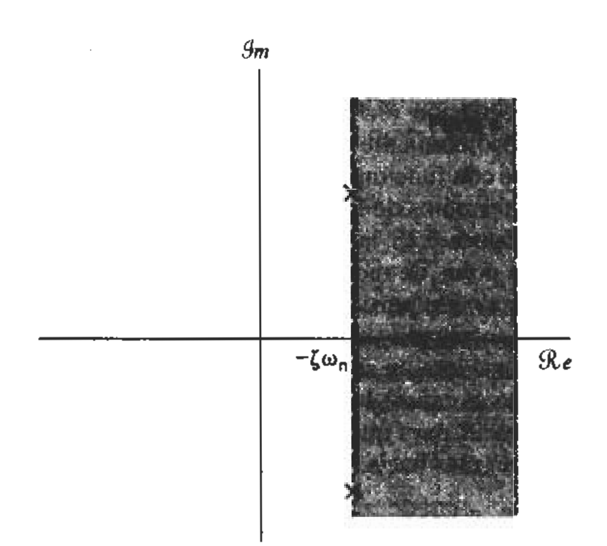


Figura 9.26 Ubicación de los polos y la ROC para un sistema causal de segundo orden con $\zeta < 0$.

En la figura 9.19 mostramos la localización de los polos para $\zeta > 0$. En la figura 9.26 ilustramos la localización de los polos para $\zeta < 0$. Como es evidente a partir de la última figura y de las ecuaciones (9.124) y (9.125), para $\zeta < 0$ ambos polos tienen partes reales positivas. En consecuencia, para $\zeta < 0$, el sistema causal de segundo orden puede no ser estable. Esto también es evidente en la ecuación (9.121), ya que, con $\mathcal{Re}\{c_1\} > 0$ y $\mathcal{Re}\{c_2\} > 0$, cada término crece exponencialmente conforme t se incrementa, y por consiguiente $h(t)$ no puede ser absolutamente integrable.

9.7.3 Sistemas LTI caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Ecuaciones diferenciales

En la sección 4.7 analizamos el uso de la transformada de Fourier para obtener la respuesta en frecuencia de un sistema LTI caracterizado por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes sin obtener primero la respuesta al impulso o la solución en el dominio del tiempo. De una manera exactamente análoga, las propiedades de la transformada de Laplace pueden utilizarse para obtener directamente la función del sistema para un sistema LTI caracterizado por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Ilustramos este procedimiento en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.23

Considere un sistema LTI en el cual la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ satisfacen la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t). \tag{9.126}$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación (9.126) y haciendo uso de las propiedades de linealidad y diferenciación establecidas en las secciones 9.5.1 y 9.5.7, respectivamente, [ecuaciones (9.82) y (9.98)], obtenemos la ecuación algebraica

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s). \tag{9.127}$$

Puesto que, partiendo de la ecuación (9.112), la función del sistema es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)},$$

obtenemos para este sistema

$$H(s) = \frac{1}{s+3}. \tag{9.128}$$

Ésta proporciona así la expresión algebraica para la función del sistema, pero no la región de convergencia. De hecho, como analizamos en la sección 2.4, la ecuación diferencial por sí misma no es una especificación completa del sistema LTI, y hay en general diferentes respuestas al impulso, todas ellas congruentes con la ecuación diferencial. Si, además de la ecuación diferencial, sabemos que el sistema es causal, entonces se puede inferir que la ROC está a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha, lo cual en este ejemplo corresponde a $\mathcal{Re}\{s\} > -3$. Si supiéramos que el sistema es anticausal, entonces la ROC asociada con $H(s)$ correspondería a $\mathcal{Re}\{s\} < -3$. La respuesta al impulso correspondiente en el caso causal es

$$h(t) = e^{-3t}u(t), \tag{9.129}$$

mientras que en el caso anticausal es

$$h(t) = -e^{-3t}u(-t). \tag{9.130}$$

El mismo procedimiento usado para obtener $H(s)$ a partir de la ecuación diferencial en el ejemplo 9.23 puede ser aplicado en forma más general. Considere una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \tag{9.131}$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros y usando las propiedades de linealidad y diferenciación repetidamente, obtenemos

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right) X(s), \tag{9.132}$$

o

$$H(s) = \frac{\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right\}}{\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right\}}. \tag{9.133}$$

Por tanto, la función del sistema para un sistema especificado por una ecuación diferencial siempre es racional, con ceros en las soluciones de

$$\sum_{k=0}^{M} b_k s^k = 0 \tag{9.134}$$

y polos en las soluciones de

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0. \tag{9.135}$$

De manera congruente con nuestro análisis previo, la ecuación (9.133) no incluye una especificación de la región de convergencia de $H(s)$, ya que la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes por sí misma no define o limita la región de convergencia. Sin embargo, esta región se puede inferir si se cuenta con información adicional, tal como la estabilidad o causalidad del sistema. Por ejemplo, si imponemos la condición de reposo inicial en el sistema, de manera que sea causal, la ROC estará a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha.

Ejemplo 9.24

Un circuito *RLC* cuyo voltaje en el capacitor y corriente en el inductor son inicialmente cero, constituyen un sistema LTI que se puede describir mediante una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Considere el circuito serie *RLC* en la figura 9.27. Sea el voltaje de la fuente la señal de entrada $x(t)$, y sea el voltaje medido a través del capacitor la señal de salida $y(t)$. Igualando la suma de los voltajes a través del resistor, del inductor y del capacitor con el voltaje de la fuente, obtenemos

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = x(t). \tag{9.136}$$

Aplicando en la ecuación (9.133) obtenemos

$$H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}. \tag{9.137}$$

Como se muestra en el problema 9.64, si los valores de R, L y C son positivos, los polos de esta función del sistema tendrán partes reales negativas, y en consecuencia el sistema será estable.

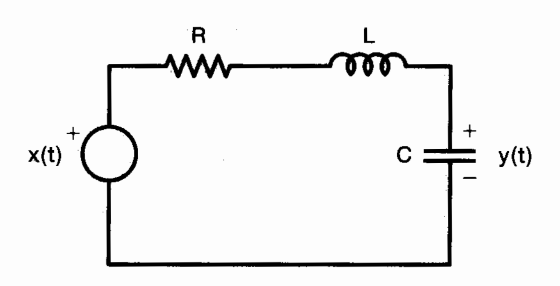


Figura 9.27 Circuito serie *RLC*.

9.7.4 Ejemplos que relacionan el comportamiento del sistema con la función del sistema

Como hemos visto hasta ahora, las propiedades de los sistemas como la causalidad y la estabilidad se pueden relacionar de manera directa con la función del sistema y sus características. De hecho, cada una de las propiedades de las transformadas de Laplace que hemos descrito se pueden usar de esta manera para relacionar el comportamiento del sistema con la función del sistema. En esta sección daremos varios ejemplos que explican lo anterior.

Ejemplo 9.25

Supongamos que si la entrada a un sistema LTI es

$$x(t) = e^{-3t}u(t),$$

entonces la salida es

$$y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t).$$

Como mostramos ahora, sabiendo esto podemos determinar la función del sistema para éste y, a partir de ello, podemos deducir de manera inmediata algunas otras propiedades del sistema.

Tomando las transformadas de Laplace de $x(t)$ y de $y(t)$, obtenemos

$$X(s) = \frac{1}{s+3}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -3,$$

y

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -1.$$

Gracias a la ecuación (9.112) podemos concluir entonces que

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}.$$

Además, también podemos determinar la ROC para este sistema. En particular, sabemos, de la propiedad de convolución definida en la sección 9.5.6, que la ROC de $Y(s)$ debe incluir al menos la intersección de las ROC de $X(s)$ y $H(s)$. Al examinar las tres posibles selecciones para la ROC de $H(s)$ (es decir, a la izquierda del polo en $s = -2$, entre los polos en -2 y -1, y a la derecha del polo en $s = -1$), vemos que la única selección que es congruente con las ROC de $X(s)$ y de $Y(s)$ es $\mathcal{R}e\{s\} > -1$. Debido a que esto se encuentra a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha de $H(s)$, concluimos que $H(s)$ es causal, y ya que ambos polos de $H(s)$ tienen partes reales negativas, se deduce que el sistema es estable. Además, a partir de la relación entre las ecuaciones (9.131) y (9.133), podemos especificar la ecuación diferencial que, junto con la condición de reposo inicial, caracteriza al sistema:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t).$$

Ejemplo 9.26

Suponga que se proporciona la siguiente información acerca del sistema LTI:

1. El sistema es causal.
2. La función del sistema es racional y tiene sólo dos polos, en $s = -2$ y en $s = 4$.

3. Si $x(t) = 1$, entonces $y(t) = 0$.
4. El valor de la respuesta al impulso en $t = 0^+$ es 4.

A partir de esta información nos gustaría determinar la función del sistema.

Gracias a los dos primeros puntos, sabemos que el sistema es inestable (ya que es causal y tiene un polo en $s = 4$ con parte real positiva) y que la función del sistema es de la forma

$$H(s) = \frac{p(s)}{(s+2)(s-4)} = \frac{p(s)}{s^2 - 2s - 8},$$

donde $p(s)$ es un polinomio en s. Debido a que la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t) = 1 = e^{0\cdot t}$ debe ser igual $H(0)$. $e^{0\cdot t} = H(0)$, concluimos, del punto 3, que $p(0) = 0$, es decir, que $p(s)$ debe tener una raíz en $s = 0$ y entonces es de la forma

$$p(s) = sq(s),$$

donde $q(s)$ es otro polinomio en s.

Por último, del punto 4 y del teorema del valor inicial de la sección 9.5.10, vemos que

$$\lim_{s\to\infty} sH(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2 q(s)}{s^2 - 2s - 8} = 4. \tag{9.138}$$

A medida que $s \to \infty$, los términos de potencia más altos en s tanto en el numerador como en el denominador de $sH(s)$, dominan y entonces son los únicos que importan en la evaluación de la ecuación (9.138). Además, si el numerador tiene un grado mayor que el denominador, el límite divergirá. En consecuencia, podemos obtener un valor finito diferente de cero para el límite sólo si el grado del numerador de $sH(s)$ es el mismo que el grado del denominador. Ya que el grado del denominador es 2, podemos concluir que, para que se cumpla la ecuación (9.138), $q(s)$ debe ser una constante, es decir, $q(s) = K$. Podemos evaluar dicha constante mediante

$$\lim_{s\to\infty} \frac{Ks^2}{s^2 - 2s - 8} = \lim_{s\to\infty} \frac{Ks^2}{s^2} = K. \tag{9.139}$$

Igualando las ecuaciones (9.138) y (9.139), vemos que $K = 4$ y, por lo tanto,

$$H(s) = \frac{4s}{(s+2)(s-4)}.$$

Ejemplo 9.27

Considere un sistema estable y causal con respuesta al impulso $h(t)$ y función del sistema $H(s)$. Suponga que $H(s)$ es racional, contiene un polo en $s = -2$ y no tiene un cero en el origen. La localización de los demás polos y ceros se desconoce. Para cada uno de los siguientes enunciados hemos de determinar si se puede considerar que es definitivamente válido, si podemos decir que es definitivamente falso, o si no hay información suficiente para averiguar la validez del enunciado:

(a) $\mathfrak{F}\{h(t)e^{3t}\}$ converge.

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = 0$.

(c) $th(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema causal y estable.

(d) $dh(t)/dt$ contiene al menos un polo en su transformada de Laplace.

(e) $h(t)$ tiene duración finita.

(f) $H(s) = H(-s)$.

(g) $\text{lím}_{s\to\infty} H(s) = 2$.

El enunciado (a) es falso, ya que $\mathfrak{F}\{h(t)e^{3t}\}$ corresponde al valor de la transformada de Laplace de $h(t)$ en $s = 3$. Si ésta converge, implica que $s = -3$ está en la ROC. Un sistema causal y estable siempre debe tener su ROC a la *derecha* de todos sus polos. Sin embargo, $s = -3$ no está a la derecha del polo en $s = -2$.

El enunciado (b) es falso, porque equivale a decir que $H(0) = 0$. Esto contradice el hecho de que $H(s)$ no tiene un cero en el origen.

El enunciado (c) es verdadero. De acuerdo con la propiedad establecida en la sección 9.58 y en la tabla 9.1, la transformada de Laplace de $th(t)$ tiene la misma ROC que la de $H(s)$. Ésta incluye el eje de $(j\omega)$ y, por lo tanto, el sistema correspondiente es estable. Además, $h(t) = 0$ para $t < 0$ implica que $th(t) = 0$ para $t < 0$. Por lo tanto, $th(t)$ representa la respuesta al impulso de un sistema causal.

El enunciado (d) es verdadero. De acuerdo con la tabla 9.1, $dh(t)/dt$ tiene la transformada de Laplace $sH(s)$. La multiplicación por s no elimina el polo en $s = -2$.

El enunciado (e) es falso. Si $h(t)$ es de duración finita, entonces si su transformada de Laplace tuviera algunos puntos en su ROC, la ROC debería ser el plano s completo. Sin embargo, esto no concuerda con que $H(s)$ tenga un polo en $s = -2$.

El enunciado (f) es falso. Si fuera verdadero, entonces, ya que $H(s)$ tiene un polo en $s = -2$, debería tener también un polo en $s = 2$. Esto no concuerda con el hecho de que todos los polos de un sistema causal estable deben estar en la mitad izquierda del plano s.

La validez del enunciado (g) no se puede evaluar con la información proporcionada. El enunciado requiere que el grado del numerador y denominador de $H(s)$ sea igual, y no tenemos información suficiente acerca de $H(s)$ como para determinar si éste es el caso.

9.7.5 Filtros Butterworth

En el ejemplo 6.3 ofrecimos una breve introducción sobre la clase de sistemas LTI ampliamente usada que se conoce como filtros Butterworth. Los filtros de esta clase presentan muchas propiedades, incluyendo las características de la magnitud de la respuesta en frecuencia de cada uno de estos filtros en la banda de paso, que los hacen atractivos para realizaciones prácticas. Como un ejemplo adicional de la utilidad de las transformadas de Laplace, en esta sección utilizamos las técnicas de la transformada de Laplace para determinar la función del sistema de un filtro Butterworth a partir de la especificación de la magnitud de su respuesta en frecuencia.

Un filtro Butterworth paso bajas de orden N tiene una respuesta en frecuencia cuya magnitud al cuadrado está dada por

$$|B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}}, \tag{9.140}$$

donde N es el orden del filtro. Considerando la ecuación (9.140), nos gustaría determinar la función del sistema $B(s)$ que da lugar a $|B(j\omega)|^2$. Observamos primero que, por definición,

$$|B(j\omega)|^2 = B(j\omega)B^*(j\omega). \tag{9.141}$$

Si nos restringimos a que la respuesta al impulso del filtro Butterworth sea real, entonces, de la propiedad de simetría conjugada para las transformadas de Fourier,

$$B^*(j\omega) = B(-j\omega), \tag{9.142}$$

de manera que

$$B(j\omega)B(-j\omega) = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}}. \tag{9.143}$$

A continuación, observamos que $B(s)|_{s=j\omega} = B(j\omega)$ y, en consecuencia, de la ecuación (9.143),

$$B(s)B(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\omega_c)^{2N}}. \tag{9.144}$$

Las raíces del polinomio del denominador que corresponde a los polos combinados de $B(s)B(-s)$ están en

$$s = (-1)^{1/2N}(j\omega_c). \tag{9.145}$$

La ecuación (9.145) se satisface para cualquier valor $s = s_p$ para el cual

$$|s_p| = \omega_c \tag{9.146}$$

y

$$\sphericalangle s_p = \frac{\pi(2k+1)}{2N} + \frac{\pi}{2}, \qquad k \text{ es un entero}; \tag{9.147}$$

esto es,

$$s_p = \omega_c \exp\left(j\left[\frac{\pi(2k+1)}{2N} + \pi/2\right]\right). \tag{9.148}$$

En la figura 9.28 ilustramos las posiciones de los polos de $B(s)B(-s)$ para $N = 1, 2$, 3 y 6. En general, se pueden hacer las siguientes observaciones acerca de estos polos:

1. Hay $2N$ polos con igual espaciamiento angular en un círculo de radio ω_c en el plano s.
2. Un polo nunca cae en el eje $j\omega$ y ocurre en el eje σ para N impar, pero no para N par.
3. El espaciamiento angular entre los polos de $B(s)B(-s)$ es π/N radianes.

Para determinar los polos de $B(s)$ dados los polos de $B(s)B(-s)$, observemos que los polos de $B(s)B(-s)$ ocurren en pares, de manera que si hay un polo en $s = s_p$, entonces también hay un polo en $s = -s_p$. En consecuencia, para construir $B(s)$ escogemos un polo de cada par. Si nos restringimos a que el sistema sea estable y causal, entonces los polos que asociamos con $B(s)$ son los polos situados a lo largo del semicírculo en el semiplano izquierdo. Las ubicaciones de los polos especifican a $B(s)$ sólo dentro de un factor de escala. Sin embargo, de la ecuación (9.144) vemos que $B^2(s)|_{s=0} = 1$ o, de manera equivalente, de la ecuación (9.140) el factor de escala se selecciona de manera que el cuadrado de la magnitud de la respuesta en frecuencia tenga ganancia unitaria en $\omega = 0$.

Para mostrar cómo se puede determinar $B(s)$, consideremos los casos para $N = 1$, $N = 2$ y $N = 3$. En la figura 9.28 mostramos los polos de $B(s)B(-s)$ como se obtuvieron en la ecuación (9.148).

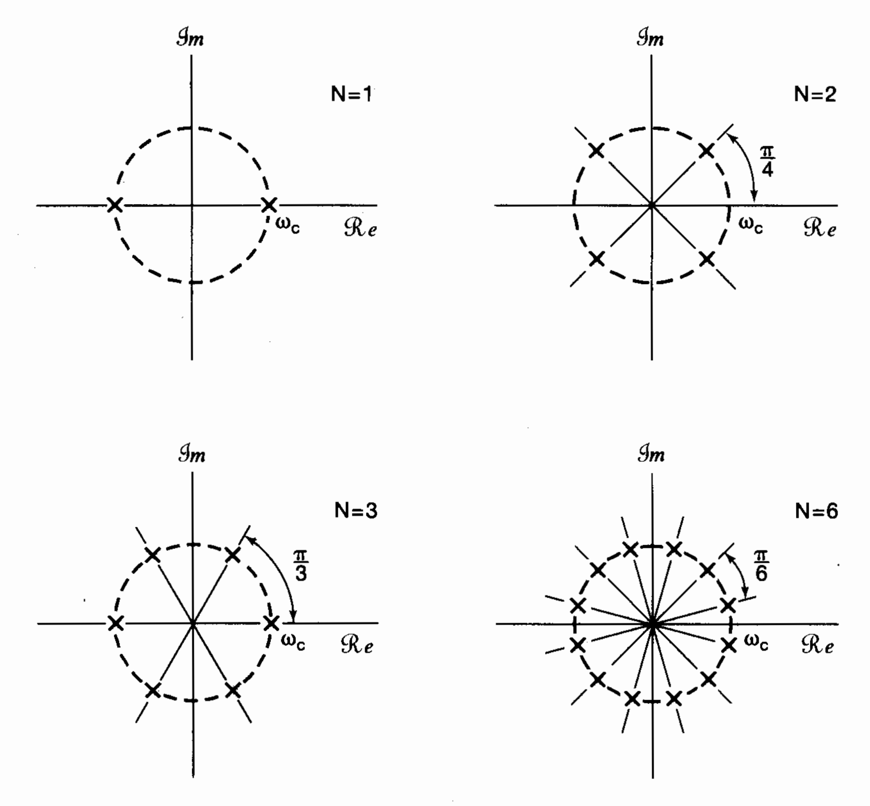


Figura 9.28 Posición de los polos de $B(s)B(-s)$ para $N = 1, 2, 3$ y 6.

En la figura 9.29 mostramos los polos asociados con $B(s)$ para cada uno de estos valores de N. Las funciones de transferencia correspondientes son:

$$N = 1: \quad B(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}; \tag{9.149}$$

$$N = 2: \quad B(s) = \frac{\omega_c^2}{(s + \omega_c e^{j(\pi/4)})(s + \omega_c e^{-j(\pi/4)})}$$

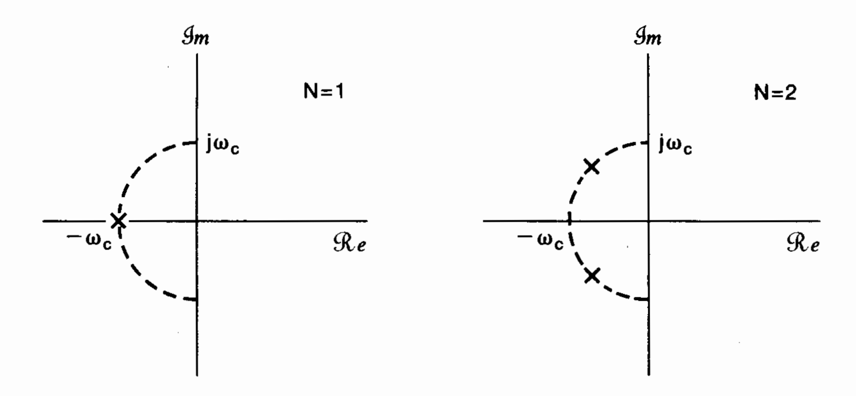
$$= \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}w_c s + \omega_c^2}; \tag{9.150}$$

$$N = 3: \quad B(s) = \frac{\omega_c^3}{(s + w_c)(s + w_c e^{j(\pi/3)})(s + w_c e^{-j(\pi/3)})}$$

$$= \frac{\omega_c^3}{(s + w_c)(s^2 + w_c s + w_c^2)} \tag{9.151}$$

$$= \frac{\omega_c^3}{s^3 + 2w_c s^2 + 2w_c^2 s + w_c^3}.$$

Con base en el análisis de la sección 9.7.3, a partir de $B(s)$ podemos determinar la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes asociada. De manera específica, para los tres valores de N considerados anteriormente las ecuaciones diferenciales co-



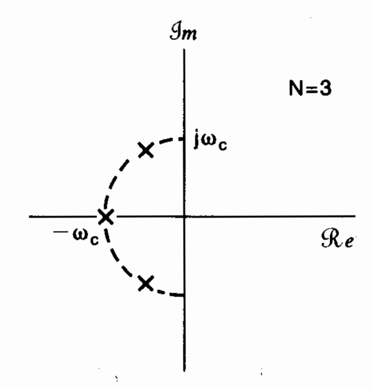


Figura 9.29 Posición de los polos de $B(s)$ para $N = 1$, 2 y 3.

rrespondientes son:

$$N = 1: \quad \frac{dy(t)}{dt} + \omega_c y(t) = \omega_c x(t); \tag{9.152}$$

$$N = 2: \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\omega_c \frac{dy(t)}{dt} + \omega_c^2 y(t) = \omega_c^2 x(t); \tag{9.153}$$

$$N = 3: \quad \frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\omega_c \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\omega_c^2 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_c^3 = \omega_c^3 x(t). \tag{9.154}$$

9.8 ÁLGEBRA DE LA FUNCIÓN DEL SISTEMA Y REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMA DE BLOQUES

El uso de la transformada de Laplace nos permite reemplazar operaciones en el dominio del tiempo como la diferenciación, la convolución, el desplazamiento en el tiempo y demás, con operaciones algebraicas. Ya hemos visto muchos de los beneficios que esto nos aporta en términos del análisis de sistemas LTI, por lo que en esta sección veremos otro uso importante del álgebra de la función del sistema, principalmente en el análisis de las interconexiones de sistemas LTI y sistemas sintetizadores como son las interconexiones de los componentes elementales de los sistemas.

9.8.1 Funciones del sistema para interconexiones de sistemas LTI

Considere la interconexión en paralelo de dos sistemas, como se muestra en la figura 9.30(a). La respuesta al impulso del sistema completo es

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t), \tag{9.155}$$

y de la linealidad de la transformada de Laplace

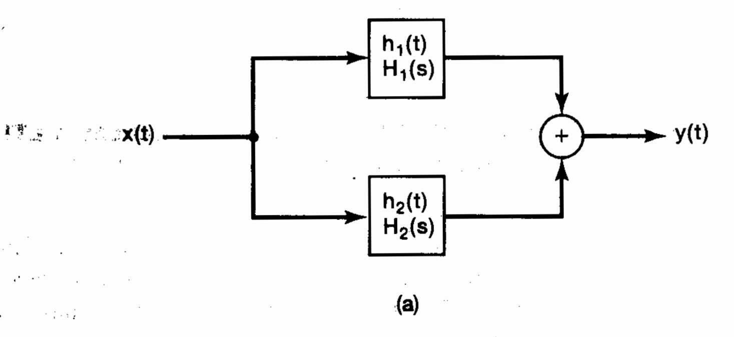
$$H(s) = H_1(s) + H_2(s). \tag{9.156}$$

De manera similar, la respuesta al impulso del sistema de la interconexión en serie en la figura 9.30(b) es

$$h(t) = h_1(t)*h_2(t), \tag{9.157}$$

y la función del sistema asociada es

$$H(s) = H_1(s)H_2(s). \tag{9.158}$$



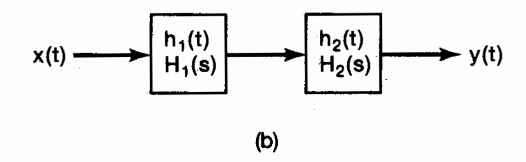


Figura 9.30 (a) Conexión en paralelo de dos sistemas LTI; (b) conexión en serie de dos sistemas LTI.

La utilidad de la transformada de Laplace en la representación de combinaciones de sistemas lineales mediante operaciones algebraicas se extiende a interconexiones más complejas que las simples combinaciones en paralelo y en serie de la figura 9.30. Para ilustrar esto, considere la interconexión retroalimentada de dos sistemas como se indica en la figura 9.31. El diseño, las aplicaciones y el análisis de estas interconexiones son tratadas con bastante detalle en el capítulo 11. Si bien el análisis del sistema en el dominio del tiempo no es particularmente simple, la determinación de la función del sistema completo a partir de la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ es una manipulación algebraica directa. En concreto, de la figura 9.31,

$$Y(s) = H_1(s)E(s), \tag{9.159}$$

$$E(s) = X(s) - Z(s), \tag{9.160}$$

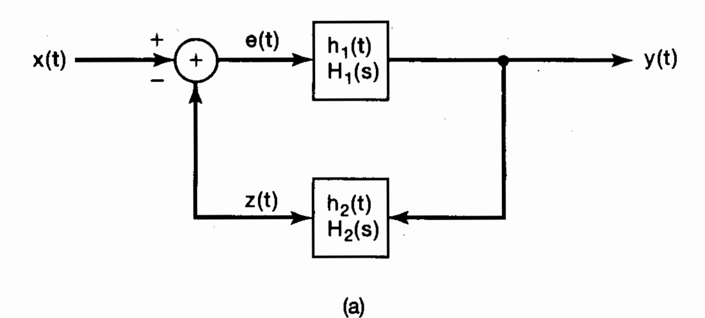


Figura 9.31 Interconexión retroalimentada de dos sistemas LTI.

y

$$Z(s) = H_2(s)Y(s), \tag{9.161}$$

a partir de lo cual obtenemos la relación

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) - H_2(s)Y(s)], \tag{9.162}$$

o bien

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}. \tag{9.163}$$

9.8.2 Representaciones en diagrama de bloques para los sistemas LTI causales descritos por ecuaciones diferenciales y funciones racionales del sistema

En la sección 2.4.3 mostramos la representación en diagrama de bloques de un sistema LTI descrito mediante una ecuación diferencial de primer orden usando las operaciones básicas de adición, multiplicación por un coeficiente e integración. Estas mismas operaciones también se pueden usar para construir los diagramas de bloques de sistemas de mayor orden, y en la presente sección lo demostraremos mediante varios ejemplos.

Ejemplo 9.28

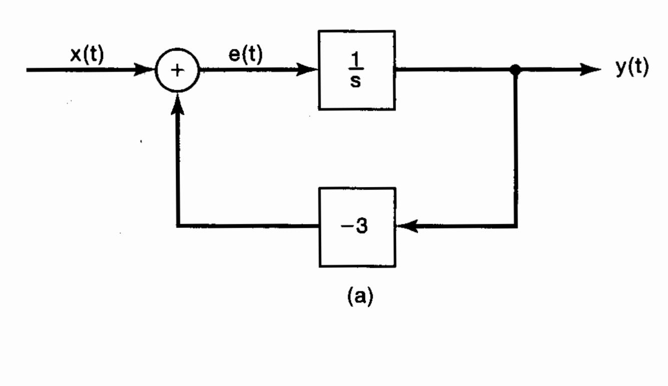
Considere un sistema LTI causal con función del sistema

$$H(s) = \frac{1}{s+3}.$$

A partir de la sección 9.7.3, sabemos que este sistema también se puede describir mediante una ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t),$$

junto con la condición de reposo inicial. En la sección 2.4.3 construimos una representación en diagrama de bloques, mostrada en la figura 2.32, para un sistema de primer orden como éste. Un diagrama de bloques equivalente (correspondiente a la figura 2.32 con $a = 3$ y $b = 1$) se muestra en la figura 9.32(a). Aquí, $1/s$ es la función del sistema de



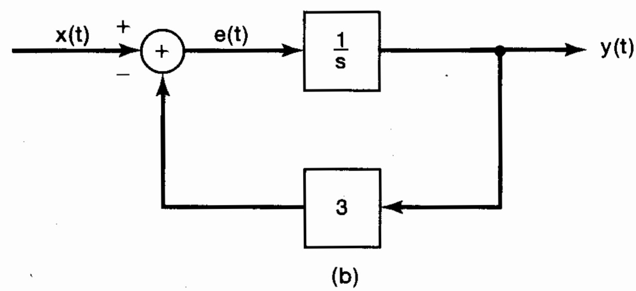


Figura 9.32 (a) Representación en diagrama de bloques del sistema LTI causal en el ejemplo 9.28; (b) representación en diagrama de bloques equivalente.

un sistema con respuesta al impulso $u(t)$, es decir, es la función del sistema de un integrador. Asimismo, la función del sistema -3 en la trayectoria de retroalimentación en la figura 9.32(a) corresponde a multiplicar por un coeficiente de -3. El diagrama de bloques en la figura incluye un lazo de retroalimentación como lo consideramos en la subsección previa y como se ilustra en la figura 9.31, con la única diferencia de que las dos señales que son las entradas al sumador en la figura 9.32(a) son sumadas, en lugar de restarse como en la figura 9.31. Sin embargo, como se muestra en la figura 9.32(b), al cambiar el signo del coeficiente en la multiplicación de la trayectoria de retroalimentación, obtenemos una representación en diagrama de bloques cuya forma es exactamente la misma que la figura 9.31. En consecuencia, podemos aplicar la ecuación (9.163) para verificar que

$$H(s) = \frac{1/s}{1 + 3/s} = \frac{1}{s + 3}.$$

Ejemplo 9.29

Examine ahora el sistema LTI causal con función del sistema

$$H(s) = \frac{s + 2}{s + 3} = \left(\frac{1}{s + 3}\right)(s + 2). \tag{9.164}$$

Como se sugiere en la ecuación (9.164), este sistema puede considerarse como la conexión en cascada de un sistema con función del sistema $1/(s + 3)$ seguido por un sistema

con función del sistema $s + 2$, y esto lo hemos ilustrado en la figura 9.33(a), en la cual utilizamos el diagrama de bloques en la figura 9.32(a) para representar $1/(s + 3)$.

También es posible obtener una representación alternativa en diagrama de bloques para el sistema en la ecuación (9.164). Usando las propiedades de linealidad y diferenciación de la transformada de Laplace, sabemos que $y(t)$ y $z(t)$ en la figura 9.31(a) están relacionadas por

$$y(t) = \frac{dz(t)}{dt} + 2z(t).$$

Sin embargo, la entrada $e(t)$ al integrador es exactamente la derivada de la salida $z(t)$, por lo que

$$y(t) = e(t) + 2z(t),$$

lo cual conduce directamente a la representación alternativa en diagrama de bloques mostrada en la figura 9.33(b). Observe que el diagrama de bloques en la figura 9.33(a) requiere de la diferenciación de $z(t)$, ya que

$$y(t) = \frac{dz(t)}{dt} + 2z(t).$$

En contraste, el diagrama de bloques de la figura 9.33(b) no involucra la diferenciación explícita de señal alguna.

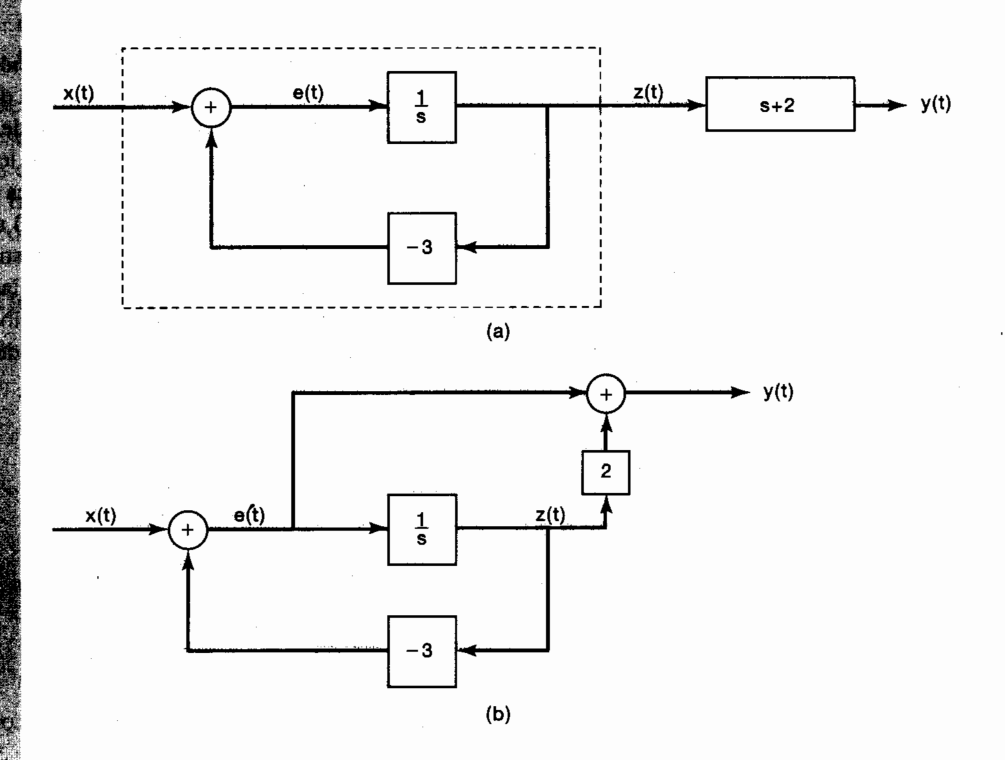


Figura 9.33 (a) Representación en diagrama de bloques para el sistema en el ejemplo 9.29; (b) representación en diagrama de bloques equivalente.

Ejemplo 9.30

Considere en seguida un sistema causal de segundo orden con función del sistema

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2+3s+2}. \tag{9.165}$$

La entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ para este sistema satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t). \tag{9.166}$$

Empleando ideas similares a las de los ejemplos anteriores, obtenemos la representación en diagrama de bloques para este sistema, el cual se muestra en la figura 9.34(a).

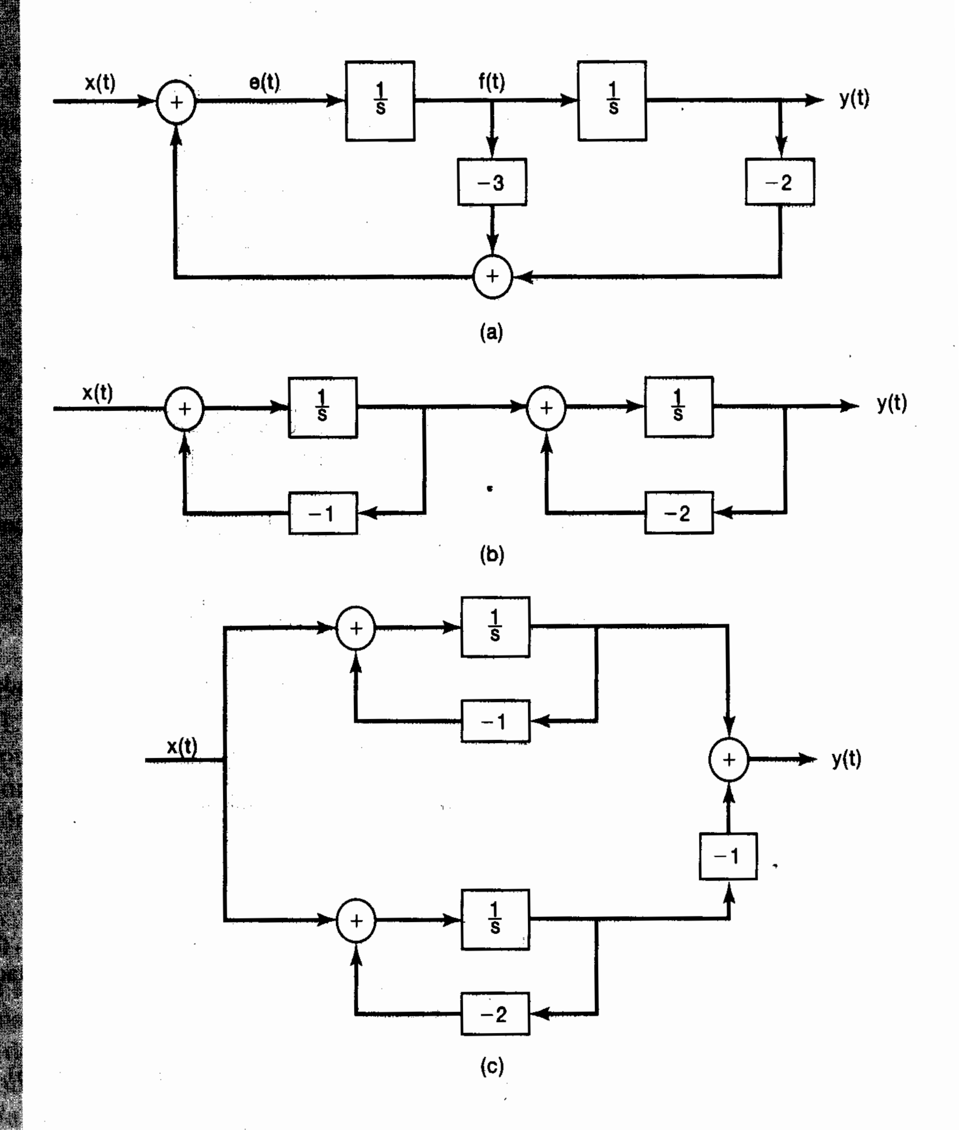


Figura 9.34 Representaciones en diagrama de bloques para el sistema en el ejemplo 9.30: (a) forma directa; (b) forma de cascada; (c) forma paralela.

Específicamente, ya que la entrada a un integrador es la derivada de la salida del integrador, las señales en el diagrama de bloques están relacionadas por

$$f(t) = \frac{dy(t)}{dt},$$
$$e(t) = \frac{df(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt}.$$

Además, la ecuación (9.166) se puede rescribir como

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -3\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) + x(t),$$

o

$$e(t) = -3f(t) - 2y(t) + x(t),$$

lo cual concuerda exactamente con lo que está representado en la figura 9.34(a).

Algunas veces se hace referencia al diagrama de bloques de esta figura como una representación en *forma directa*, ya que los coeficientes que aparecen en el diagrama de bloques se pueden identificar de manera directa con los coeficientes que aparecen en la función del sistema o, de manera equivalente, la ecuación diferencial. Otras representaciones en diagrama de bloques de importancia práctica también se pueden obtener después de realizar algo de álgebra en la función del sistema. En concreto, $H(s)$ en la ecuación (9.165) se puede rescribir como

$$H(s) = \left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{s+2}\right),$$

lo cual sugiere que este sistema se puede representar como la cascada de dos sistemas de primer orden. La representación en *forma de cascada* correspondiente a $H(s)$ se muestra en la figura 9.34(b).

De forma alterna, al realizar la expansión en fracciones parciales de $H(s)$ obtenemos

$$H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2},$$

lo cual conduce a la representación de *forma paralela* ilustrada en la figura 9.34(c).

Ejemplo 9.31

Como un ejemplo final, considere la función del sistema

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}. \qquad (9.167)$$

De nueva cuenta, usando el álgebra de función del sistema, podemos escribir $H(s)$ en varias formas, cada una de las cuales sugiere una representación en diagrama de bloques. En particular, podemos escribir

$$H(s) = \left(\frac{1}{s^2 + 3s + 2}\right)(2s^2 + 4s - 6),$$

la cual sugiere la representación de $H(s)$ como la cascada del sistema presentado en la figura 9.34(a) y el sistema con función del sistema $2s^2 + 4s - 6$. Sin embargo, exacta-

mente como hicimos en el ejemplo 9.29, podemos extraer la derivada requerida para este segundo sistema al "derivar" las señales que aparecen como entradas a los integradores en el primer sistema. Los detalles de esta construcción se examinan en el problema 9.36, cuyo resultado es el diagrama de bloques de forma directa mostrado en la figura 9.35. Una vez más, en la representación de forma directa los coeficientes que aparecen en el diagrama de bloques se pueden determinar por inspección a partir de los coeficientes en la función del sistema en la ecuación (9.167).

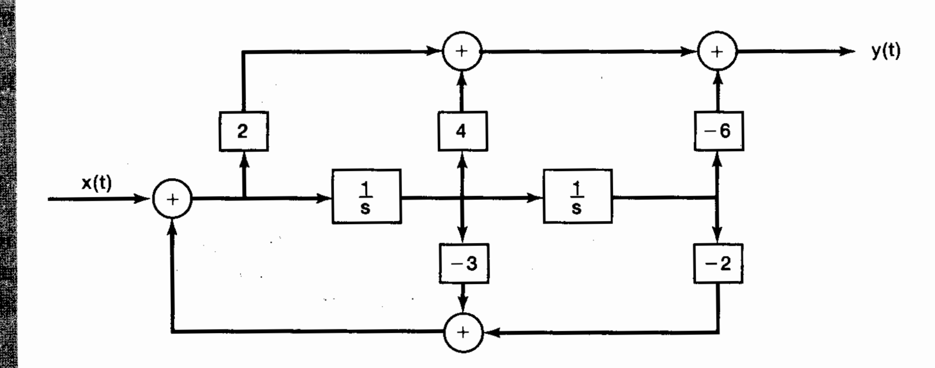


Figura 9.35 Representación en forma directa para el sistema en el ejemplo 9.31.

De manera alternativa, podemos escribir $H(s)$ en la forma

$$H(s) = \left(\frac{2(s-1)}{s+2}\right)\left(\frac{s+3}{s+1}\right) \tag{9.168}$$

o

$$H(s) = 2 + \frac{6}{s+2} - \frac{8}{s+1}. \tag{9.169}$$

La primera de éstas sugiere una representación en forma de cascada, mientras que la segunda conduce a un diagrama de forma paralela. Ambos se consideran también en el problema 9.36.

Los métodos para construir representaciones en diagramas de bloques para sistemas LTI causales descritos por ecuaciones diferenciales y funciones racionales del sistema se pueden aplicar de igual forma a sistemas de mayor orden. Además, hay flexibilidad en la forma en que esto se puede hacer. Por ejemplo, invirtiendo los numeradores en la ecuación (9.168) podemos escribir

$$H(s) = \left(\frac{s+3}{s+2}\right)\left(\frac{2(s-1)}{s+2}\right),$$

lo cual sugiere una forma en cascada diferente. También, como se ilustra en el problema 9.38, una función del sistema de cuarto orden se puede escribir como el producto de dos funciones de sistemas de segundo orden, cada uno de los cuales se puede representar en diversas formas (esto es, forma directa, en cascada o en paralelo) y también se puede escribir como la suma de términos de orden más bajo, cada uno de los cuales tiene varias representaciones diferentes. De esta manera, los sistemas sencillos de bajo orden pueden servir como bloques básicos para la puesta en práctica de sistemas más complejos de mayor orden.

9.9 LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

En las secciones anteriores de este capítulo nos hemos familiarizado con lo que se conoce como la transformada bilateral de Laplace. En esta sección presentamos y examinamos una transformada un tanto diferente, la *transformada unilateral de Laplace*, la cual es de considerable valor en el análisis de sistemas causales y en particular, en los sistemas especificados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y con condiciones iniciales diferentes de cero (es decir, sistemas que inicialmente no están en reposo).

La transformada unilateral de Laplace de una señal continua $x(t)$ se define como

$$\mathcal{X}(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt, \tag{9.170}$$

donde el límite de integración inferior, 0^-, significa que en el intervalo de integración incluimos cualquier impulso o función singular de mayor orden concentrada en $t = 0$. Una vez más adoptamos una notación taquigráfica para una señal y su transformada unilateral de Laplace:

$$x(t) \overset{\mathcal{UL}}{\longleftrightarrow} \mathcal{X}(s) = \mathcal{UL}\{x(t)\}. \tag{9.171}$$

Comparando las ecuaciones (9.170) y (9.3) vemos que la diferencia en las definiciones de las transformadas de Laplace unilateral y bilateral reside en el límite inferior de la integral. La transformada bilateral depende de la señal completa desde $t = -\infty$ hasta $t = +\infty$, mientras que la transformada unilateral depende sólo de la señal a partir de $t = 0^-$ hasta ∞. En consecuencia, dos señales que son diferentes para $t < 0$ pero que son idénticas para $t \geq 0$ tendrán diferentes transformadas bilaterales de Laplace pero transformadas unilaterales idénticas. De manera similar, cualquier señal que sea idéntica a cero para $t < 0$ tiene transformadas bilateral y unilateral idénticas.

Ya que la transformada unilateral de $x(t)$ es idéntica a la transformada bilateral de la señal obtenida de $x(t)$ al fijar su valor en 0 para toda $t < 0$, muchas de las ideas, conceptos y resultados correspondientes a las transformadas bilaterales se pueden adaptar de forma directa al caso unilateral. Por ejemplo, usando la propiedad 4 de la sección 9.2 para señales derechas, vemos que la ROC para la ecuación (9.170) siempre está en el semiplano derecho. La evaluación de las transformadas unilaterales inversas de Laplace también es la misma que para las transformadas bilaterales, con la restricción de que la ROC para una transformada unilateral siempre debe ser un semiplano derecho.

9.9.1 Ejemplo de transformadas unilaterales de Laplace

Para ilustrar la transformada unilateral de Laplace, consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 9.32



Considere la señal

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t). \tag{9.172}$$

Ya que $x(t) = 0$ para $t < 0$, las transformadas unilateral y bilateral son idénticas. Por lo tanto, de la tabla 9.2,

$$\mathcal{X}(s) = \frac{1}{(s+a)^n}, \qquad \Re e\{s\} > -a. \tag{9.173}$$

Ejemplo 9.33

Considere después

$$x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1). \tag{9.174}$$

La transformada *bilateral* $X(s)$ para este ejemplo se puede obtener a partir del ejemplo 9.1 y de la propiedad de desplazamiento en el tiempo (sección 9.5.2):

$$X(s) = \frac{e^s}{s+a}, \qquad \Re e\{s\} > -a. \tag{9.175}$$

En contraste, la transformada unilateral es

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-a(t+1)}u(t+1)e^{-st}\,dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-a}e^{-t(s+a)}\,dt \\ &= e^{-a}\frac{1}{s+a}, \qquad \Re e\{s\} > -a. \end{aligned} \tag{9.176}$$

Por consiguiente, para este ejemplo, las transformadas de Laplace unilateral y bilateral son notablemente diferentes. De hecho, debemos reconocer $\mathcal{X}(s)$ como la transformada bilateral no de $x(t)$ sino de $x(t)u(t)$ consistente con nuestro comentario anterior de que la transformada unilateral es la transformada bilateral de una señal cuyos valores para $t < 0^-$ han sido fijados en cero.

Ejemplo 9.34

Considere la señal

$$x(t) = \delta(t) + 2u_1(t) + e^t u(t). \tag{9.177}$$

Puesto que $x(t) = 0$ para $t < 0$, y ya que las funciones singulares en el origen están incluidas en el intervalo de integración, la transformada unilateral para $x(t)$ es la misma que la transformada bilateral. En concreto, valiéndonos del hecho (el par de transformada 15 en la tabla 9.2) de que la transformada bilateral de $u_n(t)$ es s^n, tenemos

$$\mathcal{X}(s) = X(s) = 1 + 2s + \frac{1}{s-1} = \frac{s(2s-1)}{s-1}, \qquad \Re e\{s\} > 1. \tag{9.178}$$

Ejemplo 9.35

Considere la transformada unilateral de Laplace

$$\mathcal{X}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}. \tag{9.179}$$

En el ejemplo 9.9 consideramos la transformada inversa para una transformada bilateral de Laplace con una forma exacta a la de la ecuación (9.179) y para varias ROC. Para la transformada unilateral, la ROC debe estar en el semiplano derecho a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha de $\mathcal{X}(s)$; es decir, en este caso, la ROC consiste en todos los puntos de s con $\Re e\{s\} > -1$. Podemos entonces invertir esta transformada unilateral como en el ejemplo 9.9 para obtener

$$x(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t) \quad \text{para} \quad t > 0^-, \tag{9.180}$$

donde hemos enfatizado el hecho de que las transformadas unilaterales de Laplace nos proveen de información acerca de las señales sólo para $t > 0^-$.

Ejemplo 9.36

Considere la transformada unilateral

$$\mathcal{X}(s) = \frac{s^2 - 3}{s + 2}. \tag{9.181}$$

Puesto que el grado del numerador de $\mathcal{X}(s)$ no es estrictamente menor que el grado del denominador, expandimos $\mathcal{X}(s)$ como

$$\mathcal{X}(s) = A + Bs + \frac{C}{s + 2}. \tag{9.182}$$

Igualando las ecuaciones (9.181) y (9.182), y eliminando denominadores, obtenemos

$$s^2 - 3 = (A + Bs)(s + 2) + C, \tag{9.183}$$

y si igualamos los coeficientes para cada potencia de s, se produce

$$\mathcal{X}(s) = -2 + s + \frac{1}{s + 2}, \tag{9.184}$$

con una ROC de $\Re e\{s\} > -2$. Tomando las transformadas inversas de cada término resulta que

$$x(t) = -2\delta(t) + u_1(t) + e^{-2t}u(t) \quad \text{para} \quad t > 0^-. \tag{9.185}$$

9.9.2 Propiedades de la transformada unilateral de Laplace

Al igual que con la transformada bilateral de Laplace, la transformada unilateral de Laplace tiene varias propiedades importantes, muchas de las cuales son las mismas para su contraparte bilateral y varias difieren de manera significativa. La tabla 9.3 resume estas propiedades. Observe que no hemos incluido una columna que identifique explícitamente la ROC para la transformada unilateral de Laplace para cada señal, ya que la ROC de cualquier transformada de este tipo siempre es un semiplano derecho. Por ejemplo, la ROC para una transformada tal siempre está a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha.

Comparando la tabla 9.3 con la tabla 9.1 para la transformada bilateral, vemos que, con la advertencia de que las ROC para las transformadas de Laplace unilaterales son siempre los semiplanos derechos, las propiedades de linealidad, de desplazamiento en el

TABLA 9.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Propiedad	Señal	Transformada unilateral de Laplace
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$\mathcal{X}(s)$ $\mathcal{X}_1(s)$ $\mathcal{X}_2(s)$
Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$a\mathcal{X}_1(s) + b\mathcal{X}_2(s)$
Desplazamiento en el dominio de s	$e^{s_0 t}x(t)$	$\mathcal{X}(s - s_0)$
Escalamiento en tiempo	$x(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a}\mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
Conjugación	$x^*(t)$	$x^*(s)$
Convolución (suponiendo que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son cero para $t < 0$)	$x_1(t) * x_2(t)$	$\mathcal{X}_1(s)\,\mathcal{X}_2(s)$
Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$
Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}\mathcal{X}(s)$
Integración en el dominio del tiempo	$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}\mathcal{X}(s)$

Teoremas del valor inicial y final

Si $x(t)$ no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en $t = 0$, entonces

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{X}(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\mathcal{X}(s)$$

dominio de s, de escalamiento de tiempo, de conjugación y de diferenciación en el dominio de s son idénticas a las de sus contrapartes bilaterales. De manera similar, los teoremas del valor inicial y final definidos en la sección 9.5.10 también son válidos para las transformadas unilaterales de Laplace.[3] La deducción de cada una de estas propiedades es idéntica a la de su contraparte bilateral.

La propiedad de convolución para las transformadas unilaterales también es muy similar a la propiedad correspondiente para las transformadas bilaterales. Esta propiedad establece que si

$$x_1(t) = x_2(t) = 0 \quad \text{para toda} \quad t < 0, \tag{9.186}$$

[3]De hecho, los teoremas del valor inicial y final son básicamente propiedades unilaterales, debido a que se aplican sólo a señales $x(t)$ que son idénticas a cero para $t < 0$.

entonces

$$x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{UL}}{\longleftrightarrow} \mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_2(s). \tag{9.187}$$

La ecuación (9.187) se obtiene de manera inmediata a partir de la propiedad de convolución bilateral, ya que, bajo las condiciones de la ecuación (9.186), las transformadas unilateral y bilateral son idénticas para cada una de las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Así, las herramientas de análisis del sistema, así como el álgebra de la función del sistema desarrolladas y usadas en este capítulo, se aplican sin cambio a las transformadas unilaterales, siempre que se trate de sistemas LTI causales (para los cuales la función del sistema es *tanto* la transformada bilateral *como* la unilateral de la respuesta al impulso) con entradas que son cero para $t < 0$. Un ejemplo de esto es la propiedad de integración de la tabla 9.3: Si $x(t) = 0$ para $t < 0$, entonces

$$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\, d\tau = x(t) * u(t) \overset{\mathcal{UL}}{\longleftrightarrow} \mathcal{X}(s)\mathcal{U}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{X}(s). \tag{9.188}$$

Como un segundo caso, considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9.37

Suponga que un sistema LTI causal se describe mediante la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \tag{9.189}$$

junto con la condición de reposo inicial. Usando la ecuación (9.133), encontramos que la función del sistema para este sistema es

$$\mathcal{H}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}. \tag{9.190}$$

Sea $x(t) = au(t)$ la entrada a éste sistema. En este caso, la transformada unilateral (y bilateral) de Laplace de la salida $y(t)$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(s) &= \mathcal{H}(s)\mathcal{X}(s) = \frac{a}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{a/2}{s} - \frac{a}{s+1} + \frac{a/2}{s+2}. \end{aligned} \tag{9.191}$$

Aplicando el ejemplo 9.32 a cada término de la ecuación (9.191) se obtiene

$$y(t) = a\left[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right]u(t). \tag{9.192}$$

Es importante notar que la propiedad de convolución para las transformadas unilaterales de Laplace se aplica sólo si las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en la ecuación (9.187) son ambas cero para $t < 0$. Esto es, si bien hemos visto que la transformada bilateral de Laplace de $x_1(t) * x_2(t)$ siempre es igual al producto de las transformadas bilaterales de Laplace de $x_1(t)$ y $x_2(t)$, la transformada unilateral de $x_1(t) * x_2(t)$ en general *no* es igual al producto de las transformadas unilateral si $x_1(t)$ o $x_2(t)$ es diferente de cero para $t < 0$. (Véase, por ejemplo, el problema 9.39.)

Una diferencia de particular importancia entre las propiedades de las transformadas unilateral y bilateral es la propiedad de diferenciación. Considere una señal $x(t)$ con transformada unilateral de Laplace $\mathcal{X}(s)$. Entonces, al integrar por partes, encontramos que la transformada unilateral de $dx(t)/dt$ está dada por

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\,dt = x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \tag{9.193}$$
$$= s\,\mathcal{X}(s) - x(0^-).$$

De manera similar, una segunda aplicación de esto conduciría a la transformada unilateral de Laplace de $d^2x(t)/dt^2$, es decir,

$$s^2\,\mathcal{X}(s) - sx(0^-) - x'(0^-), \tag{9.194}$$

donde $x'(0^-)$ denota la derivada de $x(t)$ evaluada en $t = 0^-$. Vemos con claridad que podemos continuar el procedimiento para obtener la transformada unilateral de derivadas de mayor orden.

9.9.3 Solución de ecuaciones diferenciales usando la unilateral transformada de Laplace

Un uso primordial de la transformada unilateral de Laplace es la obtención de una solución para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y con condiciones iniciales diferentes de cero. Ilustraremos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.38

Considere el sistema caracterizado por la ecuación diferencial (9.189) con condiciones iniciales

$$y(0^-) = \beta, \qquad y'(0^-) = \gamma. \tag{9.195}$$

Sea $x(t) = \alpha u(t)$. Entonces, aplicando la transformada unilateral de Laplace a ambos lados de la ecuación (9.189), obtenemos

$$s^2\mathcal{Y}(s) - \beta s - \gamma + 3s\mathcal{Y}(s) - 3\beta + 2\mathcal{Y}(s) = \frac{\alpha}{s}, \tag{9.196}$$

o bien

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+2)(s+2)} + \frac{\alpha}{s(s+2)(s+2)}, \tag{9.197}$$

donde $\mathcal{Y}(s)$ es la transformada unilateral de Laplace de $y(t)$.

Si nos remitimos al ejemplo 9.37 y, en particular, a la ecuación (9.191), vemos que el último término en el miembro derecho de la ecuación (9.197) es precisamente la transformada unilateral de Laplace de la respuesta del sistema cuando las condiciones iniciales en la ecuación (9.195) son ambas cero ($\beta = \gamma = 0$). Esto es, el último término representa la respuesta del sistema LTI causal descrito por la ecuación (9.189) y la condición de reposo inicial. Esta respuesta es a menudo conocida como la *respuesta de*

estado cero, es decir, la respuesta cuando el estado inicial [el conjunto de condiciones iniciales en la ecuación (9.195)] es cero.

Una interpretación análoga se aplica a los primeros dos términos del miembro derecho de la ecuación (9.197). Estos términos representan la transformada unilateral de la respuesta del sistema cuando la entrada es cero ($\alpha = 0$). Esta respuesta se conoce comúnmente como la *respuesta a entrada cero*. Observe que la respuesta a entrada cero es una función lineal de los valores de las condiciones iniciales (esto es, al cambiar al doble los valores de β y de γ se aumenta al doble la respuesta a entrada cero). Además, la ecuación (9.197) ilustra un hecho importante acerca de la solución de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes con condiciones iniciales diferentes de cero, a saber, que la respuesta total es simplemente la superposición del estado cero y las respuestas a entrada cero. La respuesta de estado cero es la obtenida al establecer las condiciones iniciales como cero, o bien, es la respuesta de un sistema LTI definido por la ecuación diferencial y la condición de reposo inicial. La respuesta a entrada cero es la respuesta a las condiciones iniciales con la entrada fijada en cero. En los problemas 9.20, 9.40 y 9.66 podemos encontrar otros ejemplos que ilustran esto.

Por último, para cualquier valor de α, β y γ, podemos, por supuesto, expandir $\mathcal{Y}(s)$ en la ecuación (9.197) en fracciones parciales e invertirla para obtener $y(t)$. Por ejemplo, si $\alpha = 2$, $\beta = 3$ y $\gamma = -5$, al realizar la expansión en fracciones parciales para la ecuación (9.197) encontramos que

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}. \tag{9.198}$$

Con la aplicación del ejemplo 9.32 a cada uno de los términos se obtiene

$$y(t) = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t) \quad \text{para} \quad t > 0. \tag{9.199}$$

9.10 RESUMEN

En este capítulo hemos desarrollado y estudiado la transformada de Laplace, la cual puede verse como una generalización de la transformada de Fourier. Es en particular útil como herramienta analítica en el análisis y estudio de sistemas LTI. Debido a las propiedades de las transformadas de Laplace, los sistemas LTI, incluyendo los representados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, pueden caracterizarse y analizarse en el dominio de la transformada mediante manipulaciones algebraicas. Además, el álgebra de la función del sistema proporciona una herramienta conveniente tanto para el análisis de las interconexiones de los sistemas LTI como para la construcción de las representaciones en diagrama de bloques de los sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales.

Para señales y sistemas con transformadas racionales de Laplace, la transformada a menudo se representa en el plano complejo (plano s) marcando las localizaciones de los polos y ceros e indicando la región de convergencia. A partir del diagrama de polos y ceros se puede obtener geométricamente la transformada de Fourier, dentro de un factor de escala. La causalidad, la estabilidad y otras características también se pueden identificar fácilmente conociendo la ubicación de los polos y de la región de convergencia.

Este capítulo se enfocó principalmente en la transformada bilateral de Laplace. Sin embargo, también se presentó una forma un tanto diferente de la transformada de Laplace, conocida como la transformada unilateral de Laplace, la cual se puede interpretar como la transformada bilateral de una señal cuyos valores anteriores a $t = 0^-$ se fijan en cero. Esta forma de transformada de Laplace es particularmente útil para analizar los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y con condiciones iniciales diferentes de cero.

Capítulo 9 Problemas

La primera sección de problemas comprende la categoría básica, y las respuestas se proporcionan al final del libro. Las tres secciones restantes contienen problemas que abarcan las categorías básica, avanzada y de extensión, respectivamente.

PROBLEMAS BÁSICOS CON RESPUESTAS

9.1. Para cada una de las siguientes integrales, especifique los valores del parámetro real σ que asegure que la integral converge:

(a) $\int_0^\infty e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt$ **(b)** $\int_{-\infty}^0 e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt$

(c) $\int_{-5}^5 e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt$ **(d)** $\int_{-\infty}^\infty e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt$

(e) $\int_{-\infty}^\infty e^{-5|t|}e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt$ **(f)** $\int_{-\infty}^0 e^{-5|t|}e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt$

9.2. Considere la señal

$$x(t) = e^{-5t}u(t-1),$$

y señale su transformada de Laplace con $X(s)$.

(a) Usando la ecuación (9.3), evalúe $X(s)$ y especifique su región de convergencia.

(b) Determine los valores de los números finitos A y t_0 tales que la transformada de Laplace $G(s)$ de

$$g(t) = Ae^{-5t}u(-t-t_0)$$

tiene la misma forma algebraica que $X(s)$. ¿Cuál es la región de convergencia correspondiente a $G(s)$?

9.3. Considere la señal

$$x(t) = e^{-5t}u(t) + e^{-\beta t}u(t),$$

y señale su transformada de Laplace con $X(s)$. ¿Cuáles son las restricciones impuestas sobre las partes real e imaginaria de β si la región de convergencia de $X(s)$ es $\mathcal{Re}\{s\} > -3$?

9.4. Para la transformada de Laplace de

$$x(t) = \begin{cases} e^t \operatorname{sen} 2t, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases},$$

indique la localización de sus polos y su región de convergencia.

9.5. Para cada una de las siguientes expresiones algebraicas para la transformada de Laplace de una señal, determine el número de ceros localizados en el plano s finito y el número de ceros localizados en el infinito:

(a) $\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{s+3}$

(b) $\dfrac{s+1}{s^2-1}$

(c) $\dfrac{s^3-1}{s^2+s+1}$

9.6. Se sabe que una señal $x(t)$ absolutamente integrable tiene un polo en $s = 2$. Responda las siguientes preguntas:

(a) ¿Podría $x(t)$ ser de duración finita?

(b) ¿Podría $x(t)$ ser izquierda?

(c) ¿Podría $x(t)$ ser derecha?

(d) ¿Podría $x(t)$ estar en los dos lados?

9.7. ¿Cuántas señales tiene una transformada de Laplace que se puede expresar como

$$\frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}$$

en su región de convergencia?

9.8. Sea $x(t)$ una señal que tiene una transformada racional de Laplace con exactamente dos polos localizados en $s = -1$ y $s = -3$. Si $g(t) = e^{2t}x(t)$ y $G(j\omega)$ [la transformada de Fourier de $g(t)$] convergen, determine si $x(t)$ es izquierda, derecha o bilateral.

9.9. Dado que

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > \mathcal{Re}\{-a\},$$

determine la transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+7s+12}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -3.$$

9.10. Usando la evaluación geométrica de la magnitud de la transformada de Fourier tomada de la gráfica correspondiente de polos y ceros, determine para cada una de las siguientes transformadas de Laplace si la magnitud de la transformada de Fourier correspondiente es aproximadamente paso bajas, paso altas o paso banda:

(a) $H_1(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+3)}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -1$

(b) $H_2(s) = \dfrac{s}{s^2+s+1}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -\frac{1}{2}$

(c) $H_3(s) = \dfrac{s^2}{s^2+2s+1}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -1$

9.11. Use la evaluación geométrica a partir del diagrama de polos y ceros para determinar la magnitud de la transformada de Fourier de la señal cuya transformada de Laplace se especifica como

$$X(s) = \frac{s^2-s+1}{s^2+s+1}, \qquad \mathcal{Re}\{s\} > -\frac{1}{2}.$$

9.12. Suponga que damos los siguientes tres datos acerca de la señal $x(t)$:

1. $x(t) = 0$ para $t < 0$.
2. $x(k/80) = 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$.
3. $x(1/160) = e^{-120}$.

Considere que $X(s)$ denota la transformada de Laplace de $x(t)$, y determine cuál de los siguientes enunciados es congruente con la información proporcionada para $x(t)$:

(a) $X(s)$ tiene sólo un polo en el plano finito de s.

(b) $X(s)$ tiene sólo dos polos en el plano finito de s.

(c) $X(s)$ tiene más de dos polos en el plano finito de s.

9.13. Sea

$$g(t) = x(t) + \alpha x(-t),$$

donde

$$x(t) = \beta e^{-t} u(t)$$

y la transformada de Laplace de $g(t)$ es

$$G(s) = \frac{s}{s^2 - 1}, \qquad -1 < \Re e\{s\} < 1.$$

Determine los valores de las constantes α y β.

9.14. Suponga que se nos dan los siguientes datos acerca de la señal $x(t)$ con transformada de Laplace $X(s)$:

1. $x(t)$ es real y par.
2. $X(s)$ tiene cuatro polos y ningún cero en el plano finito de s.
3. $X(s)$ tiene un polo en $s = (1/2)e^{j\pi/4}$.
4. $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = 4$.

Determine $X(s)$ y su ROC.

9.15. Considere dos señales derechas $x(t)$ y $y(t)$ relacionadas a través de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2y(t) + \delta(t)$$

y

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t).$$

Determine $Y(s)$ y $X(s)$, junto con sus regiones de convergencia.

9.16. Un sistema LTI causal S con respuesta al impulso $h(t)$ tiene su entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ relacionadas a través de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de la forma

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1 + \alpha)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \alpha(\alpha + 1)\frac{dy(t)}{dt} + \alpha^2 y(t) = x(t).$$

(a) Si

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} + h(t),$$

¿cuántos polos tiene $G(s)$?

(b) ¿Para qué valores reales del parámetro α se garantiza que S sea estable?

9.17. Un sistema LTI causal S tiene la representación en diagrama de bloques mostrada en la figura P9.17. Determine una ecuación diferencial que relacione la entrada $x(t)$ con la salida $y(t)$ de este sistema.

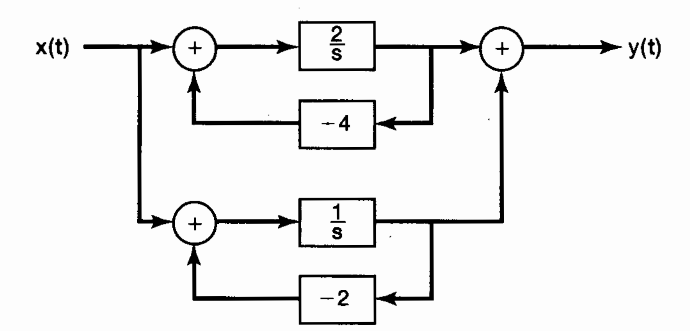


Figura P9.17

9.18. Considere un sistema LTI causal representado por el circuito *RLC* examinado en el problema 3.20.

(a) Determine $H(s)$ y especifique su región de convergencia. Su respuesta debe ser congruente con el hecho de que el sistema es causal y estable.

(b) Usando el diagrama de polos y ceros de $H(s)$ y la evaluación geométrica de la magnitud de la transformada de Fourier, determine si la magnitud de la transformada de Fourier correspondiente tiene una característica aproximada paso bajas, paso altas o paso banda.

(c) Si el valor de R se cambia ahora a $10^{-3}\ \Omega$, determine $H(s)$ y especifique su región de convergencia.

(d) Usando el diagrama de polos y ceros de $H(s)$ obtenido en la parte (c) y la evaluación geométrica de la magnitud de la transformada de Fourier, determine si la magnitud de la transformada de Fourier correspondiente tiene una característica aproximada paso bajas, paso altas o paso banda.

9.19. Determine la transformada unilateral de Laplace de cada una de las siguientes señales, y especifique las regiones de convergencia correspondientes:

(a) $x(t) = e^{-2t}u(t+1)$

(b) $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t) + e^{-2(t+3)}u(t+1)$

(c) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-4t}u(t)$

9.20. Considere un circuito *RL* del problema 3.19.

(a) Determine la respuesta a entrada cero de este circuito cuando la corriente de entrada es $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

(b) Determine la respuesta a entrada cero del circuito para $t > 0^-$, dado que

$$y(0^-) = 1.$$

(c) Determine la salida del circuito cuando la corriente de entrada es $x(t) = e^{-2t}u(t)$ y la condición inicial es la misma que la especificada en la parte (b).

PROBLEMAS BÁSICOS

9.21. Determine la transformada de Laplace, la región de convergencia asociada y el diagrama de polos y ceros para cada una de las siguientes funciones del tiempo:

(a) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$ **(b)** $x(t) = e^{-4t}u(t) + e^{-5t}(\text{sen}\, 5t)u(t)$

(c) $x(t) = e^{2t}u(-t) + e^{3t}u(-t)$ **(d)** $x(t) = te^{-2|t|}$

(e) $x(t) = |t|e^{-2|t|}$ **(f)** $x(t) = |t|e^{2t}u(-t)$

(g) $x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$ **(h)** $x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

(i) $x(t) = \delta(t) + u(t)$ **(j)** $x(t) = \delta(3t) + u(3t)$

9.22. Determine la función del tiempo, $x(t)$, para cada una de las siguientes transformadas de Laplace y sus regiones de convergencia asociadas:

(a) $\frac{1}{s^2+9}$, $\mathcal{R}e\{s\} > 0$

(b) $\frac{s}{s^2+9}$, $\mathcal{R}e\{s\} < 0$

(c) $\frac{s+1}{(s+1)^2+9}$, $\mathcal{R}e\{s\} < -1$

(d) $\frac{s+2}{s^2+7s+12}$, $-4 < \mathcal{R}e\{s\} < -3$

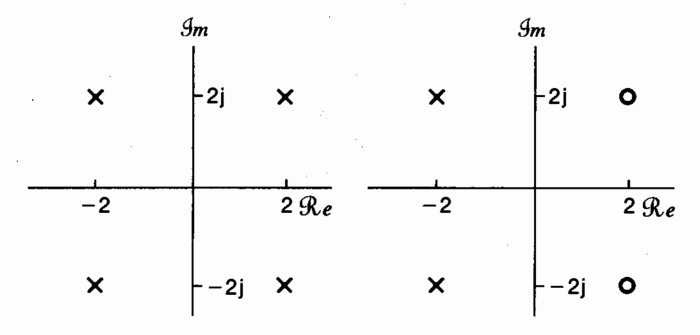
(e) $\frac{s+1}{s^2+5s+6}$, $-3 < \mathcal{R}e\{s\} < -2$

(f) $\frac{(s+1)^2}{s^2-s+1}$, $\mathcal{R}e\{s\} > \frac{1}{2}$

(g) $\frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}$, $\mathcal{R}e\{s\} > -1$

9.23. Para cada uno de los siguientes enunciados acerca de $x(t)$, y para cada uno de los cuatro diagramas de polos y ceros de la figura P9.23, determine la restricción correspondiente de la ROC:

1. $x(t)e^{-3t}$ es absolutamente integrable.
2. $x(t) * (e^{-t}u(t))$ es absolutamente integrable.
3. $x(t) = 0, t > 1$.
4. $x(t) = 0, t < -1$.



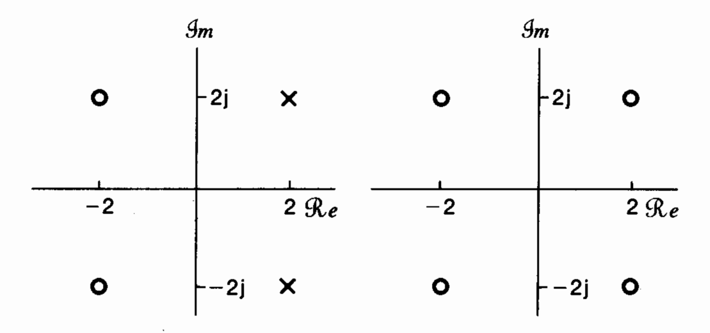


Figura P9.23

9.24. A lo largo de este problema consideraremos que la región de convergencia de las transformadas de Laplace siempre incluirá al eje $j\omega$.

(a) Considere la señal $x(t)$ con transformada de Fourier $X(j\omega)$ y transformada de Laplace $X(s) = s + 1/2$. Dibuje el diagrama de polos y ceros para $X(s)$. También dibuje el vector cuya longitud representa a $|X(j\omega)|$ y cuyo ángulo con respecto al eje real representa $\measuredangle X(j\omega)$ para una ω dada.

(b) Examinando los diagramas de polos y ceros y de vectores de la parte (a), determine una transformada de Laplace $X_1(s)$ diferente que corresponda a una función de tiempo, $x_1(t)$, de manera que

$$|X_1(j\omega)| = |X(j\omega)|,$$

pero

$$x_1(t) \neq x(t).$$

Muestre el diagrama de polos y ceros y los vectores asociados que representan a $X_1(j\omega)$.

(c) Para su respuesta a la parte (b), determine, otra vez examinando los diagramas de vectores relacionados, la relación entre $\measuredangle X(j\omega)$ y $\measuredangle X_1(j\omega)$.

(d) Determine una transformada de Laplace $X_2(s)$ tal que

$$\measuredangle X_2(j\omega) = \measuredangle X(j\omega),$$

pero $x_2(t)$ no sea proporcional a $x(t)$. Muestre el diagrama de polos y ceros para $X_2(s)$ y los vectores asociados que representan a $X_2(j\omega)$.

(e) Para su respuesta a la parte (d) determine la relación entre $|X_2(j\omega)|$ y $|X(j\omega)|$.

(f) Considere una señal $x(t)$ con transformada de Laplace $X(s)$ para la cual el diagrama de polos y ceros se muestra en la figura P9.24. Determine $X_1(s)$ de manera que $|X(j\omega)| = |X_1(j\omega)|$ y que todos los polos y ceros de $X_1(s)$ estén en la mitad izquierda del plano s [es decir, $\mathcal{R}e\{s\} < 0$]. También determine $X_2(s)$ tal que $\measuredangle X(j\omega) = \measuredangle X_2(j\omega)$ y que todos los polos y ceros de $X_2(s)$ queden en la mitad izquierda del plano s.

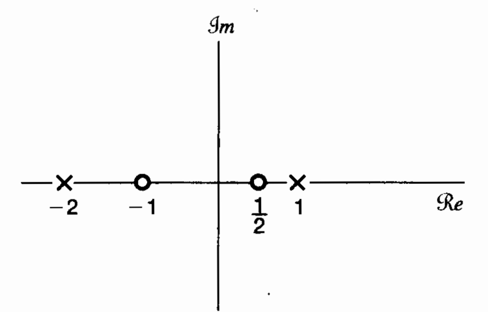


Figura P9.24

9.25. Considerando la determinación geométrica de la transformada de Fourier tal como se desarrolló en la sección 9.4, dibuje, para cada uno de los diagramas de polos y ceros de la figura P9.25, la magnitud de la transformada de Fourier asociada.

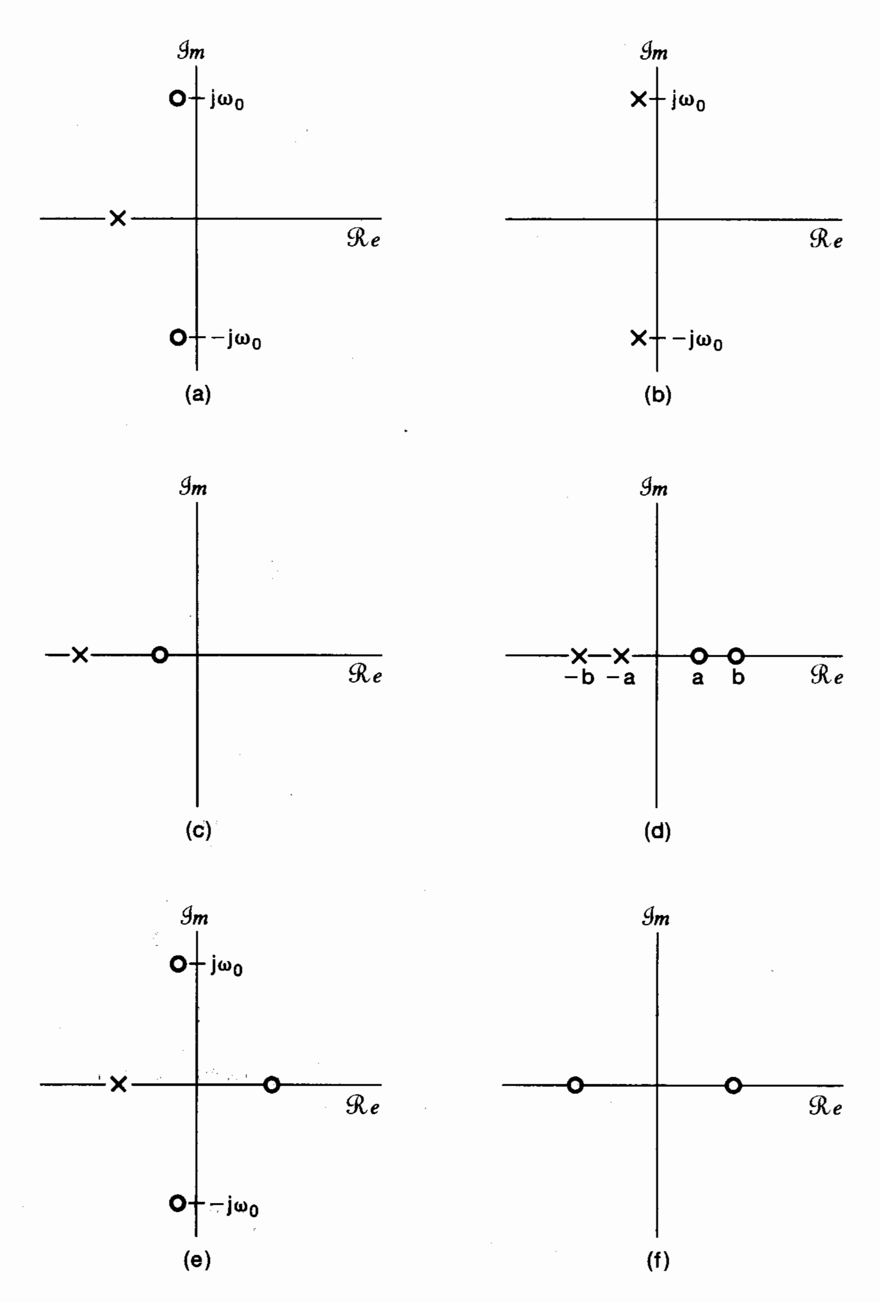


Figura P9.25

9.26. Considere una señal $y(t)$ la cual está relacionada con dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ mediante

$$y(t) = x_1(t-2) * x_2(-t+3)$$

donde

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) \qquad \text{y} \qquad x_2(t) = e^{-3t}u(t).$$

Dado que

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}, \qquad \Re e\{s\} > a,$$

use las propiedades de la transformada de Laplace para determinar la transformada de Laplace $Y(s)$ de $y(t)$.

9.27. Se nos han dado los siguientes cinco datos acerca de la señal $x(t)$ con transformada de Laplace $X(s)$:

1. $X(s)$ tiene exactamente dos polos.
2. $X(s)$ no tiene ceros en el plano s finito.
3. $X(s)$ tiene un polo en $s = -1 + j$.
4. $e^{2t}x(t)$ no es absolutamente integrable.
5. $X(0) = 8$.

Determine $X(s)$ y especifique su región de convergencia.

9.28. Considere un sistema LTI para el cual la función del sistema $H(s)$ tiene el patrón de polos y ceros mostrado en la figura P9.28.

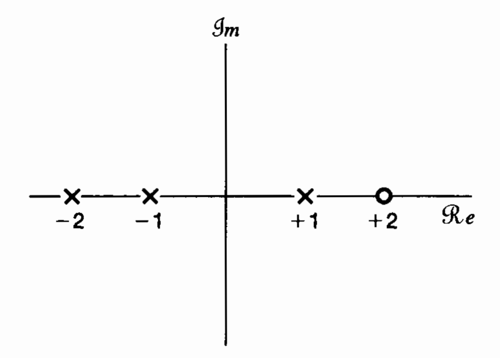


Figura P9.28

(a) Indique todas las ROC posibles que pueden estar asociadas con este patrón de polos y ceros.

(b) Para cada una de las ROC identificadas en la parte (a), especifique si el sistema asociado es estable y/o causal.

9.29. Considere un sistema LTI con entrada $x(t) = e^{-t}u(t)$ y respuesta al impulso $h(t) = e^{-2t}u(t)$.

(a) Determine las transformadas de Laplace de $x(t)$ y $h(t)$.

(b) Usando la propiedad de convolución, determine la transformada de Laplace $Y(s)$ de la salida $y(t)$.

(c) De la transformada de Laplace de $y(t)$, como se obtuvo en la parte (b), determine $y(t)$.

(d) Verifique su resultado en la parte (b) efectuando la convolución explícita de $x(t)$ y $h(t)$.

9.30. Un medidor de presión que se puede modelar como un sistema LTI, presenta la respuesta en tiempo a una entrada escalón unitario dada por $(1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$. Para cierta entrada $x(t)$, se observa que la salida es $(2 - 3e^{-t} + e^{-3t})u(t)$.

Para esta medición observada, determine la verdadera presión de entrada al medidor como una función de tiempo.

9.31. Considere un sistema LTI continuo en el cual la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ están relacionadas mediante la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t).$$

Sean $X(s)$ y $Y(s)$ las transformadas de Laplace de $x(t)$ y $y(t)$, respectivamente, y sea $H(s)$ la transformada de Laplace de $h(t)$, la respuesta al impulso del sistema.

(a) Determine $H(s)$ como una relación de polinomios en s. Dibuje el patrón de polos y ceros de $H(s)$.

(b) Determine $h(t)$ para cada uno de los tres siguientes casos:

1. El sistema es estable.
2. El sistema es causal.
3. El sistema *ni es* causal *ni es* estable.

9.32. Un sistema LTI causal con respuesta al impulso $h(t)$ tiene las siguientes propiedades:

1. Cuando la entrada al sistema es $x(t) = e^{2t}$ para toda t, la salida es $y(t) = (1/6)e^{2t}$ para toda t.
2. La respuesta al impulso $h(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = (e^{-4t})u(t) + bu(t)$$

donde b es una constante desconocida.

Determine la función del sistema $H(s)$ que resulte congruente con la información anterior. No debe haber constantes desconocidas en su respuesta; esto es, la constante b *no debe* aparecer en su respuesta.

9.33. La función del sistema de un sistema LTI causal es

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}.$$

Determine y trace la respuesta $y(t)$ cuando la entrada es

$$x(t) = e^{-|t|}, \qquad -\infty < t < \infty.$$

9.34. Suponga que se nos proporciona la siguiente información acerca de un sistema LTI S causal y estable con respuesta al impulso $h(t)$ y una función racional $H(s)$ del sistema:

1. $H(1) = 0.2$.
2. Cuando la entrada es $u(t)$, la salida es absolutamente integrable.
3. Cuando la entrada es $tu(t)$, la salida no es absolutamente integrable.
4. La señal $d^2h(t)/dt^2 + 2dh(t)/dt + 2h(t)$ es de duración finita.
5. $H(s)$ tiene exactamente un cero en el infinito.

Determine $H(s)$ y su región de convergencia.

9.35. La entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ de un sistema LTI causal están relacionadas a través de la representación en diagrama de bloques que se muestra en la figura P9.35.

(a) Determine una ecuación diferencial que relacione a $y(t)$ con $x(t)$.

(b) ¿El sistema es estable?

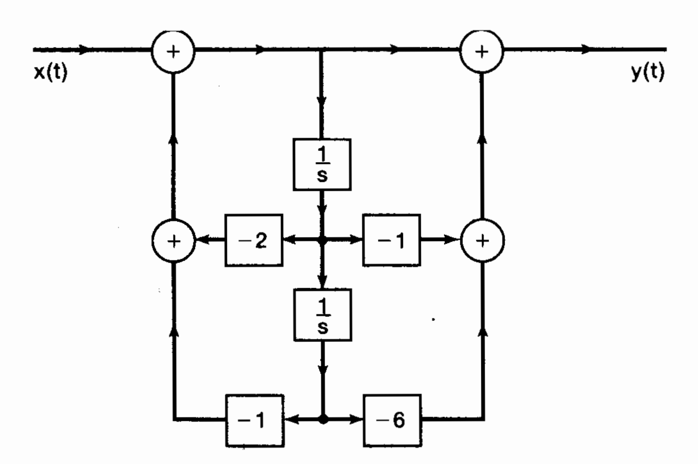


Figura P9.35

9.36. En este problema consideramos la construcción de varios tipos de representación en diagramas de bloques para un sistema S LTI causal con entrada $x(t)$, salida $y(t)$ y función del sistema

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}.$$

Para obtener la representación en diagrama de bloques de S, primero consideramos un sistemas LTI S_1 que tenga la misma entrada $x(t)$ que S, pero cuya función de sistema sea

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Si señalamos como $y_1(t)$ la salida de S_1, la representación en forma directa del diagrama de bloques de S_1 es como se muestra en la figura P9.36. Las señales $e(t)$ y $f(t)$ indicadas en la figura representan respectivamente las entradas a los dos integradores.

(a) Exprese $y(t)$ (la salida de S) como una combinación lineal de $y_1(t)$, $dy_1(t)/dt$ y $d^2y_1(t)/dt^2$.

(b) ¿Cómo es $dy_1(t)/dt$ en relación con $f(t)$?

(c) ¿Cómo es $d^2y_1(t)/dt^2$ en relación con $e(t)$?

(d) Exprese $y(t)$ como una combinación lineal de $e(t)$, $f(t)$ y $y_1(t)$.

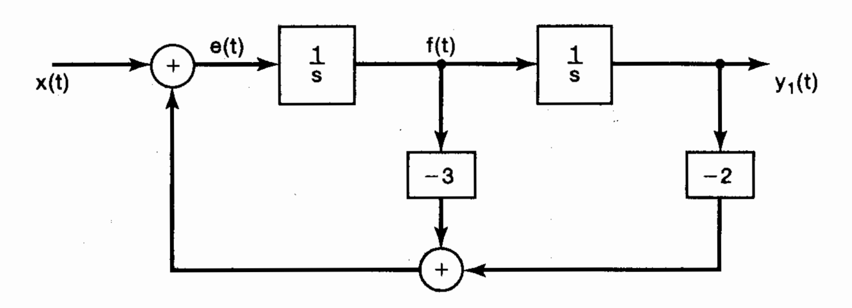


Figura P9.36

(e) Utilice el resultado de la parte anterior para extender la representación en diagrama de bloques de forma directa de S_1 y cree una representación en diagrama de bloques de S.

(f) Observando que

$$H(s) = \left(\frac{2(s-1)}{s+2}\right)\left(\frac{s+3}{s+1}\right),$$

dibuje una representación en diagrama de bloques para S como una combinación en cascada de dos subsistemas.

(g) Observando que

$$H(s) = 2 + \frac{6}{s+2} - \frac{8}{s+1},$$

dibuje una representación en diagrama de bloques para S como una combinación en paralelo de dos subsistemas.

9.37. Dibuje una representación en forma directa para los sistemas LTI causales, con las siguientes funciones de sistema:

(a) $H_1(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$ **(b)** $H_2(s) = \frac{s^2-5s+6}{s^2+7s+10}$ **(c)** $H_3(s) = \frac{s}{(s+2)^2}$

9.38. Considere un sistema LTI S causal de cuarto orden cuya función del sistema se especifica como

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 - s + 1)(s^2 + 2s + 1)}.$$

(a) Demuestre que una representación en diagrama de bloques para S que consiste de una conexión en cascada de cuatro secciones de primer orden contendrá multiplicaciones por coeficientes que no son puramente reales.

(b) Dibuje una representación en diagrama de bloques para S como una interconexión en *cascada* de dos sistemas de segundo orden, cada uno de los cuales se representa en forma directa. No debe haber multiplicaciones por coeficientes no reales en el diagrama de bloques resultante.

(c) Dibuje una representación en diagrama de bloques para S como una interconexión en *paralelo* de dos sistemas de segundo orden, cada uno de los cuales se representa en la forma directa. No debe haber multiplicaciones por coeficientes no reales en el diagrama de bloques resultante.

9.39. Sea

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) \quad \text{y} \quad x_2(t) = e^{-3(t+1)}u(t+1).$$

(a) Determine la transformada unilateral de Laplace $\mathcal{X}_1(s)$ y la transformada bilateral de Laplace $X_1(s)$ para la señal $x_1(t)$.

(b) Determine la transformada unilateral de Laplace $\mathcal{X}_2(s)$ y la transformada bilateral de Laplace $X_2(s)$ para la señal $x_2(t)$.

(c) Obtenga la transformada unilateral inversa de Laplace del producto $X_1(s)X_2(s)$ para determinar la señal $g(t) = x_1(t) * x_2(t)$.

(d) Demuestre que la transformada unilateral inversa de Laplace del producto $\mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_2(s)$ no es la misma que $g(t)$ para $t > 0^-$.

9.40. Considere el sistema S caracterizado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t).$$

(a) Determine la respuesta de estado cero de este sistema para la entrada $x(t) = e^{-4t}u(t)$.

(b) Determine la respuesta de estado cero de este sistema para $t > 0^-$, dado que

$$y(0^-) = 1, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = -1, \qquad \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} = 1.$$

(c) Determine la salida de S cuando la entrada es $x(t) = e^{-4t}u(t)$ y las condiciones iniciales son las mismas que se especificaron en la parte (b).

PROBLEMAS AVANZADOS

9.41. **(a)** Demuestre que si $x(t)$ es una función par, de manera que $x(t) = x(-t)$, entonces $X(s) = X(-s)$.

(b) Demuestre que si $x(t)$ es una función impar, de manera que $x(t) = -x(-t)$, entonces $X(s) = -X(-s)$.

(c) Determine cuál, si lo hubiera, de los diagramas de polos y ceros en la figura P9.41 podría corresponder a una función par de tiempo. Para aquellos que sí pudieran, indique la ROC requerida.

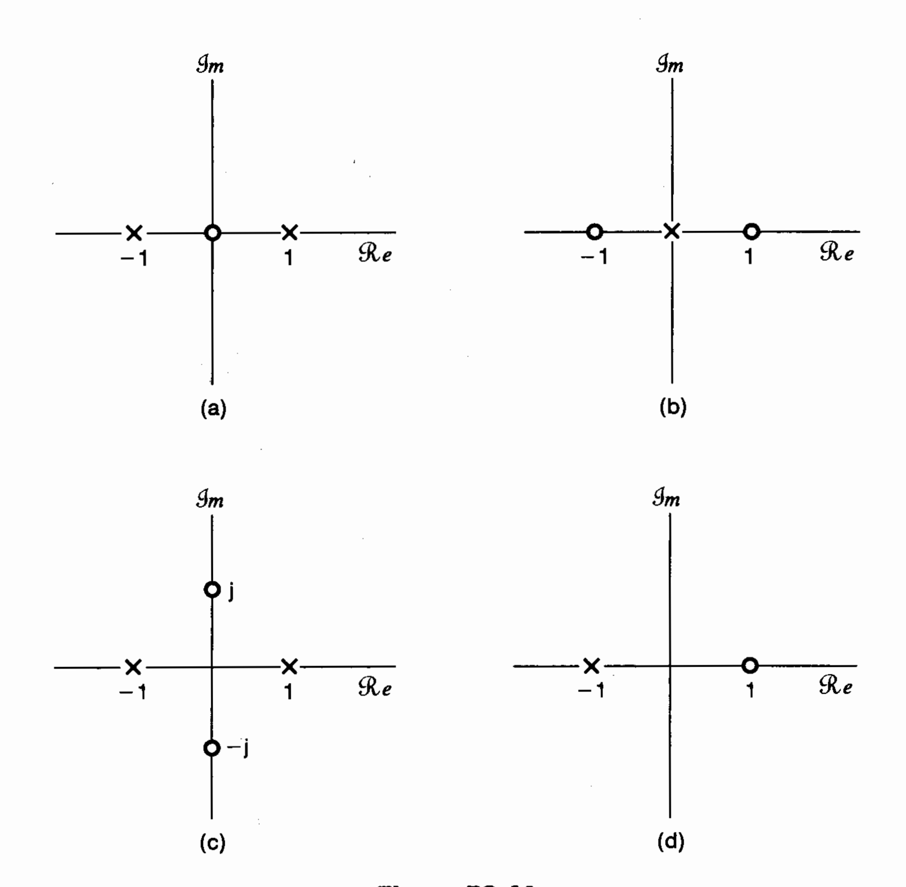


Figura P9.41

9.42. Determine si cada una de los siguientes enunciados es verdadero o falso. Si un enunciado es verdadero, proponga un argumento convincente. Si es falso, proporcione un ejemplo opuesto.

(a) La transformada de Laplace de $t^2u(t)$ no converge en ningún lugar en el plano s.

(b) La transformada de Laplace de $e^{t^2}u(t)$ no converge en ningún lugar en el plano s.

(c) La transformada de Laplace de $e^{j\omega_0 t}$ no converge en ningún lugar en el plano s.

(d) La transformada de Laplace de $e^{j\omega_0 t}u(t)$ no converge en ningún lugar en el plano s.

(e) La transformada de Laplace de $|t|$ no converge en ningún lugar en el plano s.

9.43. Sea $h(t)$ la respuesta al impulso de un sistema LTI causal estable con función racional del sistema.

(a) ¿El sistema con respuesta al impulso $dh(t)/dt$ garantiza ser causal y estable?

(b) ¿El sistema con respuesta al impulso $\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$ garantiza ser causal e inestable?

9.44. Sea $x(t)$ la señal muestreada especificada como

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT}\,\delta(t - nT),$$

donde $T > 0$.

(a) Determine $X(s)$, incluyendo su región de convergencia.

(b) Trace el diagrama de polos y ceros para $X(s)$.

(c) Use la interpretación geométrica del diagrama de polos y ceros para argumentar que $X(j\omega)$ es periódica.

9.45. Considere el sistema LTI mostrado en la figura P9.45(a) para el cual se nos proporciona la siguiente información

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2},$$

$$x(t) = 0, \qquad t > 0,$$

y

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t). \qquad \text{[Véase la figura P9.45(b).]}$$

(a) Determine $H(s)$ y su región de convergencia.

(b) Determine $h(t)$.

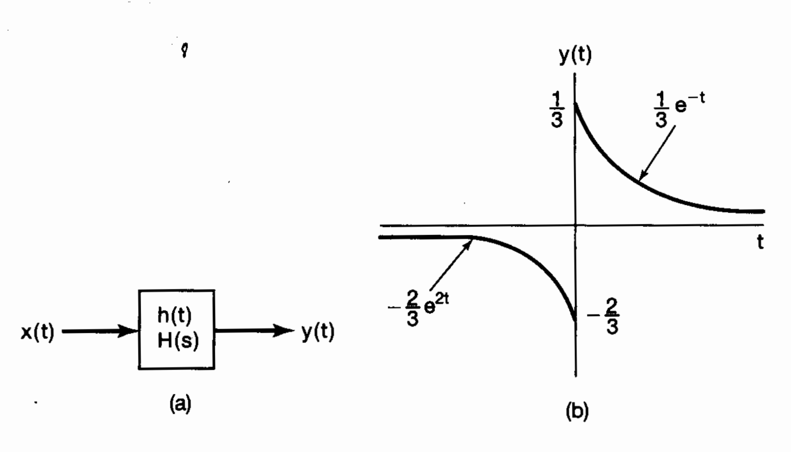


Figura P9.45

(c) Usando la función de sistema $H(s)$ encontrada en la parte (a), determine la salida $y(t)$ si la entrada es

$$x(t) = e^{3t}, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

9.46. $H(s)$ representa la función de sistema para un sistema causal y estable. La entrada al sistema consiste en la suma de tres términos, uno de los cuales es un impulso $\delta(t)$ y otro es una exponencial compleja de la forma $e^{s_0 t}$, donde s_0 es una constante compleja. La salida es

$$y(t) = -6e^{-t}u(t) + \frac{4}{34}\,e^{4t}\cos 3t + \frac{18}{34}e^{4t}\,\text{sen}\,3t + \delta(t).$$

Determine $H(s)$ de tal manera que corresponda con esta información.

9.47. La señal

$$y(t) = e^{-2t}u(t)$$

es la salida de un sistema causal pasa todo para el cual la función del sistema es

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}.$$

(a) Encuentre y trace al menos dos posibles entradas $x(t)$ que puedan producir la salida $y(t)$.

(b) ¿Cuál es la entrada si se sabe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty?$$

(c) ¿Cuál es la entrada $x(t)$ si se sabe que un sistema estable (pero no necesariamente causal) existe, el cual tendrá a $x(t)$ como una salida si $y(t)$ es la entrada? Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ de este filtro y demuestre, mediante la convolución directa que cumple con la propiedad pretendida [es decir, $y(t) * h(t) = x(t)$].

9.48. El *inverso* de un sistema LTI $H(s)$ se define como un sistema que cuando se conecta en cascada con $H(s)$ da como resultado una función de transferencia total igual a la unidad o, de manera equivalente, una respuesta al impulso total que es un impulso.

(a) Si $H_1(s)$ denota la función de transferencia de un sistema inverso para $H(s)$, determine la relación algebraica general entre $H(s)$ y $H_1(s)$.

(b) En la figura P9.48 se muestra el diagrama de polos y ceros para un sistema estable y causal $H(s)$. Determine el diagrama de polos y ceros de su sistema inverso.

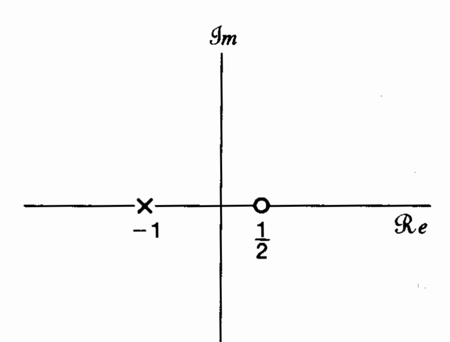


Figura P9.48

9.49. Una clase de sistemas conocidos como sistemas de retardo mínimo o de fase mínima, algunas veces se definen mediante el enunciado de que son causales y estables y que su sistema inverso es también causal y estable.

Con base en esta definición, desarrolle un argumento para demostrar que todos los polos y los ceros de la función de transferencia de un sistema de retardo mínimo deben estar en la mitad izquierda del plano s [es decir, $\mathcal{R}e\{s\} < 0$].

9.50. Determine si cada uno de los siguientes enunciados acerca de los sistemas LTI es válido o no. Si alguno es válido, presente un argumento convincente para él. Si es falso, proporcione un ejemplo opuesto.

(a) Un sistema estable continuo debe tener todos sus polos en la mitad izquierda del plano s [es decir, $\mathcal{R}e\{s\} < 0$].

(b) Si una función del sistema tiene más polos que ceros y el sistema es causal, la respuesta al escalón será continua en $t = 0$.

(c) Si una función del sistema tiene más polos que ceros y el sistema no está limitado a ser causal, la respuesta al escalón puede ser discontinua en $t = 0$.

(d) Un sistema estable y causal debe tener todos sus polos y ceros en la mitad izquierda del plano s.

9.51. Considere un sistema estable y causal con una respuesta al impulso real $h(t)$ y una función de sistema $H(s)$. Se sabe que $H(s)$ es racional, uno de sus polos está en $-1 + j$, uno de sus ceros está en $3 + j$ y tiene exactamente dos ceros en el infinito. Para cada uno de los siguientes enunciados, determine si es válido, si es falso o si no hay suficiente información para determinar su validez.

(a) $h(t)e^{-3t}$ es absolutamente integrable.

(b) La ROC para $H(s)$ es $\mathcal{R}e\{s\} > -1$.

(c) La ecuación diferencial que relaciona las entradas $x(t)$ con las salidas $y(t)$ para S puede escribirse en una forma que tenga sólo coeficientes reales.

(d) $\lim_{s\to\infty} H(s) = 1$.

(e) $H(s)$ no tiene más que cuatro polos.

(f) $H(j\omega) = 0$ para al menos un valor finito de ω.

(g) Si la entrada a S es e^{3t} sen t, la salida es $e^{3t}\cos t$.

9.52. Como se indicó en la sección 9.5, muchas de las propiedades de la transformada de Laplace y su deducción son análogas a las propiedades correspondientes de la transformada de Fourier y su deducción, como se desarrolló en el capítulo 4. En este problema se le pide que describa la deducción de algunas propiedades de la transformada de Laplace.

Observando la deducción de la propiedad correspondiente en el capítulo 4 para la transformada de Fourier, deduzca cada una de las siguientes propiedades de la transformada de Laplace. Su deducción debe incluir una consideración de la región de convergencia.

(a) Desplazamiento en tiempo (sección 9.5.2)

(b) Desplazamiento en el dominio de s (sección 9.5.3)

(c) Escalamiento en tiempo (sección 9.5.4)

(d) Propiedad de convolución (sección 9.5.6)

9.53. Como hemos presentado en la sección 9.5.10, el teorema del valor inicial establece que para una señal $x(t)$ con transformada de Laplace $X(s)$ y para la cual $x(t) = 0$ para $t < 0$, el valor inicial de $x(t)$ [es decir, $x(0+)$] se puede obtener a partir de $X(s)$ mediante la siguiente relación

$$x(0+) = \lim_{s\to\infty} sX(s). \qquad \text{[ecuación (9.110)]}$$

Primero observamos que, dado que $x(t) = 0$ para $t < 0$, $x(t) = x(t)u(t)$. En seguida, expandiendo $x(t)$ como una serie de Taylor en $t = 0+$, obtenemos

$$x(t) = \left[x(0+) + x^{(1)}(0+)t + \cdots + x^{(n)}(0+)\frac{t^n}{n!} + \cdots\right]u(t), \qquad \text{(P9.53-1)}$$

donde $x^{(n)}(0+)$ denota la n-ésima derivada de $x(t)$ evaluada en $t = 0+$.

(a) Determine la transformada de Laplace para un término arbitrario $x^{(n)}(0+)(t^n/n!)u(t)$ del miembro derecho de la ecuación (P9.53-1). (Puede encontrar útil revisar el ejemplo 9.14.)

(b) Del resultado en la parte (a) y de la expansión en la ecuación (P9.53.-1), demuestre que $X(s)$ se puede expresar como

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n)}(0+)\frac{1}{s^{n+1}}.$$

(c) Demuestre que la ecuación (9.110) se deduce del resultado en la parte (b).

(d) Determinando primero $x(t)$, verifique el teorema del valor inicial para cada uno de los siguientes ejemplos:

(1) $X(s) = \frac{1}{s+2}$

(2) $X(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$

(e) Una forma más general del teorema del valor inicial establece que si $x^{(n)}(0+) = 0$ para $n < N$, entonces $x^{(N)}(0+) = \lim_{s\to\infty} s^{N+1}X(s)$. Demuestre que este enunciado más general también se deduce del resultado en la parte (b).

9.54. Considere una señal $x(t)$ de valor real con transformada de Laplace $X(s)$.

(a) Aplicando la conjugación compleja a ambos miembros de la ecuación (9.56), demuestre que $X(s) = X^*(s^*)$.

(b) A partir del resultado en la parte (a), demuestre que si $X(s)$ tiene un polo (cero) en $s = s_0$, debe tener un polo (cero) en $s = s_0^*$, es decir, para $x(t)$ real, los polos y ceros de $X(s)$ que no están en el eje real deben presentarse en pares conjugados complejos.

9.55. En la sección 9.6, tabla 9.2, enumeramos varios pares de transformadas de Laplace, e indicamos específicamente cómo los pares de transformadas 1 a 9 se obtienen de los ejemplos 9.1 y 9.14, junto con algunas de las propiedades de la tabla 9.1.

Explotando las propiedades de la tabla 9.1, demuestre cómo los pares de transformadas 10 a 16 se obtienen a partir de los pares de transformadas 1 a 9 en la tabla 9.2.

9.56. Se dice que la transformada de Laplace existe para un valor s complejo específico si la magnitud de la transformada es finita; esto es, si $|X(s)| < \infty$.

Demuestre que una condición *suficiente* para la existencia de la transformada $X(s)$ en $s = s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ es que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}\,dt < \infty.$$

En otras palabras, demuestre que una $x(t)$ exponencialmente ponderada por $e^{-\sigma_0 t}$ es absolutamente integrable. Necesitará usar el resultado de que, para una función compleja $f(t)$,

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt. \tag{P9.56-1}$$

Sin comprobar rigurosamente la ecuación (P9.56-1), argumente su plausibilidad.

9.57. La transformada de Laplace $X(s)$ de una señal $x(t)$ tiene cuatro polos y un número desconocido de ceros. Se sabe que la señal $x(t)$ tiene un impulso en $t = 0$. Determine qué información, si la hay, proporciona acerca del número de ceros y sus ubicaciones.

9.58. Sea $h(t)$ la respuesta al impulso de un sistema LTI causal y estable con función del sistema $H(s)$ racional. Demuestre que $g(t) = \mathcal{R}e\{h(t)\}$ también es la respuesta al impulso de un sistema causal y estable.

9.59. Si $\mathcal{X}(s)$ denota la transformada unilateral de Laplace de $x(t)$, determine en términos de $\mathcal{X}(s)$ la transformada unilateral de Laplace de:

(a) $x(t-1)$ **(b)** $x(t+1)$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, d\tau$ **(d)** $\frac{d^3x(t)}{dt^3}$

PROBLEMAS DE EXTENSIÓN

9.60. En la comunicación telefónica de larga distancia, algunas veces se encuentra un eco debido a que la señal transmitida se refleja en el receptor, es enviada de regreso por la línea, se refleja nuevamente en el transmisor y retorna hacia el receptor. La respuesta al impulso de un sistema que modela este efecto se muestra en la figura P9.60, donde hemos supuesto que sólo se recibe un eco. El parámetro T corresponde al tiempo de desplazamiento en un solo sentido a lo largo del canal de comunicación, donde el parámetro α representa la atenuación en amplitud entre el transmisor y el receptor.

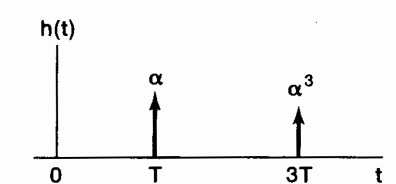


Figura P9.60

(a) Determine la función del sistema $H(s)$ y su región de convergencia asociada.

(b) De su resultado en la parte (a), usted debería observar que $H(s)$ no consiste en una razón de polinomios. A pesar de ello, es útil representarla en términos de polos y ceros donde, como siempre, los ceros son los valores de s para los cuales

$H(s) = 0$ y los polos son los valores de s para los cuales $1/H(s) = 0$. Para la función del sistema encontrada en la parte (a), determine los ceros y demuestre que no hay polos.

(c) Del resultado en la parte (b), trace el diagrama de polos y ceros para $H(s)$.

(d) Tomando en cuenta los vectores adecuados en el plano s, trace la magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema.

9.61. La función de autocorrelación de una señal $x(t)$ se define como

$$\phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)\,dt.$$

(a) Determine, en términos de $x(t)$, la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema LTI en el cual, cuando la entrada es $x(t)$, la salida es $\phi_{xx}(t)$ [figura P9.61(a)].

(b) A partir de su respuesta en (a), determine $\Phi_{xx}(s)$, la transformada de Laplace de $\phi_{xx}(\tau)$, en términos de $X(s)$. También exprese $\Phi_{xx}(j\omega)$, la transformada de Fourier de $\phi_{xx}(\tau)$, en términos de $X(j\omega)$.

(c) Si $x(t)$ tiene un patrón de polos y ceros y una ROC como la mostrada en la figura P9.61(b), trace el patrón de polos y ceros e indique la ROC para $\phi_{xx}(\tau)$.

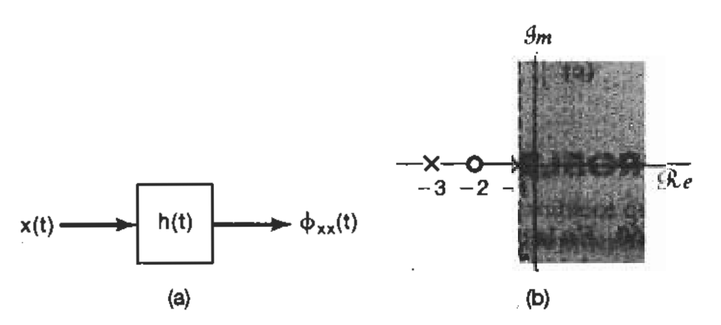


Figura P9.61

9.62. En varias aplicaciones en el diseño y análisis de señales, se encuentra uno con la clase de señales

$$\phi_n(t) = e^{-t/2} L_n(t)u(t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{P9.62-1}$$

donde

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}). \tag{P9.62-2}$$

(a) Las funciones $L_n(t)$ se conocen como *polinomios de Laguerre*. Para verificar que tienen forma de polinomios, determine explícitamente $L_0(t)$, $L_1(t)$ y $L_2(t)$.

(b) Usando las propiedades de la transformada de Laplace de la tabla 9.1 y los pares de transformadas de Laplace de la tabla 9.2, determine la transformada de Laplace $\Phi_n(s)$ de $\phi_n(t)$.

(c) El conjunto de señales $\phi_n(t)$ se puede generar excitando con un impulso una red como la de la figura P9.62. A partir de sus resultados en la parte (b), determine $H_1(s)$ y $H_2(s)$ de manera que las respuestas al impulso a través de la cadena en cascada sean las señales $\phi_n(t)$ como se indican.

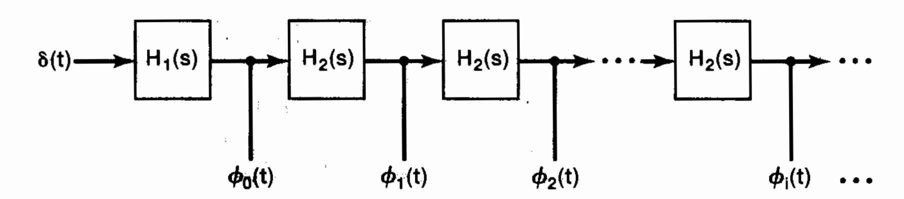


Figura P9.62

9.63. En el diseño de filtros a menudo es posible y conveniente transformar un filtro paso bajas en un filtro paso altas y viceversa. Si $H(s)$ indica la función de transferencia del filtro original y $G(s)$ la del filtro transformado, una transformación comúnmente usada consiste en reemplazar s con $1/s$; esto es,

$$G(s) = H\left(\frac{1}{s}\right).$$

(a) Para $H(s) = 1/(s + \frac{1}{2})$, trace $|H(j\omega)|$ y $|G(j\omega)|$.

(b) Determine la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes asociada con $H(s)$ y con $G(s)$.

(c) Ahora considere un caso más general en el cual $H(s)$ es la función de transferencia asociada con una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes en la forma general

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \qquad \text{(P9.63-1)}$$

Sin perder generalidad, hemos supuesto que el número de derivadas N es el mismo en ambos miembros de la ecuación, aunque en cualquier caso particular algunos de los coeficientes pueden ser cero. Determine $H(s)$ y $G(s)$.

(d) A partir de sus resultados en la parte (c), determine, en términos de los coeficientes de la ecuación (P9.63-1), la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes asociada con $G(s)$.

9.64. Considere el circuito RLC mostrado en la figura 9.27 con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$.

(a) Demuestre que si R, L y C son positivas, entonces este sistema LTI es estable.

(b) ¿Cómo deben estar relacionadas R, L y C para que el sistema represente un filtro Butterworth de segundo orden?

9.65. **(a)** Determine la ecuación diferencial que relacione $v_i(t)$ con $v_0(t)$ para el circuito RLC de la figura P9.65.

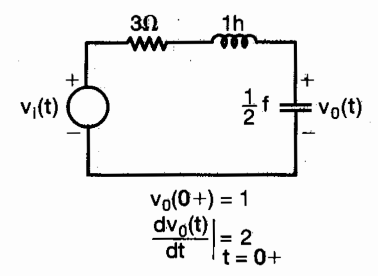


Figura P9.65

(b) Suponga que $v_i(t) = e^{-3t}u(t)$. Usando la transformada unilateral de Laplace, determine $v_o(t)$ para $t > 0$.

9.66. Considere el circuito RL mostrado en la figura P9.66. Suponga que la corriente $i(t)$ ha alcanzado un estado estable con el interruptor en la posición A. En el tiempo $t = 0$, el interruptor se mueve de la posición A a la B.

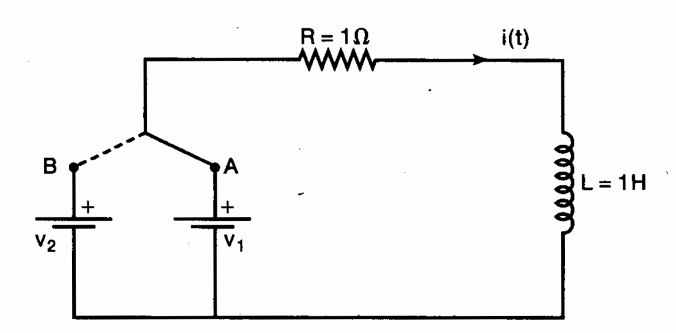


Figura P9.66

(a) Encuentre la ecuación diferencial que relacione a $i(t)$ con v_2 para $t > 0^-$. Especifique la condición inicial (es decir, el valor de $i(0^-)$) para esta ecuación diferencial en términos de v_1.

(b) Usando las propiedades de la transformada unilateral de Laplace de la tabla 9.3, determine y grafique la corriente $i(t)$ para cada uno de los siguientes valores de v_1 y v_2:

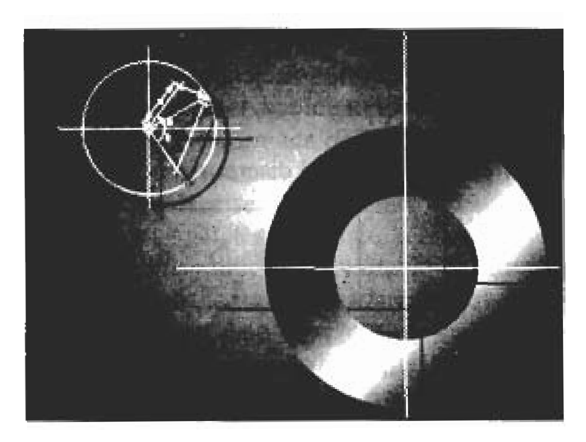
(i) $v_1 = 0\ V, v_2 = 2\ V$

(ii) $v_1 = 4\ V, v_2 = 0\ V$

(iii) $v_1 = 4\ V, v_2 = 2\ V$

Usando sus respuestas a (i), (ii) y (iii), argumente que la corriente $i(t)$ se puede expresar como una suma de su respuesta de estado cero del circuito y su respuesta a entrada cero.

10
La transformada z



10.0 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 9 desarrollamos la transformada de Laplace como una extensión de la transformada continua de Fourier. Esta extensión fue motivada en parte por el hecho de que se puede aplicar a una clase más amplia de señales que la transformada de Fourier, ya que hay muchas señales para las cuales la transformada de Fourier no converge pero la transformada de Laplace sí lo hace. La transformada de Laplace nos permitió, por ejemplo, realizar el análisis de transformada de sistemas inestables y desarrollar conocimientos y herramientas adicionales para el análisis de los sistemas LTI.

En este capítulo usamos el mismo procedimiento para el caso discreto conforme desarrollamos la transformada z, la cual es la contraparte de tiempo discreto de la transformada de Laplace. Como veremos más adelante, las propiedades de la transformada z, así como las razones que motivaron su desarrollo, se asemejan mucho a las de la transformada de Laplace. Sin embargo, al igual que con la relación existente entre las transformadas continua de Fourier y de tiempo discreto, encontraremos algunas diferencias importantes entre la transformada z y la transformada de Laplace, que surgen de las diferencias fundamentales entre las señales y sistemas continuos y discretos.

10.1 LA TRANSFORMADA *Z*

Como vimos en la sección 3.2, para un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo con respuesta al impulso $h[n]$, la respuesta $y[n]$ del sistema a una entrada exponencial compleja de la forma z^n es

$$y[n] = H(z)z^n, \tag{10.1}$$

donde

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}. \tag{10.2}$$

Para $z = e^{j\omega}$ con ω real (es decir, con $|z| = 1$), la sumatoria en la ecuación (10.2) corresponde a la transformada de Fourier de tiempo discreto de $h[n]$. De manera más general, cuando $|z|$ no está restringida a la unidad, la sumatoria se conoce como la *transformada z* de $h[n]$.

La transformada z de una señal discreta general $x[n]$ se define como[1]

$$\boxed{X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n},} \tag{10.3}$$

donde z es una variable compleja. Por conveniencia, la transformada z de $x[n]$ se denota algunas veces como $\mathcal{Z}\{x[n]\}$ y la relación entre $x[n]$ y su transformada z se indica como

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z). \tag{10.4}$$

En el capítulo 9 examinamos varias relaciones importantes entre la transformada de Laplace y la transformada de Fourier para señales continuas. En forma similar, pero no idéntica, hay un gran número de relaciones importantes entre la transformada z y la transformada de Fourier de tiempo discreto. Para explorar estas relaciones, expresemos la variable compleja z en forma polar como

$$z = re^{j\omega}, \tag{10.5}$$

siendo r la magnitud de z y ω su ángulo. En términos de r y ω, la ecuación (10.3) pasa a ser

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n},$$

o, de manera equivalente,

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x[n]r^{-n}\}e^{-j\omega n}. \tag{10.6}$$

A partir de la ecuación (10.6) vemos que $X(re^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$ multiplicada por una exponencial real r^{-n}; esto es,

$$X(re^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}. \tag{10.7}$$

La exponencial que pondera a r^{-n} puede ser creciente o decreciente al incrementarse n, dependiendo de si r es mayor que o menor que la unidad. En particular, podemos observar que, para $r = 1$ o, de forma equivalente, $|z| = 1$, la ecuación (10.3) se reduce a la trans-

[1] A la transformada z definida por la ecuación (10.3) a menudo se le conoce como la transformada z *bilateral* para distinguirla de la transformada z *unilateral*, la cual estudiaremos en la sección 10.9. La transformada z involucra una sumatoria desde $-\infty$ hasta $+\infty$, mientras que la transformada unilateral tiene una forma similar a la ecuación (10.3) pero con los límites de la sumatoria de 0 a $+\infty$. Ya que estamos más interesados en la transformada z bilateral, nos referiremos a $X(z)$ como se definió en la ecuación (10.3) simplemente como la transformada z, excepto en la sección 10.9, en la cual usaremos las palabras "unilateral" y "bilateral" para evitar cualquier ambigüedad.

formada de Fourier; es decir,

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \mathfrak{F}\{x[n]\}. \tag{10.8}$$

La relación entre la transformada z y la transformada de Fourier para señales discretas se asemeja mucho al análisis correspondiente en la sección 9.1 para señales continuas, pero con algunas diferencias importantes. En el caso continuo, la transformada de Laplace se reduce a la transformada de Fourier cuando la parte real de la variable transformada es cero. Si interpretamos lo anterior en términos del plano s, esto significa que la transformada de Laplace se reduce a la transformada de Fourier sobre el eje imaginario (es decir, para $s = j\omega$). En contraste, la transformada z se reduce a la transformada de Fourier cuando la magnitud de la variable de transformación z es *unitaria* (es decir, para $z = e^{j\omega}$). Por lo tanto, la transformada z se reduce a la transformada de Fourier sobre un contorno del plano complejo z que corresponde a un círculo con radio unitario, como se indica en la figura 10.1. El círculo en el plano z se conoce como el *círculo unitario*, y en el análisis de la transformada z juega un papel similar al que desempeña el eje imaginario en el plano s para la transformada de Laplace.

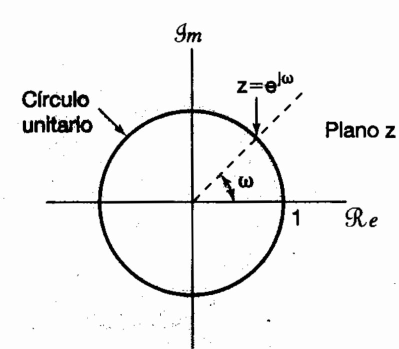


Figura 10.1 El plano z complejo. La transformada z se reduce a la transformada de Fourier para valores de z en el círculo unitario.

De la ecuación (10.7) vemos que para la convergencia de la transformada z requerimos que la transformada de Fourier de $x[n]r^{-n}$ converja. Para cualquier secuencia específica $x[n]$, esperaríamos que esta convergencia ocurriera para algunos valores de r pero no para otros. En general, la transformada z de una secuencia lleva asociado un rango de valores de z para el cual $X(z)$ converge. Al igual que con la transformada de Laplace, este rango de valores se conoce como la *región de convergencia* (ROC). Si la ROC incluye el círculo unitario, entonces la transformada de Fourier también converge. Para ilustrar la transformada z y la región de convergencia asociada, examinemos varios ejemplos.

Ejemplo 10.1

Considere la señal $x[n] = a^n u[n]$. Después, a partir de la ecuación (10.3),

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n.$$

Para la convergencia de $X(z)$ requerimos que $\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$. En consecuencia, la región de convergencia es el rango de valores de z para el cual $|az^{-1}| < 1$ o, de manera

equivalente, $|z| > |a|$. Entonces,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|. \tag{10.9}$$

De este modo, la transformada z para esta señal está bien definida para cualquier valor de a, con una ROC determinada por la magnitud de a de acuerdo con la ecuación (10.9). Por ejemplo, para $a = 1$, $x[n]$ es la secuencia de escalón unitario con transformada z

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1.$$

Vemos que la transformada z en la ecuación (10.9) es una función racional. En consecuencia, al igual que con las transformadas racionales de Laplace, puede ser caracterizada por sus ceros (las raíces del polinomio del numerador) y sus polos (las raíces del polinomio del denominador). Para este ejemplo, hay un cero en $z = 0$ y un polo en $z = a$. El diagrama de polos y ceros y la región de convergencia del ejemplo 10.1 se muestran en la figura 10.2 para un valor de a entre 0 y 1. Para $|a| > 1$, la ROC no incluye el círculo unitario, lo cual concuerda con el hecho de que para estos valores de a, la transformada de Fourier de $a^n u[n]$ no converge.

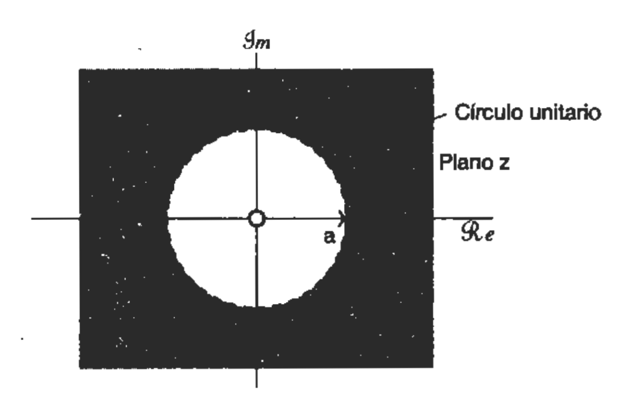


Figura 10.2 Diagrama de polos y ceros y región de convergencia en el ejemplo 10.1 para $0 < a < 1$.

Ejemplo 10.2

Ahora sea $x[n] = -a^n u[-n - 1]$. Entonces,

$$\begin{aligned} X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Si $|a^{-1}z| < 1$ o, de forma equivalente, $|z| < |a|$, la suma en la ecuación (10.10) converge y

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|. \tag{10.11}$$

El diagrama de polos y ceros y la región de convergencia para este ejemplo se muestran en la figura 10.3 para valores de a entre 0 y 1.

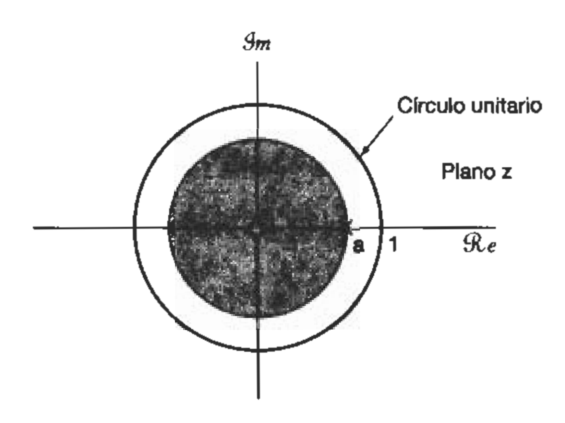


Figura 10.3 Diagrama de polos y ceros y región de convergencia en el ejemplo 10.2 para $0 < a < 1$.

Comparando las ecuaciones (10.9) y (10.11), así como las figuras 10.2 y 10.3, vemos que la expresión algebraica de $X(z)$ y el diagrama de polos y ceros correspondiente son idénticos en los ejemplos 10.1 y 10.2, y la transformada z difiere sólo en sus regiones de convergencia. Por lo tanto, al igual que con la transformada de Laplace, la especificación de la transformada z requiere tanto de la expresión algebraica como de la región de convergencia. Asimismo, en ambos ejemplos las secuencias fueron exponenciales y las transformadas z resultantes fueron racionales. De hecho, como sugiere el próximo ejemplo, $X(z)$ será racional siempre que $x[n]$ sea una combinación lineal de exponenciales reales o complejas:

Ejemplo 10.3

Considere una señal que es la suma de dos exponenciales reales:

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]. \tag{10.12}$$

La transformada z es entonces

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}z^{-n}$$

$$= 7\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]z^{-n} - 6\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]z^{-n}$$

$$= 7\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n \tag{10.13}$$

$$= \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \tag{10.14}$$

$$= \frac{z(z-\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}. \tag{10.15}$$

Para la convergencia de $X(z)$, ambas sumas en la ecuación (10.13) deben converger, lo cual requiere que tanto $|(1/3)z^{-1}| < 1$ como $|(1/2)z^{-1}| < 1$ o, de manera equivalente, $|z| > 1/3$ y $|z| > 1/2$. Por lo tanto, la región de convergencia es $|z| > 1/2$.

La transformada z para este ejemplo puede también obtenerse usando los resultados del ejemplo 10.1. Específicamente, a partir de la definición de la transformada z obtenida en la ecuación (10.3), vemos que la transformada z es lineal, es decir, que si $x[n]$ es la suma de dos términos, entonces $X(z)$ será la suma de las transformadas z de los términos individuales y convergerá cuando ambas transformadas z converjan. Del ejemplo 10.1

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3} \tag{10.16}$$

y

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \tag{10.17}$$

y en consecuencia,

$$7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \tag{10.18}$$

como determinamos anteriormente. El diagrama de polos y ceros y la ROC de la transformada z de cada uno de los términos individuales así como para la señal combinada se muestran en la figura 10.4.

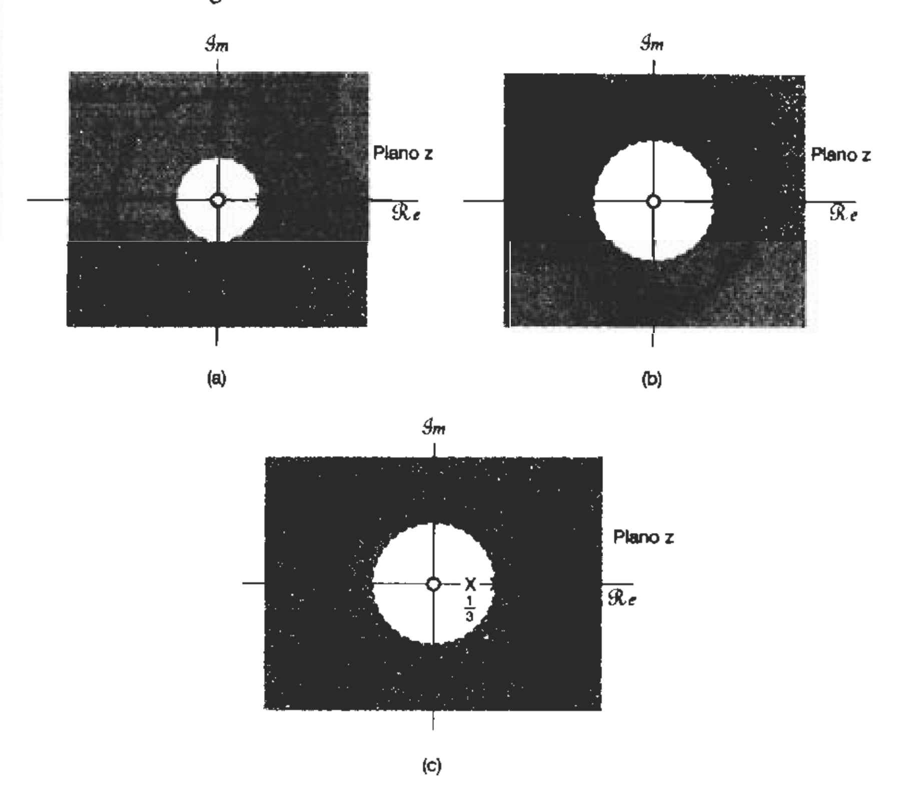


Figura 10.4 Diagrama de polos y ceros y región de convergencia para los términos individuales y la suma en el ejemplo 10.3: (a) $1/(1-\frac{1}{3}z^{-1})$, $|z| > \frac{1}{3}$; (b) $1/(1-\frac{1}{2}z^{-1})$, $|z| > \frac{1}{2}$; (c) $7/(1-\frac{1}{3}z^{-1}) - 6/(1-\frac{1}{2}z^{-1})$, $|z| > \frac{1}{2}$.

Ejemplo 10.4

Considere la señal

$$x[n] = (\tfrac{1}{3})^n \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{4}n)u[n]$$
$$= \tfrac{1}{2j}(\tfrac{1}{3}e^{j\pi/4})^n u[n] - \tfrac{1}{2j}(\tfrac{1}{3}e^{-j\pi/4})^n u[n].$$

La transformada z de esta señal es

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n]\right\} z^{-n}$$
$$= \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)^n - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)^n \tag{10.19}$$
$$= \frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}} - \frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}}$$

o, de manera equivalente,

$$X(z) = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}z}{(z-\frac{1}{3}e^{j\pi/4})(z-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4})} \tag{10.20}$$

Para la convergencia de $X(z)$, ambas sumas en la ecuación (10.19) deben converger, lo cual requiere que $|(1/3)e^{j\pi/4}z^{-1}| < 1$ y $|(1/3)e^{-j\pi/4}z^{-1}| < 1$ o, de manera equivalente, $|z| > 1/3$. El diagrama de polos y ceros y la ROC para este ejemplo se muestran en la figura 10.5.

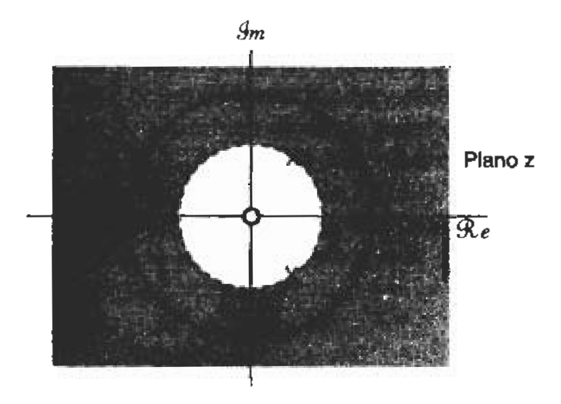


Figura 10.5 Diagrama de polos y ceros y ROC para la transformada z en el ejemplo 10.4.

En cada uno de los cuatro ejemplos anteriores expresamos la transformada z como una relación de polinomios en z y también como una relación de polinomios en z^{-1}. A partir de la definición de la transformada z obtenida en la ecuación (10.3) vemos que, para secuencias que son cero para $n < 0$, $X(z)$ contiene sólo potencias negativas de z. Por lo tanto, para esta clase de señales es particularmente cómodo expresar $X(z)$ en términos de polinomios en z^{-1} en lugar de z, y cuando sea apropiado usaremos esta forma en nues-

tro análisis. Sin embargo, la referencia a los polos y ceros siempre es en términos de las raíces del numerador y del denominador expresadas como polinomios en z. Además, algunas veces resulta conveniente referirse a $X(z)$, presentada como una razón de polinomios en z, como si tuviera polos en el infinito si el grado en el numerador excediera el grado del denominador o ceros en el infinito si el numerador fuera de menor grado que el denominador.

10.2 LA REGIÓN DE CONVERGENCIA DE LA TRANSFORMADA Z

En el capítulo 9 vimos que había propiedades específicas de la región de convergencia de la transformada de Laplace para diferentes clases de señales, y que la comprensión de éstas condujo a una mejor comprensión de la transformada de Laplace. De una manera similar, exploraremos varias de las propiedades de la región de convergencia para la transformada z. Cada una de las siguientes propiedades y su justificación son muy semejantes a la propiedad de la sección 9.2 que le corresponde.

Propiedad 1: La ROC de $X(z)$ consiste de un anillo en el plano z centrado alrededor del origen.

Esta propiedad se ilustra en la figura 10.6, y se desprende del hecho de que la ROC consiste de aquellos valores de $z = re^{j\omega}$ para los cuales $x[n]r^{-n}$ tiene una transformada de Fourier que converge. Esto es, la ROC de la transformada z de $x[n]$ consiste de los valores de z para los cuales $x[n]r^{-n}$ es absolutamente sumable:[2]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|r^{-n} < \infty. \tag{10.21}$$

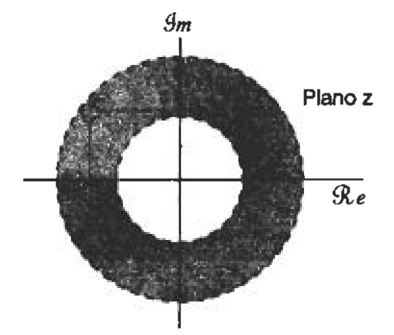


Figura 10.6 La ROC como un anillo en el plano z. En algunos casos, el límite interior puede extenderse hasta el origen, en cuyo caso la ROC llega a ser un disco. En otros casos, el límite exterior se puede extender hacia afuera hasta el infinito.

[2]Para un tratamiento completo de las propiedades matemáticas de la transformada z, véase R. V. Churchill y J. W. Brown, *Complex Variables and Applications* (5ª edición) (Nueva York: McGraw-Hill, 1990), y E. I. Jury, *Theory and Application of the z-Transform Method* (Malabar, FL: R. E. Krieger Pub., Co., 1982).

De esta manera, la convergencia depende solamente de $r = |z|$ y no de ω. En consecuencia, si un valor específico de z está en la ROC, entonces todos los valores de z en el mismo círculo (es decir, con la misma magnitud) estarán en la ROC. Esto por sí mismo garantiza que la ROC consistirá de anillos concéntricos. Como veremos en la propiedad 6, la ROC debe, de hecho, consistir de un solo anillo. En algunos casos, el límite interior de la ROC puede extenderse hacia adentro hasta el origen, y en algunos casos el límite exterior puede extenderse hacia afuera hasta el infinito.

Región de convergencia.

Propiedad 2: La ROC no contiene ningún polo.

Al igual que en la transformada de Laplace, esta propiedad es simplemente una consecuencia del hecho de que en un polo, $X(z)$ es infinita y por tanto, por definición, no converge.

Propiedad 3: Si $x[n]$ es de duración finita, entonces la ROC es el plano z completo, excepto posiblemente en $z = 0$ y/o $z = \infty$.

Una secuencia de duración finita tiene sólo un número finito de valores diferentes de cero que se extienden, digamos, de $n = N_1$ a $n = N_2$, donde N_1 y N_2 son finitos. Por lo tanto, la transformada z es la suma de un número finito de términos; esto es

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}. \tag{10.22}$$

Para z diferente de cero o infinito, cada término en la suma será finito y en consecuencia $X(z)$ convergerá. Si N_1 es negativo y N_2 positivo, de manera que $x[n]$ tenga valores diferentes de cero tanto para $n < 0$ como para $n > 0$, entonces la sumatoria incluirá términos con potencias positivas y negativas de z. A medida que $|z| \to 0$, los términos que incluyen potencias negativas de z dejan de tener límite y conforme $|z| \to \infty$, los términos que incluyen potencias positivas de z también dejan de tener un límite. En consecuencia, para N_1 negativo y N_2 positivo, la ROC no incluye a $z = 0$ o $z = \infty$. Si N_1 es cero o positivo, hay sólo potencias negativas de z en la ecuación (10.22), y en consecuencia la ROC incluye a $z = \infty$. Si N_2 es cero o negativo, habrá sólo potencias positivas de z en la ecuación (10.22) y en consecuencia la ROC incluye a $z = 0$.

Ejemplo 10.5

Considere la señal impulso unitario $\delta[n]$. Su transformada z está dada por

$$\delta[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]z^{-n} = 1, \tag{10.23}$$

con una ROC que consiste del plano z completo que incluye a $z = 0$ y $z = \infty$. Por otro lado, considere el impulso unitario retardado $\delta[n-1]$, para el cual

$$\delta[n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-1]z^{-n} = z^{-1}. \tag{10.24}$$



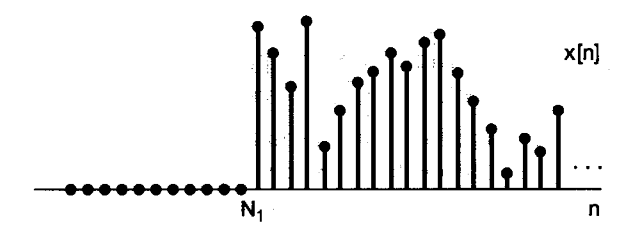
Esta transformada z está bien definida excepto en $z = 0$, donde hay un polo. Entonces, la ROC consiste del plano z completo, incluyendo a $z = \infty$ pero excluyendo a $z = 0$. De forma similar, considere un impulso adelantado en tiempo, es decir, $\delta[n+1]$. En este caso,

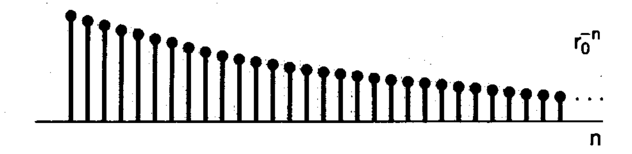
$$\delta[n+1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n+1]z^{-n} = z, \tag{10.25}$$

la cual está bien definida para todos los valores finitos de z. Por lo tanto, la ROC consiste del plano finito z completo (incluyendo a $z = 0$), pero hay un polo en el infinito.

Propiedad 4: Si $x[n]$ es una secuencia derecha y si el círculo $|z| = r_0$ está en la ROC, entonces todos los valores finitos de z para los cuales $|z| > r_0$ también estarán en la ROC.

La justificación de esta propiedad se obtiene de una manera idéntica a la de la propiedad 4 en la sección 9.2. Una secuencia derecha es cero antes de algún valor de n, digamos, N_1. Si el círculo $|z| = r_0$ está en la ROC, entonces $x[n]r_0^{-n}$ es absolutamente sumable. Ahora considere $|z| = r_1$ con $r_1 > r_0$, de modo que r_1^{-n} decae más rápidamente que r_0^{-n} conforme n se incrementa. Como se ilustra en la figura 10.7 este decaimiento expo-





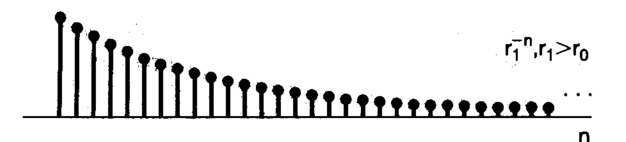


Figura 10.7 Con $r_1 > r_0$, $x[n]r_1^{-n}$ decae más rápido al incrementarse n que como sucede con $x[n]r_0^{-n}$. Ya que $x[n] = 0$, $n < N_1$, esto implica que si $x[n]r_0^{-n}$ es absolutamente sumable, entonces $x[n]r_1^{-n}$ también lo será.

nencial más rápido atenuará aún más los valores de la secuencia para valores positivos de n y no puede ser la causa de que los valores de la secuencia para valores negativos de n no tengan límite, ya que $x[n]$ es derecha y, en particular, $x[n]z^{-n} = 0$ para $n < N_1$. En consecuencia, $x[n]r_1^{-n}$ es absolutamente sumable.

Para secuencias derechas, la ecuación (10.3) adopta la forma

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n}, \tag{10.26}$$

donde N_1 es finito y puede ser positivo o negativo. Si N_1 es negativo, entonces la sumatoria en la ecuación (10.26) incluye términos con potencias positivas de z los cuales llegan a no tener límite conforme $|z| \to \infty$. En consecuencia, para secuencias derechas en general, la ROC no incluirá el infinito. Sin embargo, para la clase particular de secuencias causales, es decir, secuencias que son cero para $n < 0$, N_1 será no negativo y, por lo tanto, la ROC incluirá a $z = \infty$.

Propiedad 5: Si $x[n]$ es una secuencia izquierda y si el círculo $|z| = r_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de z para los cuales $0 < |z| < r_0$ también estarán en la ROC.

Una vez más, esta propiedad es muy similar a la propiedad de la transformada de Laplace que le corresponde, y el argumento e intuición son similares a los de la propiedad 4. En general, para secuencias izquierdas, partiendo de la ecuación (10.3) la sumatoria de la transformada z tendrá la forma

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n]z^{-n}, \tag{10.27}$$

donde N_2 puede ser positivo o negativo. Si N_2 es positivo, entonces la ecuación (10.27) incluye potencias negativas de z y deja de estar limitada a medida que $|z| \to 0$. En consecuencia, para secuencias izquierdas, por lo general la ROC no incluirá a $z = 0$. Sin embargo, si $N_2 \leq 0$ (de manera que $x[n] = 0$ para toda $n > 0$) la ROC incluirá a $z = 0$.

Propiedad 6: Si $x[n]$ es bilateral y si el círculo $|z| = r_0$ está en la ROC, entonces ésta consistirá de un anillo en el plano z que incluya al círculo $|z| = r_0$.

Al igual que en la propiedad 6 de la sección 9.2, la ROC para una señal bilateral puede examinarse expresando $x[n]$ como la suma de una señal derecha con una izquierda. La ROC de la componente derecha es una región limitada en el interior por un círculo y se extiende hacia afuera al infinito (y posiblemente lo incluye). La ROC para la componente izquierda es una región limitada en el exterior por un círculo y se extiende hacia adentro al origen, posiblemente incluyéndolo. La ROC para la señal compuesta incluye la intersección de estas dos. Como se ilustra en la figura 10.8, el traslape (suponiendo que lo hubiera) es un anillo en el plano z.

Ilustraremos las propiedades anteriores con varios ejemplos, los cuales son similares a los ejemplos 9.6 y 9.7.

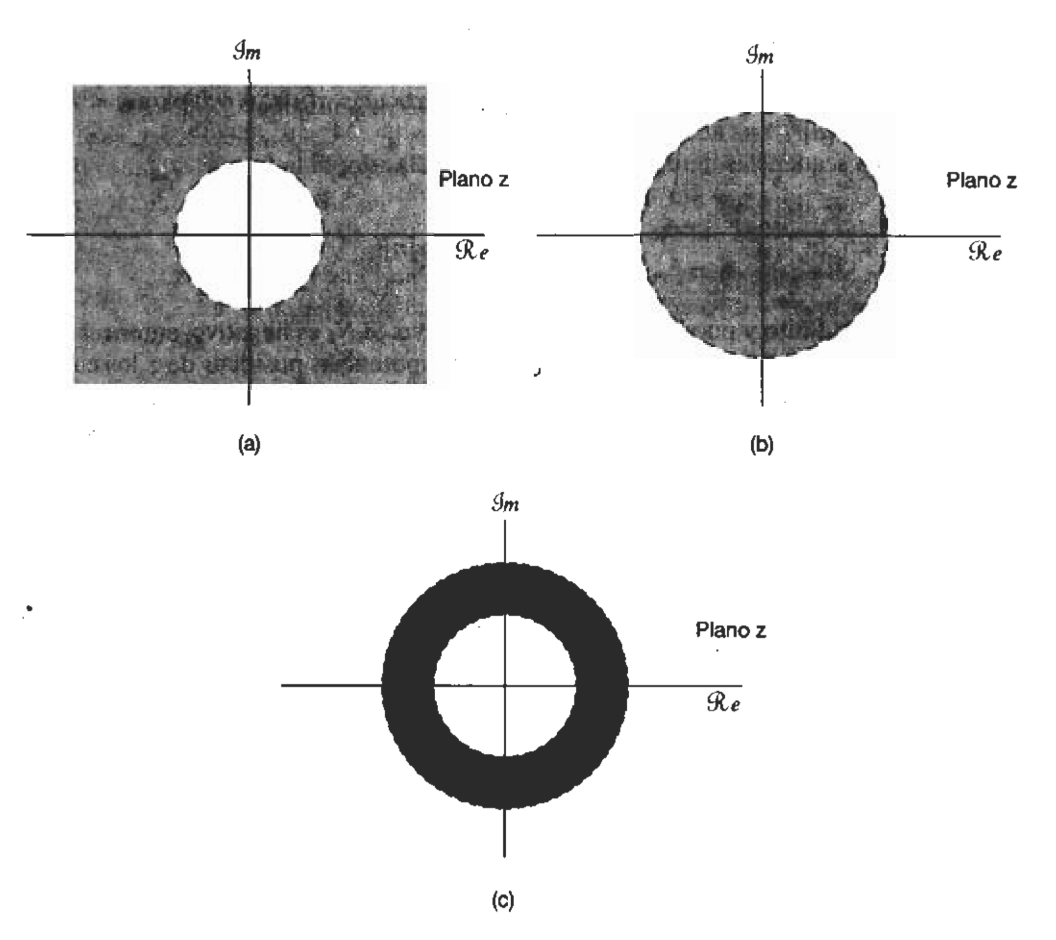


Figura 10.8 (a) ROC de una secuencia derecha; (b) ROC de una secuencia izquierda; (c) intersección de las ROC de (a) y (b) que representa la ROC para una secuencia bilateral que es la suma de una secuencia derecha y una izquierda.

Ejemplo 10.6

Considere la siguiente señal

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1,\ a > 0 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n \qquad (10.28) \\ &= \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a}. \end{aligned}$$

Puesto que $x[n]$ es de longitud finita, de la propiedad 3 se desprende que la ROC incluye el plano z completo excepto posiblemente en el origen y/o el infinito. De hecho, a partir de nuestro análisis de la propiedad 3, ya que $x[n]$ es cero para $n < 0$, la ROC se extenderá hacia el infinito. Sin embargo, ya que $x[n]$ es diferente de cero para algunos valores positivos de n, la ROC no incluirá el origen. Esto es evidente gracias a la ecuación (10.28) donde vemos que hay un polo de orden $N - 1$ en $z = 0$. Las N raíces del polinomio del numerador están en

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{10.29}$$

La raíz para $k = 0$ cancela el polo en $z = a$. En consecuencia no hay otros polos aparte del localizado en el origen. El resto de los ceros está en

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \qquad k = 1, \ldots, N-1. \tag{10.30}$$

El patrón de polos y ceros se muestra en la figura 10.9.

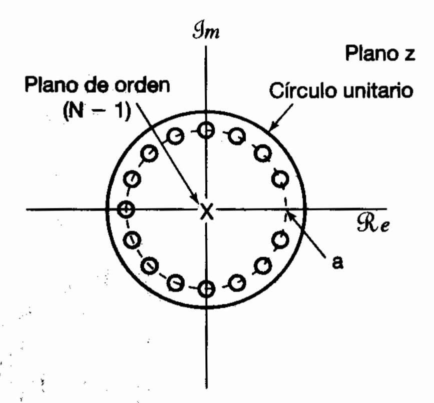


Figura 10.9 Patrón de polos y ceros del ejemplo 10.6 con $N = 16$ y $0 < a < 1$. La región de convergencia para este ejemplo consiste de todos los valores de z excepto $z = 0$.

Ejemplo 10.7

Sea

$$x[n] = b^{|n|}, \qquad b > 0. \tag{10.31}$$

Esta secuencia bilateral se ilustra en la figura 10.10 tanto para $b < 1$ como para $b > 1$. La transformada z para esta secuencia se puede obtener expresándola como la suma de una secuencia derecha y una izquierda. Tenemos,

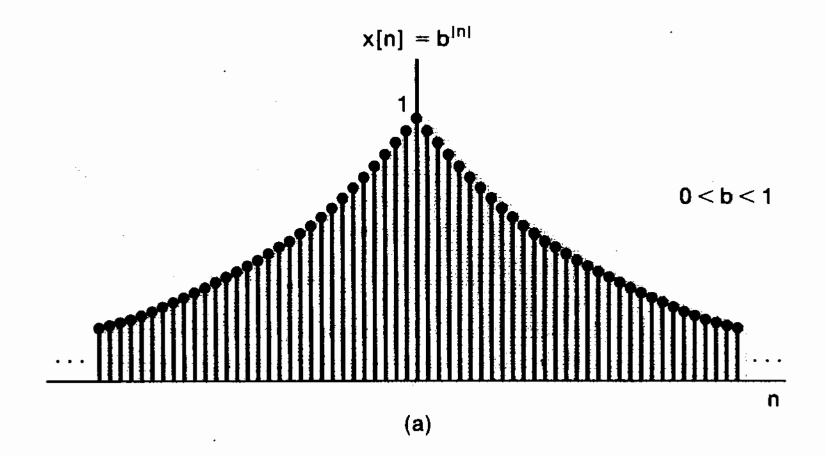
$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]. \tag{10.32}$$

Del ejemplo 10.1,

$$b^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \qquad |z| > b, \tag{10.33}$$

y del ejemplo 10.2

$$b^{-n} u[-n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \qquad |z| < \frac{1}{b}. \tag{10.34}$$



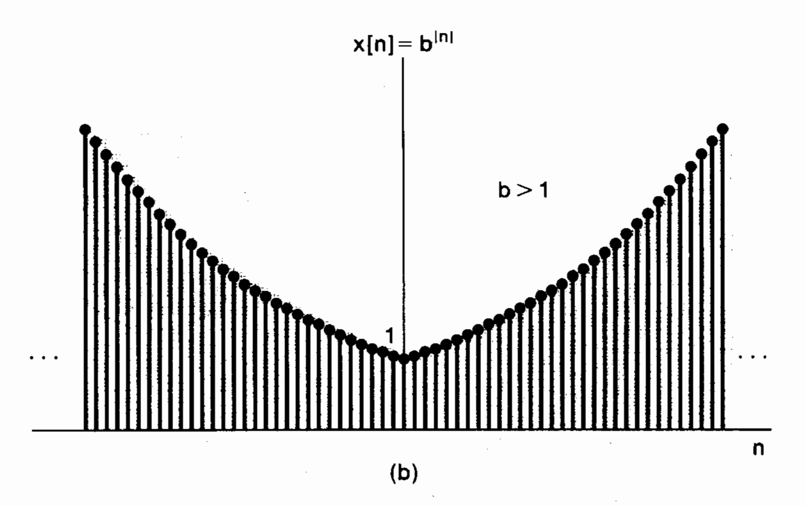


Figura 10.10 Secuencia $x[n] = b^{|n|}$ para $0 < b < 1$ y para $b > 1$: (a) $b = 0.95$; (b) $b = 1.05$.

En las figuras 10.11(a)-(d) mostramos el patrón de polos y ceros y la ROC de las ecuaciones (10.33) y (10.34), tanto para $b > 1$ como para $0 < b < 1$. Para $b > 1$ no hay ROC común y por lo tanto la secuencia en la ecuación (10.31) no tendrá transformada z, aun cuando las componentes derecha e izquierda la tengan individualmente. Para $b < 1$ las ROC de las ecuaciones (10.33) y (10.34) se traslapan y por consiguiente la transformada z para la secuencia compuesta es

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} - \frac{1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \qquad b < |z| < \frac{1}{b}, \tag{10.35}$$

o, de manera equivalente,

$$X(z) = \frac{b^2 - 1}{b} \frac{z}{(z - b)(z - b^{-1})}, \qquad b < |z| < \frac{1}{b}. \tag{10.36}$$

El diagrama de polos y ceros y la ROC correspondientes se muestran en la figura 10.11(e).

Figura 10.11 Diagrama de polos y ceros y ROC para el ejemplo 10.7: (a) la ecuación (10.33) para $b > 1$; (b) la ecuación (10.34) para $b > 1$; (c) la ecuación (10.33) para $0 < b < 1$; (d) la ecuación (10.34) para $0 < b < 1$; (e) diagrama de polos y ceros y la ROC para la ecuación (10.36) con $0 < b < 1$. Para $b > 1$, la transformada z de $x[n]$ en la ecuación (10.31) no converge para ningún valor de z.

En el análisis de la transformada de Laplace en el capítulo 9, hicimos hincapié en que para una transformada racional de Laplace, la ROC está siempre limitada por polos o por el infinito. Observamos que en los ejemplos anteriores se aplica un tratamiento similar para la transformada z y, de hecho, siempre se cumple:

Propiedad 7: Si la transformada z $X(z)$ de $x[n]$ es racional, entonces su ROC está limitada por polos o se extiende al infinito.

Combinando la propiedad 7 con las propiedades 4 y 5, tenemos:

Propiedad 8: Si la transformada z $X(z)$ de $x[n]$ es racional, y si $x[n]$ es derecha, entonces la ROC es la región en el plano z fuera del polo más alejado, es decir, fuera del círculo de radio igual a la magnitud más grande de los polos de $X(z)$. Además, si $x[n]$ es causal (es decir, si es derecha e igual a 0 para $n < 0$), entonces la ROC también incluye a $z = \infty$.

Por lo tanto, para secuencias derechas con transformadas racionales, todos los polos están más cercanos al origen que lo está cualquier punto en la ROC.

Propiedad 9: Si la transformada z $X(z)$ de $x[n]$ es racional, y si $x[n]$ es izquierda, entonces la ROC es la región en el plano z dentro del polo diferente de cero más interno, es decir, dentro del círculo de radio igual a la magnitud más pequeña de los polos de $X(z)$ diferentes de cualquiera que se encuentre en $z = 0$, y se extiende hacia el interior incluyendo posiblemente a $z = 0$. En particular, si $x[n]$ es anticausal (es decir, si es izquierda e igual a 0 para $n > 0$), entonces la ROC también incluye a $z = 0$.

De este modo, para secuencias izquierdas, los polos de $X(z)$ diferentes de cualquiera que esté en $z = 0$ están más alejados del origen que lo está algún punto en la ROC.

Para un determinado patrón de polos y ceros o, de forma equivalente, una determinada expresión algebraica racional $X(z)$, hay un número limitado de ROC diferentes que son congruentes con las propiedades anteriores. Para ilustrar cómo las diferentes ROC pueden asociarse con el mismo patrón de polos y ceros, presentamos el siguiente ejemplo, el cual es muy semejante al ejemplo 9.8.

Ejemplo 10.8

Consideremos todas las posibles ROC que pueden estar asociadas con la función

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}. \tag{10.37}$$

El patrón de polos y ceros asociado se muestra en la figura 10.12(a). Con base en nuestro análisis en esta sección, hay tres posibles ROC que pueden estar asociadas con esta expresión algebraica para la transformada z. Estas ROC están indicadas en las figuras 10.12(b)-(d). Cada una corresponde a secuencia diferente. La figura 10.12(b) está asociada con una secuencia derecha, la figura 10.12(c) con una secuencia izquierda y la figura 10.12(d) con una secuencia bilateral. Puesto que la figura 10.12(d) es la única para la cual la ROC incluye el círculo unitario, la secuencia correspondiente a esta selección de la ROC es la única de las tres para la cual la transformada de Fourier converge.

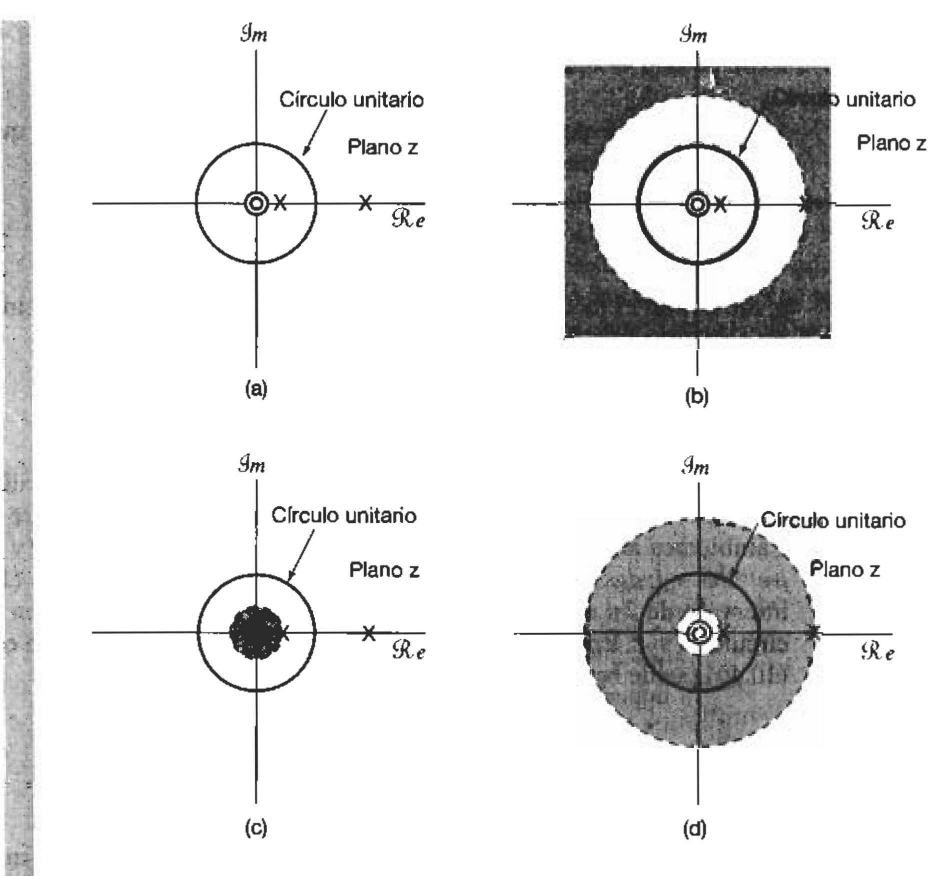


Figura 10.12 Las tres posibles ROC que pueden estar asociadas con la expresión de la transformada *z* del ejemplo 10.8: (a) patrón de polos y ceros de $X(z)$; (b) patrón de polos y ceros y ROC si $x[n]$ es derecha; (c) patrón de polos y ceros y ROC si $x[n]$ es izquierda; (d) patrón de polos y ceros y ROC si $x[n]$ es bilateral. En cada caso, el cero en el origen es un cero de segundo orden.

10.3 LA TRANSFORMADA *Z* INVERSA

En esta sección examinamos varios procedimientos para obtener una secuencia cuando se conoce su transformada z. Para empezar, consideremos la relación formal que expresa una secuencia en términos de su transformada z. Dicha expresión se puede obtener con base en la interpretación, desarrollada en la sección 10.1, de la transformada z como la transformada de Fourier de una secuencia exponencialmente ponderada. En concreto, como se expresa en la ecuación (10.7),

$$X(re^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}, \tag{10.38}$$

para cualquier valor de r tal que $z = re^{j\omega}$ esté dentro de la ROC. Aplicando la transformada inversa de Fourier a ambos miembros de la ecuación (10.38) se obtiene

$$x[n]r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\},$$

o

$$x[n] = r^n \mathfrak{F}^{-1}[X(re^{j\omega})]. \tag{10.39}$$

Usando la expresión de la transformada inversa de Fourier que presentamos en la ecuación (5.8), tenemos

$$x[n] = r^n \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega,$$

o, moviendo el factor exponencial r^n dentro de la integral y combinándolo con el término $e^{j\omega n}$, tenemos

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^n\, d\omega. \tag{10.40}$$

Esto es, podemos recuperar $x[n]$ a partir de su transformada z evaluada a lo largo de un contorno $z = re^{j\omega}$ en la ROC, con r fija y una ω variante sobre un intervalo de 2π. Cambiemos ahora la variable de integración ω a z. Con $z = re^{j\omega}$ y r fija, entonces $dz = jre^{j\omega}d\omega = jzd\omega$, o $d\omega = (1/j)z^{-1}dz$. La integración en la ecuación (10.40) se da sobre un intervalo de 2π en ω el cual, en términos de z, corresponde a una vuelta alrededor del círculo $|z| = r$. En consecuencia, en términos de una integración en el plano z, la ecuación (10.40) puede rescribirse como

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}\, dz,} \tag{10.41}$$

donde el símbolo $\circlearrowleft$ denota la integración alrededor de un contorno circular cerrado en sentido contrario a las manecillas del reloj, centrado en el origen y con radio r. El valor de r puede escogerse como cualquier valor para el cual $X(z)$ converge, es decir, cualquier valor tal que el contorno circular de la integración $|z| = r$ esté en la ROC. La ecuación (10.41) es la expresión formal de la transformada z inversa y es la contraparte de tiempo discreto de la ecuación (9.56) de la transformada inversa de Laplace. Al igual que con la ecuación (9.56), la evaluación formal de la ecuación (10.41) de la transformada inversa requiere que se utilice la integración de contorno en el plano complejo. Sin embargo, existen diversos procedimientos alternativos para obtener una secuencia a partir de su transformada z. Al igual que con las transformadas de Laplace, un procedimiento particularmente útil para transformadas z racionales consiste en expandir la expresión algebraica en una expansión por fracciones parciales y reconocer las secuencias asociadas con cada uno de los términos individuales. En los siguientes ejemplos ilustraremos dicho procedimiento.

Ejemplo 10.9

Considere la transformada z

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \qquad |z| > \frac{1}{3}. \tag{10.42}$$

Hay dos polos, uno en $z = 1/3$ y otro en $z = 1/4$, y la ROC cae fuera del polo más externo. Esto es, la ROC consiste de todos los puntos con magnitud mayor que la del polo de magnitud más grande, es decir, el polo en $z = 1/3$. A partir de la propiedad 4 en la sección 10.2, sabemos que la transformada inversa es una secuencia derecha. Como se describe en

el apéndice, $X(z)$ se puede expandir por el método de fracciones parciales. Para este ejemplo, la expansión por fracciones parciales, expresada en polinomios en z^{-1}, es

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}. \tag{10.43}$$

Por lo tanto, $x[n]$ es la suma de dos términos, uno con transformada z $1/[1-(1/4)z^{-1}]$ y el otro con transformada z $2/[1-(1/3)z^{-1}]$. Para determinar la transformada z de cada uno de estos términos individuales, debemos especificar la ROC asociada con cada uno. Puesto que la ROC para $X(z)$ está fuera del polo más alejado, la ROC para cada término individual en la ecuación (10.43) también debe estar fuera del polo asociado con cada uno de los términos. Es decir, la ROC para cada término consiste de todos los puntos con magnitud mayor que la del polo correspondiente. De este modo,

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n], \tag{10.44}$$

donde

$$x_1[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \qquad |z| > \tfrac{1}{4}, \tag{10.45}$$

$$x_2[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z| > \tfrac{1}{3}. \tag{10.46}$$

Del ejemplo 10.1 podemos identificar por inspección que

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \tag{10.47}$$

y

$$x_2[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n], \tag{10.48}$$

y así

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]. \tag{10.49}$$

Ejemplo 10.10

Consideremos ahora la misma expresión algebraica de $X(z)$ como en la ecuación (10.42), pero con la ROC de $X(z)$ como $1/4 < |z| < 1/3$. La ecuación (10.43) es aún una expansión algebraica válida para la expresión algebraica de $X(z)$, pero la ROC asociada con los términos individuales cambiará. En particular, ya que la ROC de $X(z)$ está fuera del polo localizado en $z = 1/4$, la ROC correspondiente a este término en la ecuación (10.43) también está fuera del polo y consiste de todos los puntos con magnitud mayor que 1/4, como lo estaba en el ejemplo anterior. Sin embargo, ya que en este ejemplo la ROC para $X(z)$ está dentro del polo en $z = 1/3$, es decir, ya que todos los puntos en la ROC tienen magnitud menor que 1/3, la ROC correspondiente a este término debe caer dentro de este polo. Por lo tanto, los pares de transformada z para las componentes individuales en la ecuación (10.44) son

$$x_1[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \qquad |z| > \tfrac{1}{4}, \tag{10.50}$$

y

$$x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z| < \tfrac{1}{3}. \tag{10.51}$$

La señal $x_1[n]$ permanece como en la ecuación (10.47), en tanto que del ejemplo 10.2 podemos identificar

$$x_2[n] = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1], \tag{10.52}$$

de manera que

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]. \tag{10.53}$$

Ejemplo 10.11

Por último, considere $X(z)$ como en la ecuación (10.42), pero ahora con la ROC $|z| < 1/4$. En este caso la ROC está dentro de ambos polos, es decir, todos los puntos en la ROC tienen magnitud más pequeña que cualquiera de los polos en $z = 1/3$ o $z = 1/4$. En consecuencia, la ROC para cada término en la expansión por fracciones parciales en la ecuación (10.43) también debe caer dentro del polo correspondiente. Como resultado, el par de transformadas z para $x_1[n]$ está dado por

$$x_1[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \qquad |z| < \frac{1}{4}, \tag{10.54}$$

mientras que el par de transformadas z para $x_2[n]$ está dado por la ecuación (10.51). Aplicando el resultado del ejemplo 10.2 a la ecuación (10.54) encontramos que

$$x_1[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1],$$

de modo que

$$x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1].$$

Los ejemplos anteriores ilustran el procedimiento básico involucrado en la utilización de la expansión por fracciones parciales para determinar la transformada z inversa. Como sucede con el método correspondiente para la transformada de Laplace, el procedimiento se basa en expresar la transformada z como una combinación lineal de términos más simples. La transformada inversa de cada término se obtiene por inspección. En particular, suponga que la expansión en fracciones parciales de $X(z)$ tiene la forma

$$X(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}}, \tag{10.55}$$

de manera que la transformada inversa de $X(z)$ es igual a la suma de las transformadas inversas de los términos individuales en la ecuación. Si la ROC de $X(z)$ está fuera del polo en $z = a_i$, la transformada inversa del término correspondiente en la ecuación (10.55) es $A_i a_i^n u[n]$. Por otro lado, si la ROC de $X(z)$ está dentro del polo en $z = a_i$, la transformada inversa de este término es $-A_i a_i^n u[-n-1]$. En general, la expansión por

fracciones parciales de una transformada racional puede incluir otros términos además de los de primer orden en la ecuación (10.55). En la sección 10.6 mencionamos otros pares de transformadas z que pueden usarse en conjunto con las propiedades de la transformada z que se desarrollarán en la sección 10.5 para extender a transformadas z racionales y arbitrarias el método de la transformada inversa esbozado anteriormente.

Otro procedimiento muy útil para determinar la transformada z inversa se basa en una expansión en series de potencias de $X(z)$. Lo que motivó a desarrollar este procedimiento fue la observación de que la definición de la transformada z proporcionada en la ecuación (10.3) se puede interpretar como una serie de potencias que involucra potencias de z tanto positivas como negativas. Los coeficientes de esta serie de potencias son, de hecho, los valores de la secuencia $x[n]$. Para demostrar cómo una expansión en series de potencias puede usarse para obtener la transformada z inversa, veamos tres ejemplos.

Ejemplo 10.12

Considere la transformada z

$$X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1}, \quad 0 < |z| < \infty. \tag{10.56}$$

Gracias a la definición de la serie de potencias de la transformada z en la ecuación (10.3), podemos determinar la transformada inversa de $X(z)$ por inspección:

$$x[n] = \begin{cases} 4, & n = -2 \\ 2, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Esto es,

$$x[n] = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1]. \tag{10.57}$$

Comparando las ecuaciones (10.56) y (10.57), vemos que diferentes potencias de z sirven como base para los valores de secuencia en diferentes puntos en el tiempo; es decir, si usamos simplemente el par de transformadas

$$\delta[n+n_0] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{n_0},$$

podemos pasar inmediatamente de la ecuación (10.56) a la (10.57) y viceversa.

Ejemplo 10.13

Considere

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|.$$

Esta expresión puede ser expandida en una serie de potencias mediante una división larga:

$$\begin{array}{r|l} & 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots \\ \hline 1 - az^{-1} & 1 \\ & \underline{1 - az^{-1}} \\ & \quad az^{-1} \\ & \quad \underline{az^{-1} - a^2z^{-2}} \\ & \qquad a^2z^{-2} \end{array}$$

o

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots. \tag{10.58}$$

La expansión en serie de la ecuación (10.58) converge, ya que $|z| > |a|$ o, de manera equivalente, $|az^{-1}| < 1$. Comparando esta ecuación con la definición de la transformada z en la ecuación (10.3) vemos, al igualar los términos en potencias de z, que $x[n] = 0$, $n < 0$; $x[0] = 1$; $x[1] = a$; $x[2] = a^2$; y en general, $x[n] = a^n u[n]$, lo cual concuerda con el ejemplo 10.1.

Si, por el contrario, la ROC de $X(z)$ se especifica como $|z| < |a|$ o, de forma equivalente, como $|az^{-1}| > 1$, entonces la expansión en serie de potencias para $1/(1 - az^{-1})$ en la ecuación (10.58) no converge. Sin embargo, una vez más podemos obtener una serie de potencias convergente mediante la división larga:

$$\begin{array}{r|l} & -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \cdots \\ -az^{-1} + 1 & 1 \\ & \underline{1 - a^{-1}z} \\ & a^{-1}z \end{array},$$

o

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \cdots. \tag{10.59}$$

Entonces, en este caso, $x[n] = 0$, $n \geq 0$; y $x[-1] = -a^{-1}$, $x[-2] = -a^{-2}, \ldots$; es decir, $x[n] = -a^n u[-n-1]$. Esto, de hecho, resulta compatible con el ejemplo 10.2.

El método de expansión en serie de potencias para obtener la transformada z inversa es en particular útil para transformadas z no racionales, lo cual demostraremos con un ejemplo adicional.

Ejemplo 10.14

Considere la transformada z

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \qquad |z| > |a|. \tag{10.60}$$

Con $|z| > |a|$ o, de manera equivalente, $|az^{-1}| < 1$, la ecuación (10.60) se puede expandir en una serie de potencias usando la expansión de series de Taylor de

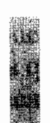
$$\log(1 + v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}v^n}{n}, \qquad |v| < 1. \tag{10.61}$$

Aplicando ésta a la ecuación (10.60), obtenemos

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}a^n z^{-n}}{n}, \tag{10.62}$$

a partir de la cual podemos identificar a

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1}\dfrac{a^n}{n}, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}, \tag{10.63}$$


o, de manera equivalente,

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1].$$

En el problema 10.63 consideramos un ejemplo relacionado con la región de convergencia $|z| < |a|$.

10.4 EVALUACIÓN GEOMÉTRICA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER A PARTIR DEL DIAGRAMA DE POLOS Y CEROS

En la sección 10.1 observamos que la transformada z se reduce a la transformada de Fourier para $|z| = 1$ (es decir, para el contorno en el plano z correspondiente al círculo unitario), siempre y cuando la ROC de la transformada z incluya el círculo unitario de manera que la transformada de Fourier converja. De manera similar, en el capítulo 9 vimos que, para señales continuas, la transformada de Laplace se reduce a la transformada de Fourier sobre el eje $j\omega$ en el plano s. Asimismo, en la sección 9.4 analizamos la evaluación geométrica de la transformada continua de Fourier a partir del diagrama de polos y ceros. En el caso discreto, la transformada de Fourier puede de nuevo evaluarse geométricamente considerando los vectores de polos y ceros en el plano z. Sin embargo, ya que en este caso la función racional será evaluada sobre el contorno $|z| = 1$, consideramos los vectores que van de los polos y los ceros hacia el círculo unitario en lugar de al eje imaginario. Para ilustrar el procedimiento, consideremos los sistemas de primer y segundo orden como fueron analizados en la sección 6.6.

10.4.1 Sistemas de primer orden

La respuesta al impulso de un sistema causal discreto es de la forma general

$$h[n] = a^n u[n], \tag{10.64}$$

y del ejemplo 10.1 la transformada z es

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \qquad |z| > |a|. \tag{10.65}$$

Para $|a| < 1$, la ROC incluye el círculo unitario y, en consecuencia, su transformada de Fourier de $h[n]$ converge y es igual a $H(z)$ para $z = e^{j\omega}$. Por lo tanto, la respuesta en frecuencia para el sistema de primer orden es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \tag{10.66}$$

La figura 10.13(a) ilustra el diagrama de polos y ceros para $H(z)$ en la ecuación (10.65), incluyendo los vectores que van del polo (en $z = a$) y del cero (en $z = 0$) al círculo unitario. Con este diagrama se puede llevar a cabo la evaluación geométrica de $H(z)$ usando el mismo procedimiento descrito en la sección 9.4. En particular, si deseamos evaluar la respuesta en frecuencia en la ecuación (10.65), llevamos a cabo la evaluación para valores de z de la forma $z = e^{j\omega}$. La magnitud de la respuesta en frecuencia a la frecuencia ω es la razón de la longitud del vector $\mathbf{v}_1$ con respecto a la del vector $\mathbf{v}_2$ mostrado en la figura 10.13(a). La fase de la respuesta en frecuencia es el ángulo de $\mathbf{v}_1$ con respecto al eje real menos el ángulo de $\mathbf{v}_2$. Además, el vector $\mathbf{v}_1$ a partir de cero en el ori-

$|H(e^{j\omega})|$

20

10

a = 0.95

a = 0.5

$-\pi$ 0 π ω

(b)

$\mathcal{Im}$

Plano z

Círculo unitario

$\mathbf{v}_1$

$\mathbf{v}_2$

ω

$\mathcal{Re}$

(a)

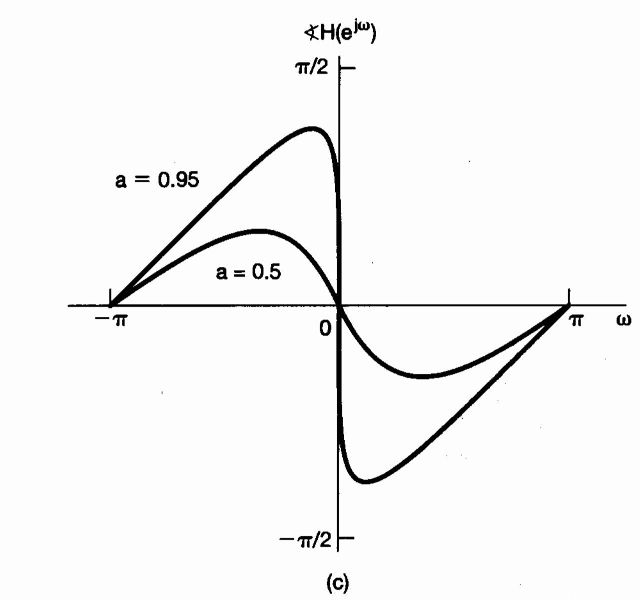


Figura 10.13 (a) Vectores polo y cero para la determinación geométrica de la respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden para un valor de a entre 0 y 1; (b) magnitud de la respuesta en frecuencia para $a = 0.95$ y $a = 0.5$; (c) fase de la respuesta en frecuencia para $a = 0.95$ y $a = 0.5$.

gen al círculo unitario tiene una longitud constante unitaria y por lo tanto no tiene efecto sobre la magnitud de $H(e^{j\omega})$. El cero con que la fase contribuye a $H(e^{j\omega})$ es el ángulo del vector cero con respecto al eje real, el cual vemos que es igual a ω. Para $0 < a < 1$, el vector del polo tiene una longitud mínima en $\omega = 0$ y se incrementa de manera monotónica en longitud conforme ω se incrementa desde cero hasta π. Por lo tanto, la magnitud de

la respuesta en frecuencia será máxima en $\omega = 0$ y disminuirá de forma monotónica a medida que ω se incrementa de 0 a π. El ángulo del vector del polo se inicia en cero y se incrementa monotónicamente a medida que ω aumenta de 0 a π. La magnitud y la fase resultantes de $H(e^{j\omega})$ se muestran en las figuras 10.13(b) y (c), respectivamente, para dos valores de a.

La magnitud del parámetro a en el sistema discreto de primer orden juega un papel similar al de la constante de tiempo τ para el sistema continuo de primer orden de la sección 9.4.1. Observe primero que, como se ilustra en la figura 10.13, la magnitud del pico de $H(e^{j\omega})$ en $\omega = 0$ disminuye conforme $|a|$ disminuye hacia 0. Asimismo, como analizamos en la sección 6.6.1 y se ilustró en las figuras 6.26 y 6.27, conforme $|a|$ disminuye la respuesta al impulso decae de manera más aguda y la respuesta al escalón se estabiliza más rápidamente. Con polos múltiples, la velocidad de respuesta asociada con cada polo está relacionada con su distancia desde el origen, siendo los más cercanos al origen los que contribuyen con los términos que decaen más rápidamente en la respuesta al impulso. Esto se explica más adelante en el caso de sistemas de segundo orden, los cuales examinamos a continuación.

10.4.2 Sistemas de segundo orden

Ahora consideremos la clase de sistemas de segundo orden que fueron analizados en la sección 6.6.2, con la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia dadas por las ecuaciones (6.64) y (6.60), las cuales modificamos y mostramos respectivamente como:

$$h[n] = r^n \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} u[n] \tag{10.67}$$

y

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta\, e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}, \tag{10.68}$$

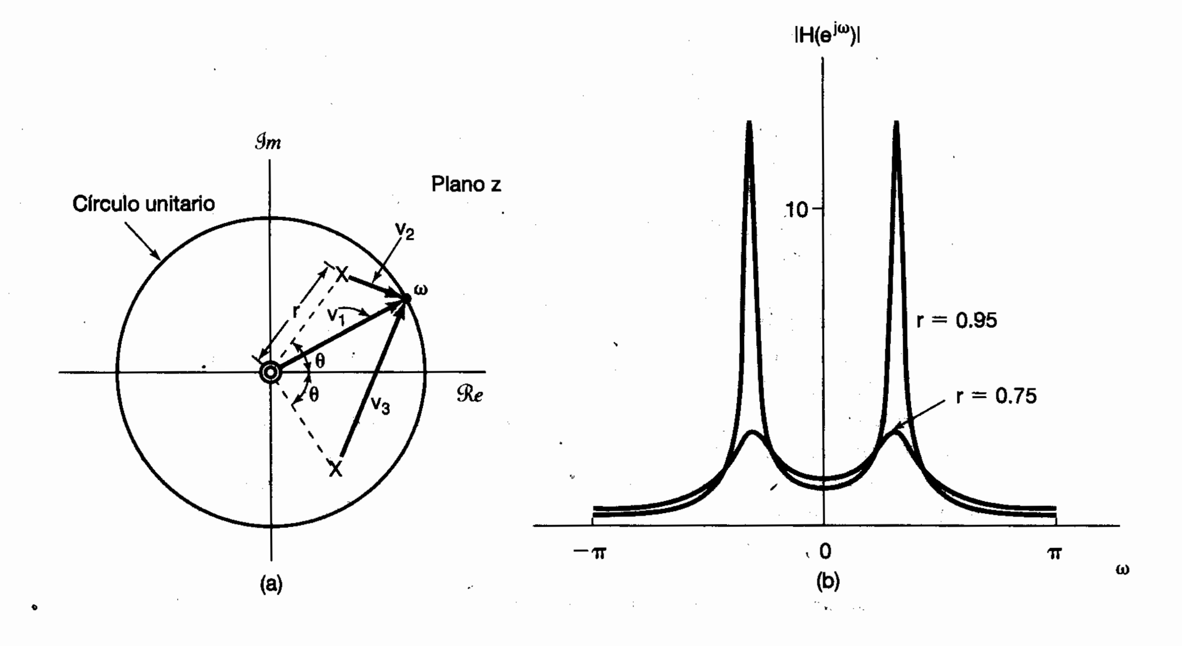
donde $0 < r < 1$ y $0 \le \theta \le \pi$. Puesto que $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$ podemos inferir, a partir de la ecuación (10.68) que la función del sistema, correspondiente a la transformada z de la respuesta al impulso del sistema, es

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r\cos\theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}}. \tag{10.69}$$

Los polos de $H(z)$ están localizados en

$$z_1 = re^{j\theta}, \quad z_2 = re^{-j\theta}, \tag{10.70}$$

y hay un doble cero en $z = 0$. El diagrama de polos y ceros y los vectores de los polos y ceros con $0 < \theta < \pi/2$ están ilustrados en la figura 10.14(a). En este caso, la magnitud de la respuesta en frecuencia es igual al cuadrado de la magnitud de $\mathbf{v}_1$ (ya que hay un doble cero en el origen) dividido entre el producto de las magnitudes de $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Debido a que la longitud del vector $\mathbf{v}_1$, desde el cero hasta el origen, es 1 para todos los valores de ω, la magnitud de la respuesta en frecuencia es igual al recíproco del producto de las longitudes de ambos vectores de polo $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. También la fase de la respuesta en frecuencia es igual al doble del ángulo de $\mathbf{v}_1$ con respecto al eje real menos la suma de los ángulos de $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. En la figura 10.14(b) mostramos la magnitud de la respuesta en frecuencia para $r = 0.95$ y $r = 0.75$, mientras que en la figura 10.14(c) presentamos la fase de $H(e^{j\omega})$ para los



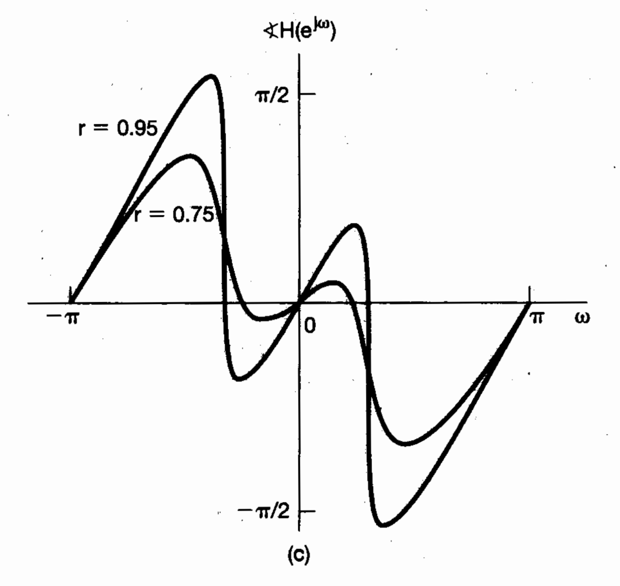


Figura 10.14 (a) Vectores polos $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ utilizados en el cálculo geométrico de la respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden; (b) magnitud de la respuesta en frecuencia correspondiente al recíproco del producto de las longitudes de los vectores polos para $r = 0.95$ y $r = 0.75$; (c) fase de la respuesta en frecuencia para $r = 0.95$ y $r = 0.75$.

dos mismos valores de r. Observamos en particular que, conforme nos movemos a lo largo del círculo unitario desde $\omega = 0$ hacia $\omega = \pi$, la longitud del vector $\mathbf{v}_2$ disminuye primero y después se incrementa, con una longitud mínima en la vecindad de la ubicación del polo, en $\omega = \theta$. Esto es compatible con el hecho de que la magnitud de la respuesta en frecuencia forma picos para ω cerca de θ cuando la longitud del vector $\mathbf{v}_2$ es pequeña. Con base en el comportamiento de los vectores de polos, resulta evidente que conforme, r se incrementa hacia la unidad, la longitud mínima de los vectores de polos decrecerá, ocasionando que la respuesta en frecuencia tenga un pico más pronunciado conforme r se incrementa. Asimismo, para una r cerca de la unidad, el ángulo del vector $\mathbf{v}_2$ cambia abruptamente para ω en la vecindad de θ. Además, a partir de la forma de la respuesta al impulso [ecuación (10.67) y figura 6.29] o la respuesta al escalón [ecuación (6.67) y figu-

ra 6.30], vemos, como lo hicimos en el sistema de primer orden, que conforme los polos se mueven hacia el origen, lo cual corresponde a que r disminuya, la respuesta al impulso decae más rápidamente y la respuesta al escalón se establece de manera más rápida.

10.5 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Al igual que con las otras transformadas que hemos desarrollado, la transformada z posee diversas propiedades que la hacen una herramienta extremadamente útil para el estudio de señales y sistemas discretas. En esta sección resumimos muchas de estas propiedades. Sus deducciones son análogas a las deducciones que se hicieron para las propiedades de las otras transformadas, por lo que muchas de ellas se han dejado como ejercicios al final del capítulo. (Véanse los problemas 10.43 y 10.51 a 10.54.)

10.5.1 Linealidad

Si

$$x_1[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z), \qquad \text{con ROC} = R_1,$$

y

$$x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_2(z), \qquad \text{con ROC} = R_2,$$

entonces

$$\boxed{ax_1[n] + bx_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} aX_1(z) + bX_2(z), \text{ con la ROC conteniendo a } R_1 \cap R_2.} \qquad (10.71)$$

Como aquí se indica, la ROC de la combinación lineal es cuando menos la intersección de R_1 y R_2. Para secuencias con transformadas z racionales, si los polos de $aX_1(z) + bX_2(z)$ consisten de todos los polos de $X_1(z)$ y $X_2(z)$ (es decir, no hay cancelación de polos y ceros), entonces la región de convergencia será exactamente igual al traslape de las regiones de convergencia individuales. Si la combinación lineal es tal que algunos ceros son introducidos y cancelan polos, entonces la región de convergencia puede ser más grande. Un simple ejemplo de esto ocurre cuando $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son ambas de duración infinita pero la combinación lineal es de duración finita. En este caso la región de convergencia de la combinación lineal es el plano z completo con la posible excepción de cero y/o infinito. Por ejemplo, las secuencias $a^n u[n]$ y $a^n u[n-1]$ tienen una región de convergencia definida por $|z| > |a|$, pero la secuencia correspondiente a la diferencia $(a^n u[n] - a^n u[n-1]) = \delta[n]$ tiene una región de convergencia que es el plano z completo.

10.5.2 Desplazamiento en tiempo

Si

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad \text{con ROC} = R,$$

entonces

$$x[n-n_0] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z), \quad \text{con ROC} = R, \text{ excepto para la posible adición o eliminación del origen o del infinito.} \tag{10.72}$$

Debido a la multiplicación por z^{-n_0}, para $n_0 > 0$ se introducirán polos en $z = 0$, los cuales pueden cancelar los ceros correspondientes de $X(z)$ en $z = 0$. En consecuencia, $z = 0$ puede ser un polo de $z^{-n_0}X(z)$ mientras que puede no ser un polo de $X(z)$. En este caso, la ROC para $z^{-n_0}X(z)$ es igual a la ROC de $X(z)$ pero cuyo origen ha sido eliminado. De manera similar, si $n_0 < 0$, se introducirán ceros en $z = 0$ los cuales pueden cancelar los polos correspondientes de $X(z)$ en $z = 0$. En consecuencia, $z = 0$ puede ser un cero de $z^{-n_0}X(z)$ mientras que puede no ser un polo de $X(z)$. En este caso, $z = \infty$ es un polo de $z^{-n_0}X(z)$, y por lo tanto la ROC para $z^{-n_0}X(z)$ es igual a la ROC de $X(z)$ pero cuya $z = \infty$ ha sido eliminada.

10.5.3 Escalamiento en el dominio de z

Si

$$x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad \text{con ROC} = R,$$

entonces

$$z_0^n\, x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad \text{con ROC} = |z_0|R, \tag{10.73}$$

donde $|z_0|R$ es la versión escalada de R. Es decir, si z es un punto en la ROC de $X(z)$, entonces el punto $|z_0|z$ está en la ROC de $X(z/z_0)$. Asimismo, si $X(z)$ tiene un polo (o cero) en $z = a$, entonces $X(z/z_0)$ tiene un polo (o cero) en $z = z_0a$.

Un caso en especial importante de la ecuación (10.73) surge cuando $z_0 = e^{j\omega_0}$. En este caso, $|z_0|R = R$ y

$$e^{j\omega_0 n}x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega_0}z). \tag{10.74}$$

El miembro izquierdo de la ecuación (10.74) corresponde a la multiplicación por una secuencia exponencial compleja. El miembro derecho puede interpretarse como una rotación en el plano z; esto es, todas las posiciones de los polos y ceros giran en el plano z en un ángulo ω_0, como se ilustra en la figura 10.15. Esto puede verse si notamos que si $X(z)$ tiene un factor de la forma $1 - az^{-1}$, entonces $X(e^{-j\omega_0}z)$ tendrá un factor $1 - ae^{j\omega_0}z^{-1}$ y por consiguiente un polo o un cero en $z = a$ en $X(z)$ se convertirá en un polo o un cero en $z = ae^{j\omega_0}$ en $X(e^{-j\omega_0}z)$. Entonces, el comportamiento de la transformada z en el círculo unitario se desplazará también en un ángulo ω_0. Esto es compatible con la propiedad de desplazamiento en frecuencia definida en la sección 5.3.3, donde se demostró que la multiplicación con una exponencial compleja en el dominio del tiempo corresponde a un desplazamiento en frecuencia de la transformada de Fourier. También, en el caso más general cuando $z_0 = r_0e^{j\omega_0}$ en la ecuación (10.73), las ubicaciones de polos y ceros se giran en un ángulo de ω_0 y son escalados en magnitud por un factor de r_0.

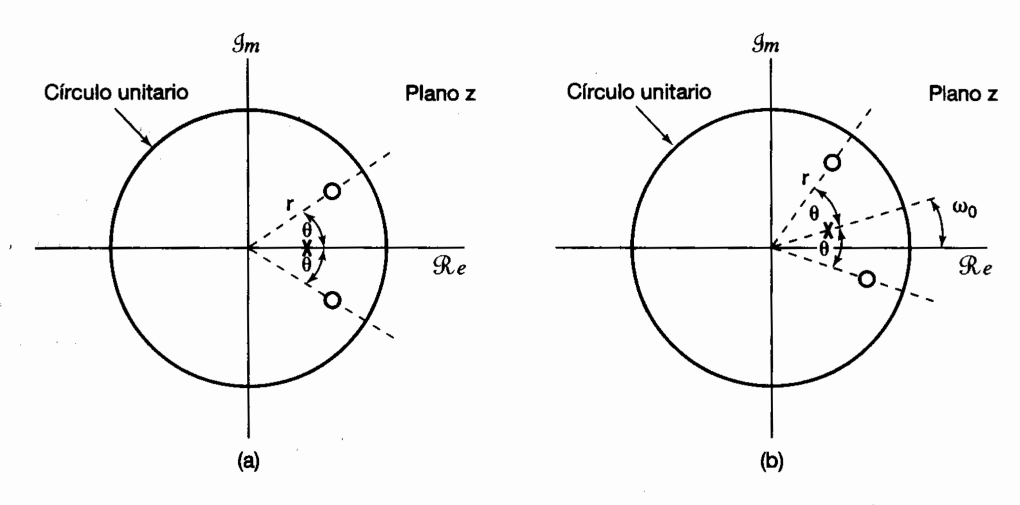


Figura 10.15 Efecto en el diagrama de polos y ceros de la multiplicación en el dominio del tiempo por una secuencia exponencial compleja $e^{j\omega_0 n}$: (a) patrón de polos y ceros para la transformada z de una señal $x[n]$; (b) patrón de polos y ceros para la transformada z de $x[n]e^{j\omega_0 n}$.

10.5.4 Inversión de tiempo

Si

$$x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad \text{con ROC} = R,$$

entonces

$$\boxed{x[-n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(\tfrac{1}{z}), \qquad \text{con ROC} = \tfrac{1}{R}.} \tag{10.75}$$

Esto es, si z_0 está en la ROC de $x[n]$, entonces $1/z_0$ está en la ROC de $x[-n]$.

10.5.5 Expansión en el tiempo

Como se analizó en la sección 5.3.7, el concepto de escalamiento de tiempo continuo no se extiende de forma directa al caso discreto, ya que el índice discreto se define sólo para valores enteros. Sin embargo, el concepto de expansión en el tiempo en el caso discreto, es decir, insertar varios ceros entre valores sucesivos de una secuencia $x[n]$ discreta, se puede definir y juega un papel importante en el análisis de señales y sistemas discretos. En concreto, la secuencia $x_{(k)}[n]$, presentada en la sección 5.3.7 y definida como

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{si } n \text{ es un múltiplo de } k \\ 0, & \text{si } n \text{ no es un múltiplo de } k \end{cases} \tag{10.76}$$

tiene $k-1$ ceros insertados entre valores sucesivos de la señal original. En este caso, si

$$x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad \text{con ROC} = R,$$

entonces

$$x_{(k)}[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z^k), \qquad \text{con ROC} = R^{1/k}. \tag{10.77}$$

Esto es, si z está en la ROC de $X(z)$, entonces el punto $z^{1/k}$ está en la ROC de $X(z^k)$. Asimismo, si $X(z)$ tiene un polo (o cero) en $z = a$, entonces $X(z^k)$ tiene un polo (o cero) en $z = a^{1/k}$.

La interpretación de este resultado surge de la forma de serie de potencias de la transformada z, a partir de la cual vemos que el coeficiente del término z^{-n} es igual al valor de la señal en el tiempo n. Esto es, con

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n},$$

se desprende que

$$X(z^k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](z^k)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-kn}. \tag{10.78}$$

Examinando el miembro derecho de la ecuación (10.78), vemos que los únicos términos que aparecen tienen la forma z^{-kn}. En otras palabras, el coeficiente del término z^{-m} en esta serie de potencias es igual a 0 si m no es un múltiplo de k y es igual a $x[m/k]$ si m es un múltiplo de k. Por lo tanto, la transformada inversa de la ecuación (10.78) es $x_{(k)}[n]$.

10.5.6 Conjugación

Si

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad \text{con ROC} = R, \tag{10.79}$$

entonces

$$x^*[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X^*(z^*), \qquad \text{con ROC} = R. \tag{10.80}$$

En consecuencia, si $x[n]$ es real, podemos concluir de la ecuación (10.80) que

$$X(z) = X^*(z^*).$$

Por lo tanto, si $X(z)$ tiene un polo (o cero) en $z = z_0$, también debe tener un polo (o cero) en el punto conjugado complejo $z = z_0^*$. Por ejemplo, la transformada $X(z)$ para la señal real $x[n]$ en el ejemplo 10.4 tiene polos en $z = (1/3)e^{\pm j\pi/4}$.

10.5.7 Propiedad de convolución

Si

$$x_1[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z), \qquad \text{con ROC} = R_1,$$

y

$$x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_2(z), \qquad \text{con ROC} = R_2,$$

entonces

$$\boxed{x_1[n] * x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z), \quad \text{con ROC conteniendo } R_1 \cap R_2.} \tag{10.81}$$

Al igual que en la propiedad de convolución para la transformada de Laplace, la ROC de $X_1(z)X_2(z)$ incluye la intersección de R_1 y R_2 y puede ser más grande si la cancelación de polo-cero ocurre en el producto. La propiedad de convolución para la transformada z puede deducirse mediante una gran variedad de procedimientos. Una deducción formal se desarrolla en el problema 10.56. También se puede llevar a cabo un desarrollo análogo al usado en la propiedad de convolución de la transformada continua de Fourier en la sección 4.4, el cual se basa en la interpretación de la transformada de Fourier como el cambio en amplitud de una exponencial compleja a través de un sistema LTI.

Para la transformada z, hay otra interpretación a menudo útil de la propiedad de convolución. A partir de la definición de la ecuación (10.3), reconocemos la transformada z como una serie en z^{-1} donde el coeficiente de z^{-n} es el valor de la secuencia $x[n]$. En esencia, la ecuación (10.81) de la propiedad de convolución establece que cuando dos polinomios o series de potencias $X_1(z)$ y $X_2(z)$ se multiplican, los coeficientes en el polinomio que representa el producto son la convolución de los coeficientes en los polinomios $X_1(z)$ y $X_2(z)$. (Véase el problema 10.57.)

Ejemplo 10.15

Considere un sistema LTI para el cual

$$y[n] = h[n] * x[n], \tag{10.82}$$

donde

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1].$$

Observe que

$$\delta[n] - \delta[n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} 1 - z^{-1}, \tag{10.83}$$

con la ROC igual al plano z completo excepto el origen. Además, la transformada z en la ecuación (10.83) tiene un cero en $z = 1$. A partir de la ecuación (10.81), vemos que si

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad \text{con ROC} = R,$$

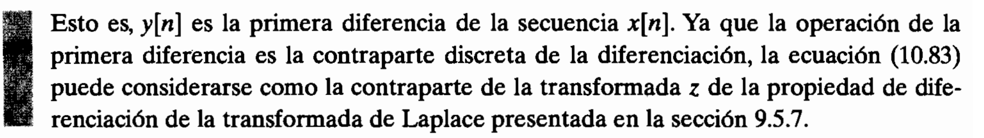
entonces

$$y[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} (1 - z^{-1})X(z), \tag{10.84}$$

con ROC $= R$, con la posible eliminación de $z = 0$ y/o la adición de $z = 1$.

Observe que para este sistema

$$y[n] = [\delta[n] - \delta[n-1]] * x[n] = x[n] - x[n-1].$$


Esto es, $y[n]$ es la primera diferencia de la secuencia $x[n]$. Ya que la operación de la primera diferencia es la contraparte discreta de la diferenciación, la ecuación (10.83) puede considerarse como la contraparte de la transformada z de la propiedad de diferenciación de la transformada de Laplace presentada en la sección 9.5.7.

Ejemplo 10.16

Suponga que ahora consideramos la inversa de la primera diferencia, esto es, la acumulación o sumatoria. Específicamente, sea $w[n]$ la suma consecutiva de $x[n]$:

$$w[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = u[n] * x[n]. \tag{10.85}$$

Entonces, usando la ecuación (10.81) junto con la transformada z del escalón unitario en el ejemplo 10.1, vemos que

$$\omega[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z), \tag{10.86}$$

donde la ROC incluye al menos la intersección de R con $|z| > 1$. La ecuación (10.86) es la contraparte de la transformada z discreta de la propiedad de integración en la sección 9.5.9.

10.5.8 Diferenciación en el dominio de z

Si

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad \text{con ROC} = R,$$

entonces

$$\boxed{nx[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}, \qquad \text{con ROC} = R.} \tag{10.87}$$

Esta propiedad se obtiene de una manera directa diferenciando ambos lados de la expresión de la transformada z dada en la ecuación (10.3). Como un ejemplo del uso de esta propiedad, apliquémosla para determinar la transformada inversa examinada en el ejemplo 10.14.

Ejemplo 10.17

Si

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \qquad |z| > |a|, \tag{10.88}$$

entonces

$$nx[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}, \qquad |z| > |a|. \tag{10.89}$$

Mediante la diferenciación hemos convertido la transformada z en una expresión racional. La transformada z inversa del miembro derecho de la ecuación (10.89) puede obtenerse haciendo uso del ejemplo 10.1 junto con la propiedad de desplazamiento en el

tiempo, la ecuación (10.72), definida en la sección 10.5.2. En concreto, a partir del ejemplo 10.1 y de la propiedad de linealidad,

$$a(-a)^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{a}{1 + az^{-1}}, \qquad |z| > |a|. \tag{10.90}$$

Combinando lo anterior con la propiedad de desplazamiento en el tiempo obtenemos

$$a(-a)^{n-1} u[n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}, \qquad |z| > |a|.$$

En consecuencia,

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]. \tag{10.91}$$

Ejemplo 10.18

Como otro ejemplo del uso de la propiedad de diferenciación, considere determinar la transformada z inversa para

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \qquad |z| > |a|. \tag{10.92}$$

Del ejemplo 10.1,

$$a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|, \tag{10.93}$$

y de ello se desprende que

$$na^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1 - az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \qquad |z| > |a|. \tag{10.94}$$

10.5.9 Teorema del valor inicial

Si $x[n] = 0, n < 0$, entonces

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z). \tag{10.95}$$

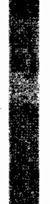
Esta propiedad se obtiene al considerar individualmente el límite de cada término en la expresión de la transformada z con $x[n]$ cero para $n < 0$. Con esta restricción,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}.$$

A medida que $z \to \infty$, $z^{-n} \to 0$ para $n > 0$, en tanto que para $n = 0$, $z^{-n} = 1$. Por lo tanto, se obtiene la ecuación (10.95).

Como una consecuencia del teorema del valor inicial, para una secuencia causal, si $x[0]$ es finita, entonces $\lim_{z\to\infty} X(z)$ es finito. Por lo tanto, con $X(z)$ expresada como una relación de polinomios en z, el orden del polinomio del numerador no puede ser mayor que el orden del polinomio del denominador; o, dicho de otra manera, el número de ceros finitos de $X(z)$ no puede ser mayor que el número de polos finitos.

Ejemplo 10.19



El teorema del valor inicial también puede ser útil para verificar la validez del cálculo de la transformada z para una señal. Por ejemplo, considere la señal $x[n]$ en el ejemplo 10.3. A partir de la ecuación (10.12) vemos que $x[0] = 1$. Asimismo, de la ecuación (10.14),

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{1 - \frac{3}{2} z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3} z^{-1})(1 - \frac{1}{2} z^{-1})} = 1,$$

lo cual es consistente con el teorema del valor inicial.

10.5.10 Resumen de propiedades

En la tabla 10.1 resumimos las propiedades de la transformada z.

10.6 ALGUNOS PARES COMUNES DE TRANSFORMADA Z

Al igual que con la transformada inversa de Laplace, la transformada z inversa con frecuencia se puede evaluar con facilidad, expresando $X(z)$ como una combinación lineal de términos más simples cuyas transformadas inversas se reconocen con facilidad. En la tabla 10.2 hemos enumerado varios pares útiles de transformadas z. Cada uno de ellos se puede desarrollar a partir de los ejemplos anteriores en combinación con las propiedades de la transformada z presentadas en la tabla 10.1. Por ejemplo, los pares de transformadas 2 y 5 se obtienen directamente a partir del ejemplo 10.1, y el par 7 se desarrolló en el ejemplo 10.18. Éstos, junto con las propiedades de inversión en el tiempo y desplazamiento en el tiempo definidas en las secciones 10.5.4 y 10.5.2, respectivamente, conducen así a los pares de transformadas 3, 6 y 8. Los pares de transformadas 9 y 10 se pueden desarrollar usando el par de transformadas 2 junto con las propiedades de linealidad y escalamiento desarrolladas en las secciones 10.5.1 y 10.5.3 respectivamente.

10.7 ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN DE LOS SISTEMAS LTI USANDO LAS TRANSFORMADAS Z

La transformada z juega un papel particularmente importante en el análisis y representación de sistemas LTI discretos. De la propiedad de convolución presentada en la sección 10.5.7,

$$Y(z) = H(z)X(z), \tag{10.96}$$

donde $X(z)$, $Y(z)$ y $H(z)$ son las transformadas z de la entrada, la salida y la respuesta al impulso del sistema, respectivamente. $H(z)$ se conoce como la *función del sistema* o la *función de transferencia* del sistema. Para z evaluada en el círculo unitario (es decir, para $z = e^{j\omega}$), $H(z)$ se reduce a la respuesta en frecuencia del sistema, siempre que el círculo unitario esté en la ROC de $H(z)$. También, a partir del análisis en la sección 3.2, sabemos que si la entrada a un sistema LTI es la señal exponencial compleja $x[n] = z^n$, entonces la salida será $H(z)z^n$. Es decir, z^n es una función propia del sistema con valor propio dado por $H(z)$, la transformada z de la respuesta al impulso.

Muchas propiedades de un sistema pueden estar relacionadas directamente con las características de los polos, de los ceros y de la región de convergencia de la función del sistema, y en esta sección ilustraremos algunas de estas relaciones mediante el examen de diversas propiedades del sistema y de una importante clase de sistemas.

TABLA 10.1 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Sección	Propiedad	Señal	Transformada z	ROC
		$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	R R_1 R_2
10.5.1	Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Al menos la intersección de R_1 y R_2
10.5.2	Desplazamiento en tiempo	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R, excepto para la posible adición o supresión del origen
10.5.3	Escalamiento en el dominio de z	$e^{j\omega_0 n} x[n]$ $z_0^n x[n]$ $a^n x[n]$	$X(e^{-j\omega_0}z)$ $X\left(\frac{z}{z_0}\right)$ $X(a^{-1}z)$	R z_0R Versión escalada de R (es decir, $\|a\|R$ = el conjunto de puntos $\{\|a\|z\}$ para z en R)
10.5.4	Inversión en el tiempo	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R invertida (es decir, R^{-1} = el conjunto de puntos z^{-1}, donde z está en R)
10.5.5	Expansión en el tiempo	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ para algún entero r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (es decir, el conjunto de puntos $z^{1/k}$, donde z está en R)
10.5.6	Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
10.5.7	Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Al menos la intersección de R_1 y R_2
10.5.7	Primera diferencia	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	Al menos la intersección de R y $\|z\| > 0$
10.5.7	Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$	Al menos la intersección de R y $\|z\| > 1$
10.5.8	Diferenciación en el dominio de z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R
10.5.9	Teorema del valor inicial Si $x[n] = 0$ para $n < 0$, entonces, $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$			

TABLA 10.2 ALGUNOS PARES DE TRANSFORMADA Z

Señal	Transformada	ROC
1. $\delta[n]$	1	Toda z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4. $\delta[n - m]$	z^{-m}	Para toda z excepto 0 (si $m > 0$) o ∞ (si $m < 0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
6. $-\alpha^n u[-n - 1]$	$\dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
7. $n\alpha^n u[n]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
8. $-n\alpha^n u[-n - 1]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
9. $[\cos \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1 - [\cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10. $[\operatorname{sen} \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\operatorname{sen} \omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1 - [r\cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12. $[r^n \operatorname{sen} \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\operatorname{sen} \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

10.7.1 Causalidad

Un sistema LTI causal tiene una respuesta al impulso $h[n]$ que es cero para $n < 0$, y por tanto es derecha. A partir de la propiedad 4 en la sección 10.2 sabemos entonces que la ROC de $H(z)$ es el exterior de un círculo en el plano z. Para algunos sistemas, es decir, si $h[n] = \delta[n]$, de manera que $H(z) = 1$, la ROC se puede extender hacia el interior y posiblemente incluya el origen. También, en general, para una respuesta derecha al impulso, la ROC puede o puede no incluir el infinito. Sin embargo, como vimos en la propiedad 8 de la sección 10.2, para un sistema causal la serie de potencias

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

no incluye potencias positivas de z. En consecuencia, la ROC incluye el infinito. Resumiendo, tenemos el siguiente principio:

> Un sistema LTI discreto es causal si y sólo si la ROC de su función del sistema es el exterior de un círculo, incluyendo el infinito.

Si $H(z)$ es racional, entonces, a partir de la propiedad 8 en la sección 10.2, para que el sistema sea causal, la ROC debe estar fuera del polo más externo y debe incluir el infinito. De forma equivalente, el límite de $H(z)$ cuando $z \to \infty$ debe ser finito. Como analizamos en la sección 10.5.9, esto es equivalente al numerador de $H(z)$ que tiene un grado no mayor que el del denominador cuando ambos se expresan como polinomios en z. Esto es:

Un sistema LTI discreto con función racional del sistema $H(z)$ es causal si y sólo si: (a) la ROC es el exterior de un círculo fuera del polo más externo; y (b) con $H(z)$ expresada como una razón de polinomios en z, el orden del numerador no puede ser mayor que el orden del denominador.

Ejemplo 10.20

Considere un sistema cuya función del sistema está dada por la expresión algebraica

$$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}.$$

Aun sin conocer la ROC para este sistema, podemos concluir que el sistema no es causal, debido a que el numerador de $H(z)$ es de mayor orden que el del numerador.

Ejemplo 10.21

Considere un sistema con función del sistema

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2. \tag{10.97}$$

Puesto que la ROC para esta función del sistema es el exterior de un círculo fuera del polo más externo, sabemos que la respuesta al impulso es derecha. Para determinar si el sistema es causal, sólo necesitamos verificar la otra condición requerida para la causalidad, a saber, que $H(z)$, cuando se expresa como una razón de polinomios en z, tiene un grado del numerador no mayor que el del denominador. Para este ejemplo,

$$H(z) = \frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}, \tag{10.98}$$

de manera que el numerador y el denominador de $H(z)$ son ambos de grado dos, y en consecuencia podemos concluir que el sistema es causal. Esto también puede verificarse calculando la transformada inversa de $H(z)$. En particular, usando el par de transformadas 5 en la tabla 10.2, encontramos que la respuesta al impulso de este sistema es

$$h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right]u[n]. \tag{10.99}$$

Ya que $h[n] = 0$ para $n < 0$, podemos confirmar que el sistema es causal.

10.7.2 Estabilidad

Como analizamos en la sección 2.3.7, la estabilidad de un sistema LTI discreto equivale a que su respuesta al impulso sea absolutamente sumable. En este caso la transformada de

Fourier de $h[n]$ converge, y en consecuencia, la ROC de $H(z)$ debe incluir el círculo unitario. Resumiendo, obtenemos el siguiente resultado:

Un sistema LTI es estable si y sólo si la ROC de su función del sistema $H(z)$ incluye el círculo unitario, $|z| = 1$.

Ejemplo 10.22

Considere de nuevo la función del sistema en la ecuación (10.97). Puesto que la ROC asociada es la región $|z| > 2$, la cual no incluye el círculo unitario, el sistema no es estable. Esto también puede verse al observar que la respuesta al impulso en la ecuación (10.99) no es absolutamente sumable. Sin embargo, si consideramos un sistema cuya función del sistema tiene la misma expresión algebraica que en la ecuación (10.97) pero cuya ROC es la región $1/2 < |z| < 2$, entonces la ROC contiene el círculo, de manera que el sistema correspondiente es no causal pero estable. En este caso, usando el par de transformadas 5 y 6 de la tabla 10.2, encontramos que la correspondiente respuesta al impulso es

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2^n u[-n-1], \tag{10.100}$$

la cual es absolutamente sumable.

Asimismo, para la tercera selección posible de la ROC asociada con la expresión algebraica para $H(z)$ en la ecuación (10.97), esto es, $|z| < 1/2$, el sistema correspondiente ni es causal (ya que la ROC no está fuera del polo más externo) ni es estable (ya que la ROC no incluye el círculo unitario). Esto también puede deducirse de la respuesta al impulso, la cual (usando el par de transformadas 6 en la tabla 10.2) es

$$h[n] = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right] u[-n-1].$$

Como se ilustra en el ejemplo 10.22, es perfectamente posible que un sistema sea estable pero no casual. Sin embargo, si nos concentramos en los sistemas causales, la estabilidad puede verificarse con facilidad examinando las ubicaciones de los polos. Específicamente, para un sistema causal con función del sistema racional, la ROC está fuera del polo más externo. Para que esta ROC incluya el círculo unitario, $|z| = 1$, todos los polos del sistema deben estar dentro del círculo unitario. Esto es:

Un sistema LTI con función del sistema racional $H(z)$ es estable si y sólo si todos los polos de $H(z)$ caen dentro del círculo unitario, es decir, deben tener una magnitud menor que 1.

Ejemplo 10.23

Considere un sistema causal con función del sistema

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}},$$

la cual tiene un polo en $z = a$. Para que este sistema sea estable, su polo debe estar dentro del círculo unitario, es decir, debe tener $|a| < 1$. Esto concuerda con la condición de sumabilidad absoluta de la respuesta al impulso correspondiente $h[n] = a^n u[n]$.

Ejemplo 10.24

La función del sistema para un sistema de segundo orden con polos complejos se proporcionó en la ecuación (10.69), específicamente

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r\cos\theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \tag{10.101}$$

con polos localizados en $z_1 = re^{j\theta}$ y $z_2 = re^{-j\theta}$. Dando la causalidad por hecho, vemos que la ROC está fuera del polo más externo (es decir, $|z| > |r|$). El diagrama de polos y ceros y la ROC para este sistema se muestran en la figura 10.16 para $r < 1$ y $r > 1$. Para $r < 1$, los polos están dentro del círculo unitario, la ROC incluye el círculo unitario y por tanto, el sistema es estable. Para $r > 1$ los polos están fuera del círculo unitario, la ROC no incluye el círculo unitario y el sistema es inestable.

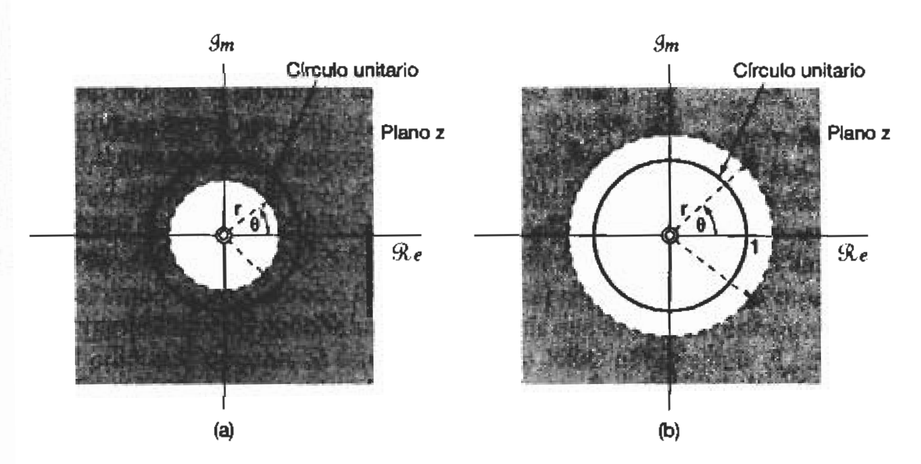


Figura 10.16 Diagrama de polos y ceros para un sistema de segundo orden con polos complejos: (a) $r < 1$; (b) $r > 1$.

10.7.3 Sistemas LTI caracterizados por ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes

Para los sistemas caracterizados por ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes, las propiedades de la transformada z proporcionan un procedimiento particularmente conveniente para obtener la función del sistema, la respuesta en frecuencia o la respuesta en el dominio del tiempo del sistema. Ilustraremos esto con un ejemplo.

Ejemplo 10.25

Considere un sistema LTI para el cual la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ satisfacen la ecuación de diferencias lineal con coeficientes constantes

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]. \tag{10.102}$$

Aplicando la transformada z a ambos miembros de la ecuación (10.102), y usando la propiedad de linealidad definida en la sección 10.5.1 y la propiedad de desplazamiento en tiempo presentada en la sección 10.5.2, obtenemos

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z),$$

o

$$Y(z) = X(z)\left[\frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right]. \tag{10.103}$$

De la ecuación (10.96), entonces,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}. \tag{10.104}$$

Ésta proporciona la expresión algebraica de $H(z)$ pero no la región de convergencia. De hecho, hay dos respuestas al impulso distintas que son compatibles con la ecuación de diferencias (10.102), una derecha y otra izquierda. De manera correspondiente, hay dos posibles selecciones diferentes para la ROC asociada con la expresión algebraica (10.104). Una, $|z| > 1/2$, está asociada con la suposición de que $h[n]$ es una señal derecha, y la otra, $|z| < 1/2$ está asociada con la suposición de que $h[n]$ es izquierda.

Considere primero la selección de la ROC igual a $|z| > 1$. Escribiendo

$$H(z) = \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}},$$

podemos usar el par de transformadas 5 de la tabla 10.2, junto con las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo, para encontrar la respuesta al impulso correspondiente

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1].$$

Para la otra selección de la ROC, esto es, $|z| < 1$, podemos usar el par de transformadas 6 en la tabla 10.2 y las propiedades de linealidad y de desplazamiento en el tiempo, lo cual produce

$$h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n].$$

En este caso, el sistema es anticausal ($h[n] = 0$ para $n > 0$) e inestable.

Para el caso más general de una ecuación de diferencias de orden N, procedemos de forma similar al ejemplo 10.25, aplicando la transformada z a ambos miembros de la ecuación y usando las propiedades de linealidad y desplazamiento en tiempo. En particular, considere un sistema LTI para el cual la entrada y la salida satisfacen una ecuación de diferencias lineal con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]. \tag{10.105}$$

Entonces tomamos las transformadas z en ambos miembros de la ecuación (10.105) y utilizamos las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo para obtener

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z),$$

o

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k},$$

tal que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}. \qquad (10.106)$$

Observamos en particular que la función del sistema de un sistema que satisface una ecuación de diferencias lineal con coeficientes constantes siempre es racional. Congruente con nuestro ejemplo anterior y con el análisis relacionado de la transformada de Laplace, la ecuación de diferencias por sí misma no proporciona información acerca de la ROC que debe asociarse con la expresión algebraica de $H(z)$. Sin embargo, una restricción adicional tal como la causalidad o la estabilidad del sistema sirve para especificar la región de convergencia. Por ejemplo, si sabemos además que el sistema es causal, la ROC estará fuera del polo más externo. Si éste es estable, la ROC debe incluir el círculo unitario.

10.7.4 Ejemplos que relacionan el comportamiento del sistema con la función del sistema

Como ilustramos en las secciones anteriores, muchas propiedades de los sistemas LTI discretos se pueden relacionar de forma directa con la función del sistema y sus características. En esta sección damos varios ejemplos adicionales para mostrar cómo las propiedades de la transformada z se pueden usar en el análisis de sistemas.

Ejemplo 10.26

Suponga que proporcionamos la siguiente información acerca de un sistema LTI:

1. Si la entrada al sistema es $x_1[n] = (1/6)^n u[n]$, entonces la salida es

$$y_1[n] = \left[a\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n],$$

donde a es un número real.

2. Si $x_2[n] = (-1)^n$, entonces la salida $y_2[n] = \frac{7}{4}(-1)^n$. Como mostramos ahora, a partir de estos dos enunciados podemos determinar la función del sistema $H(z)$, incluyendo el valor del número a, y también podemos deducir de manera inmediata otras propiedades del sistema.

Las transformadas z de las señales especificadas en el enunciado son

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{6}, \tag{10.107}$$

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= \frac{a}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{10}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \\ &= \frac{(a + 10) - (5 + \frac{a}{3})z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{10.108}$$

De la ecuación (10.96) se desprende que la expresión algebraica para la función del sistema es

$$H(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{[(a + 10) - (5 + \frac{a}{3})z^{-1}][1 - \frac{1}{6}z^{-1}]}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}. \tag{10.109}$$

Además, sabemos que la respuesta a $x_2[n] = (-1)^n$ debe ser igual a $(-1)^n$, multiplicada por la función del sistema $H(z)$ evaluada en $z = -1$. Por lo tanto, a partir del segundo dato, vemos que

$$\frac{7}{4} = H(-1) = \frac{[(a + 10) + 5 + \frac{a}{3}][\frac{7}{6}]}{(\frac{3}{2})(\frac{4}{3})}. \tag{10.110}$$

Resolviendo la ecuación (10.110) encontramos que $a = -9$, de manera que

$$H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - \frac{1}{6}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \tag{10.111}$$

o

$$H(z) = \frac{1 - \frac{13}{6}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}, \tag{10.112}$$

o, por último,

$$H(z) = \frac{z^2 - \frac{13}{6}z + \frac{1}{3}}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}. \tag{10.113}$$

También, a partir de la propiedad de convolución, sabemos que la ROC de $Y_1(z)$ debe incluir al menos las intersecciones de las ROC de $X_1(z)$ y $H(z)$. Examinando las tres posibles ROC para $H(z)$ (a saber, $|z| < 1/3$, $1/3 < |z| < 1/2$ y $|z| > 1/2$), encontramos que la única selección que concuerda con las ROC de $X_1(z)$ y $Y_1(z)$ es $|z| > 1/2$.

Puesto que la ROC para el sistema incluye el círculo unitario, sabemos que el sistema es estable. Además, de la ecuación (10.113) con $H(z)$ vista como una razón de polinomios en z, el orden del numerador no excede el del denominador, y por consiguiente podemos concluir que el sistema LTI es causal. Asimismo, usando las ecuaciones (10.112) y (10.106), podemos escribir la ecuación de diferencias que, junto con la condición de reposo inicial, caracteriza al sistema:

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] - \frac{13}{6}x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2].$$

Ejemplo 10.27



Considere un sistema estable y causal con respuesta al impulso $h[n]$ y función racional del sistema $H(z)$. Suponga que se sabe que $H(z)$ contiene un polo en $z = 1/2$ y un cero en el círculo unitario. El número y ubicación precisos de los otros polos y ceros se desconoce. Para cada uno de los siguientes enunciados determinemos si nos es posible

decir categóricamente que es verdadero, que es falso o que no hay información suficiente para determinar si es válido o no:

(a) $\mathfrak{F}\{(1/2)^n h[n]\}$ converge.
(b) $H(e^{j\omega}) = 0$ para alguna ω.
(c) $h[n]$ tiene duración finita.
(d) $h[n]$ es real.
(e) $g[n] = n[h[n] * h[n]]$ es la respuesta al impulso de un sistema estable.

El enunciado (a) es verdadero $\mathfrak{F}\{(1/2)^n h[n]\}$ corresponde al valor de la transformada z de $h[n]$ en $z = 2$. Por lo tanto, su convergencia es equivalente al punto $z = 2$ que está en la ROC. Ya que el sistema es estable y causal, todos los polos de $H(z)$ están dentro del círculo unitario, y la ROC incluye todos los puntos fuera del círculo unitario, $z = 2$ incluido.

El enunciado (b) es verdadero, ya que hay un cero sobre el círculo unitario.

El enunciado (c) es falso debido a que una secuencia de duración finita debe tener una ROC que incluya el plano z completo, excepto posiblemente en $z = 0$ y/o $z = \infty$. Esto no es congruente cuando se tiene un polo en $z = 1/2$.

El enunciado (d) requiere que $H(z) = H^*(z^*)$. Esto a su vez implica que si hay un polo (cero) en una ubicación no real $z = z_0$, también debe haber un polo (cero) en $z = z_0^*$. La información proporcionada no es suficiente para validar la conclusión.

El enunciado (e) es verdadero. Ya que el sistema es causal, $h[n] = 0$ para $n < 0$. En consecuencia, $h[n] * h[n] = 0$ para $n < 0$; es decir, el sistema que tiene a $h[n] * h[n]$ como su respuesta al impulso es causal. Lo mismo es entonces válido para $g[n] = n[h[n] * h[n]]$. Además, por la propiedad de convolución definida en la sección 10.5.7, la función del sistema correspondiente a la respuesta al impulso $h[n] * h[n]$ es $H^2(z)$, y por la propiedad de diferenciación presentada en la sección 10.5.8, la función del sistema correspondiente a $g[n]$ es

$$G(z) = -z\frac{d}{dz}H^2(z) = -2zH(z)\left[\frac{d}{dz}H(z)\right]. \tag{10.114}$$

A partir de la ecuación (10.114), podemos concluir que los polos de $G(z)$ están en las mismas ubicaciones que los de $H(z)$, con la posible excepción del origen. Por lo tanto, ya que $H(z)$ tiene todos sus polos dentro del círculo unitario, también deben estar los de $G(z)$. De lo anterior se desprende que $g[n]$ es la respuesta al impulso del sistema causal y estable.

10.8 ÁLGEBRA DE FUNCIÓN DEL SISTEMA Y REPRESENTACIONES EN DIAGRAMAS DE BLOQUES

Al igual que con la transformada continua de Laplace, la transformada z discreta nos permite reemplazar con operaciones algebraicas las operaciones en el dominio del tiempo tales como la convolución y el desplazamiento en tiempo. Esto se hizo así en la sección 10.7.3, en donde pudimos reemplazar la descripción de una ecuación de diferencias de un sistema LTI con una descripción algebraica. El uso de la transformada z para convertir descripciones de sistemas en ecuaciones algebraicas también es útil en el análisis de las interconexiones de sistemas LTI y para representar y sintetizar sistemas como interconexiones de sistemas básicos.

10.8.1 Funciones de sistema de interconexiones de sistemas LTI

El álgebra de la función del sistema para analizar los diagramas de bloques de tiempo discreto con interconexiones en serie, en paralelo y retroalimentadas es exactamente la misma que para los sistemas correspondientes de tiempo continuo de la sección 9.8.1. Por ejemplo, la función del sistema para la conexión en cascada de dos sistemas LTI discretos es el producto de las funciones de sistema para los sistemas individuales en cascada. También, considere la interconexión retroalimentada de dos sistemas, como se muestra en la figura 10.17. Es relativamente laborioso determinar la ecuación de diferencias o la respuesta al impulso del sistema completo trabajándolo directamente en el dominio del tiempo. Sin embargo, con los sistemas y las secuencias expresadas en términos de sus transformadas z, el análisis involucra sólo ecuaciones algebraicas. Las ecuaciones específicas de las interconexiones de la figura 10.17 son exactamente correspondientes a las ecuaciones (9.159) a (9.163), con el resultado final de que la función del sistema retroalimentado de la figura 10.17 es

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}. \tag{10.115}$$

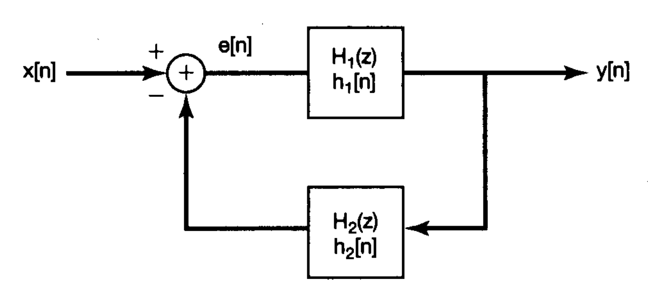


Figura 10.17 Interconexión retroalimentada de dos sistemas.

10.8.2 Representaciones en diagramas de bloques para los sistemas LTI causales descritos por ecuaciones de diferencias y funciones de sistema racionales

Al igual que en la sección 9.8.2, podemos representar los sistemas LTI causales descritos por ecuaciones de diferencias mediante el uso de diagramas de bloques que involucran tres operaciones básicas, en este caso, la adición, la multiplicación por un coeficiente y el retardo unitario. En la sección 2.4.3 describimos estos diagramas de bloques para una ecuación de diferencias de primer orden. Primero revisaremos ese ejemplo, pero en esta ocasión usando el álgebra de función del sistema, y posteriormente consideraremos varios ejemplos ligeramente más complejos para ilustrar las ideas básicas para la construcción de las representaciones en diagramas de bloques.

Ejemplo 10.28

Considere el sistema LTI causal con función del sistema

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}. \tag{10.116}$$

Usando los resultados en la sección 10.7.3, encontramos que este sistema también puede ser descrito por la ecuación de diferencias

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n],$$

junto con la condición de reposo inicial. En la sección 2.4.3 construimos una representación en diagrama de bloques para un sistema de primer orden que tiene esta forma, y un diagrama de bloques equivalente (que corresponde a la figura 2.28 con $a = -1/4$ y $b = 1$) se muestra en la figura 10.18(a). Aquí, z^{-1} es la función del sistema de un retardo unitario. Esto es, a partir de la propiedad de desplazamiento en el tiempo, la entrada y la salida de este sistema están relacionadas mediante

$$w[n] = y[n - 1].$$

El diagrama de bloques en la figura 10.18(a) contiene un lazo de retroalimentación semejante al del sistema examinado en la sección anterior mostrado en la figura 10.17. De hecho, con algunas pequeñas modificaciones, podemos obtener el diagrama de bloques equivalente mostrado en la figura 10.18(b), el cual tiene la misma forma mostrada en la figura 10.17, con $H_1(z) = 1$ y $H_2(z) = -1/4z^{-1}$. Entonces, aplicando la ecuación (10.115), podemos verificar que la función del sistema para el sistema de la figura 10.18 está dada por la ecuación (10.116).

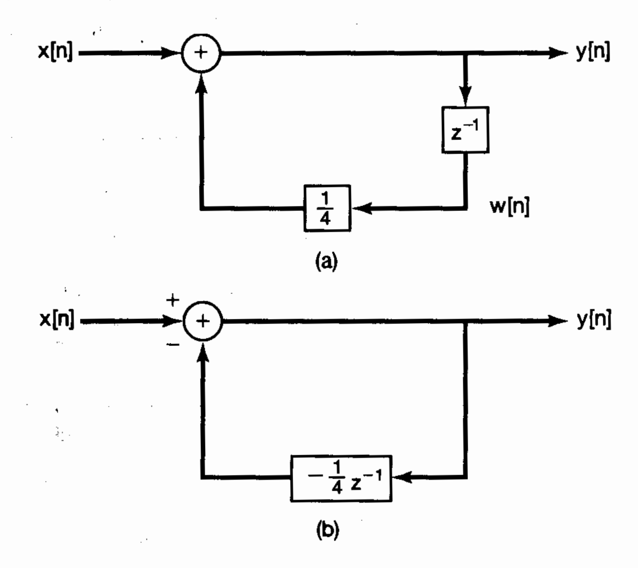


Figura 10.18 (a) Representaciones en diagrama de bloques del sistema LTI causal en el ejemplo 10.28; (b) representación en diagrama de bloques equivalente.

Ejemplo 10.29

Suponga que consideramos el sistema LTI causal con función del sistema

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right)(1 - 2z^{-1}). \qquad (10.117)$$

Como sugiere la ecuación (10.117), podemos considerar este sistema como la conexión en cascada de un sistema con función del sistema $1/[1 - (1/4)z^{-1}]$ y uno con función del sistema $1 - 2z^{-1}$. Hemos ilustrado la cascada en la figura 10.19(a), en la cual hemos usado el diagrama de bloques en la figura 10.18(a) para representar $1/[1 - (1/4)z^{-1}]$. También hemos representado $1 - 2z^{-1}$ usando un retardo unitario, un sumador y un multiplicador por coeficiente. Haciendo uso de la propiedad de desplazamiento en el tiempo, vemos entonces que la entrada $v[n]$ y la salida $y[n]$ del sistema con función del

sistema $1 - 2z^{-1}$ están relacionadas por

$$y[n] = v[n] - 2v[n-1].$$

Si bien el diagrama de bloques en la figura 10.19(a) es ciertamente una representación válida del sistema en la ecuación (10.117), tiene una ineficacia cuya eliminación conduce a una representación en diagrama de bloques alternativa. Para ver esto, observe que la entrada a ambos elementos de retardo unitario en la figura 10.19(a) es $v[n]$, de modo que las salidas de estos elementos son idénticas; es decir,

$$w[n] = s[n] = v[n-1].$$

En consecuencia, no necesitamos mantener estos dos elementos de retardo, y podemos usar simplemente la salida de uno de ellos como la señal que alimenta a ambos multiplicadores de coeficiente. El resultado es la representación en diagrama de bloques en la figura 10.19(b). Puesto que cada elemento de retardo unitario requiere un registro de memoria para almacenar el valor precedente de su entrada, la representación en la figura 10.19(b) requiere menos memoria que la de la figura 10.19(a).

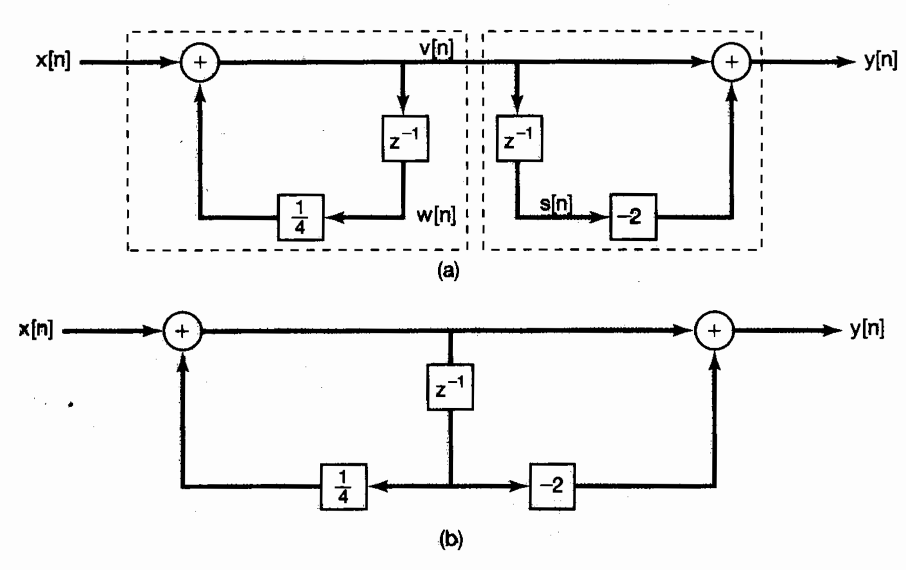


Figura 10.19 (a) Representaciones en diagrama de bloques del sistema en el ejemplo 10.29; (b) representación en diagrama de bloques equivalente usando sólo un elemento de retardo.

Ejemplo 10.30

A continuación considere la función del sistema de segundo orden

$$H(z) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}, \qquad (10.118)$$

la cual también es descrita mediante la ecuación de diferencias

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]. \qquad (10.119)$$

Usando las mismas ideas que en el ejemplo 10.28, obtenemos la representación en diagrama de bloques para este sistema mostrada en la figura 10.20(a). Específicamente, ya que los dos bloques de la función del sistema en esta figura con función del sistema z^{-1} son retardos unitarios, tenemos

$$f[n] = y[n-1],$$
$$e[n] = f[n-1] = y[n-2],$$

de modo que la ecuación (10.119) puede reescribirse como

$$y[n] = -\frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] + x[n],$$

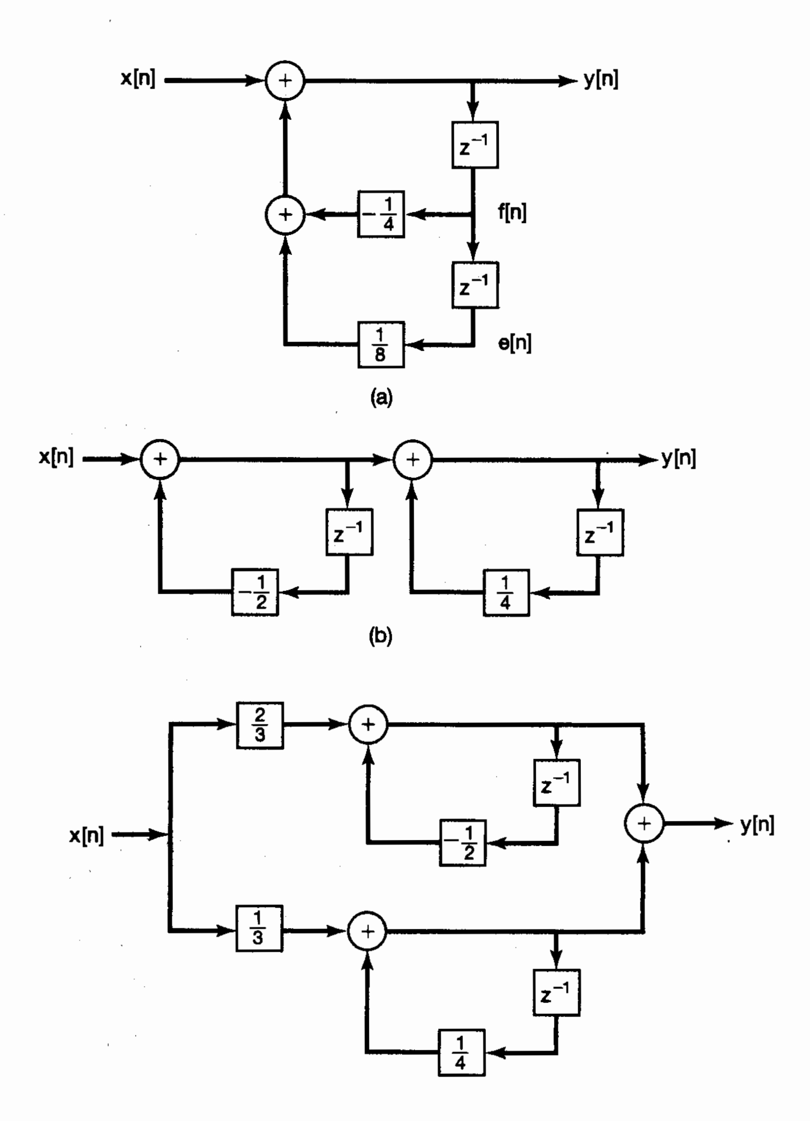


Figura 10.20 Representaciones en diagrama de bloques del sistema en el ejemplo 10.30: (a) forma directa; (b) forma cascada; (c) forma paralela.

o

$$y[n] = -\frac{1}{4}f[n] + \frac{1}{8}e[n] + x[n],$$

la cual es exactamente la que representa la figura.

El diagrama de bloques en la figura 10.20(a) se conoce comúnmente como una representación en *forma directa*, ya que los coeficientes que aparecen en el diagrama se pueden determinar por inspección a partir de los coeficientes que aparecen en la ecuación de diferencias o, de forma equivalente, la función del sistema. De manera alternativa, como en el caso continuo, podemos obtener los diagramas de bloques de *forma cascada* y de *forma paralela* con la ayuda de un poco de álgebra de función del sistema. En concreto, podemos escribir la ecuación (10.118) como

$$H(z) = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right), \tag{10.120}$$

la cual sugiere la representación en forma cascada ilustrada en la figura 10.20(b) en la que el sistema se representa como la cascada de dos sistemas correspondientes a dos factores en la ecuación (10.120)

Asimismo, al realizar una expansión en fracciones parciales, obtenemos

$$H(z) = \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},$$

lo cual conduce a la representación en forma paralela mostrada en la figura 10.20(c).

Ejemplo 10.31

Por último, considere la función del sistema

$$H(z) = \frac{1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}. \tag{10.121}$$

Escribir

$$H(z) = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}\right)\left(1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}\right) \tag{10.122}$$

sugiere representar el sistema como la cascada del sistema en la figura 10.20(a) y el sistema con la función del sistema $1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}$. Sin embargo, como en el ejemplo 10.29, los elementos de retardo unitario que se necesitan para construir el primer término en la ecuación (10.122) también producen las señales de retardo que se necesitan para calcular la salida del segundo sistema. El resultado es el diagrama de bloques de forma directa mostrado en la figura 10.21, cuyos detalles de construcción se examinan en el problema 10.38. Los coeficientes en la representación de forma directa se pueden determinar por inspección a partir de los coeficientes en la función del sistema de la ecuación (10.121).

También podemos escribir $H(z)$ en las formas

$$H(z) = \left(\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right) \tag{10.123}$$

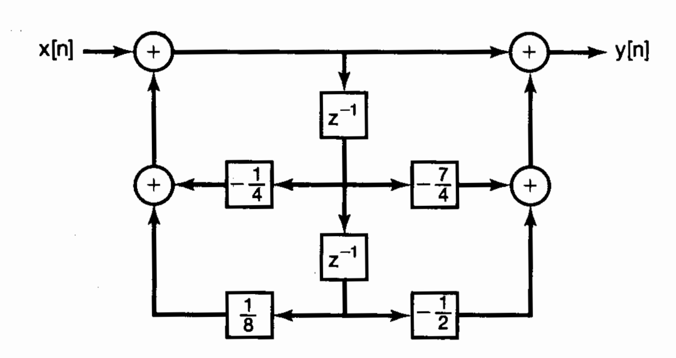


Figura 10.21 Representación en forma directa del sistema en el ejemplo 10.31.

y

$$H(z) = 4 + \frac{5/3}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{14/3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}. \tag{10.124}$$

La ecuación (10.123) sugiere una representación en forma cascada, mientras que la ecuación (10.124) conduce a un diagrama de forma paralela. Éstas también se examinan en el problema 10.38.

Los conceptos usados en la construcción de las representaciones en diagrama de bloques en los ejemplos anteriores se pueden aplicar directamente a sistemas de orden mayor, y se consideran varios ejemplos de ello en el problema 10.39. Por lo general, al igual que en el caso continuo, hay bastante flexibilidad para hacerlo, es decir, para determinar cómo los factores del numerador y el denominador son pareados en una representación de producto como en la ecuación (10.123), para elegir la forma en que cada factor se construye, y para escoger el orden en que los factores son conectados en cascada. Mientras que todas estas variaciones conducen a representaciones del mismo sistema, en la práctica hay diferencias en el comportamiento de los diferentes diagramas de bloques. En forma específica, cada representación en diagrama de bloques de un sistema se puede trasladar de forma directa a un algoritmo de computadora para la puesta en marcha del sistema. Sin embargo, debido a que la longitud finita de las palabras para una computadora se necesita cuantificar los coeficientes en el diagrama de bloques y a que al operar el algoritmo hay un redondeo numérico, cada una de estas representaciones conducirá a un algoritmo que sólo se aproxima al comportamiento del sistema original. Más aún, los errores en cada una de estas aproximaciones serán un tanto diferentes. Debido a estas diferencias, se ha hecho un esfuerzo considerable para examinar los méritos relativos de varias representaciones en diagramas de bloques en términos de su exactitud y sensibilidad con respecto a los efectos de cuantificación. Para analizar con mayor profundidad este tema, el lector puede remitirse a las referencias sobre procesamiento digital de señales en la bibliografía al final del libro.

10.9 LA TRANSFORMADA *Z* UNILATERAL

La transformada z, como ha sido examinada hasta ahora en este capítulo, a menudo recibe el nombre de *transformada z bilateral*. Al igual que en el caso de la transformada de Laplace, hay una forma alternativa conocida como la *transformada z unilateral* que es particularmente útil en el análisis de sistemas causales especificados por ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes y con condiciones iniciales diferentes de cero (es decir, los sistemas que no están en reposo inicial). En esta sección presentamos la transformada z unilateral e ilustramos algunas de sus propiedades y usos, de forma paralela al análisis de la transformada de Laplace unilateral de la sección 9.9.

La transformada z unilateral de una secuencia $x[n]$ se define como

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}. \qquad (10.125)$$

Como en los capítulos anteriores, adoptamos una notación taquigráfica conveniente para una señal y su transformada z unilateral:

$$x[n] \overset{\mathcal{UZ}}{\longleftrightarrow} \mathcal{X}(z) = \mathcal{UZ}\{x[n]\}. \qquad (10.126)$$

La transformada z unilateral difiere de la transformada bilateral en que la sumatoria es llevada a cabo sólo sobre valores no negativos de n, sin importar si $x[n]$ es o no cero para $n < 0$. Por lo tanto, la transformada z unilateral de $x[n]$ puede considerarse como la transformada bilateral de $x[n]u[n]$ (es decir, $x[n]$ multiplicada por un escalón unitario). Entonces, en particular, para cualquier secuencia que es cero para $n < 0$, las transformadas unilateral y bilateral serán idénticas. Si nos remitimos al análisis de las regiones de convergencia llevado a cabo en la sección 10.2 veremos también que, ya que $x[n]u[n]$ siempre es una secuencia derecha, la región de convergencia de $\mathcal{X}(z)$ estará siempre en el exterior de un círculo.

Debido a la estrecha relación entre las transformadas z bilateral y unilateral, el cálculo de las transformadas unilaterales es muy similar al de las transformadas bilaterales, con la advertencia de que se debe tener cuidado para limitar el intervalo de la sumatoria en la transformada $n \geq 0$. De manera similar, el cálculo de las transformadas unilaterales inversas es básicamente el mismo que para las transformadas bilaterales, una vez que tomamos en cuenta el hecho de que la ROC para una transformada unilateral *siempre* es el exterior de un círculo.

10.9.1 Ejemplos de transformadas z unilaterales y transformadas inversas

Ejemplo 10.32

Considere la señal

$$x[n] = a^n u[n]. \qquad (10.127)$$

Ya que $x[n] = 0$ para $n < 0$, las transformadas unilateral y bilateral son iguales para este ejemplo y entonces, en particular,

$$\mathcal{X}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|. \qquad (10.128)$$

Ejemplo 10.33

Sea

$$x[n] = a^{n+1} u[n+1]. \qquad (10.129)$$

En este caso las transformadas unilateral y bilateral *no* son iguales, ya que $x[-1] = 1 \neq 0$. La transformada bilateral se obtiene a partir del ejemplo 10.1 y de la propiedad de desplazamiento en tiempo definida en la sección 10.5.2. De manera específica,

$$X(z) = \frac{z}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|. \qquad (10.130)$$

En contraste, la transformada unilateral es

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n},$$

o

$$\mathcal{X}(z) = \frac{a}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|. \tag{10.131}$$

Ejemplo 10.34

Considere la transformada z unilateral

$$\mathcal{X}(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}. \tag{10.132}$$

En el ejemplo 10.9, consideramos la transformada inversa para una transformada z bilateral $X(z)$ de la misma forma que en la ecuación (10.132) y para varias ROC diferentes. En el caso de la transformada unilateral, la ROC debe ser el exterior del círculo cuyo radio es igual a la magnitud más grande de los polos de $\mathcal{X}(z)$, en este caso, todos los puntos z con $|z| > 1/3$. Podemos entonces invertir la transformada unilateral exactamente como en el ejemplo 10.9, lo que produce

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad \text{para} \quad n \geq 0. \tag{10.133}$$

En la ecuación (10.133) hemos enfatizado el hecho de que las transformadas z unilaterales nos proporcionan información acerca de $x[n]$ *sólo* para $n \geq 0$.

Otra aproximación para las transformadas inversas introducida en la sección 10.3, a saber, identificar las transformadas inversas a partir de los coeficientes en la expansión en serie de potencias de la transformada z, también se puede usar para las transformadas unilaterales. Sin embargo, en el caso unilateral, una restricción que debe satisfacerse es que, como una consecuencia de la ecuación (10.125), la expansión en serie de potencias para la transformada no puede contener términos con potencias positivas de z. Por ejemplo, en el ejemplo 10.13 realizamos la división larga en la transformada bilateral

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{10.134}$$

en dos formas, que corresponde a las dos posibles ROC de $X(z)$. Sólo una de estas selecciones, esto es, la que corresponde a la ROC $|z| > |a|$, conduce a la expansión en serie sin potencias positivas de z, es decir,

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \ldots, \tag{10.135}$$

y ésta es la *única* selección para la expansión si la ecuación (10.134) representa una transformada unilateral.

Observe que el requerimiento de que $\mathcal{X}(z)$ tenga una expansión en serie de potencias sin términos con potencias positivas de z implica que no cualquier función de z puede *ser* una transformada z unilateral. En particular, si consideramos una función racional de z escrita como una razón de polinomios en z (no en z^{-1}), es decir,

$$\frac{p(z)}{q(z)}, \tag{10.136}$$

entonces, para que ésta sea una transformada unilateral (con la selección adecuada de la ROC como el exterior de un círculo), el grado del numerador no debe ser mayor que el grado del denominador.

Ejemplo 10.35

Un ejemplo sencillo que ilustra el punto anterior está dado por la función racional en la ecuación (10.130), la cual se puede escribir como una razón de polinomios en z:

$$\frac{z^2}{z-a}. \tag{10.137}$$

Hay dos posibles transformadas bilaterales que pueden estar asociadas con esta función, esto es, las correspondientes a las dos posibles ROC, $|z| < |a|$ y $|z| > |a|$. La selección $|z| > |a|$ corresponde a una secuencia derecha, pero *no* a una señal que es cero para toda $n < 0$, ya que su transformada inversa, la cual está dada por la ecuación (10.129), es diferente de cero para $n = -1$.

De manera más general, si asociamos la ecuación (10.136) con la transformada bilateral siendo la ROC el exterior del círculo con radio dado por la magnitud de la raíz más grande de $q(z)$, entonces la transformada inversa será ciertamente derecha. Sin embargo, para que sea cero para *toda* $n < 0$, también debe cumplirse que el grado $(p(z)) \leq$ el grado $(q(z))$.

10.9.2 Propiedades de la transformada z unilateral

La transformada z unilateral tiene muchas propiedades importantes, algunas de las cuales son idénticas a sus contrapartes bilaterales y varias de las cuales difieren de forma significativa. La tabla 10.3 resume estas propiedades. Observe que no hemos incluido una columna para identificar de manera explícita la ROC para la transformada z unilateral para cada señal, ya que la ROC de cualquier transformada z unilateral siempre es el exterior de un círculo. Por ejemplo, la ROC para una transformada de Laplace unilateral siempre está fuera del polo más externo.

Al comparar esta tabla con la correspondiente tabla 10.1 para las transformadas z bilaterales podemos obtener un considerable conocimiento acerca de la naturaleza de la transformada unilateral. En particular, varias propiedades, a saber, la linealidad, el escalamiento en el dominio de z, la expansión en el tiempo, la conjugación y la diferenciación en el dominio de z, son idénticas a sus contrapartes bilaterales, así como también lo es el teorema de valor inicial definido en la sección 10.5.9, el cual es fundamentalmente una propiedad de la transformada unilateral, ya que requiere que $x[n] = 0$ para $n < 0$. Una propiedad bilateral, en particular la de inversión en el tiempo, definida en la sección 10.5.4, obviamente no tiene significado en la transformada unilateral, mientras que el resto de las propiedades difieren de manera importante en los casos bilateral y unilateral.

TABLA 10.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z UNILATERAL

Propiedad	Señal	Transformada z unilateral
—	$x[n]$	$\mathcal{X}(z)$
—	$x_1[n]$	$\mathcal{X}_1(z)$
—	$x_2[n]$	$\mathcal{X}_2(z)$
Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$a\mathcal{X}_1(z) + b\mathcal{X}_2(z)$
Retardo de tiempo	$x[n-1]$	$z^{-1}\mathcal{X}(z) + x[-1]$
Avance en el tiempo	$x[n+1]$	$z\mathcal{X}(z) - zx[0]$
Escalamiento en el dominio z	$e^{j\omega_0 n}x[n]$ $z_0^n x[n]$ $a^n x[n]$	$\mathcal{X}(e^{-j\omega_0}z)$ $\mathcal{X}(z/z_0)$ $\mathcal{X}(a^{-1}z)$
Expansión en el tiempo	$x_k[n] = \begin{cases} x[m], & n = mk \\ 0, & n \neq mk \text{ para una } m \end{cases}$	$\mathcal{X}(z^k)$
Conjugación	$x^*[n]$	$\mathcal{X}^*(z^*)$
Convolución (suponiendo que $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son de idéntica forma cero cuando $n < 0$)	$x_1[n] * x_2[n]$	$\mathcal{X}_1(z)\,\mathcal{X}_2(z)$
Primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})\mathcal{X}(z) - x[-1]$
Acumulación	$\sum_{k=0}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}\mathcal{X}(z)$
Diferenciación en el dominio z	$nx[n]$	$-z\frac{d\mathcal{X}(z)}{dz}$

Teorema del valor inicial

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} \mathcal{X}(z)$$

Examinemos primero la diferencia en la propiedad de convolución. La tabla 10.3 establece que si $x_1[n] = x_2[n] = 0$ para toda $n < 0$, entonces

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{\mathcal{UZ}}{\longleftrightarrow} \mathcal{X}_1(z)\mathcal{X}_2(z). \tag{10.138}$$

Ya que en este caso las transformadas unilateral y bilateral son idénticas para cada una de estas señales, la ecuación (10.138) se obtiene a partir de la propiedad de convolución bilateral. De esta forma, el análisis del sistema y el álgebra de función del sistema desarrollados y usados en este capítulo se aplican sin cambio a las transformadas unilaterales, en tanto consideremos los sistemas LTI causales (para los cuales la función del sistema es la transformada tanto bilateral *como* unilateral de la respuesta al impulso) con entradas que son idénticas a cero para $n < 0$. Un ejemplo de esta aplicación se encuentra en la propiedad de acumulación o suma en la tabla 10.3. En concreto, si $x[n] = 0$ para $n < 0$, entonces

$$\sum_{k=0}^{n} x[k] = x[n] * u[n] \overset{\mathcal{UZ}}{\longleftrightarrow} \mathcal{X}(z)\mathcal{U}(z) = \mathcal{X}(z)\frac{1}{1 - z^{-1}}. \tag{10.139}$$

Como un segundo ejemplo, considere lo siguiente:

Ejemplo 10.36

Considere un sistema LTI causal descrito por la ecuación de diferencias

$$y[n] + 3y[n-1] = x[n], \tag{10.140}$$

junto con la condición de reposo inicial. La función del sistema para este sistema es

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1}}. \tag{10.141}$$

Suponga que la entrada al sistema es $x[n] = \alpha u[n]$, donde α es una constante dada. En este caso, la transformada z unilateral (y la bilateral) de la salida $y[n]$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) = \mathcal{H}(z)\mathcal{X}(z) &= \frac{\alpha}{(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1})} \\ &= \frac{(3/4)\alpha}{1 + 3z^{-1}} + \frac{(1/4)\alpha}{1 - z^{-1}}. \end{aligned} \tag{10.142}$$

Aplicando el ejemplo 10.32 a cada término de la ecuación (10.142) se obtiene

$$y[n] = \alpha\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)(-3)^n\right]u[n]. \tag{10.143}$$

Un punto importante que debemos observar aquí es que la propiedad de convolución para las transformadas z unilaterales se aplica *sólo* si las señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$ en la ecuación (10.138) son ambas idénticas a cero para $n < 0$. Mientras que en general es válido que la transformada bilateral de $x_1[n]*x_2[n]$ sea igual al producto de las transformadas bilaterales de $x_1[n]$ y $x_2[n]$, la transformada unilateral de $x_1[n]*x_2[n]$ en general no es igual al producto de las transformadas unilaterales si $x_1[n]$ o $x_2[n]$ son diferentes de cero para $n < 0$. Este punto se explora en el problema 10.41.

Mucha de la importancia de la transformada z unilateral recae en su aplicación para analizar los sistemas causales y, en particular, los sistemas caracterizados por ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes con condiciones iniciales posiblemente diferentes de cero. En la sección 10.7 vimos cómo la transformada bilateral, en particular la propiedad de desplazamiento para las transformadas z bilaterales, se puede usar para analizar y calcular las soluciones para los sistemas LTI caracterizados por esas ecuaciones de diferencias, junto con la suposición de reposo inicial. Como veremos ahora, la propiedad de desplazamiento para las transformadas unilaterales, la cual difiere de su contraparte bilateral, juega un papel análogo para los sistemas inicializados.

Para desarrollar la propiedad de desplazamiento para la transformada unilateral, considere la señal

$$y[n] = x[n-1]. \tag{10.144}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n} \\ &= x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-n} \\ &= x[-1] + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-(n+1)}, \end{aligned}$$

o

$$\mathcal{Y}(z) = x[-1] + z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}, \tag{10.145}$$

de manera que

$$\mathcal{Y}(z) = x[-1] + z^{-1}\mathcal{X}(z). \tag{10.146}$$

Mediante la aplicación repetida de la ecuación (10.146), la transformada unilateral de

$$w[n] = y[n-1] = x[n-2] \tag{10.147}$$

es

$$\mathcal{W}(z) = x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}\mathcal{X}(z). \tag{10.148}$$

Continuando este procedimiento iterativo, también podemos determinar la transformada unilateral de $x[n-m]$ para algún valor positivo de m.

La ecuación (10.146) se conoce como la propiedad de retardo de tiempo, puesto que $y[n]$ en la ecuación (10.144) es una versión retardada de $x[n]$. También hay una propiedad de avance en el tiempo para las transformadas unilaterales que corresponde a una versión adelantada de $x[n]$ para $\mathcal{X}(z)$. De manera específica, como se muestra en el problema 10.60,

$$x[n+1] \stackrel{\mathcal{UZ}}{\longleftrightarrow} z\mathcal{X}(z) - zx[0]. \tag{10.149}$$

10.9.3 Solución de ecuaciones de diferencias usando la transformada z unilateral

El siguiente ejemplo ilustra el uso de las transformadas z unilaterales y la propiedad de retardo en tiempo para resolver las ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes con condiciones iniciales diferentes de cero:

Ejemplo 10.37

Considere la ecuación de diferencias (10.140) con $x[n] = \alpha u[n]$ y con la condición inicial

$$y[-1] = \beta. \tag{10.150}$$

Aplicando la transformada unilateral a ambos miembros de la ecuación (10.140) y usando las propiedades de linealidad y retardo en el tiempo, obtenemos

$$\mathcal{Y}(z) + 3\beta + 3z^{-1}\mathcal{Y}(z) = \frac{\alpha}{1-z^{-1}}. \tag{10.151}$$

Resolviendo $\mathcal{Y}(z)$ se obtiene

$$\mathcal{Y}(z) = -\frac{3\beta}{1+3z^{-1}} + \frac{\alpha}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})}. \tag{10.152}$$

Si nos remitimos al ejemplo 10.36 y, en particular, a la ecuación (10.142) veremos que el segundo término del miembro derecho de la ecuación (10.152) es igual a la transformada z unilateral de la respuesta del sistema cuando la condición inicial en la ecuación (10.150) es cero ($\beta = 0$). Es decir, este término representa la respuesta del sistema LTI causal descrito por la ecuación (10.140), junto con la condición de reposo inicial. Al igual que en el caso continuo, esta respuesta es a menudo conocida como la respuesta de estado cero, es decir, la respuesta cuando la condición o estado inicial es cero.

El primer término del miembro derecho de la ecuación (10.152) se interpreta como la transformada unilateral de la respuesta a entrada cero, es decir, la respuesta del sistema cuando la entrada es cero ($\alpha = 0$). La respuesta a entrada cero es una función lineal del valor β de la condición inicial. Más aún, la ecuación (10.152) ilustra el hecho de que la solución de una ecuación de diferencias lineal con coeficientes constantes con estado inicial diferente de cero es la superposición de las respuestas de estado cero y entrada cero. La respuesta de estado cero, obtenida al fijar la condición inicial a cero, corresponde a la respuesta del sistema LTI causal definida por la ecuación de diferencias y la condición de reposo inicial. La respuesta a entrada cero es la respuesta a la condición inicial sola cuya entrada se fija en cero. Los problemas 10.20 y 10.42 proporcionan otros ejemplos que ilustran el uso de las transformadas unilaterales para resolver las ecuaciones de diferencias con condiciones iniciales diferentes de cero.

Por último, para cualquier valor de α y β, podemos expandir $\mathcal{Y}(z)$ en la ecuación (10.152) mediante el método de fracciones parciales e invertir el resultado para obtener $y[n]$. Por ejemplo, si $\alpha = 8$ y $\beta = 1$,

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{3}{1 + 3z^{-1}} + \frac{2}{1 - z^{-1}}, \tag{10.153}$$

y aplicando el par de la transformada unilateral en el ejemplo 10.32 para cada término, se obtiene

$$y[n] = [3(-3)^n + 2]u[n], \quad \text{para } n \geq 0. \tag{10.154}$$

10.10 RESUMEN

En este capítulo hemos desarrollado la transformada z para señales y sistemas discretos. El análisis y el desarrollo son muy similares al tratamiento correspondiente de la transformada de Laplace para señales continuas pero con algunas diferencias importantes. Por ejemplo, en el plano s complejo la transformada de Laplace se reduce a la transformada de Fourier en el eje imaginario, en tanto que, en el plano z complejo, la transformada z se reduce a la transformada de Fourier en el círculo unitario. Para la transformada de Laplace la ROC consiste de una banda o semiplano (es decir, una banda que se extiende al infinito en una dirección) mientras que para la transformada z la ROC es un anillo, quizás extendiéndose hacia el exterior al infinito o hacia el interior para incluir el origen. Al igual que con la transformada de Laplace, las características en el dominio del tiempo tales como la naturaleza derecha, izquierda o bilateral de una secuencia, así como la causalidad o la estabilidad de un sistema LTI, pueden estar asociadas con las propiedades de la región de convergencia. En particular, para transformadas z racionales, estas características en el dominio del tiempo pueden estar asociadas a las ubicaciones de los polos en relación con la región de convergencia.

Debido a las propiedades de las transformadas z, los sistemas LTI, incluyendo los descritos por ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes, se pueden analizar en el dominio de las transformadas mediante manipulaciones algebraicas. El álgebra de la función del sistema también es una herramienta muy útil para el análisis de

las interconexiones de los sistemas LTI y para la construcción de representaciones en diagramas de bloques de los sistemas LTI descritos mediante ecuaciones de diferencias.

En la mayor parte de este capítulo nos hemos concentrado en las transformadas z bilaterales. Sin embargo, al igual que con la transformada de Laplace, también hemos introducido una segunda forma de la transformada z conocida como la transformada z unilateral. La transformada unilateral, la cual puede verse como la transformada bilateral de una señal cuyos valores para $n < 0$ se han fijado en cero, es en particular útil para el análisis de sistemas descritos mediante ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes cuyas condiciones iniciales son diferentes de cero.

Capítulo 10 Problemas

La primera sección de problemas comprende la categoría básica, y las respuestas se proporcionan al final del libro. Las tres secciones restantes contienen problemas que abarcan las categorías básica, avanzada y de extensión, respectivamente.

PROBLEMAS BÁSICOS CON RESPUESTAS

10.1. Determine la restricción que debe haber en $r = |z|$ para que cada una de las siguientes sumas converja:

(a) $\sum_{n=-1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n+1} z^{-n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{-n+1} z^{n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \{\frac{1+(-1)^n}{2}\} z^{-n}$ **(d)** $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^{|n|} \cos(\frac{\pi}{4}n) z^{-n}$

10.2. Examine la señal

$$x[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n-3].$$

Use la ecuación (10.3) para evaluar la transformada z de esta señal, y especifique la región de convergencia correspondiente.

10.3. Sea

$$x[n] = (-1)^n u[n] + \alpha^n u[-n-n_0].$$

Determine las restricciones en el número complejo α y el entero n_0, dado que la ROC de $X(z)$ es

$$1 < |z| < 2.$$

10.4. Considere la señal

$$x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n \cos(\frac{\pi}{4}n), & n \leq 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}.$$

Determine los polos y la ROC para $X(z)$.

10.5. Para cada una de las siguientes expresiones algebraicas para la transformada z de una señal, determine el número de ceros en el plano z finito y el número de ceros en el infinito.

(a) $\dfrac{z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$

(b) $\dfrac{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})}{(1 - 3z^{-1})(1 - 4z^{-1})}$

(c) $\dfrac{z^{-2}(1 - z^{-1})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}$

10.6. Sea $x[n]$ una señal absolutamente sumable con transformada z racional $X(z)$. Si sabemos que $X(z)$ tiene un polo en $z = 1/2$, ¿podría $x[n]$ ser
(a) una señal de duración finita?
(b) una señal izquierda?
(c) una señal derecha?
(d) una señal bilateral?

10.7. Suponga que la expresión algebraica para la transformada z de $x[n]$ es

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}{(1 + \frac{1}{4}z^{-2})(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2})}.$$

¿Cuántas regiones de convergencia diferentes corresponderían a $X(z)$?

10.8. Sea $x[n]$ una señal cuya transformada z racional $X(z)$ contiene un polo en $z = 1/2$. Dado que

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n x[n]$$

es absolutamente sumable y

$$x_2[n] = \left(\frac{1}{8}\right)^n x[n]$$

no es absolutamente sumable, determine si $x[n]$ es izquierda, derecha o bilateral.

10.9. Valiéndose de la expansión en fracciones parciales y del hecho de que

$$a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|,$$

determine la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}, \quad |z| > 2.$$

10.10. Considere la siguiente expresión algebraica para la transformada z $X(z)$ de una señal $x[n]$:

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}.$$

(a) Suponiendo que la ROC es $|z| > 1/3$, use la división larga para determinar los valores de $x[0]$, $x[1]$ y $x[2]$.

(b) Suponiendo que la ROC es $|z| < 1/3$, use la división larga para determinar los valores de $x[0]$, $x[-1]$ y $x[-2]$.

10.11. Determine la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1{,}024}\left[\frac{1{,}024 - z^{-10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right], \quad |z| > 0.$$

10.12. Considerando la interpretación geométrica de la magnitud de la transformada de Fourier del diagrama de polos y ceros, determine, para cada una de las siguientes transformadas z, si la señal correspondiente tiene una característica aproximada paso bajas, paso banda o paso altas:

(a) $X(z) = \dfrac{z^{-1}}{1 + \frac{8}{9}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{8}{9}$

(b) $X(z) = \dfrac{1 + \frac{8}{9}z^{-1}}{1 - \frac{16}{9}z^{-1} + \frac{64}{81}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{8}{9}$

(c) $X(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{64}{81}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{8}{9}$

10.13. Considere la señal rectangular

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Sea

$$g[n] = x[n] - x[n-1].$$

(a) Determine la señal $g[n]$ y evalúe de manera directa su transformada z.

(b) Observando que

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} g[k],$$

use la tabla 10.1 para determinar la transformada z de $X(z)$.

10.14. Considere la señal triangular

$$g[n] = \begin{cases} n-1, & 2 \le n \le 7 \\ 13-n, & 8 \le n \le 12 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

(a) Determine el valor de n_0 tal que

$$g[n] = x[n] * x[n - n_0],$$

donde $x[n]$ es la señal rectangular considerada en el problema 10.13.

(b) Use las propiedades de convolución y desplazamiento junto con la $X(z)$ determinada en el problema 10.13 para determinar $G(z)$. Verifique que su respuesta satisface el teorema del valor inicial.

10.15. Sea

$$y[n] = \left(\frac{1}{9}\right)^n u[n].$$

Determine dos señales distintas tales que cada una tenga una transformada z $X(z)$ que satisfaga las dos condiciones siguientes:

1. $[X(z) + X(-z)]/2 = Y(z^2)$.
2. $X(z)$ tiene sólo un cero y sólo un polo en el plano z.

10.16. Considere las siguientes funciones de sistema para sistemas LTI estables. Sin utilizar la transformada z inversa, determine en cada caso si el sistema correspondiente es causal o no lo es.

(a) $\dfrac{1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$

(b) $\dfrac{z - \frac{1}{2}}{z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{3}{16}}$

(c) $\dfrac{z + 1}{z + \frac{4}{3} - \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3}}$

10.17. Suponga que se nos proporcionan los siguientes cinco datos acerca de un sistema LTI S particular con respuesta al impulso $h[n]$ y transformada z $H(z)$:

1. $h[n]$ es real.
2. $h[n]$ es derecha.
3. $\lim_{z \to \infty} H(z) = 1$.
4. $H(z)$ tiene dos ceros.
5. $H(z)$ tiene uno de sus polos en una ubicación no real en el círculo definido por $|z| = 3/4$.

Responda las siguientes preguntas:

(a) ¿El sistema S es causal? **(b)** ¿Es estable?

10.18. Considere un sistema LTI causal cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas mediante la representación en diagrama de bloques mostrada en la figura P10.18.

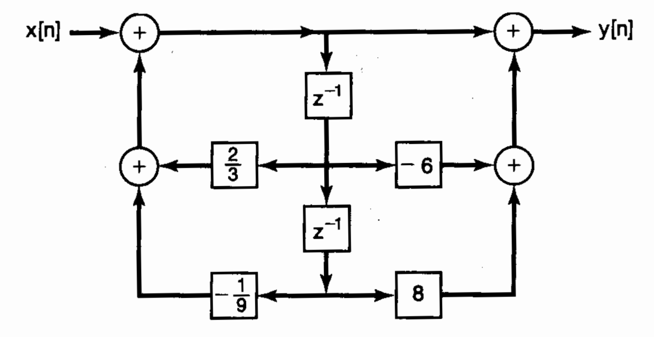


Figura P10.18

(a) Determine una ecuación de diferencias que relacione a $y[n]$ con $x[n]$.

(b) ¿El sistema es estable?

10.19. Determine la transformada z unilateral de cada una de las siguientes señales, y especifique las regiones de convergencia correspondientes:

(a) $x_1[n] = (\frac{1}{4})^n u[n+5]$
(b) $x_2[n] = \delta[n+3] + \delta[n] + 2^n u[-n]$
(c) $x_3[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}$

10.20. Considere un sistema cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas mediante

$$y[n-1] + 2y[n] = x[n].$$

(a) Determine la respuesta a entrada cero de este sistema si $y[-1] = 2$.
(b) Determine la respuesta a entrada cero de este sistema a la entrada $x[n] = (1/4)^n u[n]$.
(c) Determine la salida del sistema para $n \geq 0$ cuando $x[n] = (1/4)^n u[n]$ y $y[-1] = 2$.

PROBLEMAS BÁSICOS

10.21. Determine la transformada z de cada una de las siguientes secuencias. Trace el diagrama de polos y ceros e indique la región de convergencia. Indique si existe o no la transformada de Fourier de la secuencia.
(a) $\delta[n+5]$
(b) $\delta[n-5]$
(c) $(-1)^n u[n]$
(d) $(\frac{1}{2})^{n+1} u[n+3]$
(e) $(-\frac{1}{3})^n u[-n-2]$
(f) $(\frac{1}{4})^n u[3-n]$
(g) $2^n u[-n] + (\frac{1}{4})^n u[n-1]$
(h) $(\frac{1}{3})^{n-2} u[n-2]$

10.22. Determine la transformada z de las siguientes secuencias. Exprese todas las sumas en forma cerrada. Trace el diagrama de polos y ceros e indique la región de convergencia. Indique si existe la transformada de Fourier de la secuencia.
(a) $(\frac{1}{2})^n \{u[n+4] - u[n-5]\}$
(b) $n(\frac{1}{2})^{|n|}$
(c) $|n|(\frac{1}{2})^{|n|}$
(d) $4^n \cos[\frac{2\pi}{6}n + \frac{\pi}{4}]u[-n-1]$

10.23. A continuación mostramos varias transformadas z. Para cada una de ellas determine la transformada z inversa usando tanto el método basado en la expansión en fracciones parciales como el método de la serie de Taylor que se basa en el uso de la división larga.

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

$$X(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

$$X(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

$$X(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

$$X(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

10.24. Usando el método indicado, determine la secuencia asociada con cada una de las siguientes transformadas z:

(a) Por fracciones parciales:

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}, \text{ y } x[n] \text{ es absolutamente sumable.}$$

(b) Por división larga:

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \text{ y } x[n] \text{ es derecha.}$$

(c) Por fracciones parciales:

$$X(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}}, \text{ y } x[n] \text{ es absolutamente sumable.}$$

10.25. Considere una secuencia $x[n]$ derecha con transformada z

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}. \qquad \text{(P10.25-1)}$$

(a) Realice una expansión por fracciones parciales para la ecuación (P10.25-1) expresada como una razón de polinomios en z^{-1} y, a partir de dicha expansión, determine $x[n]$.

(b) Reescriba la ecuación (P10.25-1) como una razón de polinomios en z y realice una expansión por fracciones parciales de $X(z)$ expresada en términos de polinomios de z. A partir de esta expansión determine $x[n]$ y demuestre que la secuencia obtenida es idéntica a la obtenida en la parte (a).

10.26. Considere una secuencia $x[n]$ izquierda con transformada z

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}.$$

(a) Escriba $X(z)$ como una razón de polinomios en z en lugar de z^{-1}.

(b) Usando la expansión por fracciones parciales, exprese $X(z)$ como una suma de términos, donde cada término representa un polo de su respuesta en la parte (a).

(c) Determine $x[n]$.

10.27. Una secuencia derecha $x[n]$ tiene transformada z

$$X(z) = \frac{3z^{-10} + z^{-7} - 5z^{-2} + 4z^{-1} + 1}{z^{-10} - 5z^{-7} + z^{-3}}.$$

Determine $x[n]$ para $n < 0$.

10.28. **(a)** Determine la transformada z de la secuencia

$$x[n] = \delta[n] - 0.95\,\delta[n-6].$$

(b) Trace el patrón de polos y ceros para la secuencia de la parte (a).

(c) Considerando el comportamiento de los vectores de polos y ceros cuando el círculo unitario es recorrido, desarrolle un dibujo aproximado de la magnitud de la transformada de Fourier de $x[n]$.

10.29. Considerando la determinación geométrica de la respuesta en frecuencia tal como se analizó en la sección 10.4, trace, para cada uno de los diagramas de polos y ceros de la figura P10.29, la magnitud de la transformada de Fourier asociada.

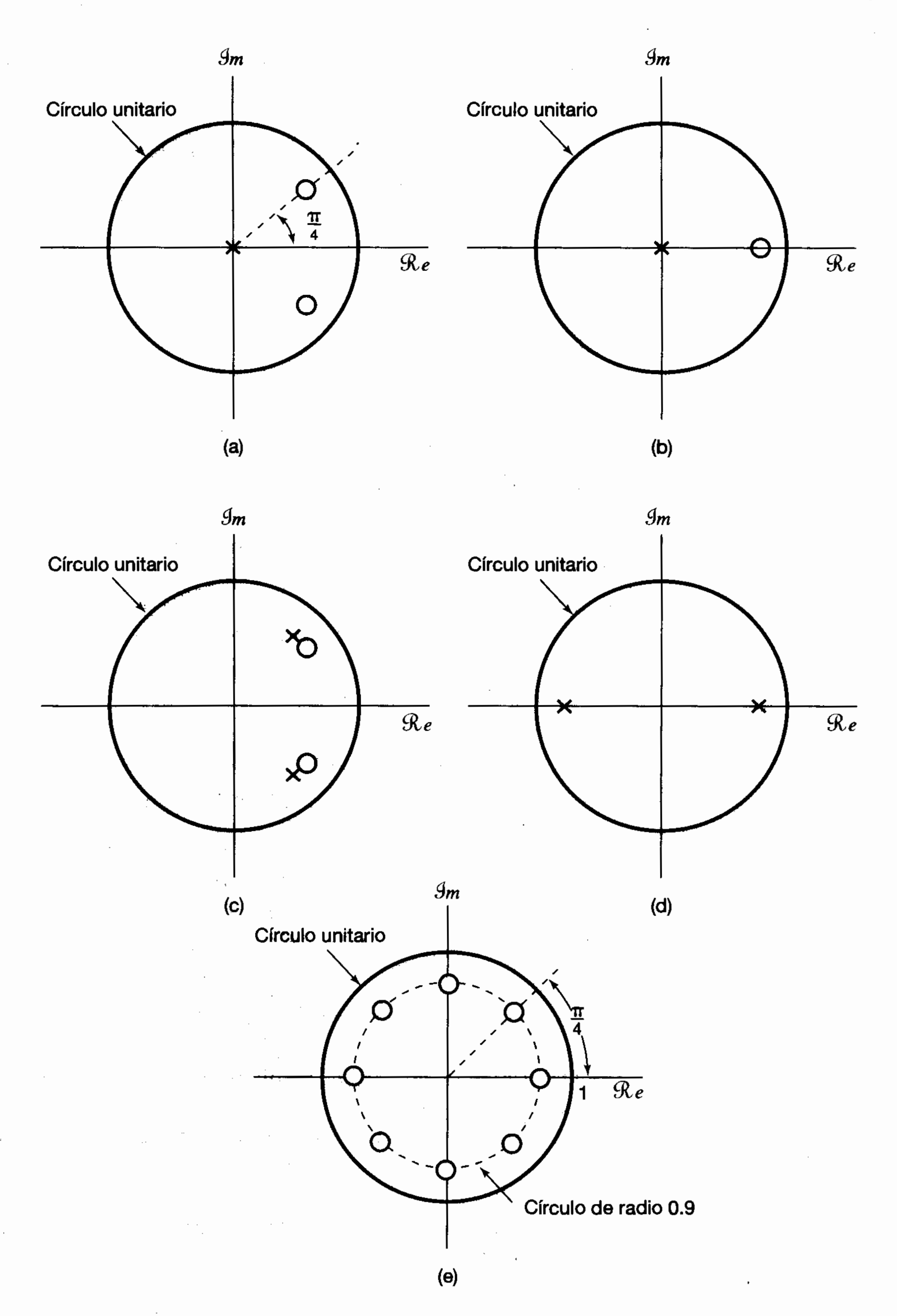


Figura P10.29

10.30. Considere una señal $y[n]$ que está relacionada con dos señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$ mediante

$$y[n] = x_1[n+3] * x_2[-n+1]$$

donde

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \text{y} \quad x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

Dado que

$$a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|,$$

use las propiedades de la transformada z para determinar la transformada z $Y(z)$ de $y[n]$.

10.31. Se nos han dado los siguientes cinco datos acerca de la señal $x[n]$ discreta con transformada z $X(z)$:

1. $x[n]$ es real y derecha.
2. $X(z)$ tiene exactamente dos polos.
3. $X(z)$ tiene dos ceros en el origen.
4. $X(z)$ tiene un polo en $z = \frac{1}{2}e^{j\pi/3}$.
5. $X(1) = \frac{8}{3}$.

Determine $X(z)$ y especifique su región de convergencia.

10.32. Considere un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

y la entrada

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

(a) Determine la salida $y[n]$ mediante la evaluación explícita de la convolución discreta de $x[n]$ y $h[n]$.

(b) Determine la salida $y[n]$ mediante el cálculo de la transformada z inversa del producto de las transformadas z de la entrada y la respuesta a la muestra unitaria.

10.33. **(a)** Determine la función del sistema para el sistema LTI causal con ecuación de diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n].$$

(b) Usando las transformadas z, determine $y[n]$ si

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

10.34. Un sistema LTI causal está descrito por la ecuación de diferencias

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1].$$

(a) Encuentre la función del sistema $H(z) = Y(z)/X(z)$ para este sistema. Trace los polos y ceros de $H(z)$ e indique la región de convergencia.
(b) Encuentre la respuesta a la muestra unitaria de este sistema.
(c) Posiblemente haya encontrado que este sistema es inestable. Encuentre una respuesta estable (no causal) a la muestra unitaria que satisfaga la ecuación de diferencias.

10.35. Considere un sistema LTI con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ para el cual

$$y[n-1] - \frac{5}{2}y[n] + y[n+1] = x[n].$$

El sistema puede ser o puede no ser estable o causal.

Considerando el patrón de polos y ceros asociado con esta ecuación de diferencias, determine tres posibles selecciones para la respuesta a la muestra unitaria del sistema. Demuestre que cada una de ellas satisface la ecuación de diferencias.

10.36. Considere un sistema lineal discreto, invariante en el tiempo con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ para el cual

$$y[n-1] - \frac{10}{3}y[n] + y[n+1] = x[n].$$

El sistema es estable. Determine la respuesta a la muestra unitaria.

10.37. La entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ de un sistema LTI causal están relacionadas a través de la representación en diagrama de bloques mostrada en la figura P10.37.

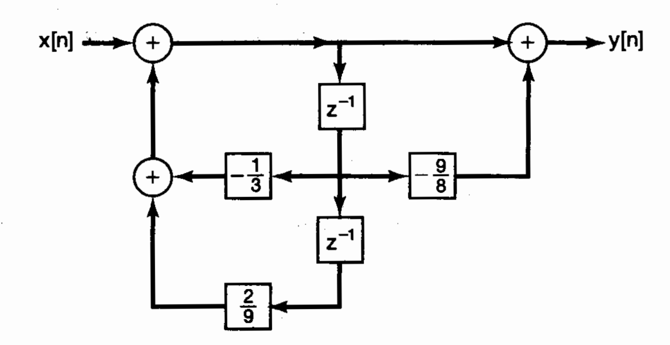


Figura P10.37

(a) Determine una ecuación de diferencias que relacione a $y[n]$ con $x[n]$.
(b) ¿El sistema es estable?

10.38. Considere un sistema LTI S causal con entrada $x[n]$ y una función del sistema especificada como

$$H(z) = H_1(z)H_2(z),$$

donde

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

y

$$H_2(z) = 1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}.$$

Un diagrama de bloques correspondiente a $H(z)$ se puede obtener como una conexión en cascada de un diagrama de bloques para $H_1(z)$ seguido por un diagrama de bloques para $H_2(z)$. El resultado se muestra en la figura P10.38, en la cual también hemos marcado las señales intermedias $e_1[n]$, $e_2[n]$, $f_1[n]$ y $f_2[n]$.

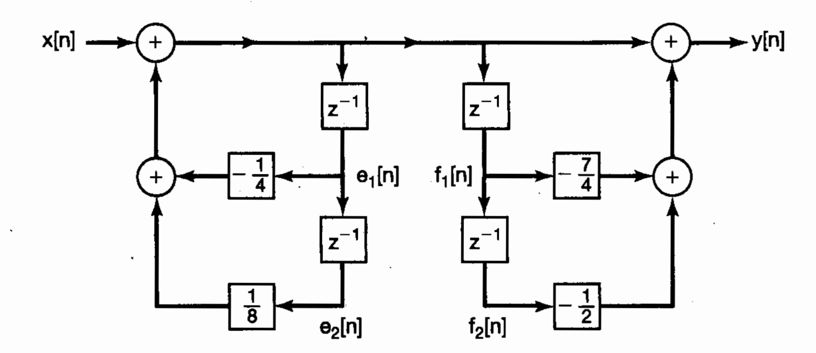


Figura P10.38

(a) ¿Cómo es $e_1[n]$ en relación con $f_1[n]$?
(b) ¿Cómo es $e_2[n]$ en relación con $f_2[n]$?
(c) Usando sus respuestas a los incisos anteriores como una guía, construya un diagrama de bloques de forma directa para S que contenga sólo dos elementos de retardo.
(d) Dibuje una representación de diagrama de bloques de forma cascada para S basado en la observación de que

$$H(z) = \left(\frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right).$$

(e) Dibuje una representación de diagrama de bloques de forma paralela para S basado en la observación de que

$$H(z) = 4 + \frac{5/3}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{14/3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}.$$

10.39. Considere las siguientes tres funciones de sistema que corresponden a sistemas LTI causales:

$$H_1(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2})(1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2})},$$

$$H_2(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2})(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2})},$$

$$H_3(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2})(1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2})}.$$

(a) Para cada función del sistema, dibuje un diagrama de bloques de forma directa.

(b) Para cada función del sistema, dibuje un diagrama de bloques que corresponda a la conexión en cascada de dos diagramas de bloques de segundo orden, cada uno de éstos de la forma directa.

(c) Para cada función del sistema, determine si existe una representación en diagrama de bloques que sea la cascada de cuatro diagramas de bloques de primer orden, con la restricción de que todos los coeficientes multiplicadores deben ser reales.

10.40. Determine la transformada z unilateral para cada una de las secuencias del problema 10.21.

10.41. Considere las siguientes dos señales:

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1],$$

$$x_2[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n].$$

Sean $\mathcal{X}_1(z)$ y $X_1(z)$ respectivamente las transformadas z unilateral y bilateral de $x_1[n]$ y sea $\mathcal{X}_2(z)$ y $X_2(z)$ respectivamente las transformadas z unilateral y bilateral de $x_2[n]$.

(a) Tome la transformada z bilateral inversa de $X_1(z)X_2(z)$ para determinar $g[n] = x_1[n] * x_2[n]$.

(b) Tome la transformada z unilateral inversa de $\mathcal{X}_1(z)\mathcal{X}_2(z)$ para obtener una señal $q[n]$ para $n \geq 0$. Observe que $q[n]$ y $g[n]$ no son idénticas para $n \geq 0$.

10.42. Para cada una de las siguientes ecuaciones de diferencias, y para la entrada y la condición inicial asociadas, determine las respuestas a entrada cero y estado cero, usando la transformada z unilateral.

(a) $y[n] + 3y[n-1] = x[n],$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n],$$

$$y[-1] = 1.$$

(b) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1],$

$$x[n] = u[n],$$

$$y[-1] = 0.$$

(c) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1],$

$$x[n] = u[n],$$

$$y[-1] = 1.$$

PROBLEMAS AVANZADOS

10.43. Considere una secuencia par $x[n]$ (es decir, $x[n] = x[-n]$) con transformada z racional $X(z)$.

(a) A partir de la definición de la transformada z demuestre que

$$X(z) = X\left(\frac{1}{z}\right).$$

(b) A partir del resultado que obtuvo para la parte (a), demuestre que si un polo (cero) de $X(z)$ ocurre en $z = z_0$, entonces un polo (cero) también debe ocurrir en $z = 1/z_0$.

(c) Verifique el resultado de la parte (b) para cada una de las siguientes secuencias:

(1) $\delta[n+1] + \delta[n-1]$

(2) $\delta[n+1] - \frac{5}{2}\delta[n] + \delta[n-1]$

10.44. Sea $x[n]$ una señal discreta con transformada z $X(z)$. Para cada una de las siguientes señales, determine la transformada z en términos de $X(z)$:

(a) $\Delta x[n]$, donde Δ es el operador de la primera diferencia definido por

$$\Delta x[n] = x[n] - x[n-1]$$

(b) $x_1[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

(c) $x_1[n] = x[2n]$

10.45. Determine cuál de las siguientes transformadas z podría ser la función de transferencia de un sistema lineal discreto que no sea necesariamente estable, pero en el cual la respuesta a la muestra unitaria sea cero para $n < 0$. Establezca claramente sus razones.

(a) $\dfrac{(1 - z^{-1})^2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$ **(b)** $\dfrac{(z-1)^2}{z - \frac{1}{2}}$

(c) $\dfrac{(z - \frac{1}{4})^5}{(z - \frac{1}{2})^6}$ **(d)** $\dfrac{(z - \frac{1}{4})^6}{(z - \frac{1}{2})^5}$

10.46. Una secuencia $x[n]$ es la salida de un sistema LTI cuya entrada es $s[n]$. El sistema está descrito por la siguiente ecuación de diferencias

$$x[n] = s[n] - e^{8\alpha}s[n-8],$$

donde $0 < \alpha < 1$.

(a) Encuentre la función del sistema

$$H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)},$$

y trace sus polos y ceros en el plano z. Indique la región de convergencia.

(b) Deseamos recuperar $s[n]$ a partir de $x[n]$ con un sistema LTI. Encuentre la función del sistema

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

tal que $y[n] = s[n]$. Encuentre todas las posibles regiones de convergencia de $H_2(z)$, y para cada una diga si el sistemas es o no es causal y estable.

(c) Encuentre todas las posibles selecciones de la respuesta a la muestra unitaria $h_2[n]$ tales que

$$y[n] = h_2[n] * x[n] = s[n].$$

10.47. Se sabe lo siguiente acerca de un sistema LTI discreto con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$:

1. Si $x[n] = (-2)^n$ para toda n, entonces $y[n] = 0$ para toda n.

2. Si $x[n] = (1/2)^n u[n]$ para toda n, entonces $y[n]$ para toda n es de la forma

$$y[n] = \delta[n] + a\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n],$$

donde a es una constante.

(a) Determine el valor de la constante a.

(b) Determine la respuesta $y[n]$ si la entrada $x[n]$ es

$$x[n] = 1, \quad \text{para toda } n.$$

10.48. Suponga que un sistema LTI causal de segundo orden se ha diseñado con una respuesta al impulso real $h_1[n]$ y una función del sistema $H_1(z)$ racional. El diagrama de polos y ceros para $H_1(z)$ se muestra en la figura P10.48(a). Considere ahora otro sistema causal de segundo orden con respuesta al impulso $h_2[n]$ y una función del sistema $H_2(z)$ racional. El diagrama de polos y ceros para $H_2(z)$ se muestra en la figura P10.48(b). Determine una secuencia $g[n]$ tal que las tres siguientes condiciones se cumplan:

(1) $h_2[n] = g[n]h_1[n]$

(2) $g[n] = 0$ para $n < 0$

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} |g[k]| = 3$

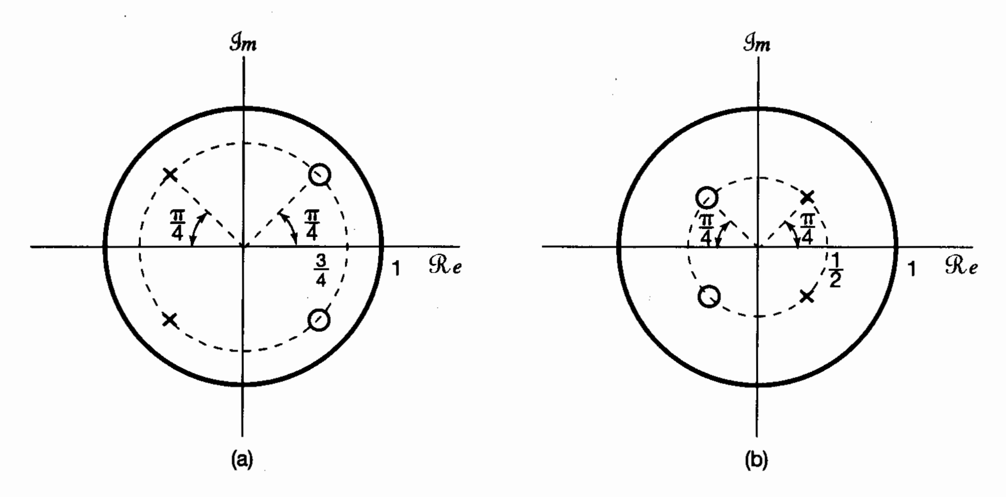


Figura P10.48

10.49. En la sección 10.2, propiedad 4, se estableció que si $x[n]$ es una secuencia derecha y si el círculo $|z| = r_0$ está en la ROC, entonces todos los valores finitos de z para los cuales $|z| < r_0$ también estarán en la ROC. En dicho análisis se proporcionó una explicación intuitiva. Un argumento más formal es muy similar al usado para la propiedad 4 en la sección 9.2 en relación con la transformada de Laplace. En concreto, considere una secuencia derecha

$$x[n] = 0, \quad n < N_1,$$

y para la cual

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty.$$

Entonces, si $r_0 \leq r_1$,

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r^{-n} \leq A \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n}, \qquad \text{(P10.49-1)}$$

donde A es una constante positiva.

(a) Demuestre que la ecuación (P10.49-1) es válida, y determine la constante A en términos de r_0, r_1 y N_1.

(b) A partir de su resultado en la parte (a), demuestre que de ello se desprende la propiedad 4 en la sección 10.2.

(c) Desarrolle un argumento similar al anterior para demostrar la validez de la propiedad 5 en la sección 10.2.

10.50. Al sistema discreto con el patrón de polos y ceros mostrado en la figura P10.50(a) se le conoce como un sistema pasa todo de primer orden, ya que la magnitud de la respuesta en frecuencia es constante, independientemente de la frecuencia.

(a) Demuestre en forma algebraica que $|H(e^{j\omega})|$ es constante.

Para demostrar la misma propiedad de forma geométrica, considere el diagrama de vectores de la figura P10.50(b). Deseamos demostrar que la longitud de v_2 es proporcional a la longitud de v_1 independientemente de la frecuencia ω.

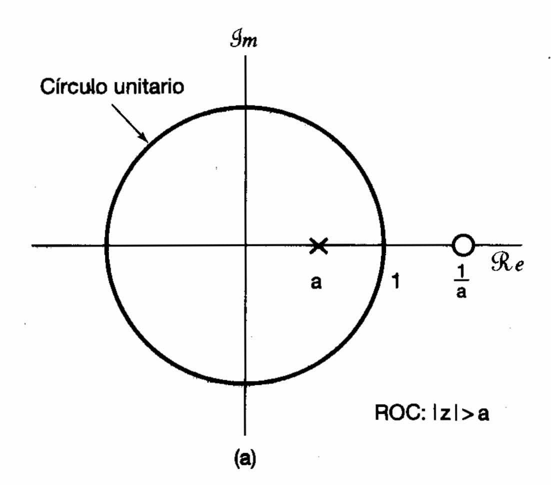


Figura P10.50a

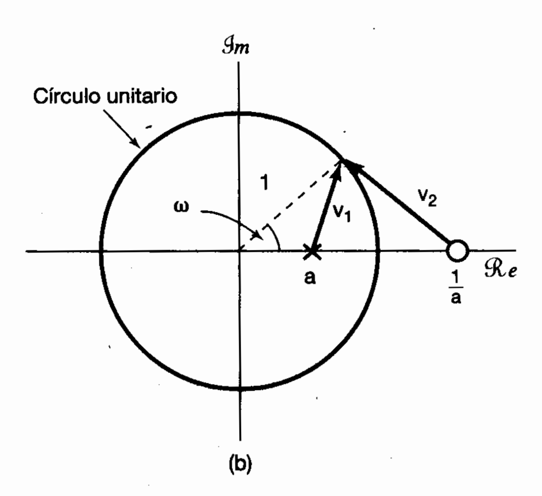


Figura P10.50b

(b) Exprese la longitud de v_1 usando la ley de los cosenos y el hecho de que v_1 es un lado de un triángulo en el cual los otros dos lados son el vector unitario y un vector de longitud a.

(c) De una manera similar a como se hizo en la parte (b), determine la longitud de v_2 y demuestre que es proporcional en longitud a v_1 independientemente de ω.

10.51. Considere una secuencia real $x[n]$ con transformada z racional $X(z)$.

(a) A partir de la definición de la transformada z, demuestre que

$$X(z) = X^*(z^*).$$

(b) Partiendo de su resultado en la parte (a), demuestre que si un polo (cero) de $X(z)$ ocurre en $z = z_0$, entonces un polo (cero) también debe ocurrir en $z = z_0^*$.

(c) Verifique el resultado de la parte (b) para cada una de las siguientes secuencias:

(1) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

(2) $x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$

(d) Combinando sus resultados en la parte (b) con el resultado del problema 10.43(b), demuestre que para una secuencia real y par, si hay un polo (cero) de $H(z)$ en $z = \rho e^{j\theta}$, entonces también hay un polo (cero) de $H(z)$ en $z = (1/\rho)e^{j\theta}$ y de $z = (1/\rho)e^{-j\theta}$.

10.52. Considere una secuencia $x_1[n]$ con transformada z $X_1(z)$ y una secuencia $x_2[n]$ con transformada z $X_2(z)$, donde

$$x_2[n] = x_1[-n].$$

Demuestre que $X_2(z) = X_1(1/z)$, y a partir de ello, demuestre que si $X_1(z)$ tiene un polo (o cero) en $z = z_0$, entonces $X_2(z)$ tiene un polo (o cero) en $z = 1/z_0$.

10.53. **(a)** Realice la prueba de cada una de las siguientes propiedades de la tabla 10.1:

(1) La propiedad determinada en la sección 10.5.2

(2) La propiedad determinada en la sección 10.5.3

(3) La propiedad determinada en la sección 10.5.4

(b) Si denota la transformada z de $x[n]$ y R_x la ROC de $X(z)$, determine en términos de $X(z)$ y R_x la transformada z y la ROC asociada para cada una de las siguientes secuencias:

(1) $x^*[n]$

(2) $z_0^n\, x[n]$, donde z_0 es un número complejo

10.54. En la sección 10.5.9 establecimos y probamos el teorema del valor inicial para secuencias causales.

(a) Establezca y pruebe el teorema correspondiente si $x[n]$ es anticausal (es decir, si $x[n] = 0, n > 0$).

(b) Demuestre que si $x[n] = 0, n < 0$, entonces

$$x[1] = \lim_{z\to\infty} z(X(z) - x[0]).$$

10.55. Sea una $x[n]$ que denota una secuencia causal (es decir, $x[n] = 0, n < 0$) en la cual $x[0]$ es diferente de cero y finita.

(a) Usando el teorema del valor inicial, demuestre que no hay polos o ceros de $X(z)$ en $z = \infty$.

(b) Demuestre que, como una consecuencia de su resultado en la parte (a), el número de polos de $X(z)$ en el plano z finito es igual al número de ceros de $X(z)$ en el plano z finito. (El plano z finito excluye a $z = \infty$.)

10.56. En la sección 10.5.7 establecimos la propiedad de convolución para la transformada z. Para demostrar que esta propiedad se cumple, empezamos con la suma de convolución expresada como

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]. \qquad \text{(P10.56-1)}$$

(a) Efectuando el cálculo de la transformada z de la ecuación (P10.56-1) y usando la ecuación (10.3), demuestre que

$$X_3(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\hat{X}_2(z),$$

donde $\hat{X}_2(z)$ es la transformada de $x_2[n-k]$.

(b) Usando el resultado que obtuvo en la parte (a) junto con la propiedad 10.5.2 de la tabla 10.1, demuestre que

$$X_3(z) = X_2(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]z^{-k}.$$

(c) De la parte (b), demuestre que

$$X_3(z) = X_1(z)X_2(z)$$

como se estableció en la ecuación (10.81).

10.57. Sea

$$X_1(z) = x_1[0] + x_1[1]z^{-1} + \cdots + x_1[N_1]z^{-N_1},$$
$$X_2(z) = x_2[0] + x_2[1]z^{-1} + \cdots + x_2[N_2]z^{-N_2}.$$

Define

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z),$$

y haga

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} y[k]z^{-k}.$$

(a) Exprese M en términos de N_1 y N_2.
(b) Use la multiplicación polinominal para determinar $y[0]$, $y[1]$ y $y[2]$.
(c) Use la multiplicación polinominal para demostrar que, para $0 \leq k \leq M$,

$$y[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[k-m].$$

10.58. Un sistema de fase mínima es un sistema que es causal y estable y para el cual el sistema inverso también es causal y estable. Determine las restricciones necesarias sobre la ubicación de los polos y ceros en el plano z de la función del sistema de un sistema de fase mínima.

10.59. Considere la estructura del filtro digital mostrado en la figura P10.59.

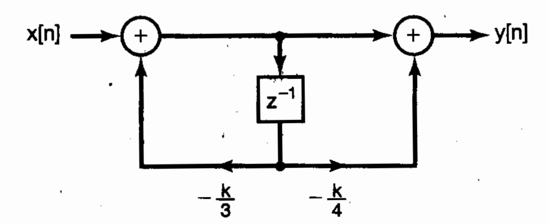


Figura P10.59

(a) Encuentre $H(z)$ para este filtro causal. Trace el patrón de polos y ceros e indique la región de convergencia.
(b) ¿Para qué valores de k el sistema es estable?
(c) Determine $y[n]$ si $k = 1$ y $x[n] = (2/3)^n$ para toda n.

10.60. Considere una señal $x[n]$ cuya transformada z unilateral es $\mathcal{X}(z)$. Demuestre que la transformada z unilateral de $y[n] = x[n+1]$ se puede especificar como

$$\mathcal{Y}(z) = z\mathcal{X}(z) - zx[0].$$

10.61. Si $\mathcal{X}(z)$ denota la transformada z unilateral de $x[n]$, determine, en términos de $\mathcal{X}(z)$, la transformada z unilateral de:
(a) $x[n+3]$ **(b)** $x[n-3]$ **(c)** $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

PROBLEMAS DE EXTENSIÓN

10.62. La secuencia de autocorrelación de una secuencia $x[n]$ se define como

$$\phi_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k].$$

Determine la transformada z de $\phi_{xx}[n]$ en términos de la transformada z de $x[n]$.

10.63. Usando la expansión en series de potencias

$$\log(1 - w) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{w^i}{i}, \ |w| < 1,$$

determine la inversa de cada una de las siguientes transformadas z:
(a) $X(z) = \log(1 - 2z), |z| < \frac{1}{2}$
(b) $X(z) = \log(1 - \frac{1}{2}z^{-1}), |z| > \frac{1}{2}$

10.64. Diferenciando primero $X(z)$ y usando las propiedades adecuadas de la transformada z, determine la secuencia para la cual transformada z es cada una de las siguientes expresiones:
(a) $X(z) = \log(1 - 2z), |z| < \frac{1}{2}$
(b) $X(z) = \log(1 - \frac{1}{2}z^{-1}), |z| > \frac{1}{2}$
Compare sus resultados en (a) y (b) con los resultados obtenidos en el problema 10.63, en el cual se usó la expansión en series de potencias.

10.65. La *transformación bilineal* es un mapeo para determinar una transformada z $H_d(z)$ a partir de una transformada de Laplace racional $H_c(s)$. Este mapeo muestra dos importantes propiedades:
1. Si $H_c(s)$ es la transformada de Laplace de un sistema LTI causal y estable, entonces $H_d(z)$ es la transformada z de un sistema LTI causal y estable.
2. Ciertas características importantes de $|H_c(j\omega)|$ se conservan en $|H_d(e^{j\omega})|$.

En este problema ilustramos la segunda de estas propiedades para el caso de los filtros pasa todo.
(a) Sea

$$H_c(s) = \frac{a - s}{s + a},$$

donde a es real y positiva. Demuestre que

$$|H_c(j\omega)| = 1.$$

(b) Apliquemos ahora la transformación bilineal a $H_c(s)$ para obtener $H_d(z)$. Esto es,

$$H_d(z) = H_c(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}.$$

Demuestre que $H_d(z)$ tiene un polo (el cual se encuentra dentro del círculo unitario) y un cero (el cual está fuera del círculo unitario).
(c) Para la función del sistema $H_d(z)$ deducida en la parte (c), demuestre que $|H_d(e^{j\omega})| = 1$.

10.66. La transformación bilineal, presentada en el problema anterior, también puede usarse para obtener un filtro discreto, la magnitud de cuya respuesta en frecuencia es similar a la magnitud de la respuesta en frecuencia de un determinado filtro paso bajas continuo. En este problema ilustramos la similitud mediante el ejemplo de un filtro Butterworth continuo de segundo orden con función del sistema $H_c(s)$.

(a) Sea

$$H_d(z) = H_c(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}.$$

Demuestre que

$$H_d(e^{j\omega}) = H_c\left(j \tan \frac{\omega}{2}\right).$$

(b) Dado que

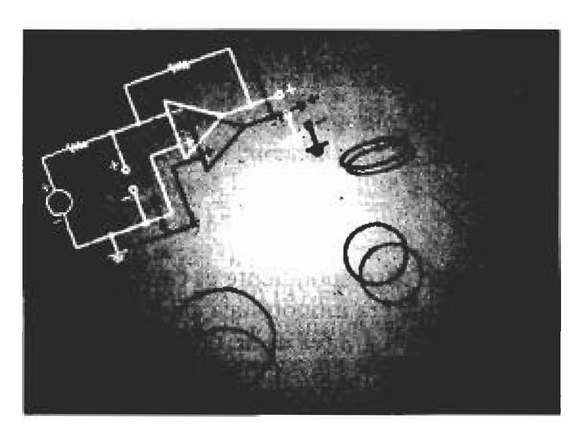
$$H_c(s) = \frac{1}{(s + e^{j\pi/4})(s + e^{-j\pi/4})}$$

y que el filtro correspondiente es causal, verifique que $H_c(0) = 1$, que $|H_c(j\omega)|$ decrece de manera monotónica al incrementarse positivamente los valores de ω, que $|H_c(j)|^2 = 1/2$ (es decir, que $\omega_c = 1$ es la frecuencia de media potencia), y que $H_c(\infty) = 0$.

(c) Demuestre que si la transformación bilineal se aplica a la $H_c(s)$ de la parte (b) para obtener $H_d(z)$, entonces pueden emitirse los siguientes enunciados acerca de $H_d(z)$ y $H_d(e^{j\omega})$:

1. $H_d(z)$ tiene sólo dos polos, de los cuales, ambos están *dentro* del círculo unitario.
2. $H_d(e^{j0}) = 1$.
3. $|H_d(e^{j\omega})|$ decrece de manera monotónica conforme ω va de 0 a π.
4. La frecuencia de media potencia de $H_d(e^{j\omega})$ es $\pi/2$.

11
SISTEMAS LINEALES RETROALIMENTADOS



11.0 INTRODUCCIÓN

Hace tiempo que se ha reconocido que en muchas situaciones se logran ventajas particulares mediante el uso de la retroalimentación, es decir, usando la salida de un sistema para controlar o modificar la entrada. Por ejemplo, en sistemas electromecánicos, como un motor cuyo eje debe mantenerse en una posición angular constante, es común medir el error entre la posición deseada y la real y usar esta señal de error para girar el eje en la dirección correcta. Esto se ilustra en la figura 11.1, donde hemos representado el uso de un motor de cd para el posicionamiento exacto de un telescopio. En la figura 11.1(a) hemos indicado gráficamente cómo se vería un sistema como éste, en donde $v(t)$ es el voltaje de entrada al motor y $\theta(t)$ es la posición angular de la plataforma del telescopio. El diagrama de bloques del sistema de posicionamiento movido por un motor se muestra en la figura 11.1(b). Un sistema retroalimentado para controlar la posición del telescopio se ilustra en la figura 11.1(c), y en la figura 11.1(d) se muestra un diagrama de bloques equivalente para este sistema. La entrada externa o de *referencia* de este sistema retroalimentado es el ángulo deseado del eje θ_D. Se utiliza un potenciómetro para convertir este ángulo deseado en un voltaje $K_1\theta_D$ proporcional a θ_D. De manera similar, un segundo potenciómetro produce un voltaje $K_1\theta(t)$ proporcional al ángulo real de la plataforma. Estos dos voltajes se comparan, lo cual produce un voltaje de error $K_1(\theta_D - \theta(t))$, el cual es amplificado y utilizado para excitar el motor eléctrico.

En la figura 11.1 se sugieren dos métodos diferentes para apuntar el telescopio. Uno de ellos es el sistema retroalimentado de las figuras 11.1(c) y (d). Aquí la entrada que debemos proporcionar es el ángulo deseado o de referencia θ_D. De forma alternativa, si se conocieran exactamente el ángulo inicial y el deseado, así como las características eléctricas y mecánicas del conjunto motor-eje, podríamos especificar la variación precisa en el tiempo del voltaje de entrada $v(t)$ que primero aceleraría y después desaceleraría el eje, logrando que la plataforma se detuviera en la posición deseada sin necesidad de utilizar la retroalimentación, como

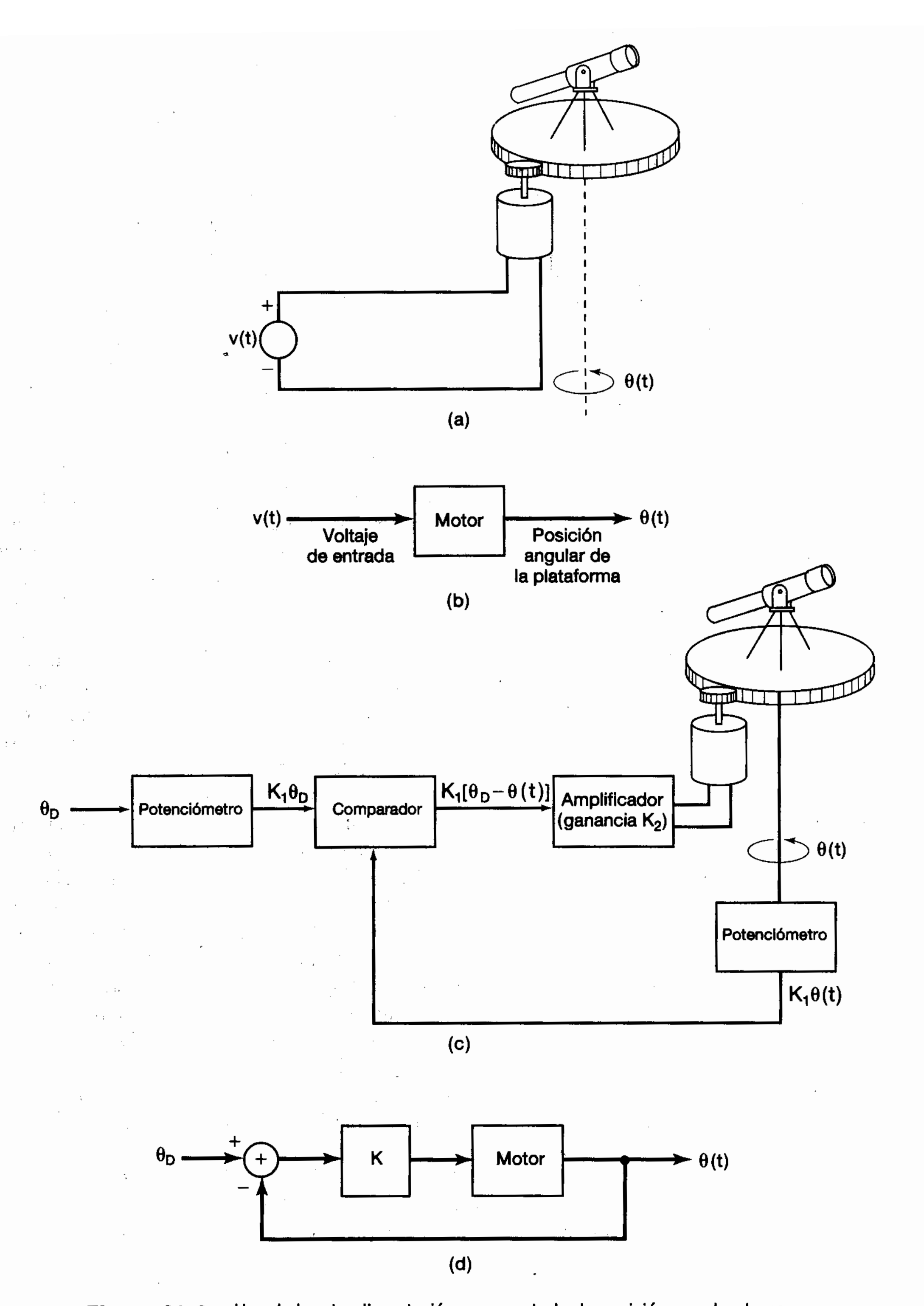


Figura 11.1 Uso de la retroalimentación para controlar la posición angular de un telescopio: (a) plataforma de un telescopio movida por un motor de cd; (b) diagrama de bloques del sistema en (a); (c) sistema retroalimentado para el posicionamiento del telescopio; (d) diagrama de bloques del sistema en (c) (aquí, $K = K_1K_2$).

se muestra en las figuras 11.1(a) y (b). Un sistema que opera como se muestra en estas figuras se conoce típicamente como *sistema de lazo abierto*, en contraste con el *sistema de lazo cerrado* de las figuras 11.1(c) y (d). En la práctica, se pueden apreciar ventajas bien claras y definidas cuando el control del ángulo del eje del motor se realiza con el sistema de lazo cerrado en lugar del sistema de lazo abierto. Por ejemplo, en el sistema de lazo cerrado, cuando el eje se ha girado a la posición correcta, cualquier variación con respecto a ésta será detectada y el error resultante se usará para proporcionar una corrección. En el sistema de lazo abierto no hay mecanismo alguno que proporcione esta corrección. Una ventaja adicional del sistema de lazo cerrado se deriva del efecto de los errores incurridos al modelar las características del conjunto motor-eje. En el sistema de lazo abierto se requiere de una caracterización precisa del sistema para diseñar la entrada correcta. En el sistema de lazo cerrado la entrada es simplemente el ángulo deseado del eje y no se requiere del conocimiento preciso del sistema. Esta insensibilidad del sistema de lazo cerrado a las variaciones y a un conocimiento impreciso del sistema son dos ventajas importantes de la retroalimentación.

El control de un motor eléctrico es justamente uno de los muchos ejemplos en los cuales la retroalimentación juega un papel importante. Podemos encontrar usos similares de la retroalimentación en una amplia variedad de aplicaciones, como el control de procesos químicos, sistemas de alimentación de combustible en automóviles, sistemas de calefacción doméstica y sistemas aeroespaciales, sólo por nombrar algunos. Además, la retroalimentación también está presente en muchos procesos biológicos y en el control del movimiento humano. Por ejemplo, cuando se quiere alcanzar un objeto, es usual que durante el movimiento del brazo se monitoree visualmente la distancia entre la mano y el objeto, de manera que la velocidad de la mano pueda disminuir ligeramente conforme disminuya la distancia (es decir, el error) entre la mano y el objeto. El uso de la salida del sistema (posición de la mano) para controlar la entrada demuestra claramente su efectividad cuando tratamos de alcanzar el objeto alternativamente con y sin el uso de la retroalimentación visual.

Además de su empleo para proporcionar un mecanismo de corrección de errores que puede reducir la sensibilidad a perturbaciones y a errores en el modelo del sistema que será controlado, otra característica importante de la retroalimentación es su potencial para estabilizar un sistema que es inherentemente inestable. Considere el problema que se presenta al tratar de estabilizar un palo de escoba en la palma de la mano. Si la mano se mantiene estacionaria, pequeñas variaciones (como una ligera brisa o un movimiento inadvertido de la mano) provocarán que la escoba se venga abajo. Por supuesto, si uno supiera exactamente qué variaciones ocurrirán y pudiera controlar perfectamente el movimiento de la mano, sería posible determinar en forma anticipada cómo moverla para balancear la escoba. Esto, evidentemente, es irreal. Sin embargo, moviendo siempre la mano en la dirección en la cual se está cayendo, la escoba puede balancearse. Esto, claro está, *requiere* retroalimentación para poder detectar la dirección en la cual se está cayendo la escoba. Un segundo ejemplo que está muy relacionado con el equilibrio de una escoba es el problema de cómo controlar el llamado péndulo invertido, el cual se ilustra en la figura 11.2. Como ahí se muestra, un péndulo invertido consiste de una varilla delgada con una esfera pesada en el extremo. La parte inferior de la varilla está montada en una base que puede desplazarse en cualquier dirección

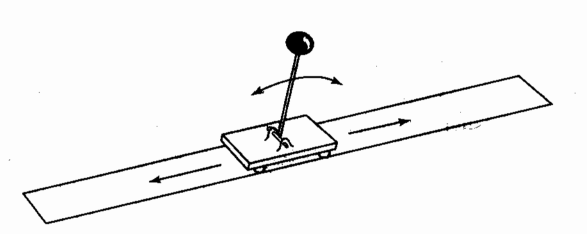


Figura 11.2 Un péndulo invertido.

a lo largo de un riel. Una vez más, si la base se mantiene fija, el péndulo invertido se vendrá abajo. El problema de la estabilización del péndulo invertido consiste en diseñar un sistema retroalimentado que mueva la base para mantener el péndulo vertical. Este ejemplo se examina en el problema 11.56. Un tercer ejemplo, el cual de nuevo presenta cierta similitud con el del equilibrio de la escoba, es el problema de controlar la trayectoria de un cohete. En este caso, así como el movimiento de la mano se usa para compensar las variaciones en la posición de la escoba, la dirección del empuje del cohete se usa para corregir cambios en las fuerzas aerodinámicas y las alteraciones causadas por el viento que de otra manera harían que el cohete se desviara de su curso. Una vez más, la retroalimentación es importante, ya que estas fuerzas y alteraciones nunca se conocen con precisión anticipadamente.

Los ejemplos anteriores proporcionan un indicio de por qué puede ser útil la retroalimentación. En las próximas dos secciones presentaremos los diagramas de bloques y las ecuaciones básicas para los sistemas lineales retroalimentados y analizaremos con mayor detalle algunas de las aplicaciones de la retroalimentación, tanto en el caso continuo como en el discreto. También haremos notar cómo la retroalimentación puede tener tanto efectos dañinos como útiles. Estos ejemplos de los usos y efectos de la retroalimentación nos darán una idea de cómo es que los cambios en los parámetros de un sistema retroalimentado conducen a cambios en el comportamiento del sistema. Comprender esta relación resulta esencial en el diseño de sistemas retroalimentados que deban tener ciertas características deseables. Sirviéndonos de esto como base, desarrollaremos posteriormente, en las secciones restantes del capítulo, varias técnicas específicas que son de gran valor en el análisis y diseño de sistemas retroalimentados continuos y discretos.

11.1 SISTEMAS LINEALES RETROALIMENTADOS

En la figura 11.3(a) se muestra la configuración general de un sistema retroalimentado LTI continuo, y en la figura 11.3(b) la de un sistema retroalimentado LTI discreto. Debido a las aplicaciones típicas en las cuales se utiliza la retroalimentación, es natural limi-

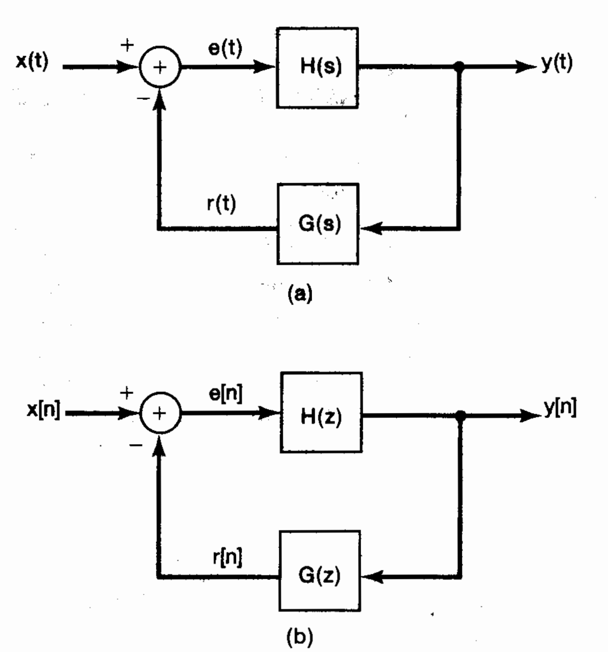


Figura 11.3 Configuraciones básicas del sistema de retroalimentación (a) continuo y (b) discreto.

tarnos a considerar los sistemas de estas figuras como sistemas causales únicamente. Esto se dará por sentado a través de todo el capítulo. En estos casos, las funciones del sistema en la figura 11.3 se pueden interpretar como transformadas unilaterales o bilaterales, y como una consecuencia de la causalidad, las ROC asociadas a ellas siempre estarán a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha para las transformadas de Laplace y fuera del polo más externo para las transformadas z.

También debe hacerse notar que la convención usada en la figura 11.3(a) consiste en que $r(t)$, la señal retroalimentada, se resta de la señal de entrada $x(t)$ para formar $e(t)$. Una convención idéntica se adopta en el sistema discreto. Históricamente esta costumbre surgió de las aplicaciones a los sistemas de rastreo, donde $x(t)$ representaba un comando deseado y $e(t)$ representaba el error entre el comando y la respuesta real $r(t)$. Éste fue el caso, por ejemplo, en nuestro análisis anterior acerca del posicionamiento del telescopio. En sistemas retroalimentados más generales, $e(t)$ y $e[n]$, la contraparte discreta de $e(t)$, podrían no corresponder a, o no ser directamente interpretadas como, señales de error.

La función del sistema $H(s)$ de la figura 11.3(a) o $H(z)$ de la figura 11.3(b) se conoce como la *función del sistema de trayectoria directa* y $G(s)$ o $G(z)$ como la *función del sistema de la trayectoria de retroalimentación*. La función del sistema de todo el sistema de la figura 11.3(a) o (b) se conoce como la *función del sistema de lazo* cerrado y se señalará con $Q(s)$ o $Q(z)$. En las secciones 9.8.1 y 10.8.1 dedujimos expresiones para las funciones de sistema de interconexiones retroalimentadas de los sistemas LTI. Al aplicar estos resultados a los sistemas retroalimentados de la figura 11.3 obtenemos

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)}, \tag{11.1}$$

$$Q(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)}. \tag{11.2}$$

Las ecuaciones (11.1) y (11.2) representan las ecuaciones fundamentales para el estudio de los sistemas retroalimentados LTI. En las siguientes secciones usaremos estas ecuaciones como base para conocer las propiedades de los sistemas retroalimentados y para el desarrollo de varias herramientas para su análisis.

11.2 ALGUNAS APLICACIONES Y CONSECUENCIAS DE LA RETROALIMENTACIÓN

En la introducción proporcionamos una visión breve e intuitiva de algunas de las propiedades y usos de los sistemas retroalimentados. Como punto de partida, en esta sección examinamos varias de las características y aplicaciones de la retroalimentación en términos un poco más cuantitativos mediante el uso de las ecuaciones básicas de la retroalimentación (11.1) y (11.2). Nuestro propósito consiste en proporcionar una introducción y una apreciación de las aplicaciones de la retroalimentación, en lugar de desarrollar alguna de estas aplicaciones con detalle. En las secciones siguientes nos concentraremos en algunas técnicas específicas para el análisis de los sistemas retroalimentados que son de utilidad para resolver una amplia gama de problemas, incluyendo muchas de las aplicaciones que describiremos a continuación.

11.2.1 Diseño de un sistema inverso

En algunas aplicaciones a uno le gustaría sintetizar el inverso de un determinado sistema continuo. Suponga que este sistema tiene la función del sistema $P(s)$ y considere el sistema retroalimentado mostrado en la figura 11.4. Aplicando la ecuación (11.1) con

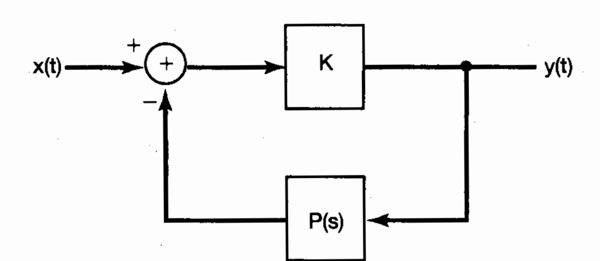


Figura 11.4 Forma de un sistema retroalimentado usado para llevar a cabo el inverso del sistema con función del sistema $P(s)$.

$H(s) = K$ y $G(s) = P(s)$, encontramos que la función del sistema de lazo cerrado es

$$Q(s) = \frac{K}{1 + KP(s)}. \tag{11.3}$$

Si la ganancia K es lo suficientemente grande como para que $KP(s) \gg 1$, entonces

$$Q(s) \simeq \frac{1}{P(s)}, \tag{11.4}$$

en cuyo caso el sistema retroalimentado se aproxima al inverso del sistema con función del sistema $P(s)$.

Es importante observar que el resultado en la ecuación (11.4) requiere que la ganancia K sea lo suficientemente grande, pero que no dependa del valor preciso de la ganancia. Un tipo de dispositivos que proporciona esta clase de ganancia se conoce como amplificadores operacionales y son ampliamente usados en sistemas retroalimentados. Una aplicación común de la inversión inherente en la ecuación (11.4) se encuentra en la construcción de integradores. Un capacitor tiene la propiedad de que su corriente sea proporcional a la derivada del voltaje. Al colocar un capacitor en la trayectoria de retroalimentación de un amplificador operacional, la propiedad de diferenciación se invierte para proporcionar la integración. Esta aplicación específica se explora con más detalle en los problemas 11.50 a 11.52.

Aunque la mayor parte de nuestro análisis se limita a sistemas lineales, es importante mencionar que este mismo concepto básico se aplica comúnmente para invertir una no linealidad. Por ejemplo, los sistemas en los cuales la salida es el logaritmo de la entrada se construyen utilizando la característica exponencial corriente-voltaje de un diodo como retroalimentación de un amplificador operacional. Esto se explora con más detalle en el problema 11.53.

11.2.2 Compensación de elementos no ideales

Otro uso común de la retroalimentación consiste en corregir algunas de las propiedades no ideales de los sistemas de lazo abierto. Por ejemplo, la retroalimentación a menudo se usa en el diseño de amplificadores para proporcionar una amplificación de ganancia constante en una banda de frecuencia determinada y, de hecho, a esta aplicación, de la cual fue pionero H. S. Black de Bell Telephone Laboratories allá por los años veinte es a la que en general se le considera como el catalizador del desarrollo del control retroalimentado como una metodología práctica y útil de diseño de sistemas.

Específicamente, considere una respuesta en frecuencia de lazo abierto $H(j\omega)$ que proporciona una amplificación en la banda de frecuencia especificada pero no es constante sobre ese rango. Por ejemplo, los amplificadores operacionales o los amplificadores de tubo de vacío con los que trabajaban Black y sus colegas, en general proporcionan una amplificación considerable, pero no precisamente controlada. Si bien estos dispositivos pueden proporcionar

niveles de amplificación "cruda" de varios órdenes en magnitud, el precio que se paga por ello es incluir niveles inciertos de amplificación que pueden variar con la frecuencia, el tiempo, la temperatura, etc., y que pueden incluso introducir una fase no deseada y distorsiones no lineales. Lo que Black propuso fue colocar ese amplificador, potente aunque incierto y errático, en un lazo de retroalimentación como en la figura 11.3(a) con $G(s)$, seleccionada para que sea constante, es decir, $G(s) = K$. En este caso la respuesta en frecuencia de lazo cerrado es

$$Q(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 + KH(j\omega)}. \tag{11.5}$$

Si en el intervalo de frecuencia especificado

$$|KH(j\omega)| \gg 1, \tag{11.6}$$

entonces

$$Q(j\omega) \simeq \frac{1}{K}. \tag{11.7}$$

Esto es, la respuesta en frecuencia de lazo cerrado es constante como se deseaba. Esto, de hecho, supone que el sistema que está en la trayectoria de retroalimentación se puede diseñar de manera que su respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ tenga una ganancia constante K en la banda de frecuencia deseada, lo cual es precisamente lo que supusimos que *no* podríamos asegurar para $H(j\omega)$. Sin embargo, la diferencia entre los requerimientos de $H(j\omega)$ y los de $G(j\omega)$ es que $H(j\omega)$ debe proporcionar amplificación, mientras que en la ecuación (11.7) vemos que para que el sistema de lazo cerrado completo proporcione una ganancia mayor que la unidad, K debe ser menor que 1. Es decir, $G(j\omega)$ debe ser un atenuador dentro del intervalo de frecuencias especificado. En general, un atenuador con una característica de frecuencia aproximadamente plana es considerablemente más fácil de construir que un amplificador con respuesta en frecuencia aproximadamente plana (ya que un atenuador se puede construir con elementos pasivos).

Sin embargo, el uso de la retroalimentación para hacer plana la respuesta en frecuencia trae consigo costos adicionales, y es este hecho lo que condujo al enorme escepticismo con que fue recibida la idea de Black. En particular, de las ecuaciones (11.6) y (11.7) vemos que

$$|H(j\omega)| \gg \frac{1}{K} \simeq Q(j\omega), \tag{11.8}$$

de manera que la ganancia de lazo cerrado $1/K$ será sustancialmente menor que la ganancia de lazo abierto $|H(j\omega)|$. Esta pérdida de ganancia aparentemente significativa, atribuible a la que Black mencionaba como retroalimentación *degenerativa* o negativa, fue inicialmente vista como una seria debilidad de su amplificador con retroalimentación negativa. En realidad, el efecto se había conocido por muchos años y había conducido a la convicción de que la retroalimentación negativa no era un mecanismo de particular utilidad. Sin embargo, Black señaló que lo que uno cedía en la ganancia total a menudo estaba más que compensado por la reducción en sensibilidad de todo el amplificador de lazo cerrado. La función del sistema de lazo cerrado es en esencia igual a la ecuación (11.7), independientemente de variaciones en $H(j\omega)$, siempre y cuando $|H(j\omega)|$ sea lo bastante grande. Por lo tanto, si el amplificador de lazo cerrado se diseña en principio con considerablemente más ganancia que la que se necesita en realidad, el amplificador de lazo cerrado proporcionará los niveles deseados de amplificación con una sensibilidad enormemente reducida. Este concepto y su aplicación para extender el ancho de banda de un amplificador se exploran en el problema 11.49.

11.2.3 Estabilización de sistemas inestables

Como mencionamos en la introducción, un uso de los sistemas retroalimentados se dirige para la estabilización de sistemas, los cuales, sin retroalimentación, son inestables. Algunos ejemplos de esta aplicación incluyen el control de la trayectoria de un cohete, la regulación de reacciones nucleares en una planta nuclear, la estabilización de un avión y el control natural y regulado de poblaciones animales.

Para ilustrar cómo la retroalimentación puede usarse para estabilizar un sistema inestable, consideremos un sistema simple continuo de primer orden con

$$H(s) = \frac{b}{s - a}. \tag{11.9}$$

Con $a > 0$, el sistema es inestable. Si seleccionamos la función del sistema $G(s)$ con ganancia constante K, la función del sistema de lazo cerrado $Q(s)$ en la ecuación (11.1) es ahora

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{H(s)}{1 + KH(s)} \\ &= \frac{b}{s - a + Kb}. \end{aligned} \tag{11.10}$$

El sistema de lazo cerrado será estable si el polo se mueve hacia el semiplano izquierdo del plano s. Éste será el caso si

$$K > \frac{a}{b}. \tag{11.11}$$

Por lo tanto, podemos estabilizar el sistema con una ganancia constante en el lazo de retroalimentación si la ganancia se escoge de tal manera que satisfaga la ecuación (11.11). Este tipo de sistemas de retroalimentación son conocidos como *sistemas de retroalimentación proporcional*, ya que la señal retroalimentada es proporcional a la salida del sistema.

Como otro ejemplo, considere el sistema de segundo orden

$$H(s) = \frac{b}{s^2 + a}. \tag{11.12}$$

Si $a > 0$, el sistema es un oscilador [es decir, $H(s)$ tiene sus polos en el eje $j\omega$] y la respuesta del sistema al impulso es senoidal. Si $a < 0$, $H(s)$ tiene un polo en el semiplano izquierdo y uno en el semiplano derecho. Por lo tanto, en cualquier caso el sistema es inestable. De hecho, como se considera en el problema 11.56, la función del sistema dada en la ecuación (11.12) con $a < 0$ se puede usar para modelar la dinámica del péndulo invertido, el cual se describió en la introducción.

Consideremos primero el uso de la retroalimentación proporcional para este ejemplo; esto es, tomamos

$$G(s) = K. \tag{11.13}$$

Sustituyendo en la ecuación (11.1), obtenemos

$$Q(s) = \frac{b}{s^2 + (a + Kb)}. \tag{11.14}$$

En nuestro análisis de sistemas de segundo orden en el capítulo 6 examinamos una función del sistema de la forma

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{11.15}$$

Para que estos sistemas sean estables, ω_n debe ser real y positiva (es decir, $\omega_n^2 > 0$) y ζ debe ser positivo (debe corresponder a un amortiguamiento positivo). A partir de las ecuaciones (11.14) y (11.15), vemos que con la retroalimentación proporcional sólo podemos variar el valor de ω_n^2 y en consecuencia no podemos estabilizar el sistema, ya que no podemos introducir ningún amortiguamiento. Para sugerir un tipo de retroalimentación que pueda usarse para estabilizar este sistema, recordemos el sistema mecánico de masa-resorte-amortiguador descrito en nuestro análisis de los sistemas de segundo orden en la sección 6.5.2. Para este sistema vimos que el amortiguamiento del mismo era el resultado de incluir un amortiguador, el cual proporcionaba una fuerza de restauración proporcional a la *velocidad* de la masa. Esto sugiere, entonces, que consideremos una retroalimentación *proporcional más derivativa*, es decir, una $G(s)$ de la forma

$$G(s) = K_1 + K_2 s, \tag{11.16}$$

con la cual se obtiene

$$Q(s) = \frac{b}{s^2 + bK_2 s + (a + K_1 b)}. \tag{11.17}$$

Los polos de lazo cerrado estarán en el semiplano izquierdo y entonces el sistema de lazo cerrado será estable siempre y cuando escojamos K_1 y K_2 para garantizar que

$$bK_2 > 0, \qquad a + K_1 b > 0. \tag{11.18}$$

La exposición anterior ilustra cómo se puede usar la retroalimentación para estabilizar los sistemas continuos. La estabilización de sistemas inestables es una aplicación importante de la retroalimentación en el caso de sistemas discretos. Ejemplos de sistemas discretos que son inestables en ausencia de retroalimentación son los modelos de crecimiento de la población. Para mostrar la forma en que la retroalimentación puede prevenir el crecimiento desmedido de la población, consideremos un modelo simple para la evolución de la población de una sola especie de animal. Sea $y[n]$ el número de animales de la n generación, y suponga que sin la presencia de influencias ni impedimentos de ningún tipo, la tasa de natalidad es tal que la población se duplica en cada generación. En este caso, la ecuación básica de la dinámica de la población de la especie es

$$y[n] = 2y[n-1] + e[n], \tag{11.19}$$

donde $e[n]$ representa cualquier incremento o disminución de la población causados por influencias externas.

Este modelo de población es obviamente inestable, con una respuesta al impulso que crece exponencialmente. Sin embargo, en cualquier sistema ecológico hay diversos factores que inhiben el crecimiento de una población. Por ejemplo, las limitaciones en el abastecimiento de alimento para estas especies se manifestarán por sí mismas a través de la reducción en el crecimiento de la población cuando el número de animales se incremente. De manera similar, si las especies tienen enemigos naturales es razonable suponer que la población de los depredadores crecerá cuando la población de las presas se incremente y, en consecuencia, que la presencia de los enemigos naturales retardará el crecimiento de la población. Además de

influencias naturales como éstas también puede haber efectos introducidos por el hombre que ayudan al control de la población. Por ejemplo, el abastecimiento de alimentos o la población de los depredadores pueden disminuir a causa de regulaciones humanas. Por otro lado, la introducción de peces en los lagos o la importación de animales de otras áreas pueden usarse para promover el crecimiento, y el control de la caza o la pesca también pueden ejercer un efecto regulativo. Puesto que todas estas influencias dependen del tamaño de la población (ya sea natural o premeditada), representan entonces efectos de retroalimentación.

Con base en el análisis anterior, podemos separar $e[n]$ en dos partes por medio de la ecuación

$$e[n] = x[n] - r[n], \tag{11.20}$$

donde $r[n]$ representa el efecto de las influencias reguladoras descritas anteriormente y $x[n]$ incorpora cualquier otro efecto externo, como la migración de animales, desastres naturales o enfermedades. Observe que hemos incluido un signo de menos en la ecuación (11.20). Esto es compatible con nuestra convención de usar retroalimentación negativa, y aquí también tiene la interpretación física de que, ya que el crecimiento desmedido de la población es inestable, el término de la retroalimentación juega el papel de influencia *retardadora*. Para ver cómo se puede controlar la población mediante la presencia de este término de retroalimentación, suponga que las influencias reguladoras son responsables de la disminución de una proporción fija β de la población en cada generación. Puesto que, de acuerdo con nuestro modelo, la parte sobreviviente de cada generación será del doble de tamaño, se sigue que

$$y[n] = 2(1 - \beta)y[n - 1] + x[n]. \tag{11.21}$$

Comparando la ecuación (11.21) con las ecuaciones (11.19) y (11.20), vemos que

$$r[n] = 2\beta y[n - 1]. \tag{11.22}$$

El factor de 2 representa aquí el hecho de que la mortandad de la población presente disminuye el número de nacimientos en la siguiente generación.

Este ejemplo del uso de la retroalimentación se ilustra en la figura 11.5. En ella la función del sistema de la trayectoria directa se obtiene a partir de la ecuación (11.19) como

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \tag{11.23}$$

mientras que de la ecuación (11.22) la función del sistema de la trayectoria de retroalimentación es

$$G(z) = 2\beta z^{-1}. \tag{11.24}$$

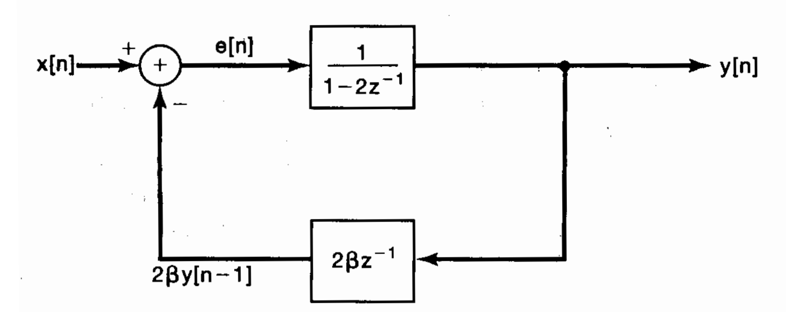


Figura 11.5 Diagrama de bloques de un modelo simple de retroalimentación de la dinámica de la población.

En consecuencia, la función del sistema de lazo cerrado es

$$Q(z) = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)} = \frac{1}{1 - 2(1 - \beta)z^{-1}}. \tag{11.25}$$

Si $\beta < 1/2$, el sistema de lazo cerrado es aún inestable, mientras que es estable[1] si $1/2 < \beta < 3/2$.

Claramente, este ejemplo de crecimiento y control de la población se ha simplificado en extremo. Por ejemplo, el modelo de retroalimentación de la ecuación (11.22) no toma en cuenta el hecho de que la parte de $r[n]$ que se debe a la presencia de enemigos naturales depende de la población de los depredadores, la cual tiene su propia dinámica de crecimiento. Tales efectos pueden incorporarse haciendo el modelo de retroalimentación más complejo para reflejar la presencia de otras dinámicas dentro de un sistema ecológico, y los modelos resultantes para la evolución de las especies que influyen unas sobre otras son en extremo importantes en los estudios ecológicos. Sin embargo, aun sin la incorporación de estos efectos, el simple modelo que hemos descrito aquí ilustra las ideas básicas de cómo la retroalimentación puede prevenir la proliferación ilimitada de una especie así como su extinción. En particular, podemos ver en un nivel elemental la forma en que pueden usarse los factores humanos inducidos. Por ejemplo, si un desastre natural o un incremento en la población de los enemigos naturales causa una disminución drástica de la población de una especie, se pueden aplicar limitaciones a la caza o la pesca e incrementar los esfuerzos para aumentar la población, disminuyendo así β para *desestabilizar* el sistema y permitir un rápido crecimiento hasta que se obtenga de nuevo un tamaño de población normal.

Observe también que para este tipo de problema, usualmente no es el caso de que uno quiera lograr una estricta estabilidad. Si las influencias reguladoras son tales que $\beta = 1/2$, y si todas las demás influencias externas son cero (es decir, si $x[n] = 0$), entonces $y[n] = y[n-1]$. Por lo tanto, mientras $x[n]$ sea pequeña y su promedio sea cero a lo largo de varias generaciones, un valor de $\beta = 1/2$ dará como resultado una población esencialmente constante. Sin embargo, para este valor de β el sistema es inestable, ya que en este caso la ecuación (11.21) se reduce a

$$y[n] = y[n-1] + x[n]. \tag{11.26}$$

Esto es, el sistema es equivalente a un acumulador. Por lo tanto, si $x[n]$ es un escalón unitario, la salida crece sin límite. En consecuencia, si se espera una tendencia estable en $x[n]$, ocasionada, por ejemplo, por una migración de animales hacia una región, se necesitará usar un valor de $\beta > 1/2$ para estabilizar el sistema y por lo tanto para conservar la población dentro de los límites de modo que se mantenga el balance ecológico.

11.2.4 Sistemas retroalimentados para datos muestreados

Además de los problemas como el antes descrito, las técnicas de retroalimentación en el caso discreto son de gran importancia en una amplia variedad de aplicaciones que involucran sistemas continuos. La flexibilidad de los sistemas digitales ha hecho que la construcción de *sistemas retroalimentados para datos muestreados* sea una opción extremadamente atractiva. En tales sistemas la salida de un sistema continuo es muestreada, se realiza algún proceso en la secuencia de muestras resultante y se genera una secuencia discreta de comandos de retroalimentación. Esta secuencia se convierte entonces en una señal

[1]Aunque, en el contexto del ejemplo de población, β nunca puede exceder la unidad, ya que $\beta > 1$ corresponde a eliminar más del 100% de la población.

continua la cual es retroalimentada y restada de la entrada externa para producir la entrada real al sistema continuo.

Claramente, la restricción de causalidad de los sistemas de retroalimentación imponen una restricción en el proceso de conversión de la señal retroalimentada discreta a una señal continua (es decir, no se permite el filtrado paso bajas ideal ni alguna aproximación no causal). Uno de los sistemas de conversión más ampliamente usados es el retenedor de orden cero (presentado en la sección 7.1.2). En la figura 11.6(a) se muestra la estructura de un sistema de retroalimentación para datos muestreados que incluye un retenedor de orden cero. En esta figura tenemos un sistema LTI continuo con función del sistema $H(s)$ que es muestreada para producir una secuencia discreta

$$p[n] = y(nT). \tag{11.27}$$

La secuencia $p[n]$ es entonces procesada mediante un sistema LTI discreto con función del sistema $G(z)$, y la salida resultante se pasa a través de un retenedor de orden cero para producir la señal continua

$$z(t) = d[n] \qquad \text{para} \qquad nT \leq t < (n+1)T. \tag{11.28}$$

Esta señal se resta de la entrada externa $x(t)$ para producir $e(t)$.

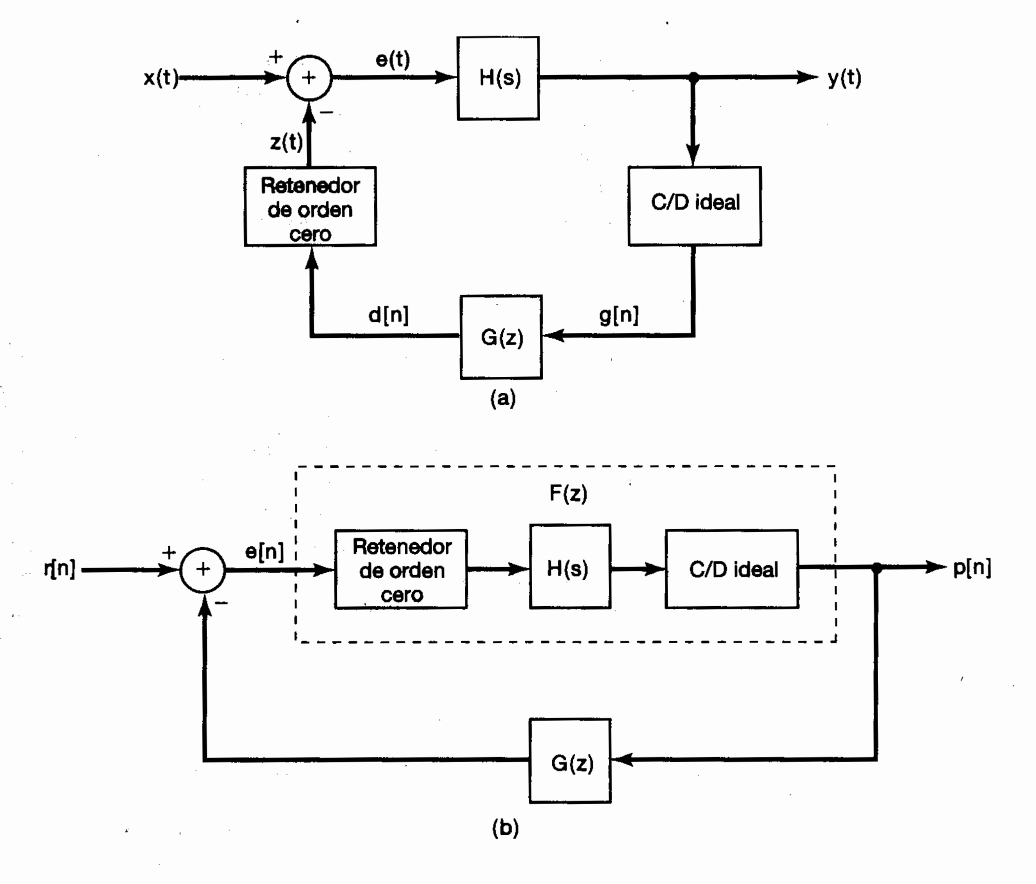


Figura 11.6 (a) Sistema retroalimentado de muestreo de datos que utiliza un retenedor de orden cero; (b) sistema equivalente discreto.

Suponga también que $x(t)$ es constante sobre intervalos de longitud T. Esto es,

$$x(t) = r[n] \qquad \text{para} \qquad nT \leq t < (n+1)T, \tag{11.29}$$

donde $r[n]$ es una secuencia discreta. Ésta es una aproximación que resulta válida comúnmente en la práctica, ya que por lo general la velocidad de muestreo es bastante más rápida de modo que $x(t)$ no cambia de manera apreciable en los intervalos de longitud T. Además, en muchas aplicaciones la entrada externa es generada realmente al aplicar una operación de retenedor de orden cero a una secuencia discreta. Por ejemplo, en sistemas como un avión de tecnología avanzada, las entradas externas representan las órdenes del operador humano que son procesadas primero de manera digital y después reconvertidas en señales de entrada continuas. Debido a que el retenedor de orden cero es una operación lineal, el sistema retroalimentado de la figura 11.6(a), cuando $x(t)$ está dada por la ecuación (11.29), es equivalente al de la figura 11.6(b).

Como se muestra en el problema 11.60, el sistema discreto con entrada $e[n]$ y salida $p[n]$ es un sistema LTI con función del sistema $F(z)$ que está relacionada con la función del sistema $H(s)$ continuo por medio de una transformación de *paso invariante*. Es decir, si $s(t)$ es la respuesta al escalón del sistema continuo, entonces la respuesta al escalón $q[n]$ del sistema discreto consiste de muestras igualmente espaciadas de $s(t)$. Matemáticamente,

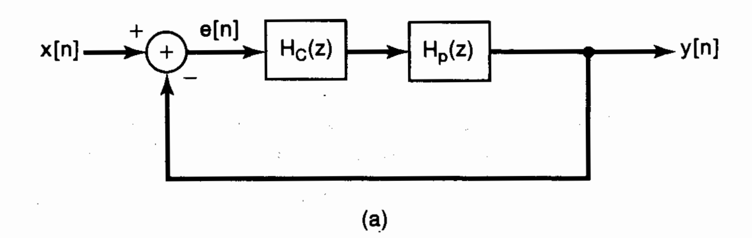
$$q[n] = s(nT) \qquad \text{para toda } n. \tag{11.30}$$

Una vez que hemos determinado $F(z)$, tenemos un modelo completo del sistema retroalimentado discreto (figura 11.6(b)) que captura de manera exacta el comportamiento del sistema retroalimentado continuo (figura 11.6(a)) en instantes de muestreo $t = nT$, y podemos entonces considerar el diseño de función del sistema $G(z)$ para lograr nuestros objetivos deseados. En el problema 11.60 se analiza con detalle un ejemplo de diseño del sistema retroalimentado para datos muestreados para estabilizar un sistema continuo.

11.2.5 Sistemas de rastreo

Como se mencionó en la sección 11.0, una de las más importantes aplicaciones de la retroalimentación es la del diseño de sistemas en los cuales el objetivo es que la salida rastree o siga la entrada. Existe una amplia variedad de problemas en los cuales el seguimiento es un componente importante. Por ejemplo, el problema de direccionamiento del telescopio analizado en la sección 11.0 es un problema de rastreo. El sistema de retroalimentación de las figuras 11.1(c) y (d) tiene como su entrada el ángulo de la dirección deseada, y el propósito del lazo de retroalimentación es proporcionar un mecanismo que impulse el telescopio para que siga la entrada. En los pilotos automáticos de los aviones, la entrada es la trayectoria de vuelo deseada del vehículo, y el sistema retroalimentado de piloto automático usa las superficies de control de la aeronave (timón de dirección, alerones y elevador) y el control de impulso para mantener la aeronave en el curso prescrito.

Para ilustrar algunos de los problemas que surgen en el diseño de los sistemas de rastreo, considere el sistema retroalimentado discreto que se muestra en la figura 11.7(a). El examen de los sistemas de rastreo discretos de este tipo surge a menudo al analizar las características de los sistemas de seguimiento para datos muestreados para aplicaciones continuas. Un ejemplo de este sistema es un piloto automático digital. En la figura 11.7(a) $H_p(z)$ indica la función del sistema cuya salida será controlada. Este sistema se conoce comúnmente como la *planta*, terminología que puede provenir de aplicaciones como el



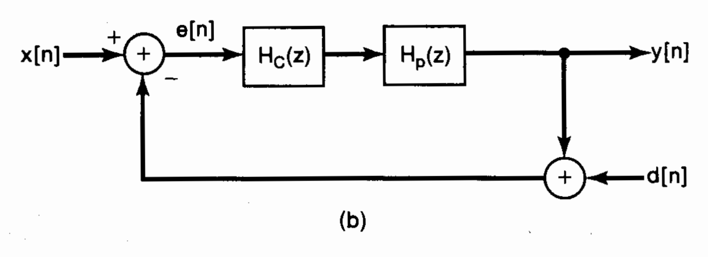


Figura 11.7 (a) Sistema discreto de seguimiento; (b) sistema de seguimiento de (a) con un disturbio $d[n]$ en la trayectoria de retroalimentación para tomar en cuenta la presencia de errores de medición.

control de plantas de potencia, sistemas de calefacción y plantas de procesamiento de químicos. La función del sistema $H_c(z)$ representa un compensador, el cual es el elemento que deberá ser diseñado. Aquí la entrada al compensador es el error de rastreo, esto es, la diferencia $e[n]$ entre la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$. La salida del compensador es la entrada a la planta [por ejemplo, el voltaje real aplicado al motor en el sistema de retroalimentación de las figuras 11.1(c) y (d) o la entrada física real para el sistema de accionamiento del timón de dirección en una aeronave].

Para simplificar la notación, sea $H(z) = H_c(z)H_p(z)$. En este caso la aplicación de la ecuación (11.2) produce la siguiente relación

$$Y(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z)} X(z). \tag{11.31}$$

También, ya que $Y(z) = H(z)E(z)$, vemos que

$$E(z) = \frac{1}{1 + H(z)} X(z), \tag{11.32}$$

o, específicamente, haciendo $z = e^{j\omega}$, obtenemos

$$E(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + H(e^{j\omega})} X(e^{j\omega}). \tag{11.33}$$

La ecuación (11.33) nos da una idea acerca del diseño de los sistemas de rastreo. En concreto, para un buen rastreo es conveniente que $e[n]$ o, de manera equivalente, $E(e^{j\omega})$ sean pequeñas. Esto es,

$$\frac{1}{1 + H(e^{j\omega})} X(e^{j\omega}) \simeq 0. \tag{11.34}$$

En consecuencia, para que el intervalo de frecuencias para el cual $X(e^{j\omega})$ es diferente de cero, $|H(e^{j\omega})|$ debe ser grande. Por lo tanto, tenemos uno de los principios fundamentales del diseño de sistemas retroalimentados: Un buen desempeño en el rastreo requiere de una gran ganancia. Sin embargo, por diversas razones, el deseo de una gran ganancia por lo general debe ser moderado. Una de ellas es que si la ganancia de *demasiado* grande, el sistema de lazo cerrado puede presentar características indeseables (como muy poco

amortiguamiento) o puede de hecho convertirse en inestable. Esta posibilidad se examina en la próxima subsección y también se hace referencia a ella en los métodos desarrollados en las siguientes secciones.

Además del problema de la estabilidad, hay otras razones para querer limitar la ganancia en un sistema de rastreo. Por ejemplo, al construir un sistema de éstos debemos medir la salida $y[n]$ para compararla con la entrada $x[n]$, pero cualquier dispositivo de medición usado tendrá incertidumbres y fuentes de error (como ruido térmico en los componentes electrónicos del dispositivo de medición). En la figura 11.7(b) hemos incluido tales fuentes de error en la forma de una entrada alterada $d[n]$ en el lazo de retroalimentación. Aplicando álgebra simple a la función del sistema se obtiene la siguiente relación entre $Y(z)$ y las transformadas $X(z)$ y $D(z)$ de $x[n]$ y $d[n]$:

$$Y(z) = \left[\frac{H(z)}{1 + H(z)} X(z)\right] - \left[\frac{H(z)}{1 + H(z)} D(z)\right]. \tag{11.35}$$

A partir de esta expresión vemos que, para minimizar la influencia de $d[n]$ en $y[n]$, es conveniente que $H(z)$ sea pequeña para que el segundo término del miembro derecho de la ecuación (11.35) sea pequeño.

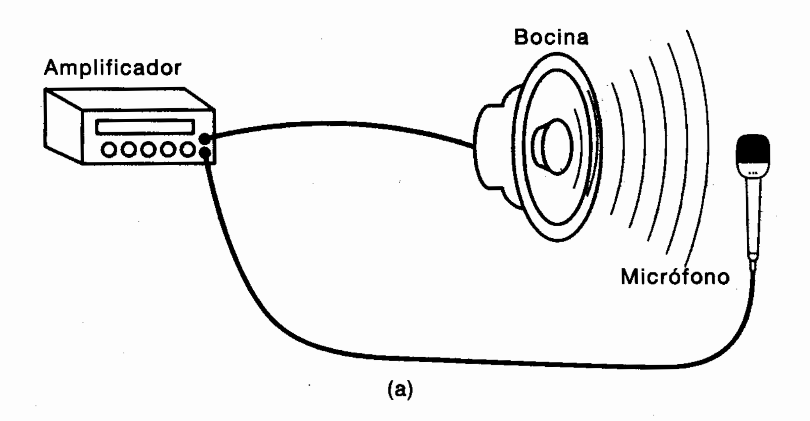
Partiendo del desarrollo precedente vemos que los objetivos de rastrear y de minimizar el efecto de los errores de medición son conflictivos, y debemos tomar esto en cuenta para obtener un diseño aceptable del sistema. En general el diseño depende de información más detallada concerniente a las características de la entrada $x[n]$ y de la alteración $d[n]$. Por ejemplo, en muchas aplicaciones $x[n]$ tiene una cantidad importante de su energía concentrada en las frecuencias bajas, mientras que las fuentes de errores de medición como el ruido térmico tienen gran cantidad de energía en las frecuencias altas. En consecuencia, uno por lo general diseña el compensador $H_c(z)$ de manera que $|H(e^{j\omega})|$ sea grande a bajas frecuencias y pequeño para ω cuando se acerca a $\pm\pi$.

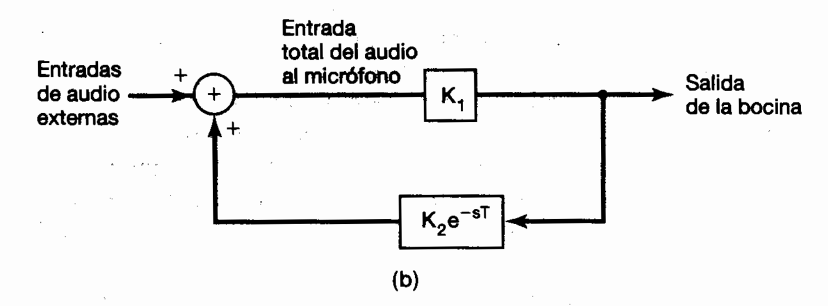
Hay varios problemas que se deben considerar al diseñar sistemas de rastreo, como la presencia de alteraciones en otros puntos del lazo de retroalimentación. (Por ejemplo, el efecto del viento sobre el movimiento de la aeronave debe tomarse en cuenta para diseñar un piloto automático.) Los métodos de análisis de sistemas retroalimentados introducidos en este capítulo proporcionan las herramientas necesarias para investigar otros aspectos del problema de diseñar sistemas de rastreo.

11.2.6 Desestabilización causada por la retroalimentación

Aun cuando tiene muchas aplicaciones, la retroalimentación también puede presentar efectos indeseables y puede de hecho causar inestabilidad. Por ejemplo, considere el sistema de direccionamiento del telescopio ilustrado en la figura 11.1. Del análisis en la sección anterior sabemos que sería conveniente tener una ganancia grande del amplificador para lograr un buen desempeño en el rastreo del ángulo de direccionamiento deseado. Por otro lado, a medida que incrementamos la ganancia, es probable que obtengamos una respuesta de rastreo más rápida a expensas de una reducción en el amortiguamiento del sistema, lo cual dará como resultado sobretiro y oscilaciones significativas en la respuesta a cambios en el ángulo deseado. Además, sería posible que apareciera la inestabilidad si se incrementa demasiado la ganancia.

Otro ejemplo común del posible efecto de desestabilización producido por la retroalimentación es la retroalimentación en sistemas de audio. Considere la situación ilustrada en la figura 11.8(a). Aquí un altavoz produce una señal de audio que es una versión amplificada del sonido captado por un micrófono. Observe que además de otras entradas de audio, el sonido que proviene de la misma bocina puede ser detectado por el micró-





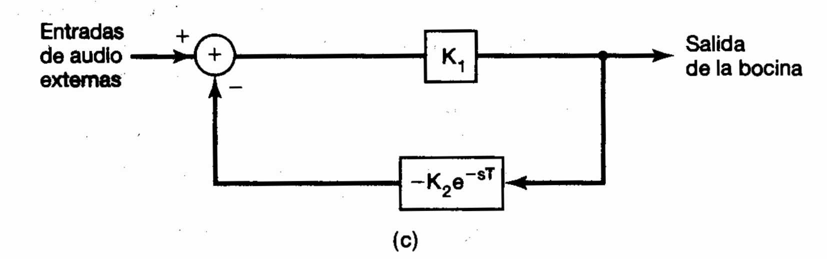


Figura 11.8 (a) Representación gráfica del fenómeno de retroalimentación de audio; (b) representación en diagrama de bloques de (a); (c) diagrama de bloques en (b) redibujado como un sistema de retroalimentación negativa. (*Nota:* e^{-sT} es la función del sistema de un retraso de tiempo de T segundos.)

fono. Qué tan fuerte sea esta señal particular dependerá de la distancia que haya entre la bocina y el micrófono. De manera específica, debido a las propiedades de atenuación del aire, la intensidad de la señal que llega al micrófono desde la bocina disminuye conforme se incrementa la distancia entre ésta y el micrófono. Además, debido a la velocidad finita de propagación de las ondas sonoras, hay un tiempo de retraso entre la señal producida por la bocina y la que detecta el micrófono.

Este sistema de retroalimentación de audio se representa en forma de diagrama de bloques en la figura 11.8(b). En ella la constante K_2 en la trayectoria de retroalimentación representa la atenuación y T es el retraso por propagación. La constante K_1 es la ganancia del amplificador. Observe también que la salida desde la trayectoria de retroalimentación se *suma* a la entrada externa. Esto es un ejemplo de *retroalimentación positiva*. Como se analizó al inicio de esta sección, el uso del signo negativo en la definición de nuestro sistema de retroalimentación básico de la figura 11.3 es totalmente por convención, y los sistemas de retroalimentación positiva y negativa pueden analizarse usando las mismas herramientas. Por ejemplo, como se ilustra en la figura 11.8(c), el sistema de retroalimentación de la figura 11.8(b) puede ser escrito como un sistema de retroalimentación negativa poniendo un signo de menos a la función del sistema de la trayectoria de retroalimentación. A partir de esta figu-

ra y de la ecuación (11.1) podemos determinar la función del sistema de lazo cerrado como

$$Q(s) = \frac{K_1}{1 - K_1 K_2 e^{-sT}}. \tag{11.36}$$

Posteriormente retornaremos a este ejemplo y, usando una técnica que desarrollaremos en la sección 11.3, demostraremos que el sistema de la figura 11.8 es inestable si

$$K_1 K_2 > 1. \tag{11.37}$$

Ya que la atenuación debida a la propagación del sonido a través del aire disminuye (es decir, K_2 se *incrementa*) conforme la distancia entre la bocina y el micrófono disminuye, vemos que si el micrófono se coloca demasiado cerca de la bocina de manera que la ecuación (11.37) se satisfaga, el sistema será inestable. El resultado de esta inestabilidad será una excesiva amplificación y distorsión de las señales de audio.

Es interesante notar que la retroalimentación positiva, o como Black la llamaba, *regenerativa*, también se había conocido por algún tiempo antes de que él inventara su amplificador de retroalimentación negativa e, irónicamente, había sido vista como un mecanismo muy útil (en contraste con el escepticismo que despertó la retroalimentación negativa). En realidad, la retroalimentación positiva puede ser útil. Por ejemplo, ya era conocido por 1920 que la influencia de la desestabilización de la retroalimentación positiva podía usarse para generar señales oscilatorias. Este uso de la retroalimentación positiva se ejemplifica en el problema 11.54.

En esta sección hemos descrito algunas de las aplicaciones de la retroalimentación. Éstas y otras más, como el uso de la retroalimentación en la construcción de filtros recursivos de tiempo discreto (problema 11.55), son examinados con mayor detalle en los problemas al final del capítulo. De nuestro examen de los usos de la retroalimentación y de los posibles efectos estabilizadores y desestabilizadores que puede provocar, resulta claro que se debe tener cuidado en el diseño y análisis de los sistemas retroalimentados para asegurar que el sistema de lazo cerrado se comporte de la manera deseada. Específicamente, en las secciones 11.2.3 y 11.2.6 hemos visto varios ejemplos de sistemas retroalimentados en los cuales las características del sistema de lazo cerrado pueden verse alteradas en forma significativa por cambios en los valores de uno o dos parámetros en el sistema de retroalimentación. En el resto de las secciones de este capítulo desarrollaremos varias técnicas para analizar el efecto de los cambios de tales parámetros en el sistema de lazo cerrado y para el diseño de sistemas que cumplan con los objetivos deseados, como la estabilidad, el amortiguamiento adecuado, etcétera.

11.3 ANÁLISIS DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES DE LOS SISTEMAS LINEALES RETROALIMENTADOS

Como hemos visto en algunos de los ejemplos y aplicaciones que hemos analizado, un sistema de retroalimentación útil es aquel que lleva asociada una ganancia K ajustable. Conforme se varía esta ganancia, resulta interesante examinar cómo cambian los polos del sistema de lazo cerrado, ya que la ubicación de estos polos nos da mucha información acerca del comportamiento del sistema. Por ejemplo, al estabilizar un sistema inestable, la ganancia ajustable se usa para mover los polos hacia el semiplano izquierdo si se trata de un sistema continuo, o hacia adentro del círculo unitario si consiste en un sistema discreto. Adicionalmente, en el problema 11.49 demostramos que la retroalimentación puede usarse para ampliar el ancho de banda de un sistema de primer orden moviendo el polo a fin de disminuir la constante de tiempo del sistema. Aún más, así como la

retroalimentación se puede usar para reubicar los polos a fin de mejorar el desempeño del sistema, como vimos en la sección 11.2.6, existe el peligro potencial de que con una selección incorrecta de la retroalimentación, un sistema estable se desestabilice, lo cual generalmente no se desea.

En esta sección analizamos un método particular para examinar el lugar geométrico (es decir, la trayectoria) en el plano complejo de los polos del sistema de lazo cerrado cuando se varía una ganancia ajustable. El procedimiento se conoce como el *método del lugar geométrico de las raíces*, y es una técnica gráfica para trazar los polos de lazo cerrado de una función del sistema racional $Q(s)$ o $Q(z)$ en función del valor de la ganancia. La técnica se aplica de manera idéntica tanto para los sistemas continuos como para los discretos.

11.3.1 Un ejemplo introductorio

Para ilustrar la naturaleza básica del método del lugar geométrico de las raíces para un sistema retroalimentado, examinaremos de nuevo el ejemplo discreto considerado en la sección anterior, y especificado por las siguientes funciones del sistema:

[ecuación (11.23)] $$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = \frac{z}{z - 2} \tag{11.38}$$

y

[ecuación (11.24)] $$G(z) = 2\beta z^{-1} = \frac{2\beta}{z}, \tag{11.39}$$

donde β es vista ahora como una ganancia ajustable. Entonces, como señalamos anteriormente, la función del sistema de lazo cerrado es

[ecuación (11.25)] $$Q(z) = \frac{1}{1 - 2(1 - \beta)z^{-1}} = \frac{z}{z - 2(1 - \beta)}. \tag{11.40}$$

En este ejemplo es fácil identificar que el polo de lazo cerrado está localizado en $z = 2(1 - \beta)$. En la figura 11.9(a) hemos trazado el lugar geométrico del polo de este sistema conforme β varía de 0 a $+\infty$. En la parte (b) de esta figura hemos trazado el lugar geométrico conforme β varía de 0 a $-\infty$. En cada gráfica hemos indicado el punto $z = 2$, el cual es el polo de lazo abierto [es decir, es el polo de $Q(z)$ para $\beta = 0$]. A medida que β se incrementa a partir de 0, el polo se mueve a la izquierda del punto $z = 2$ a lo largo del eje real, y lo hemos indicado mediante una flecha en la línea gruesa para mostrar cómo cambia el polo conforme β se incrementa. De manera similar, para $\beta < 0$, el polo de $Q(z)$ se mueve hacia la *derecha* de $z = 2$ y la dirección de la flecha en la figura 11.9(b) indica la forma en que el polo cambia conforme la magnitud de β se incrementa. Para $1/2 < \beta < 3/2$, el polo cae dentro del círculo unitario y por lo tanto el sistema es estable.

Como un segundo ejemplo, considere un sistema retroalimentado continuo con

$$H(s) = \frac{s}{s - 2} \tag{11.41}$$

y

$$G(s) = \frac{2\beta}{s}, \tag{11.42}$$

donde β una vez más representa la ganancia ajustable. Puesto que $H(s)$ y $G(s)$ en este ejemplo son algebraicamente idénticas a las $H(z)$ y $G(z)$, respectivamente, del ejemplo

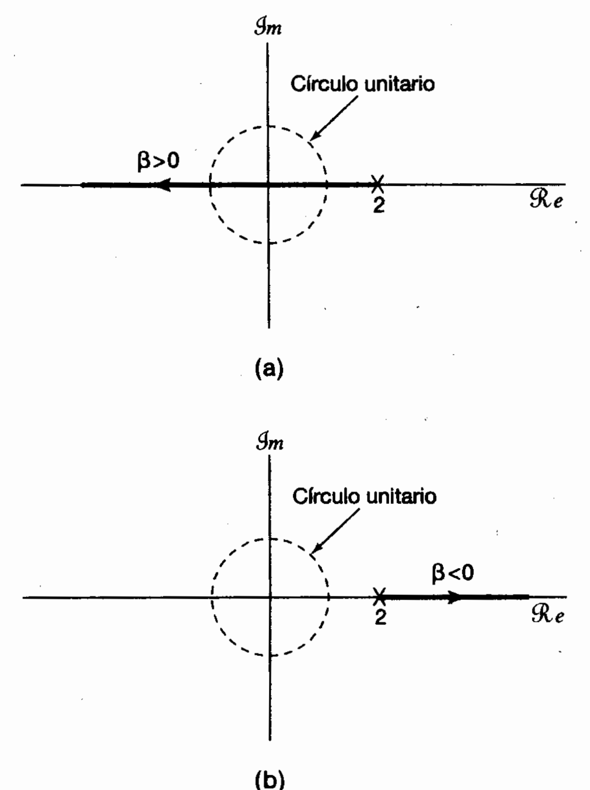


Figura 11.9 Lugar geométrico de las raíces para el sistema de lazo cerrado de la ecuación (11.40) conforme el valor de β se varía: (a) $\beta > 0$; (b) $\beta < 0$. Observe que hemos marcado el punto $z = 2$ que corresponde a la ubicación del polo cuando $\beta = 0$.

anterior, lo mismo se cumplirá para la función del sistema de lazo cerrado

$$Q(s) = \frac{s}{s - 2(1 - \beta)} \tag{11.43}$$

con respecto a $Q(z)$, y el lugar geométrico del polo como una función de β será idéntico al lugar geométrico en ese ejemplo.

La relación entre estos dos ejemplos refuerza el hecho de que el lugar geométrico de los polos está determinado por las expresiones algebraicas de las funciones de sistemas de las trayectorias directa y de retroalimentación y no está asociado en forma inherente con el hecho de si el sistema es continuo o discreto. Sin embargo, la interpretación del resultado sí está relacionada íntimamente con su contexto continuo o discreto. En el caso discreto, lo importante es la ubicación de los polos en relación con el círculo unitario, mientras que en el caso continuo lo que importa es su ubicación con respecto al eje imaginario. Por lo tanto, como hemos visto para el ejemplo discreto en la ecuación (11.40), el sistema es estable para $1/2 < \beta < 3/2$, mientras que para el sistema continuo de la ecuación (11.43) es estable para $\beta > 1$.

11.3.2 Ecuación para los polos de lazo cerrado

En el ejemplo sencillo considerado en la sección anterior el lugar geométrico se trazó fácilmente, ya que primero pudimos determinar en forma explícita el polo de lazo cerrado en función del parámetro de la ganancia y después pudimos dibujar la ubicación del polo conforme variábamos la ganancia. Para sistemas más complejos uno no puede espe-

rar encontrar expresiones tan simples de forma cerrada para los polos de lazo cerrado. Sin embargo, aún es posible dibujar exactamente el lugar geométrico de los polos conforme se varía el valor del parámetro de la ganancia de $-\infty$ a $+\infty$, sin encontrar en realidad la solución explícita para la ubicación de los polos para algún valor específico de la ganancia. Esta técnica para determinar el lugar geométrico de las raíces es en extremo útil para conocer las características de un sistema retroalimentado. Asimismo, conforme desarrollemos el método veremos que, una vez que hayamos determinado el lugar geométrico, existe un procedimiento relativamente directo para determinar el valor del parámetro de la ganancia que produce un polo de lazo cerrado en cualquier ubicación específica a lo largo del lugar geométrico de las raíces. Expresaremos nuestro análisis en términos de la variable s de la transformada de Laplace, en el entendimiento de que se aplica igualmente bien al caso discreto.

Considere una modificación del sistema de retroalimentación básico de la figura 11.3(a), donde $G(s)$ o $H(s)$ están conectadas en cascada con una ganancia ajustable K. Esto se ilustra en la figura 11.10. En cualquiera de estos casos el denominador de la función del sistema de lazo cerrado es $1 + KG(s)H(s)$.[2] Por consiguiente, la ecuación de los polos del sistema de lazo cerrado son las soluciones de la ecuación

$$1 + KG(s)H(s) = 0. \tag{11.44}$$

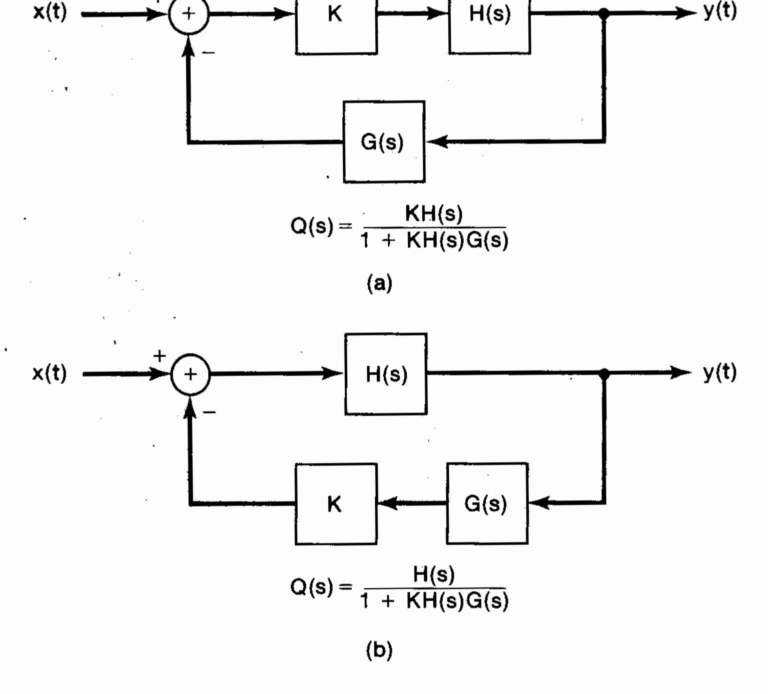


Figura 11.10 Sistemas de retroalimentación que contienen una ganancia ajustable: (a) sistema en el cual la ganancia está localizada en la trayectoria directa; (b) sistema con la ganancia en la trayectoria de retroalimentación.

[2]En el siguiente análisis suponemos, por simplicidad, que no hay cancelación de polos y ceros en el producto $G(s)H(s)$. La presencia de estas cancelaciones de polos y ceros no provoca ninguna dificultad real y el procedimiento que describiremos en esta sección se aplica fácilmente a ese caso (vea el problema 11.32). De hecho, el sencillo ejemplo al inicio de esta sección [las ecuaciones (11.41) y (11.42)] *involucra* una cancelación de polos y ceros en $s = 0$.

Rescribiendo la ecuación (11.44), obtenemos la ecuación básica que determina los polos de lazo cerrado como

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K}. \tag{11.45}$$

La técnica para trazar el lugar geométrico de las raíces se basa en las propiedades de esta ecuación y en sus soluciones. En el resto de esta sección examinaremos algunas de estas propiedades e indicaremos cómo se pueden utilizar para determinar el lugar geométrico de las raíces.

11.3.3 Los puntos extremos del lugar geométrico de las raíces: los polos de lazo cerrado para K = 0 y |K| = +∞

Quizás la observación más inmediata que uno puede hacer sobre el lugar geométrico de las raíces es la que se obtiene al examinar la ecuación (11.45) para $K = 0$ y para $|K| = \infty$. Para $K = 0$ la solución de esta ecuación debe producir los polos de $G(s)H(s)$, ya que $1/K = \infty$. Para ilustrar esta propiedad, recordemos el ejemplo dado por las ecuaciones (11.41) y (11.42). Si hacemos que β tenga el mismo papel que K, vemos que la ecuación (11.45) es ahora

$$\frac{2}{s-2} = -\frac{1}{\beta}. \tag{11.46}$$

Por lo tanto, para $\beta = 0$, el polo del sistema estará localizado en el polo de $2/(s-2)$ (es decir, en $s = 2$), lo cual concuerda con lo que hemos representado en la figura 11.9.

Suponga ahora que $|K| = \infty$. En este caso $1/K = 0$, de manera que las soluciones de la ecuación (11.45) deben aproximarse a los *ceros* de $G(s)H(s)$. Si el orden del numerador de $G(s)H(s)$ es menor que el del denominador, entonces algunos de estos ceros, igual en número a la diferencia del orden del denominador y del numerador, estarán en el infinito.

Remitiéndonos nuevamente a la ecuación (11.46), puesto que el orden del denominador de $2/(s-2)$ es 1 mientras que el orden del numerador es cero, concluimos que en este ejemplo hay sólo un cero en el infinito y no hay ceros en el plano s finito. Por lo tanto, conforme $|\beta| \to \infty$ el polo de lazo cerrado se aproxima al infinito. Una vez más, esto concuerda con la figura 11.9, donde vemos que la magnitud del polo se incrementa sin límite conforme $|\beta| \to \infty$, para $\beta > 0$ o para $\beta < 0$.

Si bien las observaciones que hemos hecho nos proporcionan la información básica acerca de la ubicación de los polos de lazo cerrado para los valores extremos de K, el siguiente resultado es la clave para poder trazar el lugar geométrico de las raíces sin llegar a obtener la solución para los polos de lazo cerrado como funciones explícitas de la ganancia.

11.3.4 El criterio del ángulo

Considere de nuevo la ecuación (11.45). Ya que el miembro derecho de esta ecuación es real, un punto s_0 puede ser un polo de lazo cerrado sólo si el miembro izquierdo de la ecuación, es decir $G(s_0)H(s_0)$, también es real. Escribiendo

$$G(s_0)H(s_0) = |G(s_0)H(s_0)|\, e^{j\measuredangle G(s_0)H(s_0)}, \tag{11.47}$$

vemos que para que $G(s_0)H(s_0)$ sea real, debe cumplirse que

$$e^{j\measuredangle G(s_0)H(s_0)} = \pm 1. \tag{11.48}$$

Esto es, para que s_0 sea un polo de lazo cerrado, debemos tener

$$\sphericalangle G(s_0)H(s_0) = \text{múltiplo entero de } \pi. \tag{11.49}$$

Regresando a la ecuación (11.46), vemos de inmediato que para que $2/(s_0 - 2)$ sea real, es necesario que s_0 sea real. Para funciones de sistema más complejas, no es tan fácil determinar los valores de s_0 para los cuales $G(s_0)H(s_0)$ es real. Sin embargo, como veremos más adelante, el uso del criterio del ángulo dado por la ecuación (11.49), junto con el método geométrico descrito en el capítulo 10 para evaluar $\sphericalangle G(s_0)H(s_0)$, facilita enormemente la determinación del lugar geométrico de las raíces.

El criterio del ángulo dado por la ecuación (11.49) nos proporciona un método directo para determinar si un punto s_0 puede ser un polo de lazo cerrado para *algún* valor de la ganancia K. Un examen adicional de la ecuación (11.45) nos proporciona una manera de calcular el valor de la ganancia correspondiente a cualquier punto del lugar geométrico de las raíces. En concreto, supongamos que s_0 satisface

$$\sphericalangle G(s_0)H(s_0) = \text{múltiplo impar de } \pi. \tag{11.50}$$

Entonces $e^{j\sphericalangle G(s_0)H(s_0)} = -1$, y de la ecuación (11.47) vemos que

$$G(s_0)H(s_0) = -|G(s_0)H(s_0)|. \tag{11.51}$$

Sustituyendo la ecuación (11.51) en la ecuación (11.45) encontramos que si

$$K = \frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|}, \tag{11.52}$$

entonces s_0 es una solución de la ecuación y por lo tanto es un polo de lazo cerrado.

De manera similar, si s_0 satisface la condición

$$\sphericalangle G(s_0)H(s_0) = \text{múltiplo par de } \pi, \tag{11.53}$$

entonces

$$G(s_0)H(s_0) = |G(s_0)H(s_0)|. \tag{11.54}$$

Por lo tanto, si

$$K = -\frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|}, \tag{11.55}$$

entonces s_0 es una solución de la ecuación (11.45) y en consecuencia es un polo de lazo cerrado.

Para el ejemplo dado en la ecuación (11.46), si s_0 está en la línea real y $s_0 < 2$, entonces

$$\sphericalangle\left(\frac{2}{s_0 - 2}\right) = -\pi, \tag{11.56}$$

y a partir de la ecuación (11.52) el valor de β para el cual s_0 es un polo de lazo cerrado está dado por

$$\beta = \frac{1}{\left|\frac{2}{s_0 - 2}\right|} = \frac{2 - s_0}{2}. \tag{11.57}$$

Esto es,

$$s_0 = 2(1 - \beta), \tag{11.58}$$

lo cual concuerda con la ecuación (11.43).

Resumiendo las dos últimas observaciones que hemos hecho, vemos que el *lugar geométrico de las raíces* para el sistema de lazo cerrado, esto es, el conjunto de puntos en el plano s complejo que son polos de lazo cerrado para *algunos* valores de K conforme K varía de $-\infty$ a $+\infty$, son precisamente los puntos que satisfacen la condición del ángulo dada por la ecuación (11.49). Además:

1. Un punto s_0 para el cual

$$\sphericalangle G(s_0)H(s_0) = \text{múltiplo impar de } \pi \tag{11.59}$$

está en el lugar geométrico de las raíces y es un polo de lazo cerrado para algún valor de $K > 0$. El valor de la ganancia que hace que s_0 sea un polo de lazo cerrado está dado por la ecuación (11.52).

2. Un punto s_0 para el cual

$$\sphericalangle G(s_0)H(s_0) = \text{múltiplo par de } \pi \tag{11.60}$$

está en el lugar geométrico de las raíces y es un polo de lazo cerrado para algún valor de $K < 0$. El valor de la ganancia que hace que s_0 sea un polo de lazo cerrado está dado por la ecuación (11.55).

Por lo tanto, hemos reducido ahora el problema de determinar el lugar geométrico de las raíces a la búsqueda de puntos que satisfagan los requerimientos de ángulo dados por las ecuaciones (11.59) y (11.60). Estas ecuaciones pueden ser refinadas aún más para obtener un conjunto de propiedades que ayuden a bosquejar el lugar geométrico de las raíces. Sin embargo, antes de analizarlas, examinemos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 11.1

Considere

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad G(s) = \frac{1}{s+2}. \tag{11.61}$$

Recuerde que en la sección 9.4 analizamos la evaluación geométrica de las transformadas de Laplace. En esa sección vimos que el ángulo de la transformada racional de Laplace

$$\frac{\prod_{k=1}^{m}(s-\beta_k)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)} \tag{11.62}$$

evaluado en algún punto s_0 en el plano complejo es igual a la suma de los ángulos de los vectores que van de cada uno de los ceros a s_0, menos la suma de los ángulos que van de cada uno de los polos a s_0. Aplicando esto al producto de $G(s)H(s)$, donde $G(s)$ y $H(s)$ están dadas en la ecuación (11.61), podemos determinar geométricamente aquellos puntos en el plano s que satisfacen el criterio del ángulo, de acuerdo con las ecuaciones (11.59) y (11.60), y por lo tanto podremos dibujar el lugar geométrico de las raíces.

En la figura 11.11 hemos trazado los polos de $G(s)H(s)$ y hemos señalado con θ y ϕ los ángulos de cada uno de los polos al punto s_0. Probemos primero el criterio del

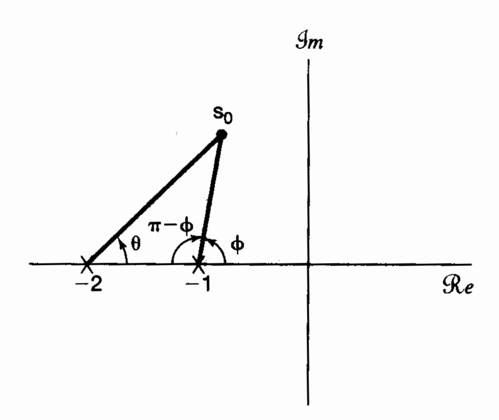


Figura 11.11 Procedimiento geométrico para evaluar el criterio del ángulo del ejemplo 11.1.

ángulo para los puntos s_0 situados en el eje real. Para empezar, la contribución del ángulo de ambos polos es cero cuando s_0 está en el eje real a la derecha de -1. Por lo tanto,

$$\sphericalangle G(s_0)H(s_0) = 0 = 0 \cdot \pi, \qquad s_0 \text{ real y mayor que } -1, \tag{11.63}$$

y según la ecuación (11.60) estos puntos están en el lugar geométrico de las raíces para $K < 0$. Para los puntos entre los dos polos, el polo en -1 contribuye con un ángulo de $-\pi$, y el polo en -2 contribuye con un ángulo de 0. Por lo tanto,

$$\sphericalangle G(s_0)H(s_0) = -\pi, \qquad s_0 \text{ real, en } -2 < s_0 < -1. \tag{11.64}$$

Estos puntos están en el lugar geométrico de las raíces para $K > 0$. Finalmente, cada polo contribuye con un ángulo de $-\pi$ cuando s_0 es real y menor que -2, de manera que

$$\sphericalangle G(s_0)H(s_0) = -2\pi, \qquad s_0 \text{ real y menor que } -2.$$

Por lo tanto, estos puntos están en el lugar geométrico para $K < 0$.

Examinemos ahora los puntos en el semiplano superior del plano s. (Ya que las respuestas al impulso son de valor real, los polos complejos ocurren en pares conjugados. Por lo tanto, podemos determinar inmediatamente los polos en el semiplano inferior después de haber examinado el semiplano superior.) De la figura 11.11, el ángulo de $G(s_0)H(s_0)$ en el punto s_0 es

$$\sphericalangle G(s_0)H(s_0) = -(\theta + \phi). \tag{11.65}$$

También, es claro que conforme s_0 se mueve en el semiplano superior (pero no en el eje real), tenemos

$$0 < \theta < \pi, \qquad 0 < \phi < \pi. \tag{11.66}$$

Por consiguiente,

$$-2\pi < \sphericalangle G(s)H(s) < 0. \tag{11.67}$$

Por lo tanto, vemos inmediatamente que *ningún* punto en el semiplano superior puede estar en el lugar geométrico para $K < 0$ [ya que $\sphericalangle G(s)H(s)$ nunca es igual a un múltiplo par de π]. Además, si s_0 está en el lugar geométrico para $K > 0$, debemos tener

$$\sphericalangle G(s_0)H(s_0) = -(\theta + \phi) = -\pi, \tag{11.68}$$

o

$$\theta = \pi - \phi. \tag{11.69}$$

Examinando la geometría de la figura 11.11, vemos que esto ocurre sólo para aquellos puntos localizados en la línea recta que es paralela al eje imaginario y que divide en dos la línea de unión de los polos localizados en -1 y en -2. Ahora hemos examinado el plano s completo y hemos determinado todos los puntos situados en el lugar geométrico de las raíces. Además, sabemos que para $K = 0$, los polos de lazo cerrado son iguales a los polos de $G(s)H(s)$ y conforme $|K| \to \infty$, los polos de lazo cerrado se dirigen a los ceros de $G(s)H(s)$ los cuales para este caso están en el infinito. Reuniendo todo lo anterior podemos dibujar completo el lugar geométrico de las raíces, el cual se muestra en la figura 11.12, donde hemos indicado la dirección cuando se incrementa $|K|$, tanto para $K > 0$ como para $K < 0$.

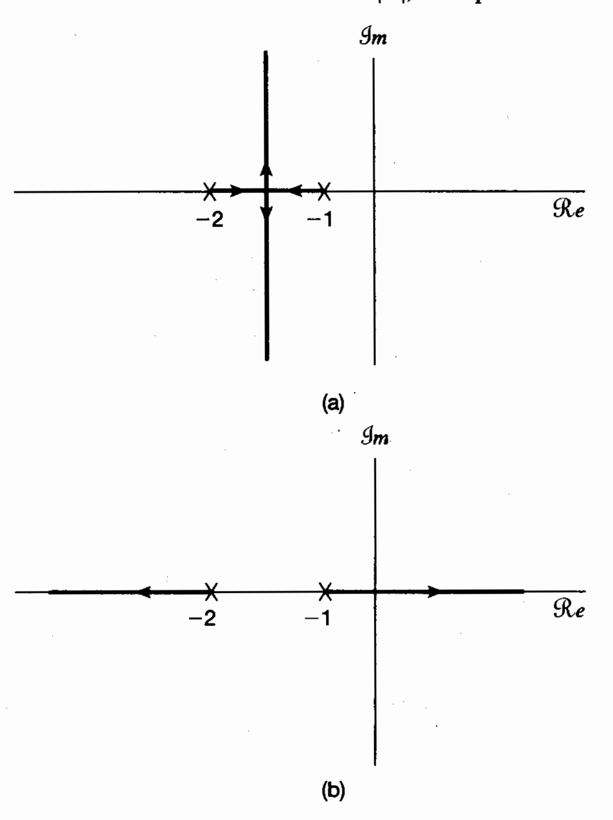


Figura 11.12 Lugar geométrico de las raíces del ejemplo 11.1: (a) $K > 0$; (b) $K < 0$. Se han indicado los polos de $G(s)H(s)$, los cuales están localizados en $s = -1$ y $s = -2$.

Observe en la figura que para $K > 0$ hay dos ramas en el lugar geométrico de las raíces y que esto mismo se cumple para $K < 0$. La razón de la existencia de las dos ramas es que en este ejemplo el sistema de lazo cerrado es un sistema de segundo orden y en consecuencia tiene dos polos para cualquier valor especificado de K. Por lo tanto, el lugar geométrico tiene dos ramas, cada una de las cuales traza la ubicación de uno de los polos de lazo cerrado conforme se varía K, y para cualquier valor particular de K hay un polo de lazo cerrado en cada rama. De nueva cuenta, podemos usar las ecuaciones (11.52) y (11.55) si deseamos calcular el valor de K para el cual un punto específico s_0 del lugar geométrico es un polo de lazo cerrado.

11.3.5 Propiedades del lugar geométrico de las raíces

El procedimiento que esbozamos en la sección anterior nos proporcionan, en principio, un método para la determinación del lugar geométrico de las raíces para cualquier sistema LTI retroalimentado continuo o discreto. Es decir, simplemente determinamos, en forma gráfica o de cualquier otra manera, todos los puntos que satisfacen las ecuaciones (11.59) u (11.60). Afortunadamente existen otras propiedades geométricas relativas a los lugares geométricos las cuales hacen que la graficación del lugar geométrico sea menos tediosa. Para iniciar nuestro análisis de estas propiedades, supongamos que hemos expresado $G(s)H(s)$ en la siguiente forma estándar:

$$G(s)H(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{\prod_{k=1}^{m}(s-\beta_k)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)}, \qquad (11.70)$$

donde las β_k denotan los ceros y las α_k denotan los polos. En general, éstos pueden ser complejos. También, de la ecuación (11.70), podemos ver que estamos suponiendo que el primer coeficiente tanto en el numerador como en el denominador de $G(s)H(s)$ es $+1$. Esto siempre se puede lograr dividiendo el numerador y el denominador entre el coeficiente del denominador de s^n e incluyendo en la ganancia K el coeficiente resultante de s^m del numerador. Por ejemplo,

$$K\frac{2s+1}{3s^2+5s+2} = K\frac{\frac{2}{3}s+\frac{1}{3}}{s^2+\frac{5}{3}s+\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)K\frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+\frac{5}{3}s+\frac{2}{3}}, \qquad (11.71)$$

y la cantidad $(2/3)K$ se considera entonces como la ganancia total que se varía al determinar el lugar geométrico de las raíces.

También suponemos que

$$m \le n, \qquad (11.72)$$

lo cual es el caso que se encuentra comúnmente en la práctica. (El problema 11.33 considera el caso de $m > n$.) A continuación ofrecemos algunas propiedades que incluyen las observaciones hechas anteriormente y que son de ayuda para dibujar el lugar geométrico de las raíces.

Propiedad 1: Para $K = 0$, las soluciones de la ecuación (11.45) son los polos de $G(s)H(s)$. Ya que estamos suponiendo la existencia de n polos, el lugar geométrico de las raíces tiene n ramas, cada una de ellas iniciándose (para $K = 0$) en un polo de $G(s)H(s)$.

La propiedad 1 incluye la versión general de un hecho que anotamos en el ejemplo 11.1: que hay una rama del lugar geométrico de las raíces para cada polo de lazo cerrado. La siguiente propiedad es simplemente el enunciado de una de las observaciones que hicimos anteriormente.

Propiedad 2: A medida que $|K| \to \infty$, cada rama del lugar geométrico de las raíces se aproxima a un cero de $G(s)H(s)$. Ya que estamos suponiendo que $m \le n$, $n - m$ de estos ceros están en el infinito.

Propiedad 3: Las partes del eje s real que caen a la izquierda de un número *impar* de polos y ceros reales de $G(s)H(s)$ están en el lugar geométrico de las raíces para $K > 0$. Las partes del eje s real que caen a la izquierda de un número *par* (posiblemente cero) de polos y ceros de $G(s)H(s)$ están en el lugar geométrico de las raíces para $K < 0$.

Podemos verificar que la propiedad 3 se cumple. De nuestro análisis en el ejemplo 11.1 y a partir de la figura 11.13(a), vemos que si un punto en el eje s real está a la derecha de un polo o cero real de $G(s)H(s)$, ese polo o cero contribuye con cero al ángulo $\sphericalangle G(s_0)H(s_0)$. Por otro lado, si s_0 está a la izquierda de un cero, éste contribuye con $+\pi$, mientras que si s_0 está a la izquierda de un polo, obtenemos una contribución de $-\pi$ (ya que restamos los ángulos de los polos). Por lo tanto, si s_0 está a la izquierda de un número impar de polos y ceros reales, la contribución total de estos polos y ceros es un múltiplo impar de π, mientras que si s_0 está a la izquierda de un número par de polos y ceros reales, la contribución total es un múltiplo par de π. De las ecuaciones (11.59) y (11.60), tendremos el resultado establecido en la propiedad 3 si podemos demostrar que la contribución total de todos los polos y ceros con partes imaginarias diferentes de cero es un múltiplo par de π. La clave está en que todos los polos y ceros ocurren en pares conjugados complejos, y podemos considerar la contribución de cada uno de tales pares, como se muestra en la figura 11.13(b). La simetría en el dibujo indica claramente que la suma de los ángulos de este par a cualquier punto s_0 en el eje real es precisamente 2π. Sumando sobre todos los pares de ceros conjugados y restando la suma sobre todos los pares de polos conjugados, obtenemos el resultado deseado. En consecuencia, *todo* segmento de la línea real entre polos y ceros reales está en el lugar geométrico de las raíces, ya sea para

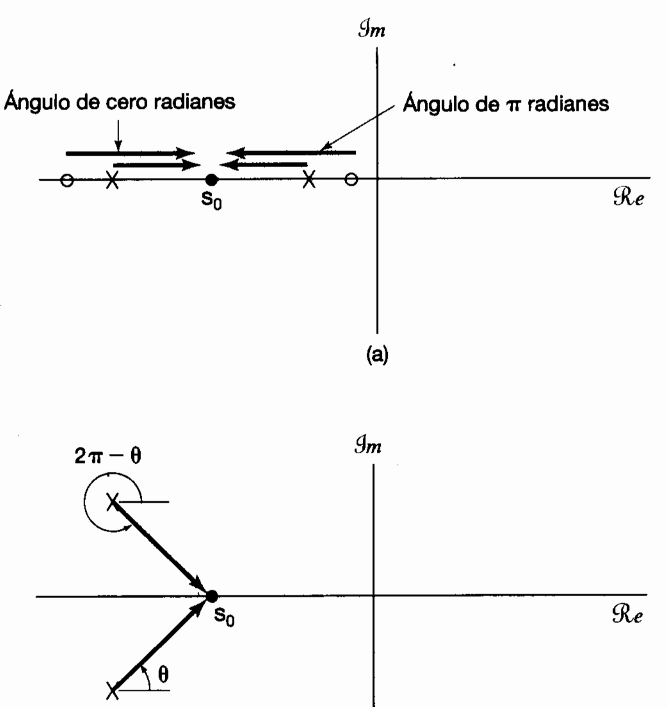


Figura 11.13 (a) Contribución de ángulo de los polos y ceros reales en un punto sobre el eje real; (b) contribución total en ángulo de un par de polos complejos conjugados en un punto sobre el eje real.

$K > 0$ o para $K < 0$, dependiendo de si cae a la izquierda de un número impar o par de polos y ceros de $G(s)H(s)$.

Como consecuencia de las propiedades 1 a 3, considere un segmento del eje real entre dos polos de $G(s)H(s)$ sin ceros entre estos polos. De la propiedad 1, el lugar geométrico de las raíces empieza en los polos y de la propiedad 3 la porción completa del eje real entre estos dos polos caerá en el lugar geométrico de las raíces para un intervalo positivo o negativo de valores de K. Por lo tanto, conforme $|K|$ se incrementa a partir de cero, las dos ramas del lugar geométrico que se inician en estos polos se moverán una hacia la otra a lo largo del segmento del eje real situado entre los polos. De la propiedad 2, conforme $|K|$ se incrementa hacia el infinito, cada rama del lugar geométrico debe aproximarse a cero. Ya que no hay ceros a lo largo de esa porción del eje real, la única manera de que esto pueda ocurrir es que las ramas se desvíen hacia el plano complejo para una $|K|$ lo suficientemente grande. Esto se ilustra en la figura 11.12, donde el lugar geométrico para $K > 0$ tiene una porción entre dos polos reales. Conforme K se incrementa, el lugar geométrico eventualmente abandona el eje real, formando dos ramas conjugadas complejas. Resumiendo este análisis, tenemos la siguiente propiedad del lugar geométrico de las raíces.

Propiedad 4: Las ramas del lugar geométrico de las raíces entre dos polos reales deben desviarse hacia el plano complejo para una $|K|$ lo bastante grande.

Las propiedades 1 a 4 sirven para ejemplificar cómo las características del lugar geométrico de las raíces pueden deducirse a partir de las ecuaciones (11.45), (11.59) y (11.60). En muchos casos, trazar los polos y ceros de $G(s)H(s)$ para usar después estas cuatro propiedades basta para obtener un dibujo del lugar geométrico de las raíces con una exactitud razonable. (Véanse los ejemplos 11.2 y 11.3.) Sin embargo, además de estas propiedades hay muchas otras características del lugar geométrico de las raíces que nos permiten obtener dibujos con mayor exactitud. Por ejemplo, a partir de la propiedad 2 sabemos que $n - m$ ramas del lugar geométrico se aproximan al infinito. De hecho, estas ramas se acercan al infinito con ángulos específicos que pueden calcularse, y por lo tanto son asintóticamente paralelas a líneas con estos ángulos. Más aún, es posible dibujar las asíntotas y determinar el punto en el cual se intersectan. Estas dos propiedades y algunas más se ilustran en los problemas 11.34 a 11.36 y 11.41 a 11.42. Un desarrollo más detallado del método del lugar geométrico de las raíces puede encontrarse en textos más avanzados, como los que mencionamos en la bibliografía al final del libro.

En lo que resta de esta sección presentamos dos ejemplos, uno continuo y otro discreto, que ilustran cómo las cuatro propiedades que hemos descrito nos permiten dibujar el lugar geométrico de las raíces y deducir las características de estabilidad de un sistema retroalimentado a medida que se varía la ganancia K.

Ejemplo 11.2

Considere

$$G(s)H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}. \tag{11.73}$$

A partir de las propiedades 1 y 2, el lugar geométrico de las raíces tanto para K positiva como negativa se inicia en los puntos $s = -1$ y $s = -2$. Una rama termina en el cero situado en $s = 1$ y la otra en el infinito.

Consideremos primero $K > 0$. El lugar geométrico en este caso se ilustra en la figura 11.14(a). Partiendo de la propiedad 3 podemos identificar las regiones del eje real

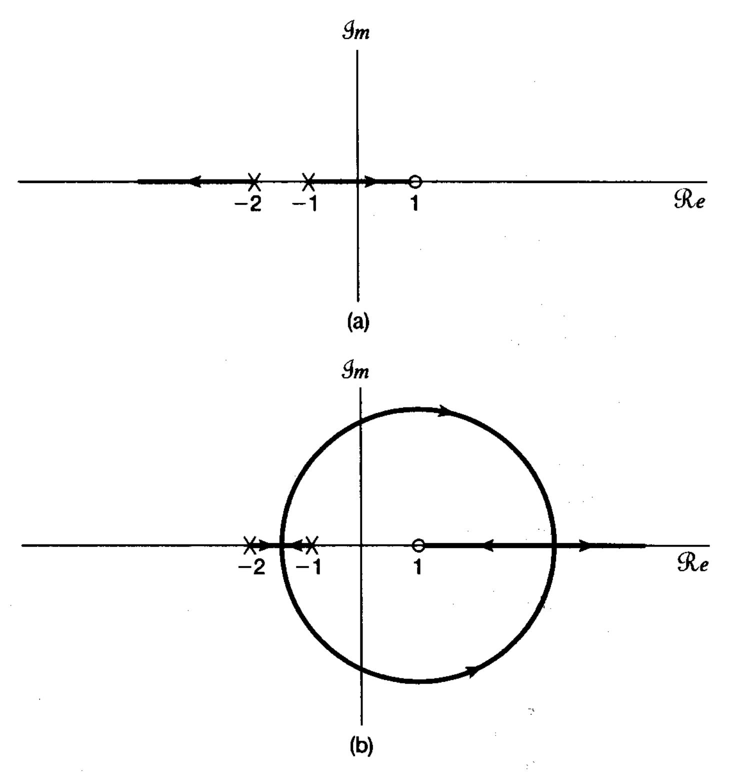


Figura 11.14 Lugar geométrico de las raíces del ejemplo 11.2: (a) $K > 0$; (b) $K < 0$. En la figura están indicados los polos de $G(s)H(s)$ en $s = -1$ y $s = -2$ y el cero de $G(s)H(s)$ en $s = 1$.

que están en el lugar geométrico de las raíces para $K > 0$, específicamente $\mathcal{R}e\{s\} < -2$ y $-1 < \mathcal{R}e\{s\} < 1$. Por lo tanto, una rama del lugar geométrico para $K > 0$ se origina en $s = -1$ y se aproxima a $s = 1$ conforme $K \to \infty$. La otra rama empieza en $s = -2$ y se extiende a la izquierda hacia $\mathcal{R}e\{s\} = -\infty$ conforme $K \to +\infty$.

Por lo tanto, vemos que para $K > 0$, si K es lo suficientemente grande, el sistema llegará a ser inestable, puesto que uno de los polos de lazo cerrado se mueve hacia el semiplano derecho. El procedimiento que hemos empleado para dibujar el lugar geométrico de las raíces no indica, por supuesto, el valor de K para el cual se desarrolla esta inestabilidad. Sin embargo, para este ejemplo en particular, vemos que el valor de K para el cual ocurre la inestabilidad corresponde al lugar geométrico de las raíces cuando pasa a través de $s = 0$. En consecuencia, según la ecuación (11.52) el valor correspondiente de K es

$$K = \frac{1}{|G(0)H(0)|} = 2. \tag{11.74}$$

Por lo tanto, el sistema es estable para $0 \leq K < 2$, pero es inestable para $K \geq 2$.

Para $K < 0$ las porciones del eje real que caen en el lugar geométrico de las raíces son $\mathcal{R}e\{s\} > 1$ y $-2 < \mathcal{R}e\{s\} < -1$. Por lo tanto, el lugar geométrico de nuevo se inicia en los puntos $s = -2$ y $s = -1$, moviéndose hacia la región $-2 < \mathcal{R}e\{s\} < -1$. En algún punto se desvía hacia el plano complejo y sigue una trayectoria tal que regresa al eje real para $s > 1$. Al regresar al eje real, una rama se mueve a la izquierda hacia el cero situado en $s = 1$ y el otro a la derecha hacia $s = \infty$, como se indica en la figura 11.14(b), en la cual presentamos una gráfica exacta del lugar geométrico de las raíces para $K < 0$.

También se pueden desarrollar reglas para indicar las ubicaciones en las cuales el lugar geométrico abandona y entra al eje real. Sin embargo, incluso sin esa descripción precisa, podemos dibujar la forma general del lugar geométrico de las raíces como en la figura 11.14(b) y podemos por tanto deducir que para $K < 0$ el sistema también llega a ser inestable para una $|K|$ lo suficientemente grande.

Ejemplo 11.3

Considere el sistema retroalimentado discreto que se representa en la figura 11.15. En este caso

$$G(z)H(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}. \tag{11.75}$$

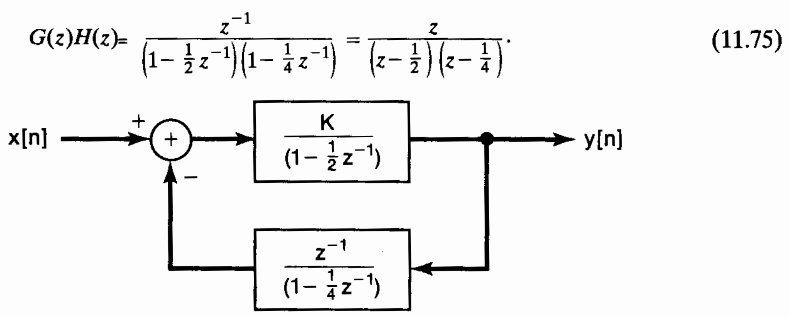


Figura 11.15 Sistema retroalimentado discreto del ejemplo 11.3.

Como mencionábamos al inicio de esta sección, las técnicas para dibujar el lugar geométrico de las raíces de un sistema retroalimentado discreto son idénticas a las usadas en el caso continuo. Por lo tanto, de una manera exactamente análoga a la usada en el ejemplo anterior, podemos deducir la forma básica del lugar geométrico de las raíces para este ejemplo, lo cual se ilustra en la figura 11.16. En este caso, la porción del eje real localizada entre los dos polos de $G(z)H(z)$ (en $z = 1/4$ y $z = 1/2$) está en el lugar geométrico de las raíces para $K > 0$, y a medida que K se incrementa, el lugar geométrico se desvía hacia el plano complejo y regresa al eje en algún punto del semiplano izquierdo. A partir de ahí una rama se aproxima al cero de $G(z)H(z)$ en $z = 0$ y la otra se aproxima a infinito conforme $K \to \infty$. La forma del lugar geométrico de las raíces para $K < 0$ consiste en dos ramas en el eje real, una aproximándose a 0 y la otra a infinito.

Como señalamos anteriormente, si bien la forma del lugar geométrico de las raíces no depende de si el sistema es continuo o discreto, cualquier conclusión respecto a la estabilidad basada en el examen del lugar geométrico ciertamente sí depende del tipo de sistema de que se trate. En cuanto a este ejemplo podemos concluir que para una $|K|$ lo suficientemente grande, el sistema es inestable, ya que uno de los dos polos tiene una magnitud mayor que 1. En particular, a partir del lugar geométrico para $K > 0$ en la figura 11.16(a) podemos ver que la transición de la estabilidad a la inestabilidad ocurre cuando uno de los polos de lazo cerrado está en $z = -1$. De la ecuación (11.52), el valor correspondiente de K es

$$K = \frac{1}{|G(-1)H(-1)|} = \frac{15}{8}. \tag{11.76}$$

De manera similar, gracias a la figura 11.16(b), sabemos que la transición de estabilidad-inestabilidad ocurre cuando uno de los polos de lazo cerrado está en $z = 1$, y de la ecuación (11.55), el valor correspondiente de K es

$$K = -\frac{1}{|G(1)H(1)|} = -\frac{3}{8}. \tag{11.77}$$

Reuniendo esta información vemos que el sistema de lazo cerrado en la figura 11.16 es estable si

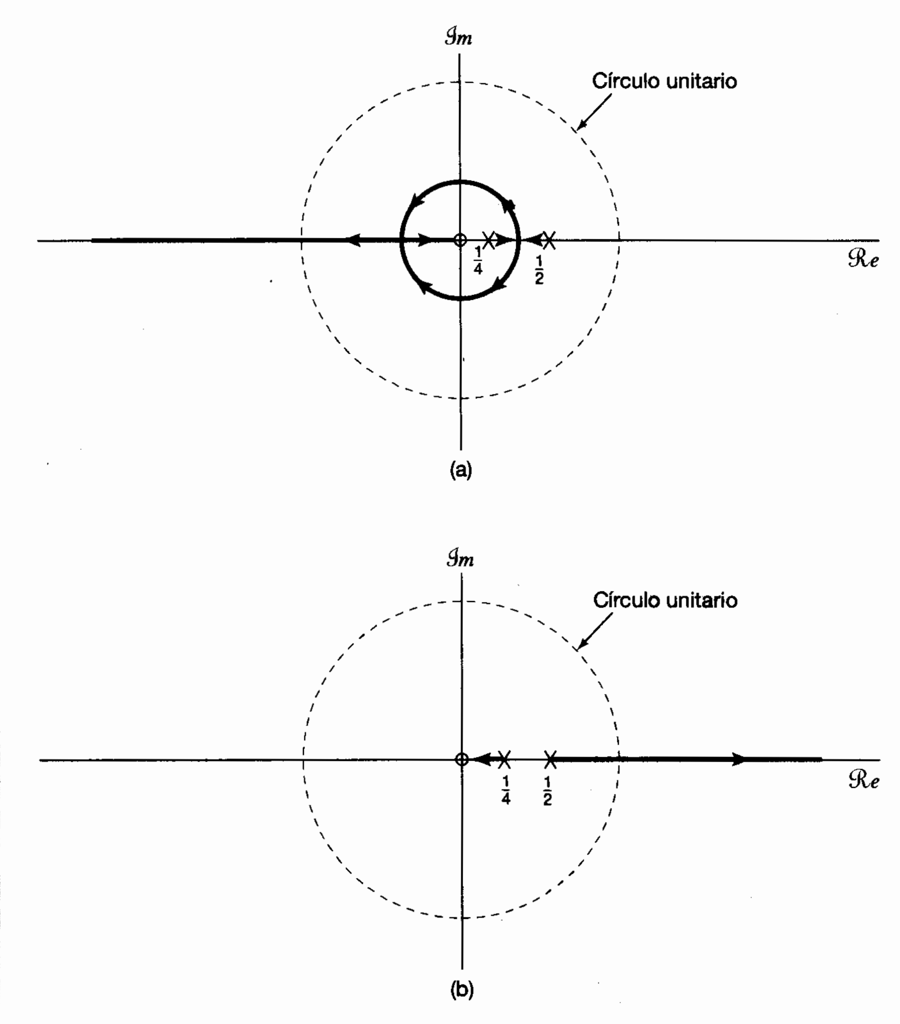


Figura 11.16 Lugar geométrico de las raíces del ejemplo 11.3: (a) $K > 0$; (b) $K < 0$. En la figura están indicados los polos de $G(z)H(z)$ en $z = 1/4$ y $z = 1/2$ y el cero de $G(z)H(z)$ en $z = 0$.

$$-\frac{3}{8} < K < \frac{15}{8} \tag{11.78}$$

y es inestable para valores de K fuera de este intervalo.

11.4 EL CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST

Como se desarrolló en la sección 11.3, la técnica del lugar geométrico de las raíces proporciona información detallada acerca de la ubicación de los polos de lazo cerrado cuando varía la ganancia del sistema. A partir de estos diagramas, uno puede determinar el amortiguamiento del sistema y sus características de estabilidad conforme se varía K. La determinación del lugar geométrico de las raíces requiere de la descripción analítica de las funciones del sistema de las trayectorias directa y de retroalimentación y se aplica sólo

cuando estas transformadas son racionales. Por ejemplo, no se puede aplicar directamente en situaciones en las cuales nuestro conocimiento de las funciones del sistema se obtiene únicamente de forma experimental.

En esta sección presentamos otro método para determinar la estabilidad de sistemas retroalimentados en función de un parámetro de ganancia ajustable. Esta técnica, conocida como el *criterio de Nyquist*, difiere del método del lugar geométrico de las raíces en dos puntos básicos. A diferencia del método del lugar de las raíces, el criterio de Nyquist *no* proporciona información detallada acerca de la ubicación de los polos de lazo cerrado en función de K, sino que, de una manera un tanto sencilla, determina si el sistema es o no es estable para cualquier valor especificado de K. Por otro lado, el criterio de Nyquist se puede aplicar a funciones de sistema no racionales y en situaciones en las cuales no se disponga de una descripción analítica de las funciones del sistema de las trayectorias directa y de retroalimentación.

Nuestro objetivo en esta sección consiste en delinear las ideas básicas que sostienen el criterio de Nyquist tanto para sistemas continuos como discretos. Como veremos a continuación, las pruebas de Nyquist para el caso discreto y el continuo son el resultado del mismo concepto fundamental, aunque, al igual que con el método del lugar geométrico de las raíces, el criterio real para la estabilidad difiere debido a las diferencias entre el caso continuo y el discreto. Un desarrollo más detallado de las ideas en las que se basa el criterio de Nyquist y su uso en el diseño de sistemas retroalimentados puede encontrarse en textos sobre análisis y síntesis de sistemas retroalimentados y sistemas de control automático, de los cuales citamos algunos en la bibliografía al final del libro.

Para introducir el método, recordemos que los polos de los sistemas de lazo cerrado de la figura 11.10 y sus contrapartes discretas son las soluciones de las ecuaciones

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \qquad \text{(tiempo continuo)} \tag{11.79}$$

y

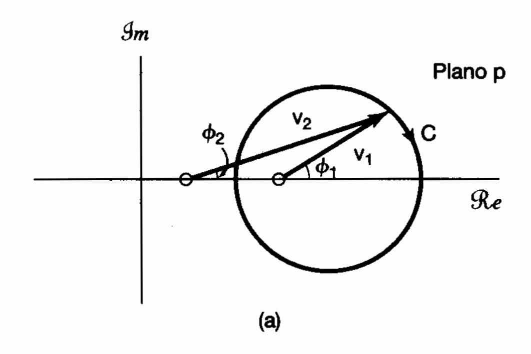
$$1 + KG(z)H(z) = 0 \qquad \text{(tiempo discreto).} \tag{11.80}$$

Para los sistemas discretos, queremos determinar si cualquiera de las soluciones de la ecuación (11.80) cae fuera del círculo unitario, y para sistemas continuos si cualquiera de las soluciones de la ecuación (11.79) cae en la mitad derecha del plano s. El criterio de Nyquist determina lo anterior mediante el examen de los valores de $G(s)H(s)$ a lo largo del eje $j\omega$ y los valores de $G(z)H(z)$ a lo largo del círculo unitario. La base de este criterio es la propiedad de circunvalación, la cual desarrollaremos en la siguiente subsección.

11.4.1 La propiedad de circunvalación

Considere una función general racional $W(p)$, donde p es una variable compleja,[3] y suponga que trazamos $W(p)$ para valores de p a lo largo de un contorno cerrado en el plano p el cual se recorre en el sentido de las manecillas del reloj. Esto se ilustra en la figura 11.17 para una función $W(p)$ que tiene dos ceros y ningún polo. En la figura 11.17(a) mostramos un contorno cerrado C en el plano p, y en la figura 11.17(b) hemos trazado el contorno cerrado de los valores de $W(p)$ conforme p varía alrededor del con-

[3]Debido a que usaremos la propiedad que estamos a punto de desarrollar tanto para sistemas continuos como discretos, hemos decidido expresar la propiedad en términos de una variable compleja general p. En la próxima subsección usaremos esta propiedad para analizar sistemas retroalimentados continuos donde la variable compleja sea s. Siguiendo con lo anterior, en la sección 11.4.3 usaremos la propiedad de circunvalación para sistemas retroalimentados discretos en cuyo contexto la variable compleja sea z.



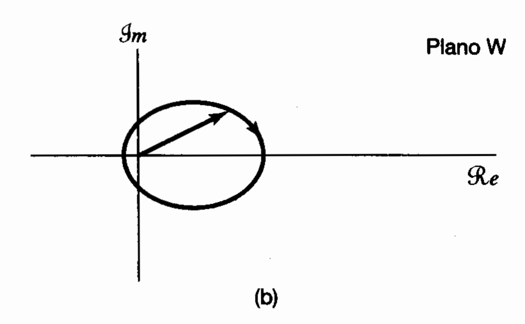


Figura 11.17 Propiedad básica de circunvalación. La curva encerrada en (b) representa una gráfica de los valores de $W(p)$ para los valores de p a lo largo de la curva C en (a). Aquí, la flecha sobre la curva C en (a) indica la dirección en la cual está trazada C, y la flecha en (b) indica la dirección correspondiente a lo largo del contorno de valores de $W(p)$.

torno C. En este ejemplo hay un cero de $W(p)$ dentro del contorno y un cero de $W(p)$ fuera del contorno. En cualquier punto p del contorno C, el ángulo de $W(p)$ es la suma de los ángulos de los dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ al punto p. Al recorrer el contorno una vez, el ángulo ϕ_1 del vector que parte del cero situado *dentro* del contorno encuentra un cambio neto de -2π radianes, mientras que el ángulo ϕ_2 del vector que parte del cero situado *fuera* del contorno no tendrá un cambio neto. En consecuencia, en el diagrama de $W(p)$ hay un cambio neto de ángulo de -2π. Dicho de otra manera, la gráfica de $W(p)$ en la figura 11.17(b) circunda el origen una vez en el sentido de las manecillas del reloj. De manera más general, para una $W(p)$ racional arbitraria, a medida que recorremos un contorno cerrado en esta dirección, todos los polos y ceros de $W(p)$ situados fuera del contorno no contribuirán con un cambio neto en el ángulo de $W(p)$, mientras que cada cero situado dentro del contorno contribuirá con un cambio neto de -2π y cada polo interno aportará un cambio neto de $+2\pi$. Puesto que cada cambio neto de -2π en $W(p)$ corresponde a una circunvalación del origen en el sentido de las manecillas del reloj en la gráfica de $W(p)$, podemos establecer la siguiente *propiedad de circunvalación* básica:

Propiedad de circunvalación: A medida que se recorre una trayectoria cerrada C en el plano p una vez en el sentido de las manecillas del reloj, la gráfica correspondiente de $W(p)$ para valores de p a lo largo del contorno circunda el origen en la dirección mencionada un número neto de veces igual al número de ceros menos el número de polos contenidos dentro del contorno.

Aplicando este enunciado, una circunvalación en sentido contrario al de las manecillas del reloj se interpreta como el negativo de una circunvalación en el sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, si hay un polo y no hay ceros dentro del contorno habrá una circunvalación en sentido contrario o, de forma equivalente, menos una circunvalación en el sentido de las manecillas.

Ejemplo 11.4

Considere la función

$$W(p) = \frac{p - 1}{(p + 1)(p^2 + p + 1)}. \tag{11.81}$$

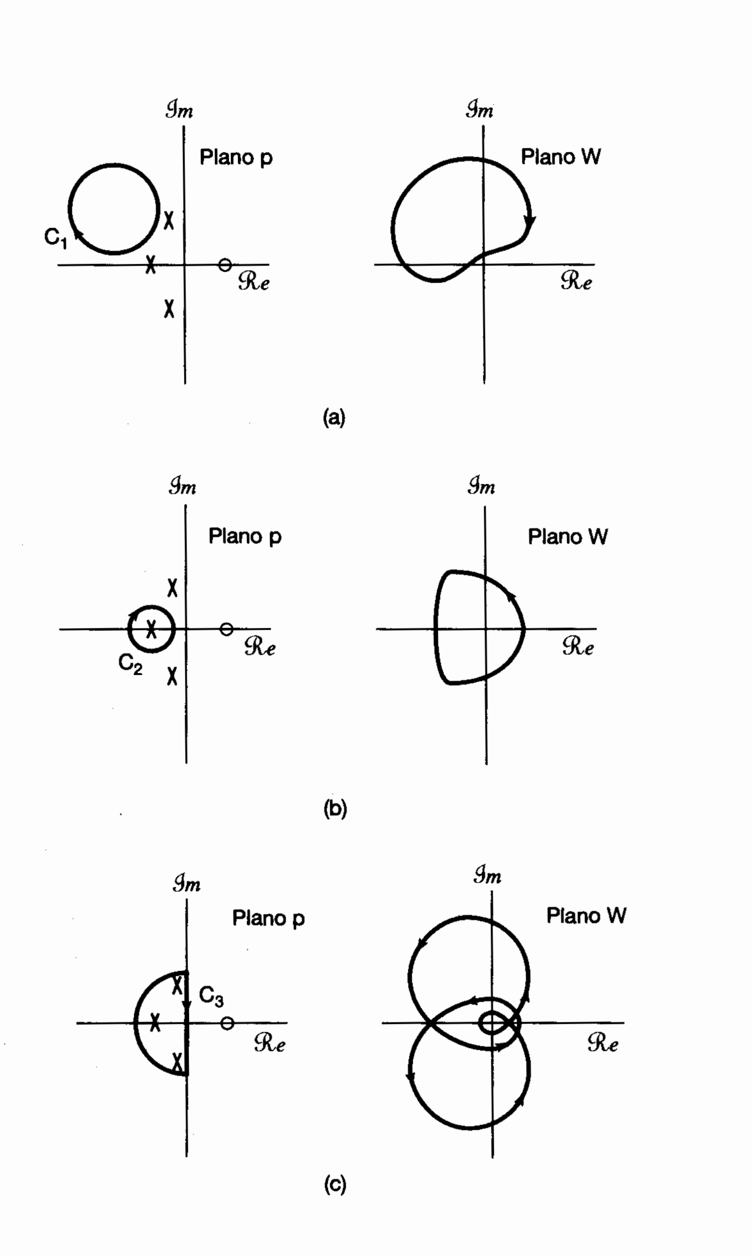


Figura 11.18 Propiedad básica de circunvalación para el ejemplo 11.4: (a) el contorno no encierra polos o ceros y en consecuencia $W(p)$ no tiene circunvalaciones del origen; (b) el contorno encierra un polo y por tanto $W(p)$ tiene una circunvalación del origen; (c) el contorno encierra tres polos y por tanto $W(p)$ tiene tres circunvalaciones del origen;

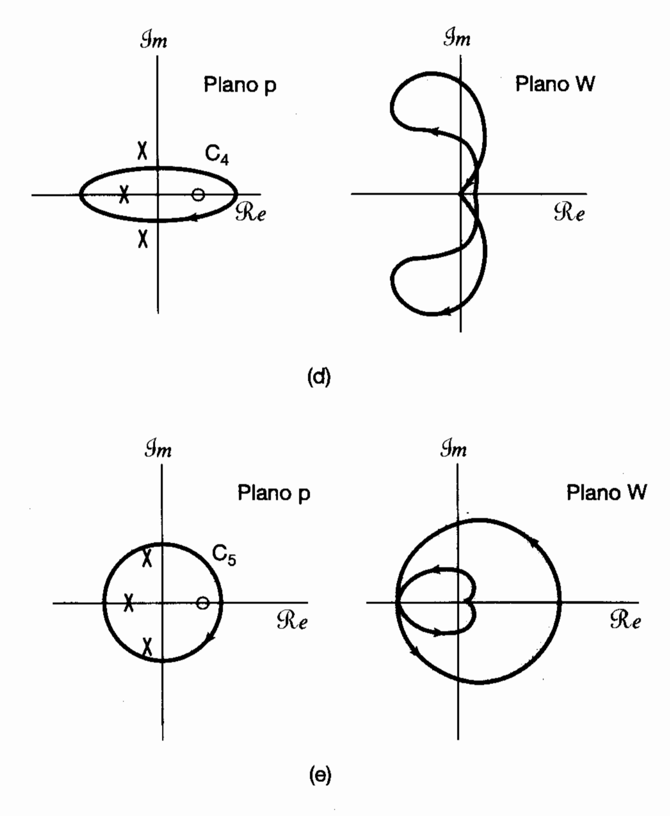


Figura 11.18 *Continuación* (d) el contorno encierra un polo y un cero y por tanto $W(p)$ no tiene circunvalaciones del origen; (e) el contorno encierra tres polos y un cero. $W(p)$ tiene dos circunvalaciones del origen.

En la figura 11.18 hemos representado varios contornos cerrados en el plano p complejo y las correspondientes gráficas de $W(p)$ a lo largo de cada uno de estos contornos. En la figura 11.18(a), el contorno C_1 no circunda ningún polo o cero de $W(p)$, y en consecuencia la gráfica de $W(p)$ no tiene circunvalación neta alguna del cero. En la figura 11.18(b) sólo el polo en $p = -1$ está contenido dentro del contorno C_2, y la gráfica de $W(p)$ circunda el origen una vez en la dirección contraria (menos una circunvalación en el sentido de las manecillas del reloj). En la figura 11.18(c), C_3 circunda los tres polos, y la gráfica de $W(p)$ circunda el origen tres veces en una dirección contraria. En la figura 11.18(d), C_4 circunda un polo y un cero, y por lo tanto la gráfica de $W(p)$ no tiene ni una circunvalación neta del origen. Por último, en la figura 11.18(e) todos los polos y el único cero de $W(p)$ están contenidos dentro de C_5 y, por lo tanto, la gráfica de $W(p)$ a lo largo de este contorno tiene dos circunvalaciones netas del origen en sentido contrario a las manecillas del reloj.

11.4.2 El criterio de Nyquist para sistemas LTI retroalimentados continuos

En esta sección haremos uso de la propiedad de circunvalación para examinar la estabilidad del sistema retroalimentado continuo de la figura 11.10. La estabilidad de este sis-

tema requiere que ningún cero de $1 + KG(s)H(s)$ o, de forma equivalente, de la función

$$R(s) = \frac{1}{K} + G(s)H(s) \tag{11.82}$$

caiga en el semiplano derecho del plano s. Por lo tanto, al aplicar el resultado general desarrollado anteriormente, podemos considerar un contorno como el indicado en la figura 11.19. Haciendo uso del diagrama de $R(s)$, conforme s recorre el contorno C, podemos obtener una cuenta del número de ceros menos el número de polos de $R(s)$ contenidos dentro del contorno, contando el número de circunvalaciones del origen en el sentido de las manecillas del reloj. Conforme M se incrementa hacia el infinito, éste corresponde entonces al número de ceros menos el número de polos de $R(s)$ en el semiplano derecho del plano s.

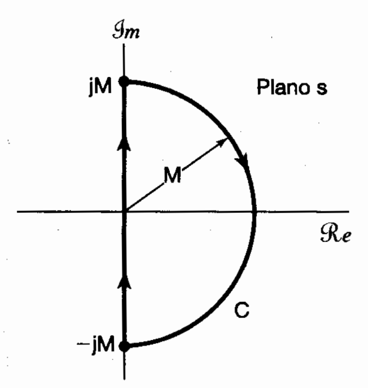


Figura 11.19 Contorno cerrado que contiene una porción del semiplano derecho; conforme $M \to \infty$, el contorno abarca el semiplano derecho completo.

Examinemos la evaluación de $R(s)$ en el contorno de la figura 11.19 a medida que M se incrementa hacia el infinito. A lo largo de la porción semicircular del contorno que se extiende en el semiplano derecho, debemos asegurar que $R(s)$ permanece limitado conforme M se incrementa. En concreto, supondremos que $R(s)$ tiene cuando menos el mismo número de polos que de ceros. En ese caso

$$R(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} \tag{11.83}$$

y

$$\lim_{|s|\to\infty} R(s) = \frac{b_n}{a_n} = \text{constante.} \tag{11.84}$$

Por lo tanto, conforme M se incrementa hacia el infinito, el valor de $R(s)$ no cambia a medida que recorremos la parte semicircular del contorno y, en consecuencia, el valor constante a lo largo de esta parte es igual al valor de $R(s)$ en los puntos extremos [es decir, $R(j\omega)$ en $\omega = \pm\infty$].

Por lo tanto, la gráfica de $R(s)$ correspondiente al contorno de la figura 11.19 se puede obtener trazando $R(s)$ a lo largo de la parte del contorno que coincide con el eje imaginario, es decir, la gráfica de $R(j\omega)$ conforme ω varía de $-\infty$ a $+\infty$. Ya que $R(j\omega)$ es igual a $1/K + G(j\omega)H(j\omega)$, $R(s)$ puede dibujarse a lo largo del contorno partiendo del conocimiento de $G(j\omega)$ y $H(j\omega)$. Si los dos sistemas, el de la trayectoria directa y el de la retroalimentación, son estables, $G(j\omega)$ y $(j\omega)$ son simplemente las funciones de la respuesta en frecuencia de estos sistemas. Sin embargo, la propiedad de circunvalación para la función general $W(p)$

es sencillamente una propiedad de funciones complejas; no tiene nada que ver con el hecho de si $W(p)$ proviene de la transformada de Laplace o de la transformada z de alguna señal y en consecuencia no tiene nada que ver con regiones de convergencia. Por lo tanto, incluso si los sistemas de las trayectorias directa y de retroalimentación son inestables, si examinamos la gráfica de la *función* $R(j\omega) = 1/K + G(j\omega)H(j\omega)$ para $-\infty < \omega < \infty$, sabemos que el número neto de circunvalaciones en el sentido de las manecillas del reloj en el origen es igual al número de ceros menos el número de polos de $R(s)$ que caen en el semiplano derecho.

Además, en la ecuación (11.82) vemos que los polos de $R(s)$ son simplemente los polos de $G(s)H(s)$, mientras que los ceros de $R(s)$ son los polos de lazo cerrado. Asimismo, ya que $G(j\omega)H(j\omega) = R(j\omega) - 1/K$, se desprende que la gráfica de $G(j\omega)H(j\omega)$ circunda el punto $-1/K$ *exactamente* tantas veces como $R(j\omega)$ circunda el origen. La gráfica de $G(j\omega)H(j\omega)$ al variar ω de $-\infty$ a $+\infty$ se llama *diagrama de Nyquist*. A partir de la propiedad de circunvalación vemos que

El número neto de circunvalaciones en el sentido de las manecillas del reloj del punto $-1/K$ efectuados en el diagrama de Nyquist	=	Al número de polos de lazo cerrado situados en el semiplano derecho menos el número de polos de $G(s)H(s)$ situados también en el semiplano derecho.	(11.85)

Mientras que el sistema de lazo abierto $G(s)H(s)$ puede tener polos inestables, para que el sistema de lazo cerrado sea estable se requiere que no haya polos de lazo cerrado en el semiplano derecho. Esto conduce al *criterio de estabilidad continuo de Nyquist:*

Criterio de estabilidad continuo de Nyquist: Para que el sistema de lazo cerrado sea estable, el número neto de circunvalaciones del punto $-1/K$ en el *sentido de las manecillas del reloj*, efectuadas por el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)H(j\omega)$, debe ser igual a *menos* el número de polos de $G(s)H(s)$ localizados en el semiplano derecho. Dicho de otra manera, el número neto de circunvalaciones en *sentido contrario a las manecillas del reloj* del punto $-1/K$ en el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)H(j\omega)$ debe *ser igual* al número de polos de $G(s)H(s)$ localizados en el semiplano derecho.

Por ejemplo, si los sistemas de las trayectorias directa y de retroalimentación son estables, entonces el diagrama de Nyquist es simplemente el diagrama de la respuesta en frecuencia de estos dos sistemas conectados en cascada. En este caso, ya que no hay polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho, el criterio de Nyquist requiere, para la estabilidad del sistema, que el número neto de circunvalaciones del punto $-1/K$ sea igual a cero.

Ejemplo 11.5

Sea

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad H(s) = \frac{1}{\frac{1}{2}s+1}. \tag{11.86}$$

El diagrama de Bode para $G(j\omega)H(j\omega)$ se muestra en la figura 11.20. El diagrama de Nyquist representado en la figura 11.21 fue construido directamente a partir de estos diagramas del logaritmo de la magnitud y de la fase de $G(j\omega)H(j\omega)$. Esto es, cada punto en el diagrama de Nyquist tiene coordenadas polares que consisten en la magnitud de $|G(j\omega)H(j\omega)|$ y en el ángulo $\sphericalangle G(j\omega)H(j\omega)$ para algún valor de ω. Las coordenadas de $G(j\omega)H(j\omega)$ para $\omega < 0$ se obtienen de los valores para $\omega > 0$ mediante el uso de la propiedad de simetría con-

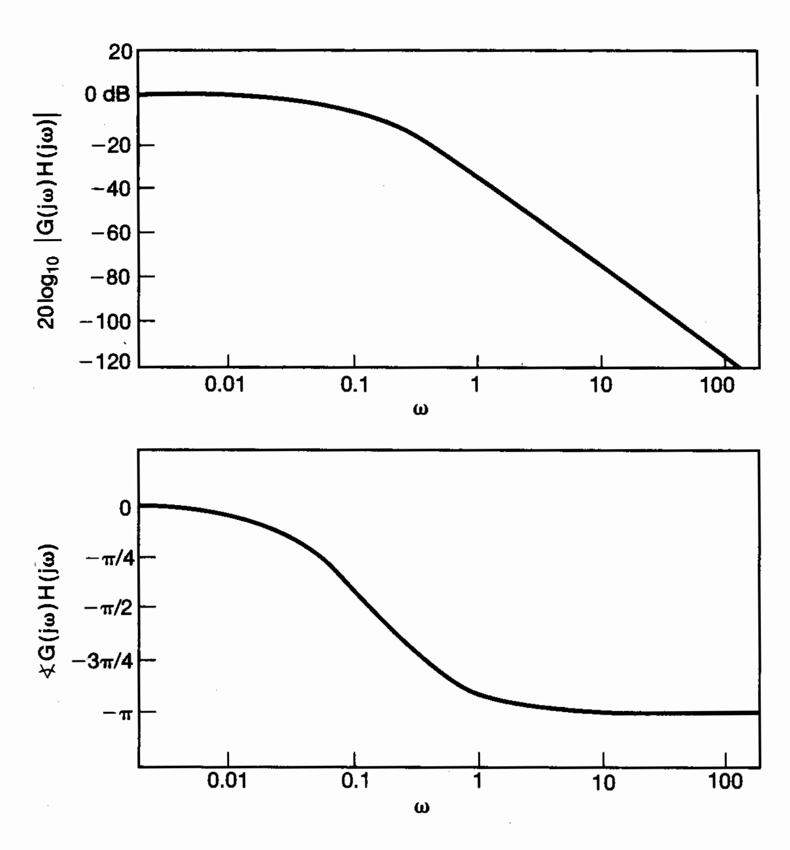


Figura 11.20 Diagrama de Bode de $G(j\omega)H(j\omega)$ del ejemplo 11.5.

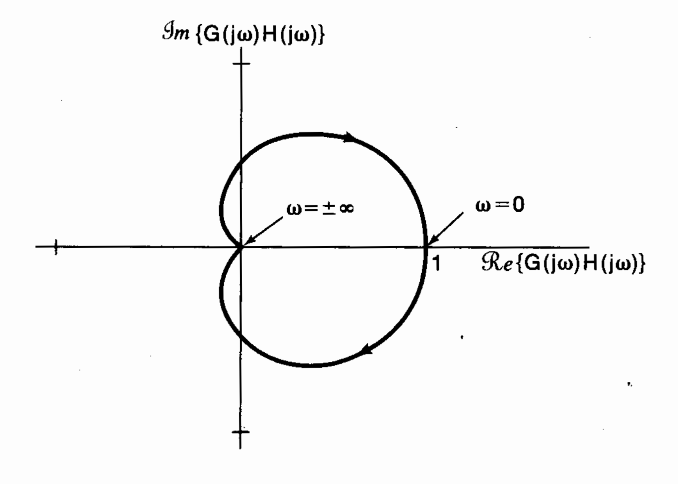


Figura 11.21 Diagrama de Nyquist de $G(j\omega)H(j\omega)$ del ejemplo 11.5. La flecha en la curva indica la dirección al incrementarse ω.

jugada de $G(j\omega)H(j\omega)$. Esta propiedad se manifiesta geométricamente en una forma muy sencilla, la cual facilita el trazo del diagrama de Nyquist para cualquier sistema retroalimentado compuesto de sistemas con respuestas reales al impulso. En concreto, ya que $|G(-j\omega)H(-j\omega)| = |G(j\omega)H(j\omega)|$ y $\sphericalangle G(-j\omega)H(-j\omega) = -\sphericalangle G(j\omega)H(j\omega)$, el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)H(j\omega)$ para $\omega \leq 0$ es un reflejo con respecto al eje real del diagrama para $\omega \geq 0$. Observe también que hemos incluido una flecha en el diagrama de Nyquist de la figura 11.21. Esta flecha indica la dirección de ω cuando se incrementa. Esto es, indica la dirección en la cual el diagrama de Nyquist es recorrido (conforme ω varía de $-\infty$ a $+\infty$) para el conteo de las circunvalaciones al aplicar el criterio de Nyquist.

En este ejemplo no hay polos de lazo abierto en el semiplano derecho y, en consecuencia, el criterio de Nyquist requiere que, para la estabilidad del sistema, no haya circunvalaciones netas del punto $-1/K$. Por lo tanto, por inspección de la figura 11.21, vemos que el sistema de lazo cerrado será estable si el punto $-1/K$ cae fuera del contorno de Nyquist; esto es, si

$$-\frac{1}{K} \leq 0 \qquad \text{o} \qquad -\frac{1}{K} > 1, \tag{11.87}$$

lo cual es equivalente a

$$K \geq 0 \qquad \text{o} \qquad 0 > K > -1. \tag{11.88}$$

Combinando estas dos condiciones, obtenemos el resultado de que el sistema de lazo cerrado será estable para cualquier selección de K mayor que -1.

Ejemplo 11.6

Considere ahora

$$G(s)H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(\frac{1}{2}s+1)}. \tag{11.89}$$

El diagrama de Nyquist para este sistema se muestra en la figura 11.22. Para este ejemplo, $G(s)H(s)$ tiene un polo en el semiplano derecho. Por lo tanto, para la estabilidad requerimos una circunvalación del punto $-1/K$ en sentido contrario a las manecillas del reloj, lo cual a su vez requiere que el punto $-1/K$ caiga dentro del contorno. En consecuencia, tendremos estabilidad si y sólo si $-1 < -1/K < 0$, es decir, si $K > 1$.

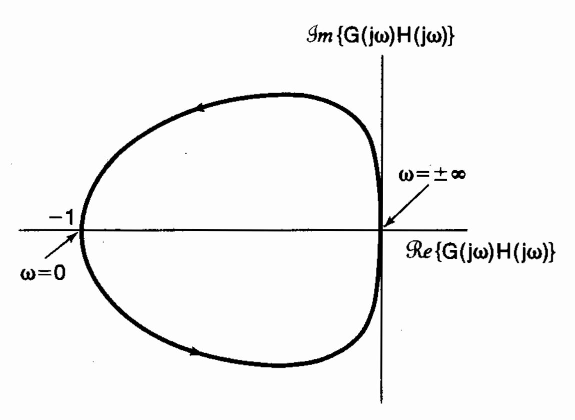


Figura 11.22 Diagrama de Nyquist del ejemplo 11.6. La flecha en la curva indica la dirección al incrementarse ω.

En el análisis anterior hemos introducido e ilustrado una forma del criterio de estabilidad de Nyquist que se aplica a una clase extremadamente amplia de sistemas retroali-

mentados. Además, hay muchos refinamientos y ampliaciones del criterio que permiten usarlo para muchos otros sistemas retroalimentados. Por ejemplo, como lo desarrollamos nosotros, el diagrama de Nyquist puede dibujarse sin ninguna dificultad para el sistema $G(s)H(s)$ estable o inestable, siempre y cuando no haya polos de $G(s)H(s)$ exactamente *sobre* el eje $j\omega$. Cuando ocurren estos polos, el valor de $G(j\omega)H(j\omega)$ es infinito en estos puntos. Sin embargo, como se considera en el problema 11.44, el criterio de Nyquist puede modificarse para permitir polos de $G(s)H(s)$ en el eje $j\omega$. Además, como se mencionó al inicio de esta sección, el criterio de Nyquist puede también extenderse al caso en el cual $G(s)$ y $H(s)$ no sean racionales. Por ejemplo, puede demostrarse que si los sistemas de las trayectorias directa y de retroalimentación son estables, el criterio de Nyquist es el mismo cuando las funciones del sistema son no racionales que cuando las funciones del sistema son racionales. Esto es, el sistema de lazo cerrado es estable si no hay circunvalaciones netas del punto $-1/K$. Para ilustrar la aplicación del criterio de Nyquist para funciones de sistema no racionales, presentaremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 11.7

Considere el ejemplo de retroalimentación acústica analizado en la sección 11.2.6. Remitiéndonos a la figura 11.8(b), sea $K = K_1K_2$ y

$$G(s)H(s) = -e^{-sT} = e^{-(sT+j\pi)}, \tag{11.90}$$

donde nos hemos valido del hecho de que $e^{-j\pi} = -1$. En este caso

$$G(j\omega)H(j\omega) = e^{-j(\omega T+\pi)}, \tag{11.91}$$

y conforme ω varía de $-\infty$ a ∞, $G(j\omega)H(j\omega)$ traza un círculo de radio unitario en el sentido de las manecillas del reloj, con una revolución completa para cada cambio de $2\pi/T$ en ω. Esto se ilustra en la figura 11.23. Ya que los sistemas de las trayectorias directa y de retroalimentación son estables [la conexión en cascada de $G(s)H(s)$ es simplemente un retardo en tiempo] el criterio de estabilidad de Nyquist indica que el sistema de lazo cerrado será estable si y sólo si $-1/K$ no cae dentro del círculo unitario. De manera equivalente, requerimos para la estabilidad que

$$|K| < 1. \tag{11.92}$$

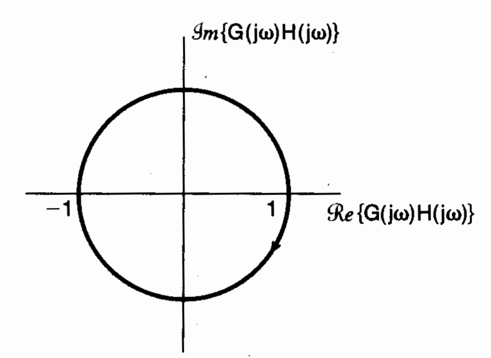


Figura 11.23 Diagrama de Nyquist del ejemplo 11.7.

Ya que K_1 y K_2 representan una ganancia y una atenuación acústicas, respectivamente, ambas son positivas, con lo cual se obtiene el criterio de estabilidad

$$K_1 K_2 < 1. \tag{11.93}$$

11.4.3 El criterio de Nyquist para sistemas LTI retroalimentados discretos

Al igual que en el caso continuo, el criterio de estabilidad para sistemas discretos se basa en el hecho de que la diferencia en el número de polos y ceros localizados dentro de un contorno, para una función racional, se puede determinar examinando un diagrama del valor de la función a lo largo del contorno. La diferencia entre los casos continuo y discreto se encuentra en la selección del contorno. Para el caso discreto la estabilidad del sistema de retroalimentación de lazo cerrado requiere que ningún cero de

$$R(z) = \frac{1}{K} + G(z)H(z) \tag{11.94}$$

caiga fuera del círculo unitario.

Recordemos que la propiedad de circunvalación relaciona los polos y ceros situados *dentro* de cualquier contorno especificado. Por otro lado, al examinar la estabilidad de un sistema discreto, debemos tomar en cuenta los ceros de $R(z)$ localizados *fuera* del círculo unitario. En consecuencia, para poder hacer uso de la propiedad de circunvalación, primero haremos una sencilla modificación. Consideremos la función racional

$$\hat{R}(z) = R\left(\frac{1}{z}\right) \tag{11.95}$$

obtenida al reemplazar z por su recíproco. Como vimos en el problema 10.43, si z_0 es un cero (polo) de $R(z)$, entonces $1/z_0$ es un cero (polo) de $\hat{R}(z)$. Ya que $1/|z_0|$ es menor que 1 si $|z_0| > 1$, cualquier cero o polo de $R(z)$ que esté *fuera* del círculo unitario corresponde a un cero o polo de $\hat{R}(z)$ localizado *dentro* del círculo unitario.

De la propiedad de circunvalación básica sabemos que, a medida que z recorre el círculo unitario en el sentido de las manecillas del reloj, el número neto de circunvalaciones del origen en esta dirección efectuadas por $\hat{R}(z)$ es igual a la diferencia entre el número de sus ceros y sus polos que están dentro del círculo unitario. Sin embargo, en el párrafo anterior vimos que esto es igual a la diferencia entre el número de ceros y polos de $R(z)$ que está *fuera* del círculo unitario. Además, en el círculo unitario, $z = e^{j\omega}$ y $1/z = e^{-j\omega}$. Por lo tanto,

$$\hat{R}(e^{j\omega}) = R(e^{-j\omega}). \tag{11.96}$$

De esto vemos que evaluar $\hat{R}(z)$ conforme z recorre el círculo unitario en el sentido de las manecillas del reloj es idéntico a evaluar $R(z)$ conforme z recorre el círculo unitario en *dirección contraria*. Entonces, en resumen,

El número de circunvalaciones en el sentido de las manecillas del reloj del origen por la gráfica de $R(e^{j\omega})$ conforme se recorre el círculo unitario una vez en dirección contraria (es decir, conforme ω se incrementa desde 0 hasta 2π)	=	Al número de ceros de $R(z)$ localizados fuera del círculo unitario menos el número de polos de $R(z)$ localizados fuera del círculo unitario.	(11.97)

En forma semejante al caso continuo, el conteo de circunvalaciones del origen efectuadas por $R(e^{j\omega})$ es equivalente a contar el número de circunvalaciones del punto $-1/K$

efectuadas por el diagrama de $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$, también conocido como el diagrama de Nyquist, el cual se traza conforme ω varía de 0 a 2π. Asimismo, los polos de $R(z)$ son precisamente los polos de $G(z)H(z)$, y los ceros de $R(z)$ son los polos de lazo cerrado. Por lo tanto, la propiedad de circunvalación establecida en el párrafo anterior implica que el número neto de circunvalaciones del punto $-1/K$ en el sentido de las manecillas del reloj efectuadas por el diagrama de Nyquist es igual al número de polos de lazo cerrado fuera del círculo unitario menos el número de polos de $G(z)H(z)$ fuera del círculo unitario. Para que el sistema de lazo cerrado sea estable, requerimos que no haya polos de lazo cerrado fuera del círculo unitario. A partir de lo anterior se establece el *criterio de estabilidad discreto de Nyquist*:

Criterio de estabilidad discreto de Nyquist: Para que el sistema de lazo cerrado sea estable, el número neto de circunvalaciones del punto $-1/K$ en el sentido de las manecillas del reloj efectuadas por el diagrama de Nyquist de $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ conforme ω varía desde 0 hasta 2π debe ser igual a *menos* el número de polos de $G(z)H(z)$ que caen fuera del círculo unitario. Dicho de manera equivalente, el número neto de circunvalaciones en *dirección contraria* del punto $-1/K$ efectuadas por el diagrama de Nyquist de $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ conforme ω varía desde 0 hasta 2π debe ser *igual* al número de polos de $G(z)H(z)$ que están fuera del círculo unitario.

Ejemplo 11.8

Sea

$$G(z)H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{z(z + \frac{1}{2})}. \tag{11.98}$$

El diagrama de Nyquist de esta curva se muestra en la figura 11.24. Ya que $G(z)H(z)$ no tiene polos fuera del círculo unitario, para la estabilidad del sistema de lazo cerrado no debe haber circunvalaciones del punto $-1/K$. En la figura vemos que éste será el caso ya sea que $-1/K < -1$ o que $-1/K > 2$. Por lo tanto, el sistema es estable para $-1/2 < K < 1$.

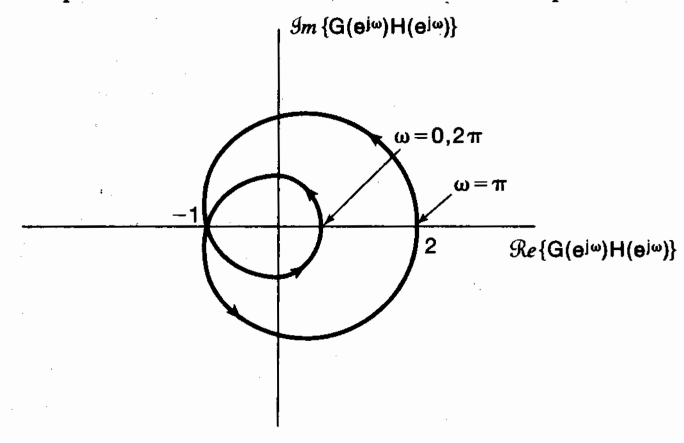


Figura 11.24 Diagrama de Nyquist del ejemplo 11.8. La flecha en la curva indica la dirección en la cual se traza la curva conforme se incrementa ω desde 0 hasta 2π.

Al igual que en el caso continuo, si las trayectorias directa y de retroalimentación son estables, entonces el diagrama de Nyquist puede obtenerse a partir de las respuestas

en frecuencia $G(e^{j\omega})$ y $H(e^{j\omega})$ de estos sistemas. Si los sistemas de las trayectorias directa y de retroalimentación son inestables, entonces las respuestas en frecuencia no están definidas. No obstante, la *función* $G(z)H(z)$ puede aún ser evaluada en el círculo unitario, y puede aplicarse el criterio de estabilidad de Nyquist.

Como hemos visto en esta sección, el criterio de estabilidad de Nyquist proporciona un método útil para la determinación del intervalo de valores de la ganancia K para la cual un sistema retroalimentado continuo o discreto es estable (o inestable). Este criterio y el método del lugar geométrico de las raíces son herramientas en extremo importantes en el diseño y construcción de sistemas retroalimentados, y cada uno tiene sus propios usos y limitaciones. Por ejemplo, el criterio de Nyquist se puede aplicar a funciones de sistema no racionales, mientras que no se puede con el método del lugar geométrico de las raíces. Por otro lado, el diagrama del lugar geométrico nos permite examinar no sólo la estabilidad sino también otras características de la respuesta del sistema de lazo cerrado, como el amortiguamiento, la frecuencia de oscilación, etc., las cuales se identifican con facilidad a partir de la ubicación de los polos del sistema de lazo cerrado. En la siguiente sección presentaremos una herramienta adicional para el análisis de sistemas retroalimentados, la cual enfatiza otra importante característica del comportamiento del sistema de lazo cerrado.

11.5 MÁRGENES DE GANANCIA Y FASE

En esta sección presentamos y examinamos el concepto de ***margen de estabilidad*** en un sistema retroalimentado. A menudo es de interés no sólo conocer *si* un sistema retroalimentado es estable, sino también determinar cuánto puede ser perturbada la ganancia en el sistema y cuánto desplazamiento de fase puede agregarse al sistema antes de que llegue a ser inestable. Información como ésta es muy importante, ya que en muchas aplicaciones las funciones de sistema de las trayectorias directa y de retroalimentación son conocidas sólo en forma aproximada o pueden cambiar ligeramente durante la operación debido al desgaste, al efecto de altas temperaturas en los componentes o a influencias similares.

Como un ejemplo, considere el sistema de direccionamiento del telescopio descrito en la sección 11.0 e ilustrado en las figuras 11.1(c) y (d). Este sistema consiste en un motor, un potenciómetro que convierte el ángulo del eje en un voltaje y un amplificador que se usa para amplificar el voltaje que representa la diferencia entre los ángulos deseado y real del eje. Suponiendo que hemos obtenido las descripciones aproximadas de cada uno de estos componentes, podremos fijar la ganancia del amplificador de manera que el sistema sea estable, siempre y cuando estas descripciones aproximadas sean exactas. Sin embargo, la ganancia del amplificador y la constante de proporcionalidad que describe la característica de ángulo-voltaje del potenciómetro nunca se conocen con exactitud y, en consecuencia, la ganancia real en el sistema retroalimentado puede diferir del valor nominal determinado al diseñar el sistema. Además, las características de amortiguamiento del motor no pueden ser determinadas con absoluta precisión y, entonces, la constante de tiempo real de la respuesta del motor puede diferir del valor aproximado en la especificación del sistema. Por ejemplo, si la constante de tiempo real del motor es mayor que el valor nominal usado en el diseño, el motor responderá más lentamente que lo anticipado, produciendo por lo tanto un retraso de tiempo efectivo en el sistema retroalimentado. Como hemos analizado en los capítulos anteriores y como veremos de nuevo en el ejemplo 11.11, los retrasos de tiempo tienen el efecto de incrementar la fase negativa en la respuesta en frecuencia de un sistema, y este desplazamiento de fase puede ejercer una influencia desestabilizadora. Debido a la posible presencia de errores de ganancia y de fase como los que hemos descrito, resulta claramente conveniente fijar la ganancia del amplificador de manera que haya algún mar-

gen de error, esto es, de tal manera que el sistema real permanezca estable incluso si difiere un poco con respecto al modelo aproximado usado en el proceso de diseño.

En esta sección ofrecemos un método para cuantificar el margen de estabilidad de un sistema retroalimentado. Para hacer esto, consideramos un sistema de lazo cerrado como el representado en la figura 11.25, el cual ha sido diseñado para que sea estable suponiendo valores nominales para las funciones de sistema de las trayectorias directa y de retroalimentación. Para nuestro análisis en este caso, $H(s)$ y $G(s)$ señalarán estos valores nominales. Asimismo, ya que los conceptos básicos son idénticos tanto para los sistemas continuos como para los discretos, centraremos nuestro desarrollo en el caso continuo, y al final de la sección ilustraremos la aplicación de estas ideas con un ejemplo discreto.

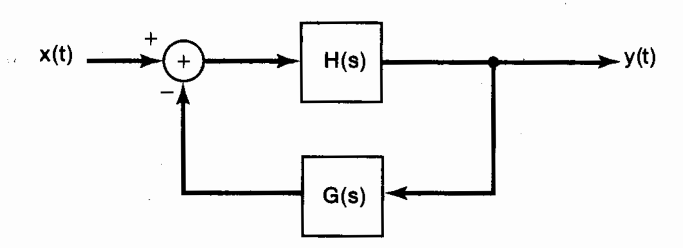


Figura 11.25 Sistema de retroalimentación típico diseñado para que sea estable suponiendo descripciones nominales para $H(s)$ y $G(s)$.

Para evaluar el margen de estabilidad en nuestro sistema retroalimentado, suponga que el sistema real es como el que se representa en la figura 11.26, donde hemos permitido la posibilidad de que en la trayectoria de retroalimentación haya una ganancia K y un desplazamiento de fase ϕ. En nuestro sistema nominal K es unitaria y ϕ es cero, pero en el sistema real estas cantidades pueden tener diferentes valores. Por lo tanto, nos interesa conocer cuánta variación puede tolerarse en estas cantidades sin perder la estabilidad del sistema de lazo cerrado. En particular, el *margen de ganancia* del sistema retroalimentado se define como la mínima cantidad de ganancia adicional K con $\phi = 0$ que se requiere para que el sistema de lazo cerrado se vuelva inestable. De manera similar, el *margen de fase* es la cantidad adicional de desplazamiento de fase con $K = 1$ que se requiere para que el sistema sea inestable. Por convención, el margen de fase se expresa como una cantidad positiva; esto es, es igual a la magnitud del desplazamiento de fase negativo adicional con el cual el sistema retroalimentado se vuelve inestable.

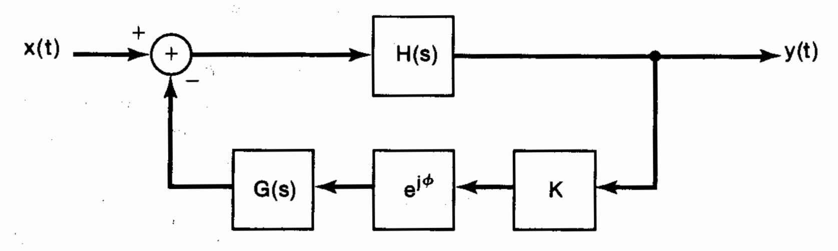


Figura 11.26 Sistema retroalimentado que contiene posibles desviaciones de ganancia y fase a partir de la descripción mostrada en la figura 11.25.

Puesto que el sistema de lazo cerrado de la figura 11.25 es estable, el sistema de la figura 11.26 se puede volver inestable si, conforme se varían K y ϕ, al menos un polo del sistema de lazo cerrado cruza el eje $j\omega$. Si un polo del sistema de lazo cerrado está sobre el eje $j\omega$, digamos $\omega = \omega_0$, entonces a esta frecuencia

$$1 + Ke^{-j\phi}G(j\omega_0)H(j\omega_0) = 0, \tag{11.99}$$

o

$$Ke^{-j\phi}G(j\omega_0)H(j\omega_0) = -1. \qquad (11.100)$$

Observe que con $K = 1$ y $\phi = 0$, debido a nuestra suposición de estabilidad para el sistema de retroalimentación nominal de la figura 11.25, no hay valor de ω_0 para el cual esta ecuación se cumpla. El margen de ganancia de este sistema es el mínimo valor de $K > 1$ para el cual la ecuación (11.100) tiene una solución para *alguna* ω_0 con $\phi = 0$. Esto es, el margen de ganancia es el valor más pequeño de K para el cual la ecuación

$$KG(j\omega_0)H(j\omega_0) = -1 \qquad (11.101)$$

tiene una solución ω_0. De manera similar, el margen de fase es el valor mínimo de ϕ para el cual la ecuación (11.100) tiene una solución para alguna ω_0 cuando $K = 1$. En otras palabras, el margen de fase es el valor más pequeño de $\phi > 0$ para el cual la ecuación

$$e^{-j\phi}G(j\omega_0)H(j\omega_0) = -1 \qquad (11.102)$$

tiene una solución.

Para ilustrar el cálculo y la interpretación gráfica de los márgenes de ganancia y fase, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.9

Sea

$$G(s)H(s) = \frac{4(1+\frac{1}{2}s)}{s(1+2s)(1+0.05s+(0.125s)^2)}. \qquad (11.103)$$

El diagrama de Bode para este ejemplo se muestra en la figura 11.27. Observe que, como mencionamos en el problema 6.31, el factor $1/j\omega$ en $G(j\omega)H(j\omega)$ contribuye con un desplazamiento de fase de $-90°$ ($-\pi/2$ radianes) y con un incremento en $|G(j\omega)H(j\omega)|$ de 20 dB por década. Para determinar el margen de ganancia, observamos que, con $\phi = 0$, la única frecuencia con la cual se puede satisfacer la ecuación (11.101) es la de $\sphericalangle G(j\omega_0)H(j\omega_0) = -\pi$. A esta frecuencia, el margen de ganancia en decibeles puede identificarse por inspección de la figura 11.27. Primero examinamos la figura 11.27(b) para determinar la frecuencia ω_1 en la cual la curva del ángulo cruza la línea de $-\pi$ radianes. Localizando el punto en esta misma frecuencia en la figura 11.27(a) obtenemos el valor de $|G(j\omega_1)H(j\omega_1)|$. Para que la ecuación (11.101) se cumpla para $\omega_0 = \omega_1$, K debe ser igual a $1/|G(j\omega_1)H(j\omega_1)|$. Este valor es el margen de ganancia. Como se ilustra en la figura 11.27(a), el margen de ganancia expresado en decibeles se puede identificar como la cantidad que la curva del logaritmo de la magnitud tendría que ser desplazada para que interseque la línea de 0 dB a la frecuencia ω_1.

En forma similar podemos determinar el margen de fase. Observe primero que la única frecuencia en la cual la ecuación (11.102) puede ser satisfecha es la de $|G(j\omega_0)H(j\omega_0)| = 1$, o, de manera equivalente, $20\log_{10}|G(j\omega_0)H(j\omega_0)| = 0$. Para determinar el margen de fase primero encontramos en la figura 11.27(a) la frecuencia ω_2 a la cual la curva del logaritmo de la magnitud cruza la línea de 0 dB. Localizando el punto a esta misma frecuencia en la figura 11.27(b) obtenemos el valor de $\sphericalangle G(j\omega_2)H(j\omega_2)$. Para que la ecuación (11.102) se cumpla para $\omega_0 = \omega_2$, el ángulo del miembro izquierdo de esta ecuación debe ser $-\pi$. El valor de ϕ para el cual esto se cumple es el margen de fase. Como se ilustra en la figura 11.27(b), el margen de fase se puede identificar como la cantidad que la curva del ángulo tendría que ser bajada para que la curva interseque la línea de $-\pi$ a la frecuencia de ω_2.

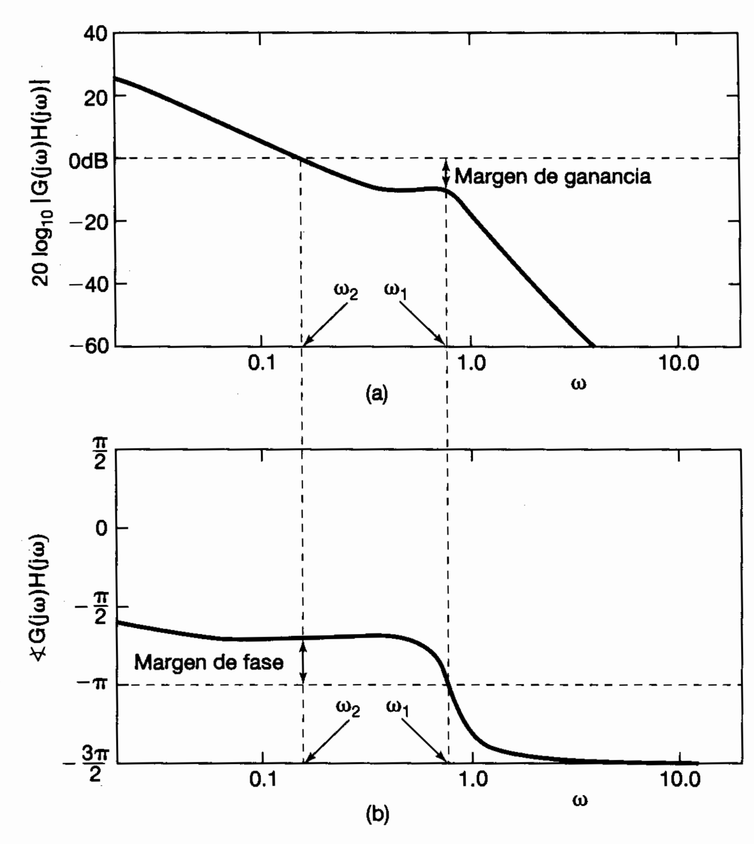


Figura 11.27 Uso de los diagramas de Bode para calcular los márgenes de ganancia y de fase para el sistema del ejemplo 11.9.

Al determinar los márgenes de ganancia y fase, no siempre nos interesa identificar explícitamente la *frecuencia* a la cual los polos cruzan el eje $j\omega$. Como una alternativa, podemos identificar los márgenes de ganancia y fase a partir de un *diagrama del logaritmo de la magnitud con respecto a la fase* (diagrama log magnitud-fase). Por ejemplo, el diagrama log magnitud-fase del sistema de la figura 11.27 se muestra en la figura 11.28. En ésta dibujamos $20 \log_{10} |G(j\omega)H(j\omega)|$ en función de $\sphericalangle G(j\omega)H(j\omega)$ conforme ω varía de 0 a $+\infty$. Por lo tanto, debido a la simetría conjugada de $G(j\omega)H(j\omega)$ este diagrama contiene la misma información que el diagrama de Nyquist, en el cual $\Re e\{G(j\omega)H(j\omega)\}$ se grafica en función de $\Im m\{G(j\omega)H(j\omega)\}$ para $-\infty < \omega < \infty$. Como hemos indicado, el margen de fase puede leerse mediante la ubicación de la intersección del diagrama log magnitud-fase con la línea de 0 dB. Es decir, el margen de fase es la cantidad de desplazamiento adicional negativo de la fase requerido para desplazar la curva log magnitud-fase de manera que interseque la línea de 0 dB con exactamente 180° (π radianes) de desplazamiento de fase. De manera similar, el margen de ganancia se obtiene directamente de la intersección de la curva log magnitud-fase con la línea de fase de $-\pi$ radianes, y esto representa la cantidad de ganancia adicional que se necesita para que la curva cruce la línea de $-\pi$ con una magnitud de 0 dB.

Los siguientes ejemplos proporcionan otras tantas representaciones elementales de los diagramas log magnitud-fase:

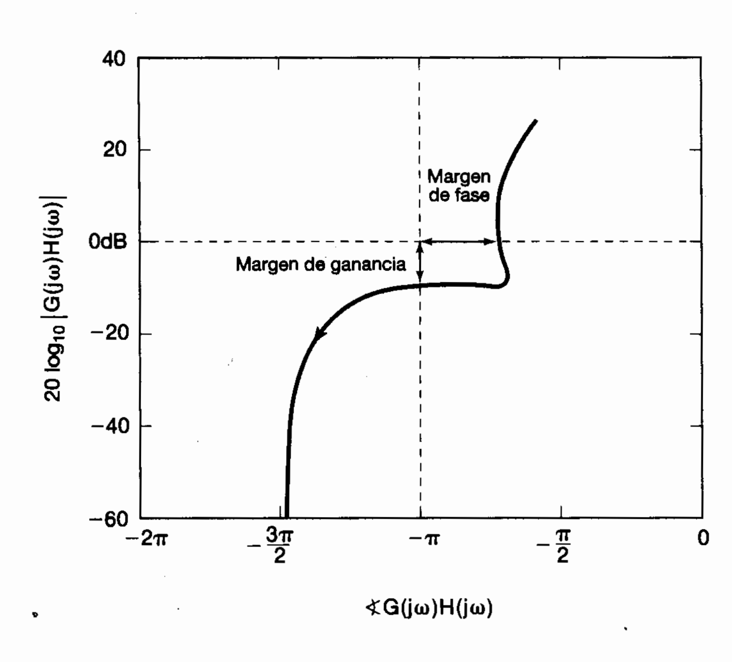


Figura 11.28 Diagrama log magnitud-fase del sistema del ejemplo 11.9.

Ejemplo 11.10

Considere

$$G(s)H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}, \qquad \tau > 0. \tag{11.104}$$

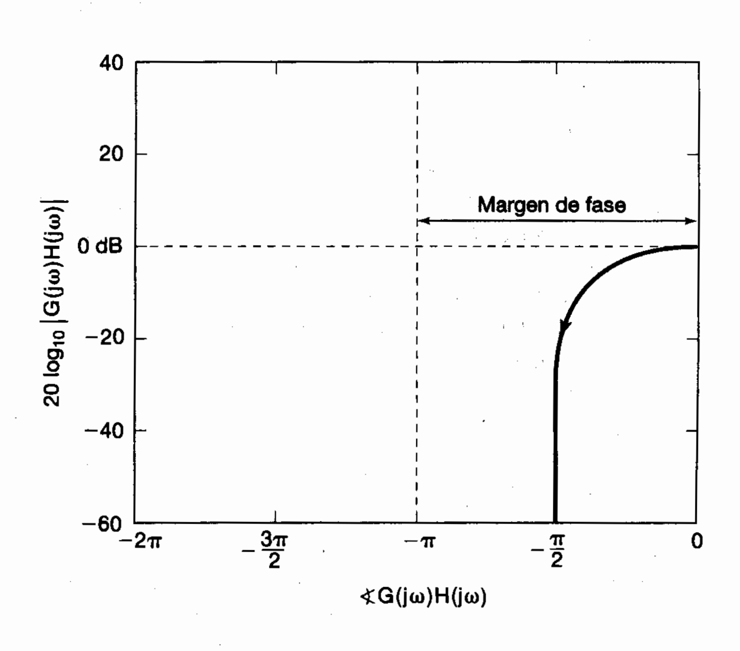


Figura 11.29 Diagrama log magnitud-fase del sistema de primer orden del ejemplo 11.10.

En este caso, obtenemos el diagrama log magnitud-fase ilustrado en la figura 11.29. Éste tiene un margen de fase de π y ya que la curva no intersecta la línea de $-\pi$, este sistema tiene un margen de ganancia infinito (es decir, podemos incrementar la ganancia tanto como queramos y el sistema se mantendrá estable). Esto concuerda con la conclusión a la que podemos llegar al examinar el sistema ilustrado en la figura 11.30(a). En la figura 11.30(b) hemos representado el lugar geométrico de las raíces para este sistema con $\phi = 0$ y $K > 0$. A partir de la figura resulta evidente que el sistema es estable para cualquier valor positivo de K. Además, si $K = 1$ y $\phi = \pi$, de manera que $e^{j\phi} = -1$, la función del sistema de lazo cerrado para el sistema de la figura 11.30(a) es $1/\tau s$, el cual tiene un polo en $s = 0$, de manera que el sistema es inestable.

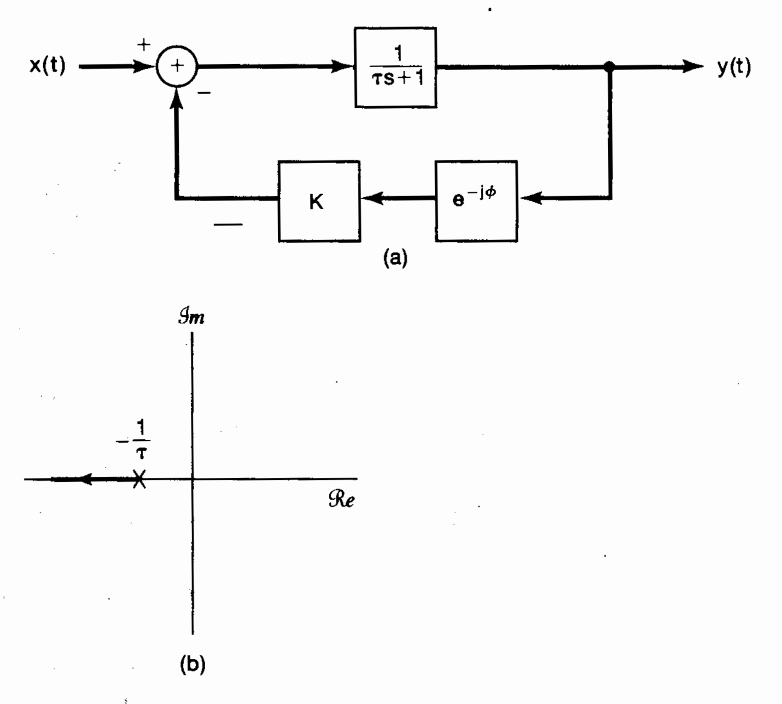


Figura 11.30 (a) Sistema retroalimentado de primer orden con posibles variaciones de ganancia y fase en la trayectoria de retroalimentación; (b) lugar geométrico de las raíces para este sistema con $\phi = 0$, $K > 0$.

Ejemplo 11.11

Suponga que examinamos ahora el sistema de segundo orden

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}, \qquad G(s) = 1. \tag{11.105}$$

El sistema $H(s)$ tiene una frecuencia natural no amortiguada de 1 y una razón de amortiguamiento de 0.5. El diagrama log magnitud-fase para este sistema se ilustra en la figura 11.31. De nueva cuenta, tenemos un margen de ganancia infinito, pero un margen de fase de sólo $\pi/2$, ya que puede demostrarse mediante un cálculo directo que $|H(j\omega)| = 1$ para $\omega = 1$, y en esta frecuencia $\sphericalangle H(j\omega) = -\pi/2$.

Podemos ahora ilustrar el tipo de problemas que se pueden resolver usando los conceptos de margen de ganancia y de fase. Suponga que no es posible realizar el sistema retroalimentado especificado por la ecuación (11.105). En lugar de ello se intro-

duce un retraso de tiempo inevitable en la trayectoria de retroalimentación. Esto es,

$$G(s) = e^{-s\tau}, \tag{11.106}$$

donde τ es el retraso de tiempo. Lo que nos gustaría conocer ahora es qué tan pequeño debe ser este retraso para asegurar la estabilidad del sistema de lazo cerrado.

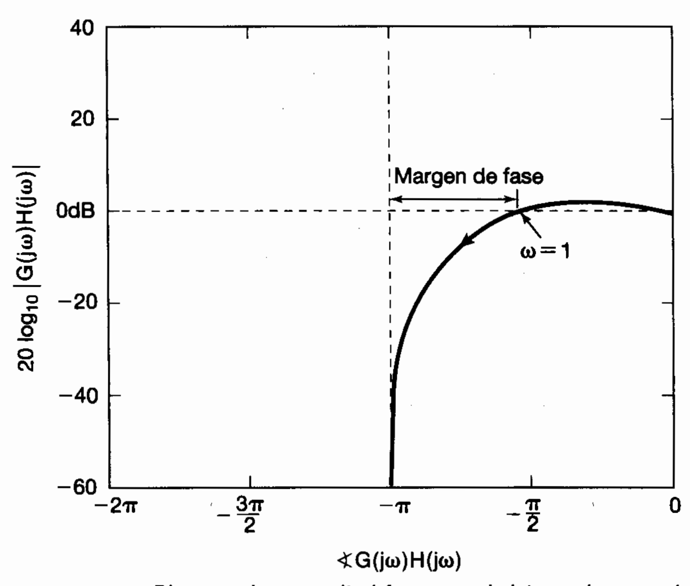


Figura 11.31 Diagrama log magnitud-fase para el sistema de segundo orden del ejemplo 11.11.

El primer punto a tomarse en consideración es que

$$|e^{-j\omega\tau}| = 1, \tag{11.107}$$

de manera que este retraso no cambie la magnitud de $H(j\omega)G(j\omega)$. Por otro lado,

$$\sphericalangle e^{-j\omega\tau} = -\omega\tau \text{ radianes.} \tag{11.108}$$

Por lo tanto, cada punto de la curva de la figura 11.31 se desplaza a la *izquierda*. La cantidad de desplazamiento es proporcional al valor de ω para cada punto en la curva log magnitud-fase.

De este análisis vemos que la inestabilidad ocurrirá cada vez que el margen de fase se reduzca a cero, y esto ocurrirá cuando el desplazamiento de fase introducido por el retraso sea igual a $-\pi/2$ en $\omega = 1$. Esto es, el valor crítico τ^* del retraso de tiempo satisface

$$\sphericalangle e^{-j\tau^*} = -\tau^* = -\frac{\pi}{2}, \tag{11.109}$$

o (suponiendo que las unidades de ω están en radianes/segundo)

$$\tau^* \approx 1.57 \text{ segundos.} \tag{11.110}$$

Por lo tanto, para cualquier retraso de tiempo $\tau < \tau^*$, el sistema permanece estable.

Ejemplo 11.12



Considere de nuevo el sistema de retroalimentación acústico analizado en la sección 11.2.6 y en el ejemplo 11.7. Aquí suponemos que el sistema de la figura 11.8 ha sido diseñado con $K_1K_2 < 1$, de manera que el sistema de lazo cerrado es estable. En este caso

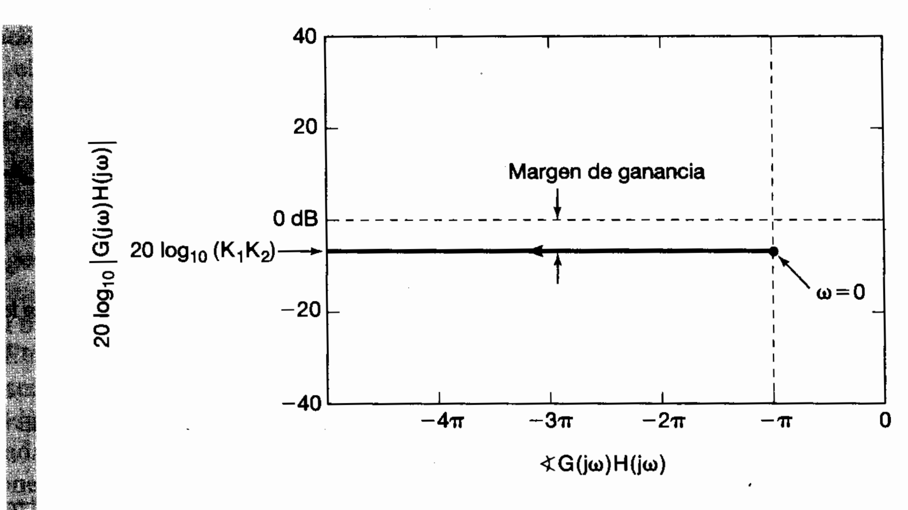


Figura 11.32 Diagrama log magnitud-fase para el ejemplo 11.12.

el diagrama log magnitud-fase para $G(s)H(s) = K_1K_2e^{-(sT+j\pi)}$ se ilustra en la figura 11.32. En esta figura vemos que el sistema tiene un margen de fase infinito y un margen de ganancia en decibeles de $-20 \log_{10}(K_1K_2)$ (es decir, éste es precisamente el factor de ganancia que, cuando se multiplica por K_1K_2, es igual a 1).

Como se indicó al inicio de esta sección, las definiciones de márgenes de ganancia y de fase son las mismas para los sistemas retroalimentados discretos. Específicamente, si tenemos un sistema retroalimentado discreto, el margen de ganancia es la mínima cantidad de ganancia adicional requerida en el sistema retroalimentado para que el sistema de lazo cerrado llegue a ser inestable. De manera similar, el margen de fase es la mínima cantidad adicional de desplazamiento de fase negativo que se requiere para que el sistema retroalimentado sea inestable. El siguiente ejemplo ilustra el cálculo gráfico de los márgenes de ganancia y de fase para un sistema retroalimentado discreto; el procedimiento es en esencia el mismo que para los sistemas continuos.

Ejemplo 11.13

En este ejemplo ilustramos el concepto de margen de ganancia y de fase para el sistema retroalimentado discreto representado en la figura 11.33. Aquí

$$G(z)H(z) = \frac{\frac{7\sqrt{2}}{4}z^{-1}}{1 - \frac{7\sqrt{2}}{8}z^{-1} + \frac{49}{64}z^{-2}} \tag{11.111}$$

y mediante cálculo directo podemos verificar que este sistema es estable para $K = 1$ y $\phi = 0$. En al figura 11.34 presentamos el diagrama log magnitud-fase para el sistema;

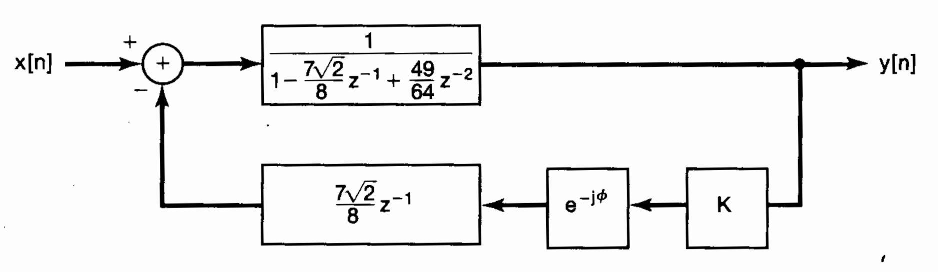


Figura 11.33 Sistema retroalimentado discreto del ejemplo 11.13.

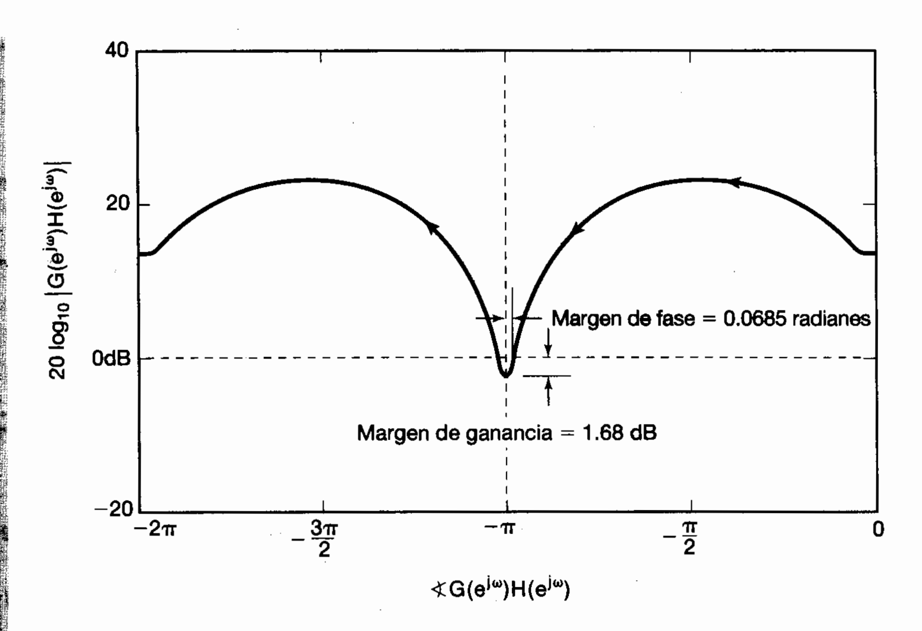


Figura 11.34 Diagrama log magnitud-fase para el sistema retroalimentado discreto del ejemplo 11.13.

esto es, hemos trazado $20 \log_{10}|G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})|$ en función de $\sphericalangle G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ conforme ω varía de 0 a 2π. El sistema tiene un margen de ganancia de 1.68 dB y un margen de fase de 0.0685 radianes (3.93°).

Para concluir esta sección, debe enfatizarse que el margen de ganancia es el *mínimo* valor de ganancia que mueve uno o más de los polos de lazo cerrado hacia el eje $j\omega$ en tiempo continuo o al círculo unitario en tiempo discreto y, en consecuencia, provoca que el sistema se vuelva inestable. Sin embargo, es importante hacer notar que esto *no* implica que el sistema sea inestable para *todos* los valores de la ganancia que estén por encima del valor especificado por el margen de ganancia. Por ejemplo, como se ilustra en el problema 11.47, a medida que K se incrementa, el lugar geométrico de las raíces puede moverse del semiplano izquierdo hacia el semiplano derecho y luego cruzar de regreso hacia el semiplano izquierdo. El margen de ganancia nos proporciona información acerca de qué tan grande debe ser el incremento de la ganancia para que los polos lleguen por *primera vez* al eje $j\omega$, pero no nos dice nada acerca de la posibilidad de que el sistema pueda de nuevo ser estable para valores más grandes de la ganancia. Para obtener esta información tenemos que remitirnos al lugar geométrico de las raíces o usar el criterio de estabilidad de Nyquist. (Véase el problema 11.47.)[4]

11.6 RESUMEN

En este capítulo hemos examinado diversas aplicaciones y varias técnicas para el análisis de los sistemas retroalimentados. Hemos visto cómo el uso de la transformada de Laplace y de la transformada z nos permite analizar estos sistemas de manera tanto algebraica como gráfica. En la sección 11.2 indicamos varias de las aplicaciones de la retroali-

[4]Para un análisis detallado de este tema y también de los márgenes de ganancia y de fase, así como de los diagramas logarítmicos de magnitud-fase en general, vea los textos sobre retroalimentación mencionados en la bibliografía al final del libro.

mentación, incluyendo el diseño de sistemas inversos, la estabilización de sistemas inestables y el diseño de sistemas de rastreo. También vimos que la retroalimentación tanto puede estabilizar como desestabilizar un sistema.

En la sección 11.3 describimos el método del lugar geométrico de las raíces para trazar los polos del sistema de lazo cerrado en función del parámetro de la ganancia. Aquí encontramos que la evaluación geométrica de la fase de una transformada z o racional de Laplace nos permite lograr un buen conocimiento de las propiedades del método del lugar geométrico de las raíces. Estas propiedades a menudo nos permiten obtener una exactitud razonable en la graficación del lugar geométrico sin tener que recurrir a la realización de cálculos complejos.

En contraste con el método del lugar geométrico de las raíces, el criterio de Nyquist de la sección 11.4 es una técnica para determinar la estabilidad de un sistema retroalimentado, de nuevo en función de una ganancia variable, *sin* obtener una descripción detallada de la ubicación de los polos de lazo cerrado. El criterio de Nyquist se aplica a funciones del sistema no racionales y por lo tanto se puede usar cuando todo lo que se tiene disponible son respuestas en frecuencia determinadas de manera experimental. Lo mismo se cumple para los márgenes de ganancia y de fase descritos en la sección 11.5. Estas cantidades proporcionan una medida del margen de estabilidad en un sistema retroalimentado y por lo tanto son de gran importancia para los diseñadores ya que les permiten determinar qué tan robusto es un sistema ante las discrepancias que puede haber entre las estimaciones sobre las funciones del sistema de las trayectorias directa y de retroalimentación y sus valores reales.

Capítulo 11 Problemas

La primera sección de problemas comprende la categoría básica, y las respuestas se proporcionan al final del libro. Las tres secciones restantes contienen problemas que abarcan las categorías básica, avanzada y de extensión, respectivamente.

PROBLEMAS BÁSICOS CON RESPUESTAS

11.1. Considere la interconexión de los sistemas LTI discretos mostrados en la figura P11.1. Exprese la función completa del sistema para esta interconexión en términos de $H_0(z)$, $H_1(z)$ y $G(z)$.

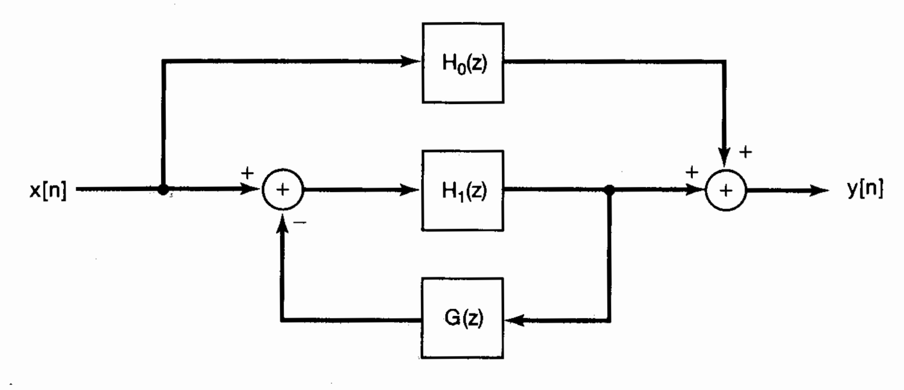


Figura P11.1

11.2. Considere la interconexión de los sistemas LTI discretos mostrados en la figura P11.2. Exprese la función del sistema completo para esta interconexión en términos de $H_1(s)$, $H_2(s)$, $G_1(s)$ y $G_2(s)$.

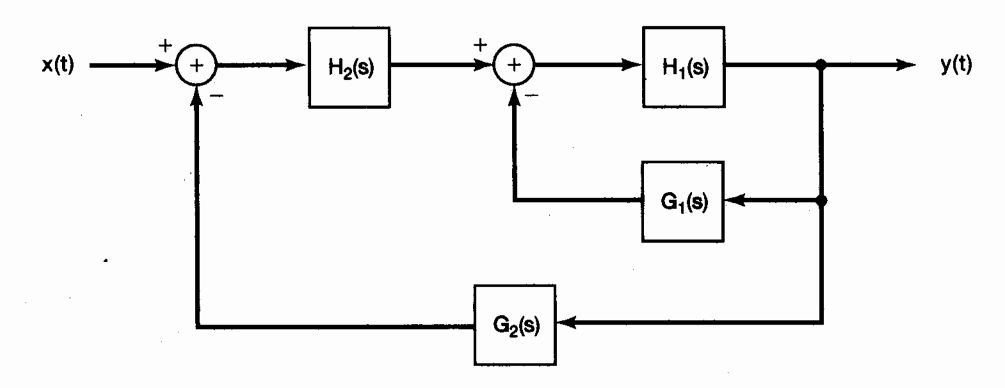


Figura P11.2

11.3. Considere el sistema retroalimentado continuo ilustrado en la figura 11.3(a) con

$$H(s) = \frac{1}{s-1} \qquad \text{y} \qquad G(s) = s - b.$$

¿Para qué valores reales de b es estable el sistema retroalimentado?

11.4. Un sistema LTI causal S con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ se representa mediante la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

El sistema S se pondrá en funcionamiento usando la configuración de retroalimentación de la figura 11.3(a) con $H(s) = 1/(s+1)$. Determine $G(s)$.

11.5. Considere el sistema retroalimentado discreto de la figura 11.3(b) con

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad \text{y} \qquad G(z) = 1 - bz^{-1}.$$

¿Para qué valores reales de b es estable el sistema retroalimentado?

11.6. Considere el sistema retroalimentado discreto mostrado en la figura 11.3(b) con

$$H(z) = 1 - z^{-N} \qquad \text{y} \qquad G(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-N}}.$$

¿El sistema es IIR o FIR?

11.7. Suponga que los polos de lazo cerrado de un sistema de retroalimentación satisfacen

$$\frac{1}{(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{K}.$$

Use el método del lugar geométrico de las raíces para determinar los valores de K para los cuales se garantiza que el sistema retroalimentado es estable.

11.8. Suponga que los polos de lazo cerrado de un sistema de retroalimentación satisfacen

$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)} = -\frac{1}{K}.$$

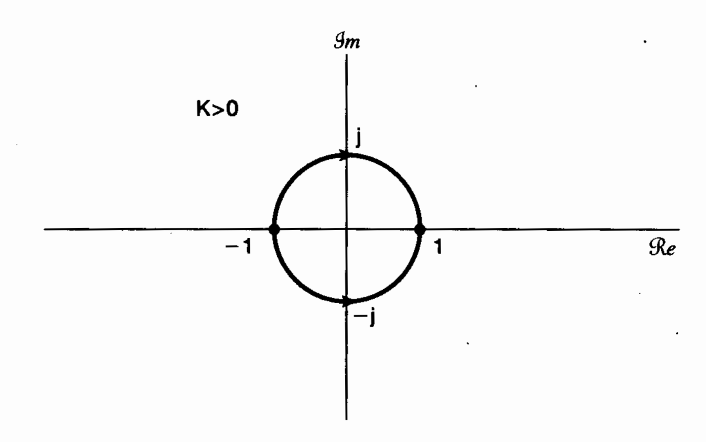
Use el método del lugar geométrico de las raíces para determinar los valores negativos de K para los cuales se garantiza que el sistema retroalimentado es estable.

11.9. Suponga que los polos de lazo cerrado de un sistema de retroalimentación satisfacen

$$\frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+4)} = -\frac{1}{K}.$$

Use el método del lugar geométrico de las raíces para determinar si hay valores de la ganancia ajustable K para los cuales la respuesta al impulso del sistema tiene un componente oscilatorio de la forma $e^{-at}\cos(\omega_0 t + \phi)$ donde $\omega_0 \neq 0$.

11.10. El lugar geométrico de las raíces para $G(s)H(s) = -1/K$ se ilustra en la figura P11.10. En esta figura, el inicio ($K = 0$) y el final de cada rama del lugar geométrico de las raíces están marcados mediante un símbolo '•'. Especifique los polos y ceros de $G(s)H(s)$.



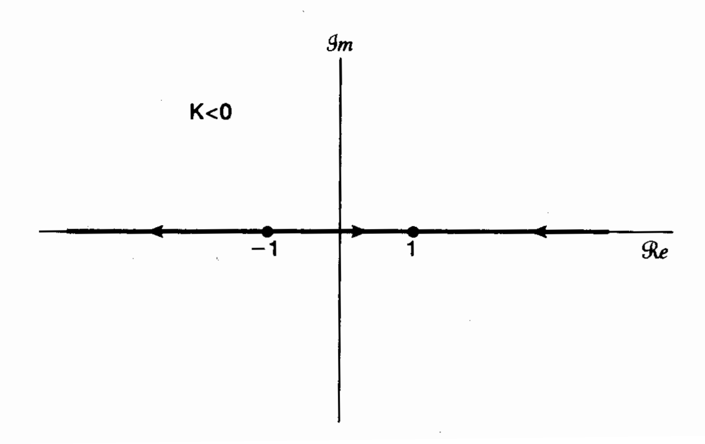


Figura P11.10

11.11. Suponga que los polos de lazo cerrado de un sistema de retroalimentación satisfacen

$$\frac{z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} = -\frac{1}{K}.$$

Usando el método del lugar geométrico de las raíces, determine los valores positivos de K para los cuales este sistema es estable.

11.12. Cada una de las cuatro ubicaciones $z = 1/2, z = 1/4, z = 0$ y $z = -1/2$ es un polo o cero de un solo orden de $G(z)H(z)$. Además, se sabe que $G(z)H(z)$ tiene sólo dos polos. ¿Qué información puede deducir acerca de los polos y ceros de $G(z)H(z)$ partiendo del hecho de que para toda K, el lugar geométrico correspondiente a

$$G(z)H(z) = -\frac{1}{K}$$

está sobre el eje real?

11.13. Considere el diagrama de bloques de la figura P11.13 para un sistema discreto. Use el método del lugar geométrico de las raíces para determinar los valores de K para los cuales se garantiza que el sistema es estable.

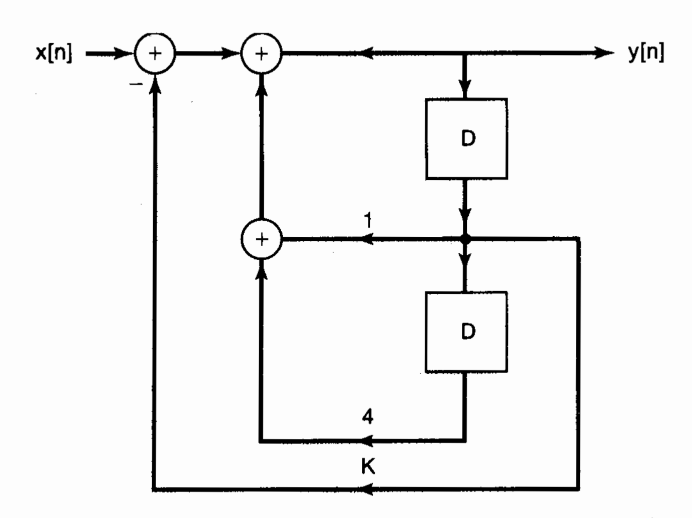


Figura P11.13

11.14. Sea C una trayectoria cerrada que cae sobre el círculo unitario en el plano p y se recorre en el sentido de las manecillas del reloj para evaluar $W(p)$. Para cada una de las siguientes expresiones de $W(p)$, determine el número neto de veces que la gráfica de $W(p)$ encierra el origen en dicha dirección:

(a) $W(p) = \frac{(1 - \frac{1}{2}p^{-1})}{(1 - \frac{1}{4}p^{-1})}$

(b) $W(p) = \frac{(1 - 2p^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}p^{-1})(1 - 2p^{-1} + 4p^{-2})}$

11.15. Considere un sistema retroalimentado continuo cuyos polos de lazo cerrado satisfacen

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)} = -\frac{1}{K}.$$

Use el diagrama de Nyquist y el criterio de estabilidad de Nyquist para determinar el intervalo de valores de K para el cual el sistema de lazo cerrado es estable. *Sugerencia:* Al dibujar el diagrama de Nyquist, puede encontrar útil trazar primero el diagrama de Bode correspondiente. También puede ser de ayuda determinar los valores de ω para los cuales $G(j\omega)H(j\omega)$ es real.

11.16. Considere un sistema retroalimentado continuo cuyos polos de lazo cerrado satisfacen

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s/10+1)} = -\frac{1}{K}.$$

Use el diagrama de Nyquist y el criterio de estabilidad de Nyquist para determinar el intervalo de valores de K para el cual el sistema de lazo cerrado es estable.

11.17. Considere un sistema retroalimentado continuo cuyos polos de lazo cerrado satisfacen

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)^4} = -\frac{1}{K}.$$

Use el diagrama de Nyquist y el criterio de estabilidad de Nyquist para determinar el intervalo de valores de K para el cual el sistema de lazo cerrado es estable.

11.18. Considere un sistema retroalimentado discreto cuyos polos de lazo cerrado satisfacen

$$G(z)H(z) = z^{-3} = -\frac{1}{K}.$$

Use el diagrama de Nyquist y el criterio de estabilidad de Nyquist para determinar el intervalo de valores de K para el cual el sistema de lazo cerrado es estable.

11.19. Considere un sistema retroalimentado, ya sea continuo o discreto, y suponga que el diagrama de Nyquist para el sistema pasa a través del punto $-1/K$. ¿El sistema retroalimentado es estable o inestable para este valor de la ganancia? Explique su respuesta.

11.20. Considere el sistema retroalimentado básico continuo de la figura 11.3(a). Determine el margen de ganancia y fase para la siguiente especificación de $H(s)$ y $G(s)$:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}, \quad G(s) = 1.$$

PROBLEMAS BÁSICOS

11.21. Considere el sistema retroalimentado de la figura P11.21. Encuentre los polos y ceros de lazo cerrado de este sistema para los siguientes valores de K:

(i) $K = 0.1$
(ii) $K = 1$
(iii) $K = 10$
(iv) $K = 100$

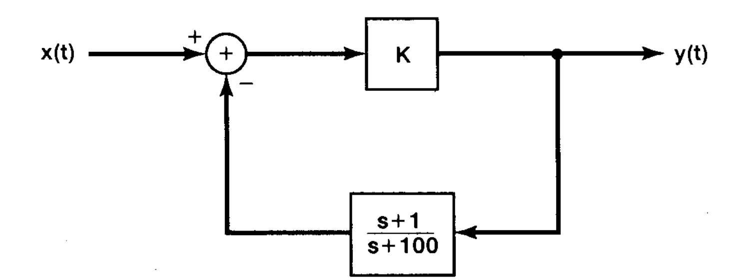


Figura P11.21

11.22. Considere el sistema retroalimentado básico de la figura 11.3(a). Determine la respuesta al impulso del sistema de lazo cerrado para cada una de las siguientes especificaciones de la función del sistema en las trayectorias directa y de retroalimentación:

(a) $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$, $G(s) = 1$

(b) $H(s) = \frac{1}{(s+3)}$, $G(s) = \frac{1}{s+1}$

(c) $H(s) = \frac{1}{2}$, $G(s) = e^{-s/3}$

11.23. Considere el sistema retroalimentado de la figura 11.3(b). Determine la respuesta al impulso del sistema de lazo cerrado para cada una de las siguientes especificaciones de la función del sistema en las trayectorias directa y de retroalimentación:

(a) $H(z) = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, $G(z) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}z^{-1}$

(b) $H(z) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}z^{-1}$, $G(z) = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

11.24. Trace los lugares geométricos de las raíces para $K > 0$ y $K < 0$ de cada una de las siguientes funciones:

(a) $G(s)H(s) = \frac{1}{s+1}$

(b) $G(s)H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)}$

(c) $G(s)H(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$

(d) $G(s)H(s) = \frac{s+1}{s^2}$

(e) $G(s)H(s) = \frac{(s+1)^2}{s^3}$

(f) $G(s)H(s) = \frac{s^2+2s+2}{s^2(s-1)}$

(g) $G(s)H(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{s(s^2+2s+2)}$

(h) $G(s)H(s) = \frac{(1-s)}{(s+2)(s+3)}$

11.25. Trace los lugares geométricos de las raíces para $K > 0$ y $K < 0$ de cada una de las siguientes funciones:

(a) $G(z)H(z) = \frac{z-1}{z^2-\frac{1}{4}}$

(b) $G(z)H(z) = \frac{2}{z^2-\frac{1}{4}}$

(c) $G(z)H(z) = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$

(d) $G(z)H(z) = z^{-1} - z^{-2}$

(e) $G(z)H(z)$ es la función del sistema de un sistema LTI causal descrito por la ecuación de diferencias

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n-1] - x[n-2].$$

11.26. Considere un sistema retroalimentado con

$$G(s)H(s) = \frac{(s-a)(s-b)}{s(s+3)(s-6)}.$$

Trace el lugar geométrico de las raíces para $K > 0$ y $K < 0$ para los siguientes valores de a y b.

(a) $a = 1, \quad b = 2$ **(b)** $a = -2, \quad b = 2$ **(c)** $a = -4, \quad b = 2$
(d) $a = -7, \quad b = 2$ **(e)** $a = -1, \quad b = -2$ **(f)** $a = -4, \quad b = -2$
(g) $a = -7, \quad b = -2$ **(h)** $a = -5, \quad b = -4$ **(i)** $a = -7, \quad b = -4$
(j) $a = -7, \quad b = -8$

11.27. Considere un sistema retroalimentado con

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+4}, \qquad G(s) = K.$$

(a) Trace el lugar geométrico para $K > 0$.
(b) Trace el lugar geométrico para $K < 0$.
(c) Encuentre el valor positivo más pequeño de K para el cual la respuesta al impulso de lazo cerrado no presenta comportamiento oscilatorio.

11.28. Trace el diagrama de Nyquist para cada una de las siguientes especificaciones de $G(s)H(s)$, y use el criterio de Nyquist continuo para determinar el intervalo de valores de K (si existe tal intervalo) para el cual el sistema de lazo cerrado es estable. [*Nota:* Al trazar los diagramas de Nyquist puede encontrar útil dibujar primero los diagramas de Bode correspondientes. También es útil determinar los valores de ω para los cuales $G(j\omega)H(j\omega)$ es real.] (Copiar ecuaciones del original.)

(a) $G(s)H(s) = \frac{1}{s-1}$ **(b)** $G(s)H(s) = \frac{1}{s^2-1}$
(c) $G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ **(d)** $G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$
(e) $G(s)H(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}$ **(f)** $G(s)H(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2}$
(g) $G(s)H(s) = \frac{s+1}{s^2-4}$ **(h)** $G(s)H(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$
(i) $G(s)H(s) = \frac{s+1}{s^2-2s+2}$ **(j)** $G(s)H(s) = \frac{s+1}{(s+100)(s-1)^2}$
(k) $G(s)H(s) = \frac{s^2}{(s+1)^3}$

11.29. Considere el sistema de retroalimentación básico de la figura 11.3(a). Trace el diagrama log magnitud-fase y determine en forma aproximada el margen de fase y de ganancia para cada una de las siguientes selecciones de $G(s)$ y $H(s)$. Puede encontrar útil usar la aproximación en línea recta para los diagramas de Bode desarrollada en el capítulo 6, como ayuda para graficar los diagramas log magnitud-fase. Sin embargo, tenga cuidado de tomar en cuenta la forma en que la respuesta en frecuencia real se desvía de su aproximación cerca de la frecuencia de corte cuando hay términos de segundo orden subamortiguados presentes. (Véase la sección 6.5.2.)

(a) $H(s) = \frac{10s+1}{s^2+s+1}, \quad G(s) = 1$
(b) $H(s) = \frac{s/10+1}{s^2+s+1}, \quad G(s) = 1$
(c) $H(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+10)}, \quad G(s) = 100$
(d) $H(s) = \frac{1}{(s+1)^3}, \quad G(s) = \frac{1}{s+1}$
(e) $H(s) = \frac{1-s}{(s+1)(s+10)}, \quad G(s) = 1$

(f) $H(s) = \frac{1 - s/100}{(s+1)^2}$, $G(s) = \frac{10s + 1}{s/10 + 1}$

(g) $H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, $G(s) = \frac{1}{s+1}$

Nota: Su dibujo de la parte (g) debe reflejar el hecho de que, para este sistema retroalimentado, $|G(j\omega)H(j\omega)| \to \infty$ a medida que $\omega \to 0$; ¿cuál es la fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ para $\omega = 0^+$, es decir, para ω cuando es mayor que 0 por una cantidad infinitesimal?

11.30. Trace el diagrama de Nyquist para cada una de las siguientes especificaciones de $G(z)H(z)$ y use el criterio de Nyquist discreto para determinar el intervalo de valores de K (si tal intervalo existe) para el cual el sistema de lazo cerrado es estable. [*Nota:* Al trazar el diagrama de Nyquist puede encontrar útil dibujar primero los diagramas de magnitud y fase en función de la frecuencia, o al menos calcular $|G(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})|$ y $\sphericalangle G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ en varios puntos. También es de ayuda determinar los valores de ω para los cuales $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ es real.]

(a) $G(z)H(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$ **(b)** $G(z)H(z) = \frac{1}{z-2}$

(c) $G(z)H(z) = z^{-1}$ **(d)** $G(z)H(z) = z^{-2}$

(e) $G(z)H(z) = \frac{1}{(z + \frac{1}{2})(z - \frac{3}{2})}$ **(f)** $G(z)H(z) = \frac{z - \sqrt{3}}{z(z + 1/\sqrt{3})}$

(g) $G(z)H(z) = \frac{1}{z^2 - z + \frac{1}{3}}$ **(h)** $G(z)H(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{z(z-2)}$

(i) $G(z)H(z) = \frac{(z+1)^2}{z^3}$

11.31. Considere el sistema discreto básico de la figura 11.3(b). Trace el diagrama log magnitud-fase y determine en forma aproximada los márgenes de ganancia y de fase para cada una de las siguientes selecciones de $G(z)$ y $H(z)$. Puede encontrar útil determinar los valores de ω para los cuales ya sea que $|G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})| = 1$ o que $\sphericalangle G(e^{j\omega}) = -\pi$.

(a) $H(z) = z^{-1}$, $G(z) = \frac{1}{2}$

(b) $H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$, $G(z) = \frac{1}{2}$

(c) $H(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}$, $G(z) = z^{-2}$

(d) $H(z) = \frac{2}{z-2}$, $G(z) = 1$

(e) $H(z) = \frac{1}{z + \frac{1}{2}}$, $G(z) = \frac{1}{z - \frac{3}{2}}$

(f) $H(z) = \frac{1}{z + \frac{1}{2}}$, $G(z) = 1 - \frac{3}{2}z^{-1}$

(g) $H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z^2 - z + \frac{1}{3}}$, $G(z) = 1$

(h) $H(z) = \frac{1}{z-1}$, $G(z) = \frac{1}{4}z^{-1}$

(*Nota:* Su dibujo de la parte (h) debe reflejar el hecho de que, para este sistema retroalimentado, $G(z)H(z)$ tiene un polo en $z = 1$; ¿cuáles son los valores de $\sphericalangle G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ para una $e^{j\omega}$ justo en cualquier lado del punto $z = 1$?)

PROBLEMAS AVANZADOS

11.32. **(a)** Considere el sistema retroalimentado de la figura 11.10(b) con

$$H(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}, \quad G(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}. \qquad \text{(P11.32-1)}$$

Suponga que no hay cancelaciones de polos y ceros en el producto $G(s)H(s)$. Demuestre que los ceros de la función del sistema de lazo cerrado consisten en los ceros de $H(s)$ y en los polos de $G(s)$.

(b) Use el resultado de la parte (a) junto con la propiedad adecuada del lugar geométrico de las raíces para confirmar el hecho de que, con $K = 0$, los ceros del sistema de lazo cerrado son los ceros de $H(s)$ y los polos de lazo cerrado son los polos de $H(s)$.

(c) Si bien es normal que $H(s)$ y $G(s)$ de la ecuación (P11.32-1) estén en la forma reducida [es decir, los polinomios $N_1(s)$ y $D_1(s)$ no tienen factores comunes, y lo mismo es válido para $N_2(s)$ y $D_2(s)$], puede suceder que $N_1(s)$ y $D_2(s)$ tengan factores comunes, o $N_2(s)$ y $D_1(s)$ tengan factores comunes. Para saber qué ocurre cuando están presentes tales factores comunes, hagamos que $p(s)$ denote el factor común más grande de $N_2(s)$ y $D_1(s)$. Esto es

$$\frac{N_1(s)}{p(s)} \quad \text{y} \quad \frac{D_2(s)}{p(s)}$$

son ambos polinomios y *no* tienen factores comunes. De manera similar,

$$\frac{N_2(s)}{q(s)} \quad \text{y} \quad \frac{D_1(s)}{q(s)}$$

son polinomios y no tienen factores comunes. Demuestre que la función del sistema de lazo cerrado para el sistema retroalimentado puede escribirse como

$$Q(s) = \frac{p(s)}{q(s)}\left[\frac{\hat{H}(s)}{1 + \hat{K}G(s)\hat{H}(s)}\right], \tag{P11.32-2}$$

donde

$$\hat{H}(s) = \frac{N_1(s)/p(s)}{D_1(s)/q(s)}$$

y

$$\hat{G}(s) = \frac{N_2(s)/q(s)}{D_2(s)/p(s)}.$$

Por lo tanto, de la ecuación (P11.32-2) y de la parte (a) vemos que los ceros de $Q(s)$ son los ceros de $p(s)$, los ceros de $\hat{H}(s)$ y los polos de $\hat{G}(s)$, mientras que los polos de $Q(s)$ son los ceros de $q(s)$ y las soluciones de

$$1 + K\hat{G}(s)\hat{H}(s) = 0. \tag{P11.32-3}$$

Por construcción, no hay cancelación de polos y ceros en el producto $\hat{G}(s)\hat{H}(s)$ y, por lo tanto, podemos aplicar el método del lugar geométrico de las raíces descrito en la sección 11.3 para trazar las ubicaciones de las soluciones de la ecuación (P11.32-3) conforme se varía K.

(d) Use el procedimiento descrito en la parte (c) para determinar los ceros de lazo cerrado, los polos de lazo cerrado cuyas localizaciones sean independientes de K, y el lugar geométrico del resto de los polos de lazo cerrado para $K > 0$ cuando

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+4)(s+2)}, \qquad G(s) = \frac{s+2}{s+1}.$$

(e) Repita la parte (d) para

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad G(z) = \frac{z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

(f) Sea

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z+2)}, \qquad G(z) = \frac{1}{z^2}.$$

(i) Trace el lugar geométrico de las raíces para $K > 0$ y para $K < 0$.
(ii) Encuentre todos los valores de K para los cuales el sistema total es estable.
(iii) Encuentre la respuesta al impulso del sistema de lazo cerrado cuando $K = 4$.

11.33. Considere el sistema retroalimentado de la figura 11.10(a) y suponga que

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{k=1}^{m}(s - \beta_k)}{\prod_{k=1}^{n}(s - \alpha_k)},$$

donde $m > n$.[5] En este caso $G(s)H(s)$ tiene $m - n$ polos en el infinito (vea el capítulo 9), y podemos adaptar las reglas del lugar geométrico de las raíces proporcionadas en el texto simplemente anotando que (1) hay m ramas en el lugar geométrico de las raíces, y (2) para $K = 0$ todas las ramas del lugar geométrico empiezan en los polos de $G(s)H(s)$, de los cuales $m - n$ están en el infinito. Además, a medida que $|K| \to \infty$, estas ramas convergen en los m ceros de $G(s)H(s)$, a saber, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Use estos datos para ayudarse al dibujar el lugar geométrico (para $K > 0$ y para $K < 0$) para cada una de las siguientes funciones:

(a) $G(s)H(s) = s - 1$
(b) $G(s)H(s) = (s + 1)(s + 2)$
(c) $G(s)H(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s-1}$

11.34. En la sección 11.3 dedujimos diversas propiedades que pueden ser valiosas para la determinación del lugar geométrico de las raíces de un sistema retroalimentado. En este problema desarrollamos varias propiedades adicionales. Deduciremos estas propiedades en términos de los sistemas continuos, pero al igual que con todas las propiedades del lugar geométrico de las raíces, también se cumplen para el caso discreto. Para nuestro análisis de estas propiedades nos remitiremos a la ecuación básica que satisfacen los polos de lazo cerrado, es decir,

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K}, \tag{P11.34-1}$$

[5]Note que, para los sistemas continuos, la condición $m > n$ implica que el sistema con función del sistema $G(s)H(s)$ involucra diferenciación de la entrada. [De hecho, la transformada inversa de $G(s)H(s)$ incluye funciones singulares hasta del orden $m - n$.] En el caso discreto, si $G(z)H(z)$, escrita como una razón de polinomios en z, tiene $m > n$, es necesariamente la función del sistema de un sistema no causal. [De hecho, la transformada inversa de $G(z)H(z)$ tiene un valor diferente de cero en el tiempo $n - m < 0$.] Por lo tanto, el caso considerado en este problema en realidad sólo interesa para los sistemas continuos.

donde

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{k=1}^{m}(s-\beta_k)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} b_k s^k}{\sum_{k=1}^{n} a_k s^k}. \qquad \text{(P11.34-2)}$$

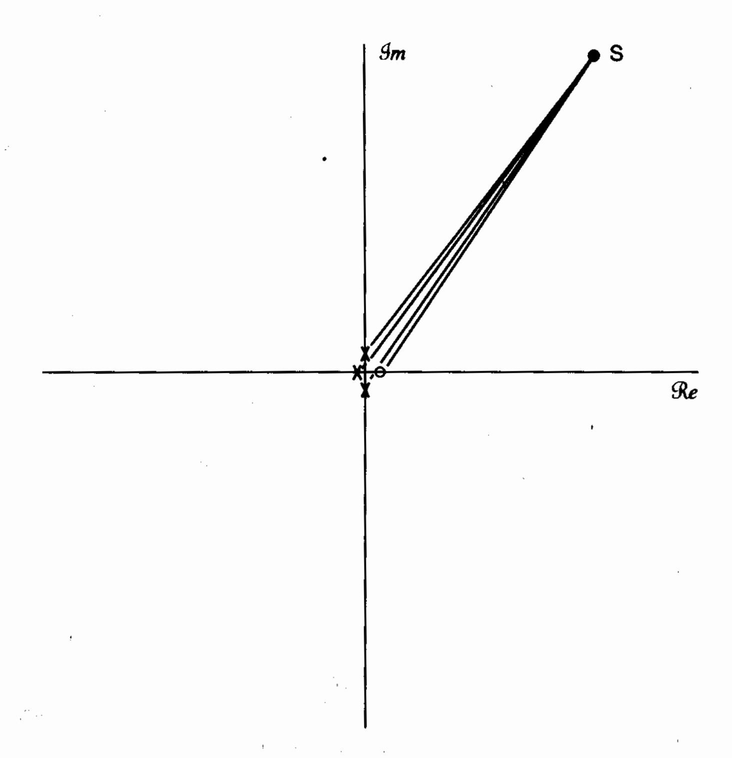


Figura P11.34

En todo el problema supondremos que $m \leq n$.

(a) A partir de la propiedad 2 sabemos que $n - m$ ramas del lugar geométrico van a los ceros de $G(s)H(s)$ localizados en el infinito. En esta primera parte demostraremos que se pueden determinar con facilidad los ángulos en los cuales estas ramas del lugar geométrico se aproximan al infinito. En concreto, considere efectuar la búsqueda de la parte remota del plano s [es decir, la región donde $|s|$ es en extremo grande y está alejada de cualquiera de los polos y ceros de $G(s)H(s)$]. Esto se ilustra en la figura P11.34. Use la geometría de esta imagen, junto con el criterio del ángulo para $K > 0$ y para $K < 0$, para deducir que:

- Para $K > 0$, las $n - m$ ramas del lugar geométrico de las raíces que se aproximan a infinito lo hacen con los ángulos

$$\frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-m-1.$$

- Para $K < 0$, las $n - m$ ramas del lugar geométrico de las raíces que se aproximan a infinito lo hacen con los siguientes ángulos

$$\frac{2k\pi}{n-m}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n - m - 1.$$

En consecuencia, las ramas del lugar geométrico que se aproximan a infinito lo hacen con los ángulos especificados, los cuales se presentan en un arreglo simétrico. Por ejemplo, para $n - m = 3$ y $K > 0$, vemos que los ángulos asintóticos son $\pi/3$, π y $5\pi/3$. El resultado de la parte (a) junto con un hecho adicional nos permite dibujar en las asíntotas de las ramas del lugar geométrico que se aproximan a infinito. En concreto, todas las $n - m$ asíntotas se intersectan en un solo punto en el eje real. Esto se deduce en la siguiente parte de este problema.

(b) (i) Como un primer paso, considere una ecuación de polinomios general

$$s^r + f_{r-1}s^{r-1} + \cdots + f_0 = (s - \xi_1)(s - \xi_2)\cdots(s - \xi_r) = 0.$$

Demuestre que

$$f_{r-1} = -\sum_{i=1}^{r} \xi_i.$$

(ii) Ejecute una división larga en $1/G(s)H(s)$ para escribir

$$\frac{1}{G(s)H(s)} = s^{n-m} + \gamma_{n-m-1}s^{n-m-1} + \ldots. \qquad \text{(P11.34-3)}$$

Demuestre que

$$\gamma_{n-m-1} = a_{n-1} - b_{m-1} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

[Véase la ecuación (P11.34-2).]

(iii) Argumente que la solución de la ecuación (P11.34-1) para *s grandes* es una solución aproximada de la ecuación

$$s^{n-m} + \gamma_{n-m-1}s^{n-m-1} + \gamma_{n-m-2}s^{n-m-2} + \cdots + \gamma_0 + K = 0.$$

(iv) Use los resultados de (i) a (iii) para deducir que la suma de los $n - m$ polos de lazo cerrado que se aproximan a infinito es asintóticamente igual a

$$b_{m-1} - a_{n-1}.$$

Por lo tanto, el centro de gravedad de estos $n - m$ polos es

$$\frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{n-m},$$

el cual no depende de K. En consecuencia, tenemos $n - m$ polos de lazo cerrado que se aproximan a $|s| = \infty$ con ángulos que están igualmente espaciados y que tienen un centro de gravedad que es independiente de K. A partir de esto podemos deducir que:

Las asíntotas de las $n - m$ ramas del lugar geométrico que se aproximan a infinito se intersectan en el punto

$$\frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{n - m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \sum_{k=1}^{m} \beta_k}{n - m}.$$

Este punto de intersección de asíntotas es el mismo para $K > 0$ y $K < 0$.

(c) Suponga que

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+5)}.$$

(i) ¿Cuáles son los ángulos asintóticos para los polos de lazo cerrado que se aproximan a infinito para $K > 0$ y para $K < 0$?

(ii) ¿Cuál es el punto de intersección de las asíntotas?

(iii) Dibuje las asíntotas o úselas para ayudarse a graficar el lugar geométrico de las raíces para $K > 0$ y para $K < 0$.

(d) Repita la parte (c) para cada una de las siguientes funciones:

(i) $G(s)H(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+4)}$

(ii) $G(s)H(s) = \frac{1}{s^4}$

(iii) $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)(s+6)}$

(iv) $G(s)H(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s-1)^2}$

(v) $G(s)H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+2)}$

(vi) $G(s)H(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2(s^2+2s+2)}$

(vii) $G(s)H(s) = \frac{s+1}{(s+100)(s-1)(s-2)}$

(e) Use el resultado de la parte (a) para explicar por qué el siguiente enunciado es válido: Para cualquier sistema retroalimentado continuo, con $G(s)H(s)$ dado por la ecuación (P11.34-2), si $n - m \geq 3$, podemos hacer que el sistema de lazo cerrado sea inestable escogiendo un $|K|$ lo suficientemente grande.

(f) Repita la parte (c) para el sistema retroalimentado discreto especificado por

$$G(z)H(z) = \frac{z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

(g) Explique por qué el siguiente enunciado es válido: Para cualquier sistema retroalimentado discreto, con

$$G(z)H(z) = \frac{z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0},$$

si $n > m$, podemos hacer que el sistema de lazo cerrado sea inestable escogiendo un $|K|$ lo suficientemente grande.

11.35. (a) Considere de nuevo el sistema retroalimentado del ejemplo 11.2:

$$G(s)H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}.$$

El lugar geométrico de las raíces para $K < 0$ está graficado en la figura 11.14(b). Para algunos valores de K, los dos polos de lazo cerrado están en el eje $j\omega$. Determine este valor de K y las ubicaciones correspondientes de los polos de lazo cerrado, examinando las partes real e imaginaria de la ecuación

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{1}{K},$$

la cual debe satisfacerse si el punto $s = j\omega$ está en el lugar geométrico de las raíces para cualquier valor dado de K. Use este resultado, más el análisis del ejemplo 11.2 para encontrar el intervalo total de valores de K (positivos y negativos) para los cuales el sistema de lazo cerrado es estable.

(b) Observe que este sistema retroalimentado es inestable para un $|K|$ lo suficientemente grande. Explique por qué esto es válido en general para sistemas retroalimentados continuos para los cuales $G(s)H(s)$ tiene un cero en el semiplano derecho y para los sistemas retroalimentados discretos para los cuales $G(z)H(z)$ tiene un cero en el semiplano derecho, así como para sistemas retroalimentados para los cuales $G(z)H(z)$ tiene un cero fuera del círculo unitario.

11.36. Considere un sistema retroalimentado continuo con

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}. \qquad \text{(P11.36-1)}$$

(a) Trace el lugar geométrico de las raíces para $K > 0$ y para $K < 0$. (*Sugerencia:* El resultado del problema 11.34 le servirá aquí.)

(b) Si ha trazado correctamente el lugar geométrico, verá que para $K > 0$ dos ramas del lugar geométrico cruzan el eje $j\omega$, pasando del semiplano izquierdo al semiplano derecho. En consecuencia, podemos concluir que el sistema de lazo cerrado es estable para $0 < K < K_0$, donde K_0 es el valor de la ganancia para el cual las dos ramas del lugar geométrico intersectan el eje $j\omega$. Observe que el dibujo del lugar geométrico de las raíces por sí mismo no nos dice cuál es el valor de K_0 o el punto exacto en el eje $j\omega$ donde las dos ramas se cruzan. Al igual que en el problema 11.35, determine K_0, resolviendo el par de ecuaciones obtenidas de las partes real e imaginaria de

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{1}{K_0}. \qquad \text{(P11.36-2)}$$

Determine los dos valores correspondientes de ω (los cuales son los negativos uno del otro, ya que los polos ocurren en pares conjugados complejos).

A partir de sus dibujos del lugar geométrico de la parte (a) observe que hay un segmento del eje real entre dos polos que está en el lugar geométrico para $K > 0$, y un segmento diferente está en el lugar geométrico para $K < 0$. En ambos casos el lugar geométrico de las raíces se desvía del eje real en algún punto. En la siguiente parte de este problema ilustraremos la forma en que uno puede calcular estos puntos de desviación.

(c) Considere la siguiente ecuación que define los polos de lazo cerrado

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K}. \qquad \text{(P11.36-3)}$$

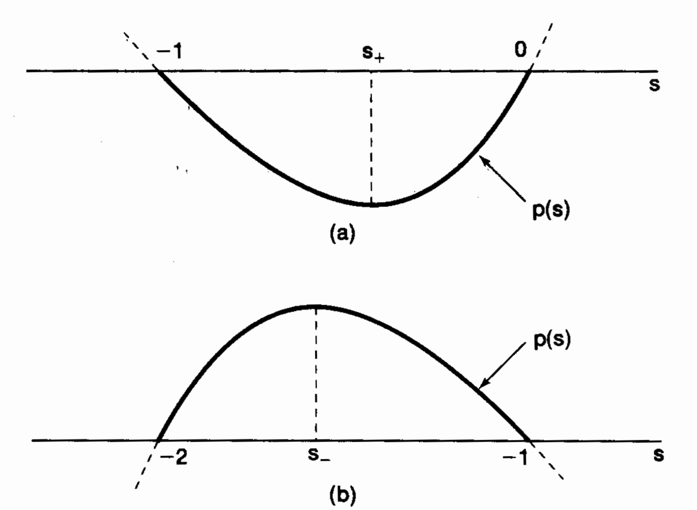


Figura P11.36

Usando la ecuación (P11.36-1) demuestre que para los polos de lazo cerrado una ecuación equivalente, que es

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + 2s = -K. \qquad \text{(P11.36-4)}$$

Considere el segmento del eje real entre 0 y -1. Este segmento está en el lugar geométrico para $K \geq 0$. Para $K = 0$ dos ramas del lugar geométrico empiezan en 0 y -1 y se aproximan una a la otra conforme K se incrementa.

(i) Use lo enunciado anteriormente, junto con la ecuación (P11.36-4), para explicar por qué la función $p(s)$ tiene la forma que se muestra en la figura P11.36(a) para $-1 \leq s \leq 0$, y por qué el punto s_+ donde ocurre el mínimo es el punto de desviación (es decir, es el punto donde las dos ramas del lugar geométrico para $K > 0$ se desvían del segmento del eje real situado entre -1 y 0).

De manera similar, considere el lugar geométrico de las raíces para $K < 0$ y de manera más específica, el segmento del eje real entre -1 y -2, el cual forma parte de este lugar de las raíces. Para $K = 0$, dos ramas del lugar geométrico empiezan en -1 y en -2 y a medida que K disminuye, estos polos se aproximan uno al otro.

(ii) De manera análoga a como se trató en la parte (i), explique por qué la función $p(s)$ tiene la forma mostrada en la figura P11.36(b) y por qué el punto s_- donde ocurre el máximo es el punto de desviación para $K < 0$.

Por lo tanto, los puntos de desviación corresponden al máximo y al mínimo de $p(s)$ conforme s se mueve sobre la línea real negativa.

(iii) Los puntos en los cuales $p(s)$ tiene un máximo o un mínimo son las soluciones de la siguiente ecuación

$$\frac{d\,p(s)}{ds} = 0.$$

Use este hecho para encontrar los puntos de desviación s_+ y s_-, y después use la ecuación (P11.36-4) para encontrar las ganancias en las cuales estos puntos son polos de lazo cerrado.

Además del método ilustrado en la parte (c), hay otros métodos, en parte analíticos en parte gráficos, para determinar los puntos de desviación. También es posible usar un procedimiento similar al ilustrado en la parte (c) para determinar los puntos de "reunión" donde las dos ramas del lugar geométrico se juntan con

el eje real. Estos métodos, más el que se acaba de ilustrar, son descritos en textos avanzados como los mencionados en la bibliografía al final del libro.

11.37. Un problema que siempre debe ser tomado en cuenta por los diseñadores de sistemas es el posible efecto de los aspectos no modelados del sistema que uno está intentando estabilizar o modificar a través de la retroalimentación. En este problema proporcionamos un ejemplo de este caso. Considere un sistema retroalimentado continuo y suponga que

$$H(s) = \frac{1}{(s+10)(s-2)} \qquad \text{(P11.37-1)}$$

y

$$G(s) = K. \qquad \text{(P11.37-2)}$$

(a) Use las técnicas del lugar geométrico de las raíces para demostrar que el sistema de lazo cerrado será estable si se selecciona una K lo bastante grande.

(b) Suponga que el sistema que estamos tratando de estabilizar por retroalimentación tiene una función del sistema dada por

$$H(s) = \frac{1}{(s+10)(s-2)(10^{-3}s+1)}. \qquad \text{(P11.37-3)}$$

Podemos considerar que el factor que ha sido agregado representa un sistema de primer orden en cascada con el sistema de la ecuación (P11.37-1). Observe que la constante de tiempo de este sistema es extremadamente pequeña y por tanto parecerá tener una respuesta al escalón que es casi instantánea. Por esta razón, a menudo uno desprecia tales factores para obtener modelos más simples y más manejables que capturen todas las características importantes del sistema. Sin embargo, uno debe tener en mente esta dinámica despreciada para obtener un diseño retroalimentado útil. Para ver por qué es éste el caso, demuestre que si $G(s)$ está dada por la ecuación (P11.37-2) y $H(s)$ es como en la ecuación (P11.37-3), entonces el sistema de lazo cerrado será inestable si se escoge una K *demasiado* grande. (*Sugerencia:* Vea el problema 11.34.)

(c) Use las técnicas del lugar geométrico de las raíces para demostrar que si

$$G(s) = K(s+100),$$

entonces el sistema retroalimentado será estable para todos los valores de K los suficientemente grandes si $H(s)$ está dada por la ecuación (P11.37-1) *o* por la ecuación (P11.37-3).

11.38. Considere el sistema retroalimentado de la figura 11.3(b) con

$$H(z) = \frac{Kz^{-1}}{1-z^{-1}}$$

y

$$G(z) = 1 - az^{-1}.$$

(a) Trace el lugar geométrico de las raíces de este sistema para $K > 0$ y para $K < 0$ cuando $a = 1/2$.

(b) Repita la parte (a) cuando $a = -1/2$.

(c) Con $a = -1/2$, encuentre un valor de K para el cual la respuesta al impulso de lazo cerrado tiene la forma

$$(A + Bn)\alpha^n$$

para algunos valores de las constantes A, B y α con $|\alpha| < 1$. (*Sugerencia:* ¿Cómo debe lucir el denominador de la función de transferencia de lazo cerrado en este caso?)

11.39. Considere el sistema retroalimentado de la figura P11.39 con

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad G(z) = K. \qquad \text{(P11.39-1)}$$

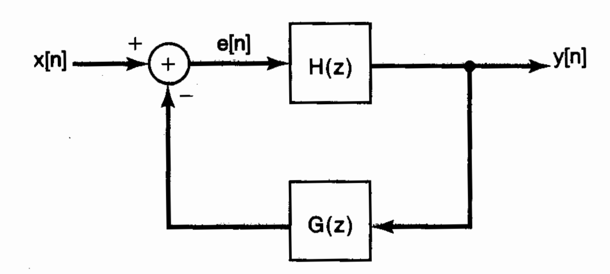


Figura P11.39

(a) Dibuje el lugar geométrico de las raíces para $K > 0$.

(b) Dibuje el lugar geométrico de las raíces para $K < 0$. (*Nota:* Tenga cuidado con este lugar geométrico. Aplicando el criterio del ángulo en el eje real encontrará que conforme K disminuye desde cero, el polo de lazo cerrado se aproxima a $z = +\infty$ a lo largo del eje real positivo y después regresa a lo largo del eje real negativo desde $z = -\infty$. Verifique que éste es de hecho el caso resolviendo en forma explícita para el polo de lazo cerrado en función de K. ¿En qué valor de K está el polo en $|z| = \infty$?)

(c) Encuentre el intervalo total de valores de K para el cual el sistema de lazo cerrado es estable.

(d) El fenómeno observado en la parte (b) es una consecuencia directa del hecho de que en este ejemplo el numerador y el denominador de $G(z)H(z)$ tienen el mismo grado. Cuando esto ocurre en un sistema retroalimentado discreto significa que hay un lazo libre de retraso. Esto es, la salida en un punto de tiempo dado está siendo retroalimentada en el sistema y por lo tanto afecta su propio valor en el mismo punto de tiempo. Para ver que éste es el caso en el sistema que estamos examinando, escriba la ecuación de diferencias que relaciona a $y[n]$ con $e[n]$. Después escriba $e[n]$ en términos de la entrada y la salida del sistema retroalimentado. Compare este resultado con el del sistema retroalimentado con

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad G(z) = Kz^{-1}. \qquad \text{(P11.39-2)}$$

La consecuencia principal de tener lazos libres de retraso es que tales sistemas retroalimentados no pueden ser construidos mediante la forma representada. Por ejemplo, para el sistema de la ecuación (P11.39-1) no podemos calcular primero $e[n]$ y después $y[n]$, porque $e[n]$ depende de $y[n]$. Observe

que sí *podemos* realizar este tipo de cálculo para el sistema de la ecuación (P11.39-2), puesto que $e[n]$ depende de $y[n-1]$.

(e) Demuestre que el sistema retroalimentado de la ecuación (P11.39-1) representa un sistema causal excepto para el valor de K en el cual el polo de lazo cerrado está en $|z| = \infty$.

11.40. Considere el sistema retroalimentado discreto representado en la figura P11.40. El sistema en la trayectoria directa no está muy bien amortiguado y nos gustaría seleccionar la función del sistema de retroalimentación para mejorar el amortiguamiento total. Usando los métodos del lugar de las raíces, demuestre que lo anterior se puede realizar con

$$G(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}.$$

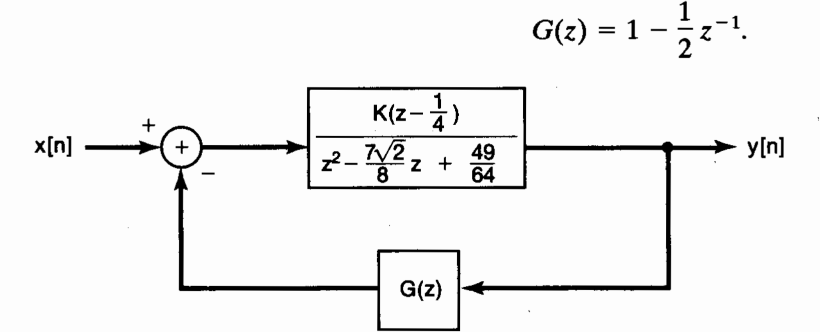


Figura P11.40

En concreto, trace el lugar geométrico para $K > 0$ y especifique un valor de la ganancia K con el cual se obtiene un mejoramiento significativo de la amortiguación.

11.41. **(a)** Considere un sistema retroalimentado con

$$H(z) = \frac{z+1}{z^2 + z + \frac{1}{4}}, \qquad G(z) = \frac{K}{z-1}.$$

(i) Escriba la función del sistema de lazo cerrado en forma explícita como una razón de dos polinomios. (El polinomio del denominador tendrá coeficientes que dependen de K.)

(ii) Demuestre que la suma de los polos de lazo cerrado es independiente de K.

(b) En un caso más general, considere un sistema retroalimentado que tiene la siguiente función del sistema:

$$G(z)H(z) = K\frac{z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}.$$

Demuestre que si $m \leq n - 2$, la suma de los polos de lazo cerrado es independiente de K.

11.42. Considere de nuevo el sistema retroalimentado discreto del ejemplo 11.3:

$$G(z)H(z) = \frac{z}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}.$$

Los lugares geométricos de las raíces para $K > 0$ y para $K < 0$ están representados en la figura 11.16.

(a) Considere el lugar geométrico de las raíces para $K > 0$. En este caso el sistema se vuelve inestable cuando uno de los polos de lazo cerrado es menor o igual que -1. Encuentre el valor de K para el cual $z = -1$ es un polo de lazo cerrado.

(b) Considere el lugar geométrico de las raíces para $K < 0$. En este caso el sistema se vuelve inestable cuando uno de los polos de lazo cerrado es mayor o igual que 1. Encuentre el valor de K para el cual $z = 1$ es un polo de lazo cerrado.

(c) ¿Cuál es el intervalo total de valores de K para el cual el sistema de lazo cerrado es estable?

11.43. Considere un sistema retroalimentado discreto con

$$G(z)H(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

(a) Trace el lugar geométrico de las raíces para $K > 0$ y para $K < 0$.

(b) Si ha trazado correctamente el lugar geométrico para $K > 0$, verá que las dos ramas del lugar geométrico cruzan y salen del círculo unitario. En consecuencia, podemos concluir que el sistema de lazo cerrado es estable para $0 < K < K_0$, donde K_0 es el valor de la ganancia para la cual las dos ramas intersectan el círculo unitario. ¿En qué puntos en el círculo unitario se salen las ramas? ¿Cuál es el valor de K_0?

11.44. Como se mencionó en la sección 11.4, el criterio de Nyquist de tiempo continuo puede extenderse para permitir la presencia de polos de $G(s)H(s)$ en el eje $j\omega$. En este problema ilustraremos la técnica general por medio de varios ejemplos. Considere un sistema retroalimentado continuo con

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)}. \quad \text{(P11.44-1)}$$

Cuando $G(s)H(s)$ tiene un polo en $s = 0$ modificamos el contorno de la figura 11.19 para evitar el origen. Para lograrlo, hacemos una hendidura en el contorno agregando un semicírculo de radio infinitesimal ϵ en el semiplano derecho. [Véase la figura P11.44(a).] Por lo tanto, sólo una pequeña parte del semiplano derecho no está encerrada por el contorno modificado, y esta área tiende a cero conforme $\epsilon \rightarrow 0$. En consecuencia, a medida que $M \rightarrow \infty$, el contorno encerrará el semiplano derecho completo. Como en el texto, $G(s)H(s)$ es constante (y en este caso cero) a lo largo del círculo de radio infinito. Por lo tanto, para graficar $G(s)H(s)$ a lo largo del contorno necesitamos dibujar sólo la porción del contorno que consiste del eje $j\omega$ y del semicírculo infinitesimal.

(a) Demuestre que

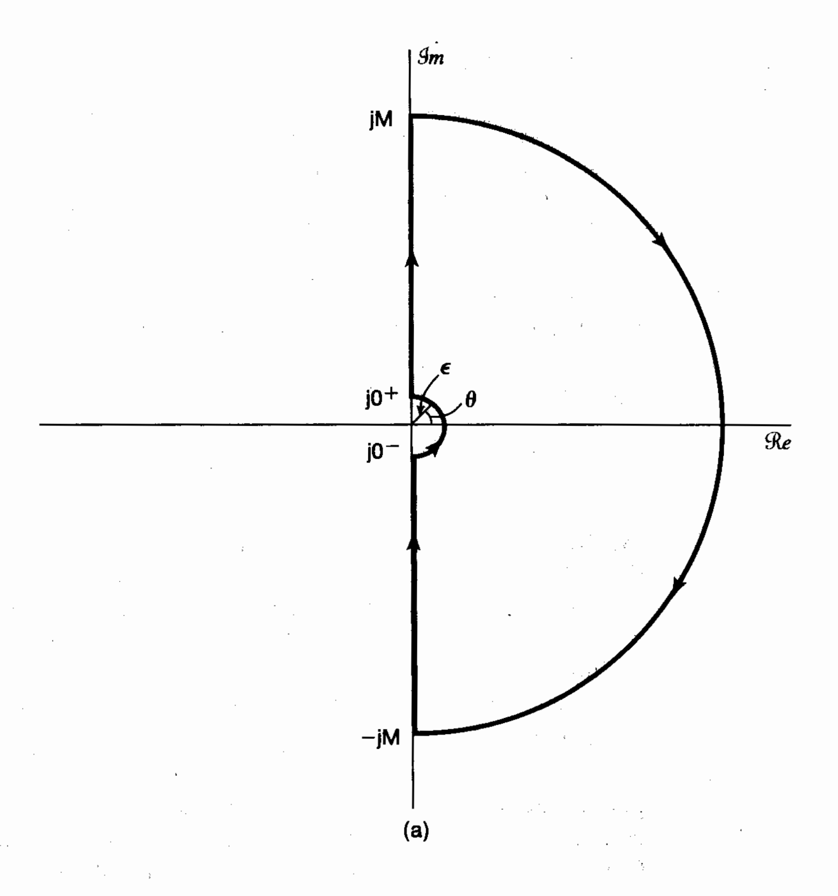
$$\sphericalangle G(j0^+)H(j0^+) = -\frac{\pi}{2}$$

y

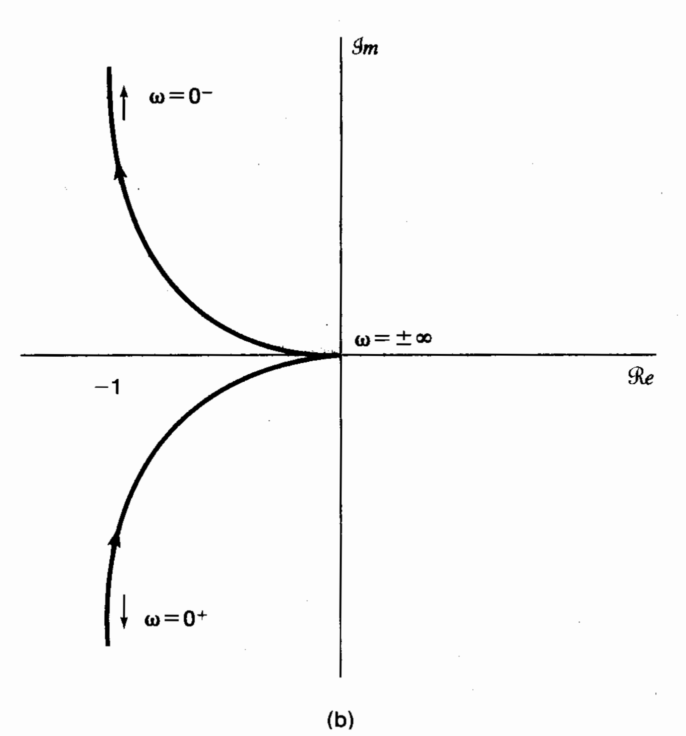
$$\sphericalangle G(j0^-)H(j0^-) = \frac{\pi}{2},$$

donde $s = j0^-$ es el punto donde el semicírculo infinitesimal se encuentra con el eje $j\omega$ justo por debajo del origen, y $s = j0^+$ es el punto correspondiente situado justo arriba del origen.

(b) Use el resultado de la parte (a) junto con la ecuación (P11.44-1) para verificar que la figura P11.44(b) es un dibujo exacto de $G(s)H(s)$ a lo largo de las



(a)



(b)

Figura P11.44

porciones del contorno desde $-j\infty$ hasta $j0^-$ y $j0^+$ hasta $j\infty$. En particular, verifique que $\sphericalangle G(j\omega)H(j\omega)$ y $|G(j\omega)H(j\omega)|$ se comportan en la forma representada en la figura.

(c) Lo que resta por hacer es determinar el diagrama de $G(s)H(s)$ a lo largo del pequeño semicírculo alrededor de $s = 0$. Observe que conforme $\epsilon \rightarrow 0$, la magnitud de $G(s)H(s)$ a lo largo de este contorno se va al infinito. Demuestre que, a medida que $\epsilon \rightarrow 0$, la contribución del polo en $s = -1$ a $\sphericalangle G(s)H(s)$ a lo largo del semicírculo es cero. Demuestre después que conforme $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\sphericalangle G(s)H(s) = -\theta,$$

donde θ está definida en la figura P11.44(a). Por lo tanto, ya que θ varía de $-\pi/2$ en $s = j0^-$ a $+\pi/2$ en $s = j0^-$ en sentido inverso al de las manecillas del reloj, $\sphericalangle G(s)H(s)$ debe ir de $+\pi/2$ en $s = j0^+$ a $-\pi/2$ en $s = j0^+$ en el sentido de las manecillas del reloj. El resultado es el diagrama de Nyquist completo mostrado en la figura P11.44(c).

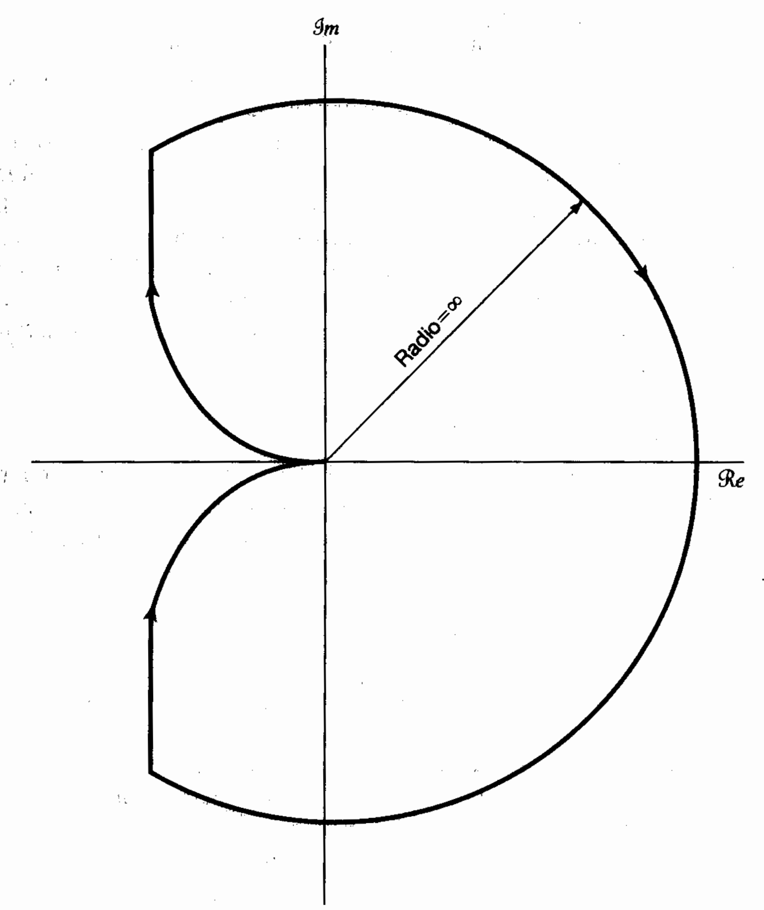


Figura P11.44 *Continuación*

(d) Usando el diagrama de Nyquist de la figura P11.44(c), encuentre el intervalo de valores de K para el cual el sistema retroalimentado de lazo cerrado es estable. (*Nota:* El criterio de Nyquist de tiempo continuo, como se presentó en el texto, establece que para la estabilidad del sistema de lazo cerrado el número neto de circunvalaciones en el sentido de las manecillas del reloj del punto $-1/K$ debe ser igual a menos el número neto de polos de $G(s)H(s)$ localizados en el semiplano derecho. En nuestro ejemplo, observe que el polo de $G(s)H(s)$ en $s = 0$ está *fuera* del contorno modificado. En consecuencia, *no está* incluido en el conteo de polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho [es decir, sólo los polos de $G(s)H(s)$ que están estrictamente *dentro* del semiplano derecho son contados al aplicar el criterio de Nyquist]. Por lo tanto, en este caso, ya que $G(s)H(s)$ no tiene polos estrictamente dentro del semiplano derecho, *no debemos* tener circunvalaciones del punto $s = -1/K$ para lograr la estabilidad del sistema de lazo cerrado.)

(e) Siguiendo los pasos descritos en las partes (a) a (c) trace los diagramas de Nyquist para cada una de las siguientes funciones:

(i) $G(s)H(s) = \frac{(s/10) + 1}{s(s + 1)}$

(ii) $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s + 1)^2}$

(iii) $G(s)H(s) = \frac{1}{s^2}$ [tenga cuidado al calcular $\sphericalangle G(s)H(s)$ a lo largo del semicírculo infinitesimal]

(iv) $G(s)H(s) = \frac{s + 1}{s(1 - s)}$ [tenga cuidado al calcular $\sphericalangle G(j\omega)H(j\omega)$ conforme ω se varía; asegúrese de tomar en cuenta el signo menos en el denominador]

(v) $G(s)H(s) = \frac{s + 1}{s^2}$ [la misma advertencia que para (iii)]

En cada caso use el criterio de Nyquist para determinar el intervalo de valores de K (si existe tal intervalo) para el cual el sistema de lazo cerrado es estable. También use otro método (el lugar geométrico de las raíces o el cálculo directo de los polos de lazo cerrado en función de K) para proporcionar una verificación parcial de la exactitud de su diagrama de Nyquist. [*Nota:* Al trazar los diagramas de Nyquist puede encontrar útil trazar primero los diagramas de Bode de $G(s)H(s)$. Puede también serle útil determinar los valores de ω para los cuales $G(j\omega)H(j\omega)$ es real.]

(f) Repita la parte (e) para:

(i) $G(s)H(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$

(ii) $G(s)H(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 1}$

Nota: En estos casos hay *dos* polos en el eje imaginario; en consecuencia, usted necesitará modificar el contorno de la figura 11.19 para evitar cada uno de ellos. Use los semicírculos infinitesimales como en la figura P11.44(a).

11.45. Considere un sistema con función del sistema

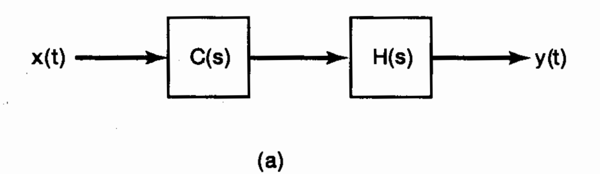
$$H(s) = \frac{1}{(s + 1)(s - 2)}. \qquad \text{(P11.45-1)}$$

Como este sistema es inestable, nos gustaría desarrollar algún método para su estabilización.

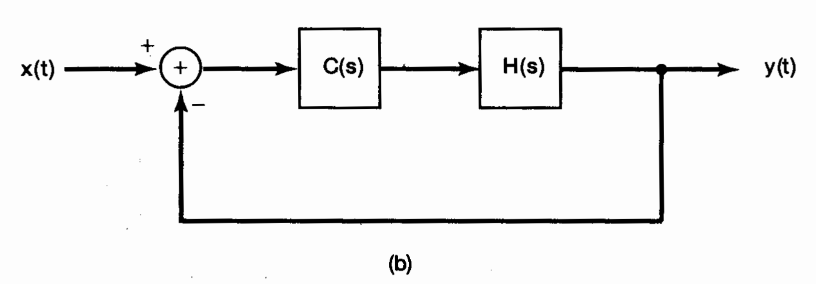
(a) Considere primero un esquema de compensación en serie como el que se ilustró en la figura P11.45(a). Demuestre que el sistema total de esta figura es estable si la función del sistema es

$$C(s) = \frac{s - 2}{s + 3}.$$

En la práctica, esto *no* se considera una manera particularmente útil para intentar estabilizar el sistema. Explique por qué.



(a)



(b)

Figura P11.45

(b) Suponga que en lugar de ese sistema usamos uno retroalimentado como el que se presenta en la figura P11.45(b). ¿Es posible estabilizar este sistema usando una ganancia constante, es decir,

$$C(s) = K,$$

para el elemento estabilizador? Justifique su respuesta usando las técnicas de Nyquist.

(c) Demuestre que el sistema de la figura P11.45(b) puede estabilizarse si $C(s)$ es un sistema proporcional más derivativo, es decir, si

$$C(s) = K(s + a).$$

Considere los casos $0 < a < 1$ y $a > 1$.

(d) Suponga que

$$C(s) = K(s + 2).$$

Seleccione el valor de K de manera que el sistema de lazo cerrado tenga un par de polos complejos con relación de amortiguamiento de $\zeta = 1/2$. (*Sugerencia:* En este caso el denominador del sistema de lazo cerrado debe tener la forma

$$s^2 + \omega_n s + \omega_n^2$$

para algún valor de $\omega_n > 0$.)

(e) La compensación puramente derivativa es imposible de obtener y no es deseable en la práctica. Esto se debe a que la amplificación requerida de frecuencias arbitrariamente altas no puede ser obtenida ni tampoco resulta aconsejable, dado que todos los sistemas reales están sujetos a algún nivel de perturbaciones de alta frecuencia. Entonces, suponga que consideramos un compensador de la forma

$$C(s) = K\left(\frac{s + a}{s + b}\right), \quad a, b > 0. \tag{P11.45-2}$$

Si $b < a$, ésta se llama una *red de retraso*: $\sphericalangle C(j\omega) < 0$ para toda $\omega > 0$, de modo que la fase de la salida del sistema retrase la fase de la entrada. Si $b > a$, $\sphericalangle C(j\omega) > 0$ para toda $\omega > 0$, y este sistema es llamado una *red de adelanto*.

(i) Demuestre que es posible estabilizar el sistema con un compensador de adelanto

$$C(s) = K\frac{s + \frac{1}{2}}{s + 2} \qquad \text{(P11.45-3)}$$

si se escoge una K lo bastante grande.

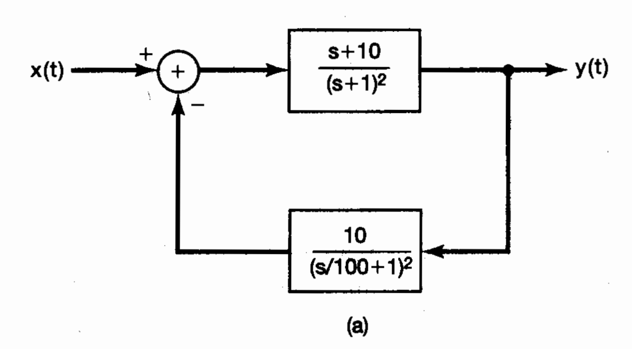
(ii) Demuestre que no es posible estabilizar el sistema retroalimentado de la figura P11.45(b) usando la red de retraso

$$C(s) = K\frac{s + 3}{s + 2}.$$

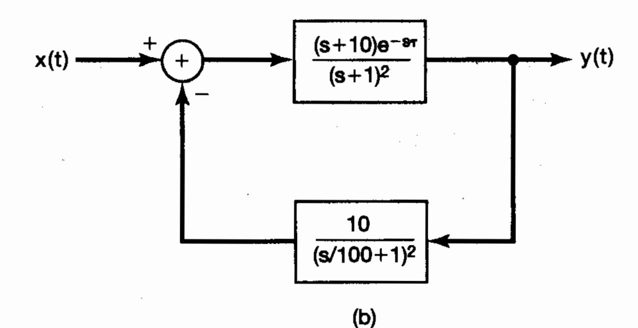
Sugerencia: Use el resultado del problema 11.34 para trazar el lugar geométrico de las raíces. Después determine los puntos en el eje $j\omega$ que estén en el lugar geométrico y los valores de K para los cuales cada uno de aquellos sea un polo de lazo cerrado. Con esta información, demuestre que para ningún valor de K *todos* los polos de lazo cerrado están en el semiplano izquierdo.

11.46. Considere el sistema retroalimentado continuo ilustrado en la figura P11.46(a).

(a) Use las aproximaciones de línea recta para los diagramas de Bode desarrolladas en el capítulo 6 para obtener un bosquejo del diagrama log magnitud-



(a)



(b)

Figura P11.46

fase para este sistema. Determine en forma estimada los márgenes de fase y de ganancia a partir de este diagrama.

(b) Suponga que hay un retraso desconocido dentro del sistema retroalimentado, de manera que el sistema retroalimentado real es como se muestra en la figura P11.46(b). Aproximadamente, ¿cuál es el valor del retraso más grande τ que puede tolerarse antes de que el sistema retroalimentado se vuelva inestable? Use sus resultados de la parte (a) para este cálculo.

(c) Calcule valores más precisos de los márgenes de fase y de ganancia y compárelos con sus resultados de la parte (a). Esto le dará alguna idea de la magnitud de los errores en los que se incurre al usar los diagramas de Bode aproximados.

11.47. Como se mencionó al final de la sección 11.5, los conceptos de margen de fase y de ganancia pueden proporcionar condiciones *suficientes* para asegurar que un sistema retroalimentado estable permanezca estable. Por ejemplo, mostramos que un sistema retroalimentado estable permanece así conforme la ganancia se incrementa hasta el punto en que se alcanza un límite especificado por el margen de ganancia. Esto *no implica* (a) que el sistema retroalimentado no pueda hacerse inestable *disminuyendo* la ganancia, o (b) que el sistema será inestable para *todos* los valores de ganancia más grandes que el límite del margen de ganancia. En este problema ilustraremos estos dos puntos.

(a) Considere un sistema retroalimentado continuo con

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+3)}.$$

Trace el lugar geométrico de las raíces para este sistema para $K > 0$. Use las propiedades del lugar geométrico descritas en el texto y en el problema 11.34 para ayudarse a dibujar el lugar geométrico con exactitud. Una vez que lo haya hecho, debe darse cuenta de que para valores pequeños de la ganancia K el sistema es inestable, para valores grandes de K el sistema es estable, y para valores aún más grandes de K el sistema se vuelve otra vez inestable. Encuentre el intervalo de valores de K para el cual este sistema es estable. (*Sugerencia:* Use el mismo método que el usado en el ejemplo 11.2 y en el problema 11.35 para determinar los valores de K en los cuales las ramas del lugar geométrico de las raíces pasan a través del origen y cruzan el eje $j\omega$.)

Si fijamos nuestra ganancia en algún valor dentro del intervalo estable que acaba de encontrar, podemos incrementar un poco la ganancia y mantener la estabilidad, pero un incremento lo bastante grande en la ganancia provoca que el sistema sea inestable. Esta cantidad máxima de incremento de la ganancia en la cual el sistema de lazo cerrado justo llega a ser inestable es el margen de ganancia. Observe también que si *disminuimos* demasiado la ganancia, podemos ocasionar inestabilidad.

(b) Considere el sistema retroalimentado de la parte (a) con la ganancia K fija en un valor de 7. Demuestre que el sistema de lazo cerrado es estable. Trace el diagrama log magnitud-fase para este sistema y demuestre que hay dos valores no negativos de ω para los cuales $\sphericalangle G(j\omega)H(j\omega) = \pi$. Además, demuestre que para uno de estos valores $7|G(j\omega)H(j\omega)| < 1$, y para el otro $7|G(j\omega)H(j\omega)| > 1$. El primero de éstos nos proporciona el margen de ganancia, esto es, el factor $1/|7G(j\omega)H(j\omega)|$ mediante el cual podemos incrementar la ganancia y causar inestabilidad. El segundo de ellos proporciona el factor $1/|7G(j\omega)H(j\omega)|$ mediante el cual podemos disminuir la ganancia y nuevamente causar inestabilidad.

(c) Considere el sistema retroalimentado con

$$G(s)H(s) = \frac{(s/100 + 1)^2}{(s + 1)^3}.$$

Trace el lugar geométrico de las raíces para $K > 0$. Demuestre que dos ramas del lugar geométrico empiezan en el semiplano izquierdo, y que conforme K se incrementa se mueven hacia el semiplano derecho y después regresan al semiplano izquierdo. Haga esto examinando la ecuación

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{1}{K}.$$

En concreto, igualando las partes real e imaginaria de esta ecuación, demuestre que hay dos valores de $K \geq 0$ para los cuales los polos de lazo cerrado caen en el eje $j\omega$.

De este modo, si fijamos la ganancia en un valor lo bastante pequeño de manera que el sistema sea estable, podemos entonces incrementar la ganancia hasta el punto en el cual las dos ramas del lugar geométrico intersequen el eje $j\omega$. Para un intervalo de valores de ganancia más allá de este punto, el sistema de lazo cerrado es inestable. Sin embargo, si *continuamos* incrementando la ganancia, el sistema de nuevo se vuelve estable para una K lo bastante grande.

(d) Trace el diagrama de Nyquist para el sistema de la parte (c) y confirme las conclusiones logradas en esa parte aplicando el criterio de Nyquist. (Asegúrese de contar el número *neto* de circunvalaciones de $-1/K$.)

Los sistemas como el considerado en las partes (c) y (d) de este problema a menudo se conocen como sistemas *condicionalmente estables*, ya que sus propiedades de estabilidad pueden cambiar varias veces conforme se varía la ganancia.

11.48. En este problema ilustraremos la contraparte discreta de la técnica descrita en el problema 11.44. Específicamente, el criterio de Nyquist de tiempo discreto puede extenderse para permitir que los polos de $G(z)H(z)$ estén en el círculo unitario.

Considere un sistema retroalimentado discreto con

$$G(z)H(z) = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z(z-1)}. \quad \text{(P11.48-1)}$$

En este caso modificamos el contorno sobre el cual evaluamos $G(z)H(z)$, como se ilustra en la figura P11.48(a).

(a) Demuestre que

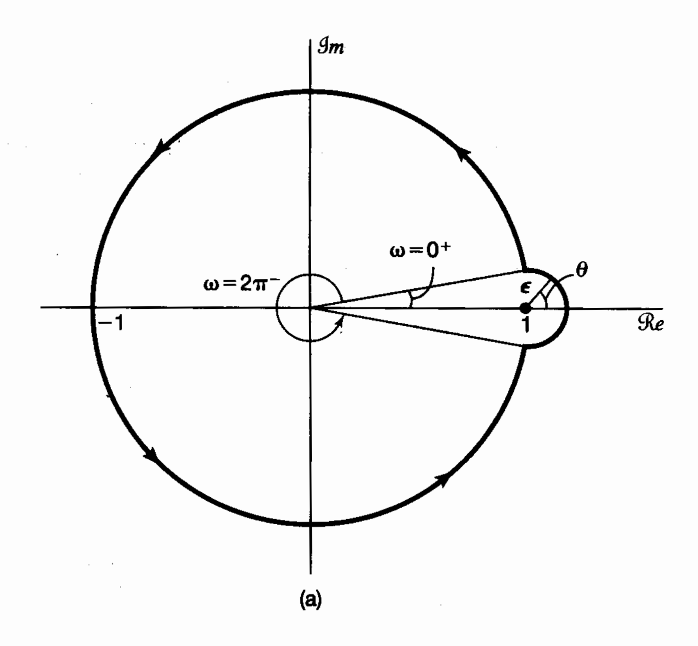
$$\sphericalangle G(e^{j0^+})H(e^{j0^+}) = -\frac{\pi}{2}$$

y

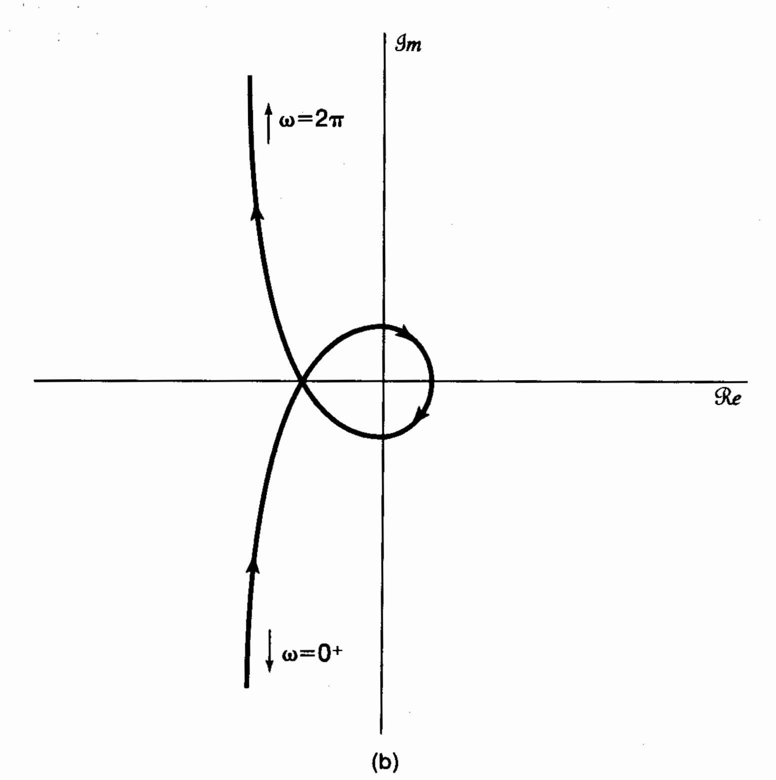
$$\sphericalangle G(e^{j2\pi^-})H(e^{j2\pi^-}) = \frac{\pi}{2},$$

donde $z = e^{j2\pi^-}$ es el punto por debajo del eje real en el cual el pequeño semicírculo intersecta el círculo unitario, y $z = e^{j0^+}$ es el punto correspondiente por encima del eje real.

(b) Use el resultado de la parte (a) junto con la ecuación (P11.48-1) para verificar que la figura P11.48(b) es un dibujo exacto de $G(z)H(z)$ a lo largo de la



(a)



(b)

Figura P11.48

porción del contorno $z = e^{j\omega}$ conforme ω varía de 0^+ a $2\pi^-$ en dirección contraria a las manecillas del reloj. En particular, verifique que la variación angular de $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ es como se indica.

(c) Encuentre el valor de ω para el cual $\sphericalangle G(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = -\pi$, y verifique que

$$|G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})| = 1$$

en este punto. [*Sugerencia:* Use el método geométrico para evaluar $\sphericalangle G(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$ junto con algo de geometría elemental para determinar el valor de ω.]

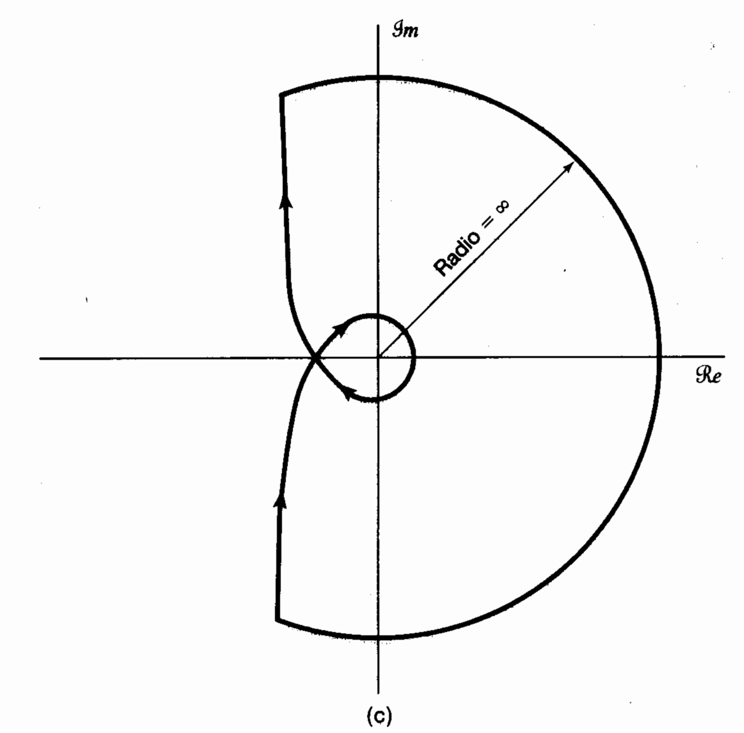
(d) Considere la siguiente gráfica de $G(z)H(z)$ a lo largo del pequeño semicírculo alrededor de $z = 1$. Observe que conforme $\epsilon \to 0$, la magnitud de $G(z)H(z)$ a lo largo de este contorno va al infinito. Demuestre que a medida que $\epsilon \to 0$, la contribución que el polo en $z = 0$ aporta a $\sphericalangle G(z)H(z)$ a lo largo del semicírculo es cero. Demuestre después que conforme $\epsilon \to 0$,

$$\sphericalangle G(z)H(z) = -\theta,$$

donde θ se define en la figura P11.48(a).

Por lo tanto, ya que θ varía de $-\pi/2$ a $+\pi/2$ en el sentido opuesto a las manecillas del reloj, $\sphericalangle G(z)H(z)$ varía de $+\pi/2$ a $-\pi/2$ en el sentido de las manecillas. El resultado es el diagrama de Nyquist completo dibujado en la figura P11.48(c).

(e) Usando el diagrama de Nyquist encuentre el intervalo de valores de K para el cual el sistema retroalimentado de lazo cerrado es estable. [*Nota:* Ya que el polo de $G(z)H(z)$ en $z = 1$ *está dentro* del contorno modificado, no está incluido en el conteo de los polos de $G(z)H(z)$ localizados fuera del círculo uni-



(c)

Figura P11.48 *Continuación*

tario. Esto es, solamente los polos *estrictamente fuera* del círculo unitario son contados al aplicar el criterio de Nyquist. Por lo tanto, en este caso, puesto que $G(z)H(z)$ no tiene polos estrictamente fuera del círculo unitario, no debemos tener circunvalaciones del punto $z = -1/K$ para la estabilidad del sistema de lazo cerrado.]

(f) Siguiendo los pasos descritos en las partes (a), (b) y (d) trace los diagramas de Nyquist para cada una de las siguientes funciones:

(i) $\frac{z+\frac{1}{2}+\sqrt{3}}{z-1}$

(ii) $\frac{1}{(z-1)(z+\frac{1}{2}+\sqrt{3})}$

(iii) $\frac{z+1}{z(z-1)}$

(iv) $\frac{z-1/\sqrt{3}}{(z-1)^2}$ [tenga cuidado al calcular $\sphericalangle G(z)H(z)$ a lo largo del semicírculo infinitesimal]

Para cada una de estas funciones, use el criterio de Nyquist para determinar el intervalo de valores de K (si es que existe dicho intervalo) para el cual el sistema de lazo cerrado es estable. También use otro método (el lugar geométrico de las raíces o cálculos directos de los polos de lazo cerrado en función de K) para verificar sus respuestas y proporcionar así una verificación parcial de la exactitud de sus diagramas de Nyquist. [*Nota:* Al trazar los diagramas de Nyquist puede encontrar útil trazar primero los diagramas de magnitud y fase en función de la frecuencia o al menos calcular $|G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})|$ y $\sphericalangle G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ en varios puntos. También es útil determinar los valores de ω para los cuales $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$es real.]

(g) Repita la parte (f) para

$$G(z)H(z) = \frac{1}{z^2-1}.$$

En este caso hay dos polos en el círculo unitario y, por lo tanto, debe modificar el contorno alrededor de cada uno de ellos incluyendo un semicírculo infinitesimal que se extienda fuera del círculo unitario, colocando, por consiguiente, el polo dentro del contorno.

PROBLEMAS DE EXTENSIÓN

11.49. En este problema proporcionamos un ejemplo de cómo la retroalimentación se puede emplear para incrementar el ancho de banda de un amplificador. Considere un amplificador cuya ganancia cae a altas frecuencias. Es decir, suponga que la función del sistema de este amplificador es

$$H(s) = \frac{Ga}{s+a}.$$

(a) ¿Cuál es la ganancia de cd del amplificador (es decir, la magnitud de su respuesta en frecuencia a frecuencia 0)?

(b) ¿Cuál es la constante de tiempo del sistema?

(c) Suponga que definimos el ancho de banda como la frecuencia a la cual la magnitud de la respuesta en frecuencia del amplificador es $1/\sqrt{2}$ veces su magnitud en cd. ¿Cuál es el ancho de banda de este amplificador?

(d) Suponga que hemos colocado este amplificador en un lazo de retroalimentación como el mostrado en la figura P11.49. ¿Cuál es la ganancia de cd del sistema de lazo cerrado? ¿Cuál es la constante de tiempo y el ancho de banda del sistema de lazo cerrado?

(e) Encuentre el valor de K que haga que el ancho de banda de lazo cerrado sea exactamente el doble del ancho de banda del amplificador de lazo abierto. ¿Cuáles son la constante de tiempo y la ganancia de cd correspondientes al sistema de lazo cerrado?

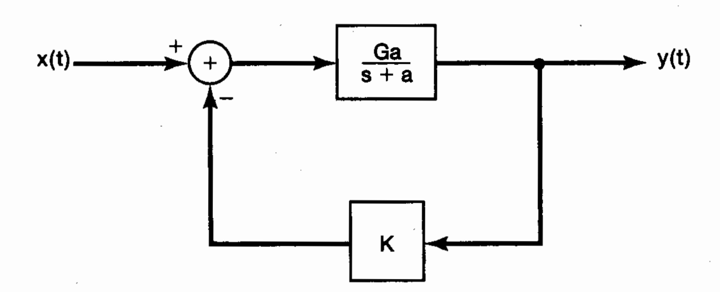


Figura P11.49

11.50. Como se mencionó en el texto, una clase importante de dispositivos usados en la construcción de sistemas retroalimentados son los amplificadores operacionales. Un modelo de estos amplificadores se muestra en la figura P11.50(a). La entrada

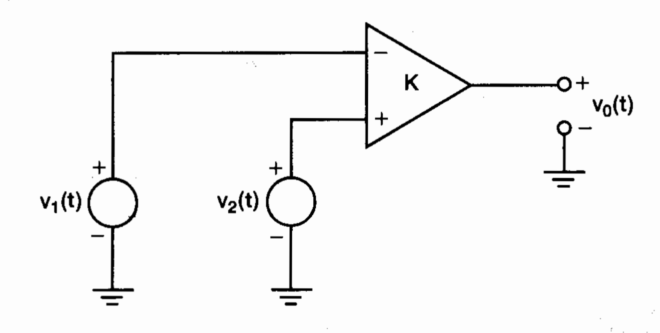


Figura P11.50a

del amplificador es la diferencia entre los dos voltajes $v_2(t)$ y $v_1(t)$, y el voltaje de salida es una versión amplificada de esta entrada; es decir,

$$v_o(t) = K[v_2(t) - v_1(t)]. \qquad \text{(P11.50-1)}$$

Considere la conexión del amplificador operacional mostrada en la figura P11.50(b). En esta figura, $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$ son impedancias. (Esto es, cada una de ellas es la función del sistema de un sistema LTI cuya entrada es el flujo de corriente a través del elemento de impedancia y cuya salida es el voltaje a través del elemento.) Suponiendo que la impedancia de entrada del amplificador operacional es infinita y que su impedancia de salida es cero, obtenemos la siguiente relación entre $V_1(s)$, $V_i(s)$ y $V_o(s)$, las cuales son las transformadas de Laplace de $v_1(t)$, $v_i(t)$ y $v_o(t)$, respectivamente:

$$V_1 = \left[\frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}\right] V_i(s) + \left[\frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}\right] V_o(s). \qquad \text{(P11.50-2)}$$

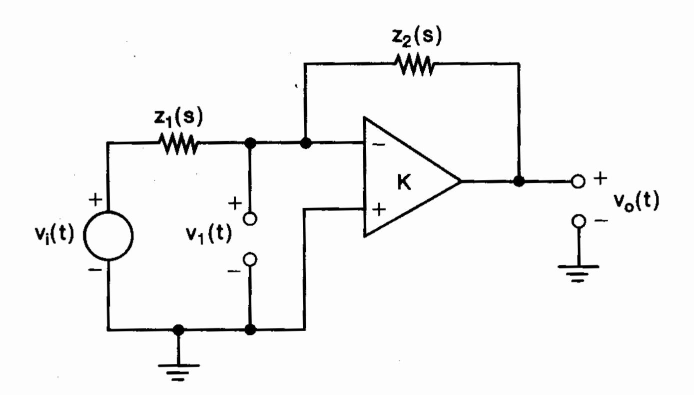


Figura P11.50b

También, de la ecuación (P11.50-1) y de la figura P11.50(b), vemos que

$$V_o(s) = -KV_1(s). \qquad \text{(P11.50-3)}$$

(a) Demuestre que la función de sistema

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

para la interconexión de la figura P11.50(b) es idéntica a la función del sistema completo de lazo cerrado del sistema de la figura P11.50(c).

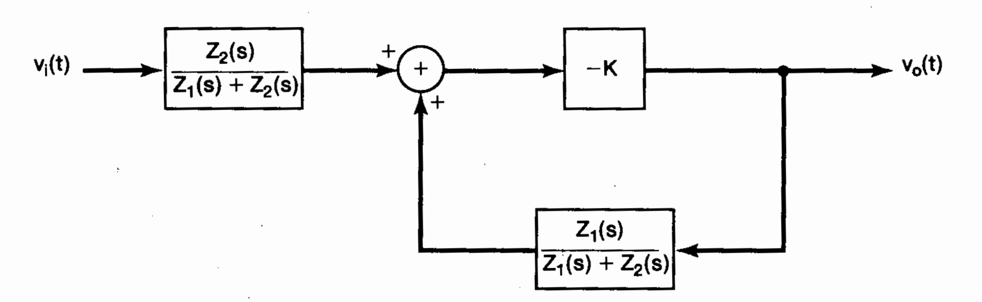


Figura P11.50c

(b) Demuestre que si $K >> 1$, entonces

$$H(s) \approx -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}.$$

11.51. (a) Suponga que en la figura P11.50(b) $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$ son ambas puramente resistivas, indicándose ahora con R_1 y R_2 respectivamente. Un valor típico de R_2/R_1 está en el rango de 1 a 10^3, mientras que un valor típico de K es 10^6. Usando los resultados del problema 11.50(a), calcule la función del sistema real para este valor de K y para R_2/R_1 igual a 1 y a 10^3, y compare cada valor resultante con $-R_2/R_1$. Esto debe dar una idea de qué tan buena es la aproximación del problema 11.50(b).

(b) Uno de los usos más importantes de la retroalimentación se da en la reducción de la sensibilidad del sistema a las variaciones en sus parámetros. Esto es en particular importante para circuitos que involucran amplificadores operacionales, los cuales tienen altas ganancias que pueden ser conocidas únicamente en forma aproximada.

(i) Considere el circuito analizado en la parte (a), con $R_2/R_1 = 10^2$. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en la ganancia de lazo cerrado del sistema si K cambia de 10^6 a 5×10^5?

(ii) ¿Qué tan grande debe ser K para que una reducción del 50% en su valor dé como resultado únicamente una reducción del 1% en la ganancia de lazo cerrado? Una vez más, suponga que $R_2/R_1 = 10^2$.

11.52. Considere el circuito de la figura P11.52. Este circuito se obtiene usando

$$Z_1(s) = R, \; Z_2(s) = \frac{C}{s}$$

en la figura P11.50(b). Usando los resultados del problema 11.50, demuestre que este sistema se comporta en forma aproximada a un integrador. ¿En qué intervalo de frecuencia (expresado en términos de K, R y C) no es válida esta aproximación?

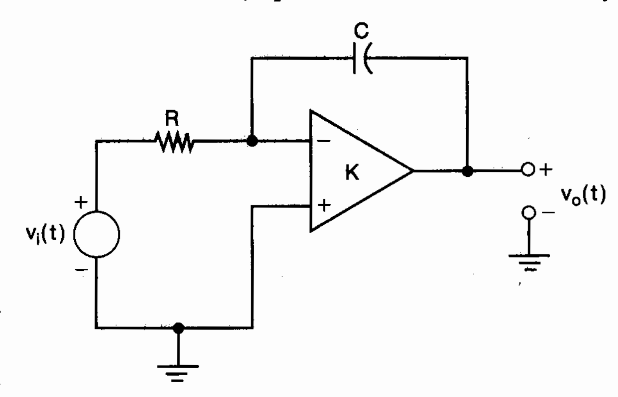


Figura P11.52

11.53. Considere el circuito dibujado en la figura P11.53(a), el cual se obtiene a partir del circuito de la figura P11.50(b) usando $Z_1(s) = R$ y reemplazando $Z_2(s)$ con un diodo que tiene una relación exponencial corriente-voltaje. Suponga que esta relación es de la forma

$$i_d(t) = Me^{qv_d(t)/kT}, \qquad \text{(P11.53-1)}$$

donde M es una constante que depende de la construcción del diodo, q es la carga de un electrón, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta. Observe que la relación idealizada de la ecuación (P11.53-1) supone que no hay posibilidad de una corriente negativa en el diodo. Por lo general *hay* un pequeño valor negativo máximo de la corriente en el diodo, pero omitiremos esta posibilidad en nuestro análisis.

(a) Suponiendo que la impedancia de entrada del amplificador operacional sea infinita y que su impedancia de salida sea cero, demuestre que se cumplen las siguientes relaciones:

$$v_o(t) = v_d(t) + Ri_d(t) + v_i(t), \qquad \text{(P11.53-2)}$$

$$v_o(t) = -K[v_o(t) - v_d(t)]. \qquad \text{(P11.53-3)}$$

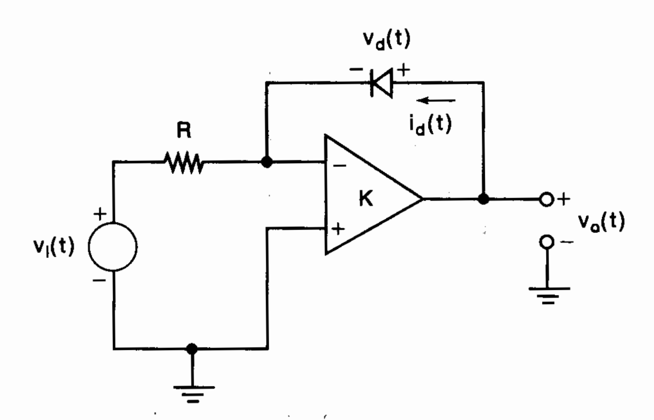


Figura P11.53a

(b) Demuestre que para una K grande, la relación entre $v_o(t)$ y $v_i(t)$ es en esencia la misma que en el sistema retroalimentado de la figura P11.53(b), donde el sistema de la trayectoria de retroalimentación es un sistema no lineal sin memoria con entrada $v_o(t)$ y salida

$$w(t) = RM\, e^{qv_o(t)/kT}.$$

(c) Demuestre que para una K grande,

$$v_o(t) \approx \frac{kT}{q} \ln\left(-\frac{v_i(t)}{RM}\right). \qquad \text{(P11.53-4)}$$

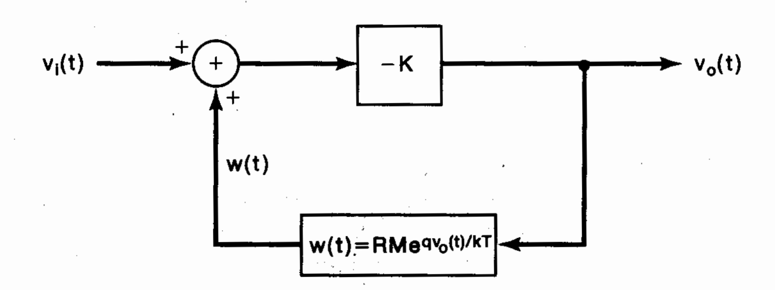


Figura P11.53b

Observe que la ecuación (P11.53-4) sólo tiene sentido para valores negativos de $v_i(t)$, lo cual concuerda con el requisito de que la corriente del diodo no puede ser negativa. Si se aplica un $v_i(t)$ positivo, la corriente $i_d(t)$ no puede equilibrar la corriente a través del resistor. Por lo tanto, una corriente no despreciable se alimenta al amplificador, provocando que se sature.

11.54. En este problema, exploramos el uso de la retroalimentación positiva para la generación de señales oscilantes.

(a) Considere el sistema ilustrado en la figura P11.54(a). Demuestre que $x_f(t) = x_i(t)$ si

$$G(s)H(s) = -1. \qquad \text{(P11.54-1)}$$

Suponga que conectamos las terminales 1 y 2 en la figura P11.54(a) y hacemos $x_i(t) = 0$. Entonces la salida del sistema debe permanecer sin cambio si se satis-

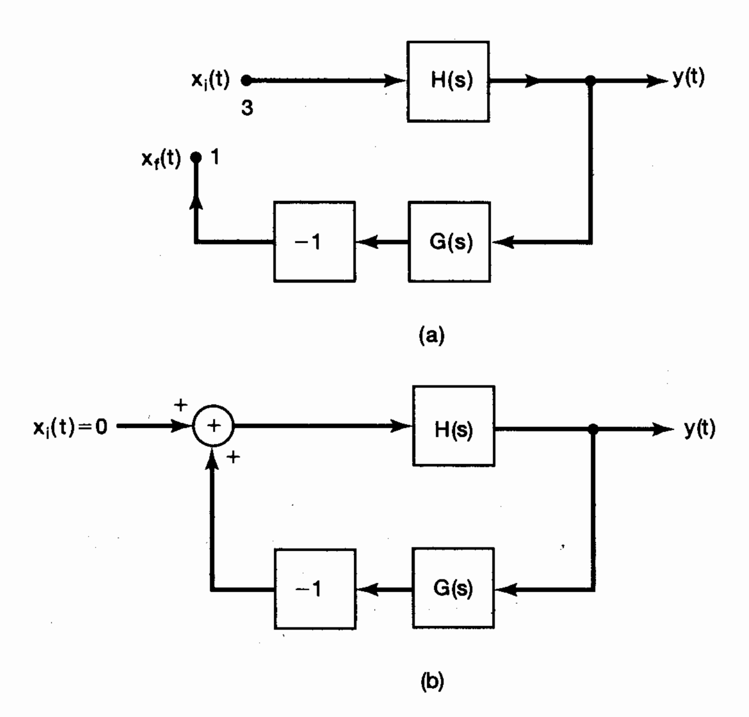


Figura P11.54

face la ecuación (P11.54-1). El sistema ahora produce una salida sin ninguna entrada. Por lo tanto, el sistema mostrado en la figura P11.54(b) es un oscilador, considerando que se cumple la ecuación (P11.54-1).

(b) Un oscilador que se usa comúnmente en la práctica es el oscilador senoidal. Para éste podemos rescribir la condición de la ecuación (P11.54-1) como

$$G(j\omega_0)H(j\omega_0) = -1. \qquad \text{(P11.54-2)}$$

¿Cuál es el valor de la ganancia de lazo cerrado para el sistema mostrado en la figura P11.54(b) en ω_0 cuando la ecuación (P11.54-2) se satisface?

(c) Un oscilador senoidal se puede construir con base en el principio descrito anteriormente, mediante el uso del circuito mostrado en la figura P11.54(c). La entrada al amplificador es la diferencia entre los voltajes $v_1(t)$ y $v_2(t)$. En

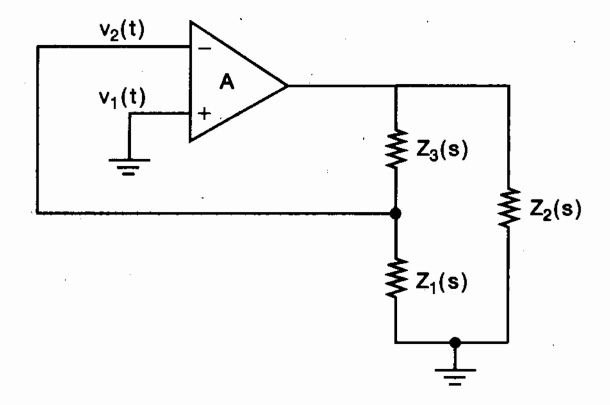


Figura P11.54c

este circuito, el amplificador tiene una ganancia de A y una resistencia de salida de R_0. $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ y $Z_3(s)$ son las impedancias. (Esto es, cada una es la función del sistema de un sistema LTI cuya entrada es la corriente que fluye a través del elemento de impedancia y cuya salida es el voltaje a través del elemento.) Para este circuito puede demostrarse que

$$H(s) = \frac{-AZ_L(s)}{Z_L(s) + R_0},$$

donde

$$Z_L = \frac{Z_2(s)(Z_1(s) + Z_3(s))}{Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s)}.$$

También podemos demostrar que

$$G(s) = \frac{-Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_3(s)}.$$

(i) Demuestre que

$$G(s)H(s) = \frac{AZ_1(s)Z_2(s)}{R_0(Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s)) + Z_2(s)(Z_1(s) + Z_3(s))}.$$

(ii) Si $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ y $Z_3(s)$ son reactancias puras (es decir, inductancias o capacitancias), podemos escribir $Z_1(j\omega) = jX_1(j\omega)$, $Z_2(j\omega) = jX_2 j\omega$ y $Z_3(j\omega) = jX_3(j\omega)$, donde $X_i(j\omega)$, $i = 1, 2, 3$, son todas reales. Usando los resultados de las partes (b) e (i), demuestre que una condición necesaria para que el circuito produzca oscilaciones es

$$X_1(j\omega) + X_2(j\omega) + X_3(j\omega) = 0.$$

(iii) Demuestre también que, además de la restricción de la parte (ii), la restricción de $AX_1(j\omega) = X_2(j\omega)$ se debe cumplir para que el circuito produzca oscilaciones. [Ya que $X_i(j\omega)$ es positiva para inductancias y negativa para capacitancias, la restricción posterior requiere que $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$ sean reactancias del mismo tipo (es decir, ambas inductancias o ambas capacitancias).]

(iv) Supongamos que $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$ son ambas inductancias tales que

$$X_1(j\omega) = X_2(j\omega) = \omega L.$$

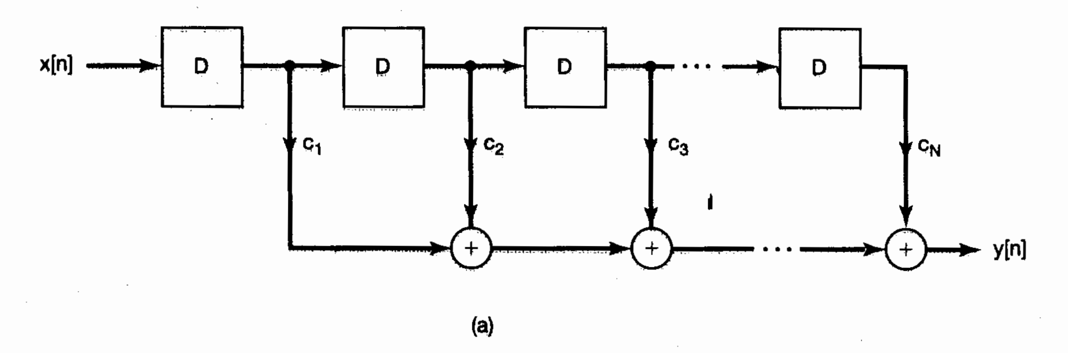
Supongamos que

$$X_3(j\omega) = -1/(\omega C)$$

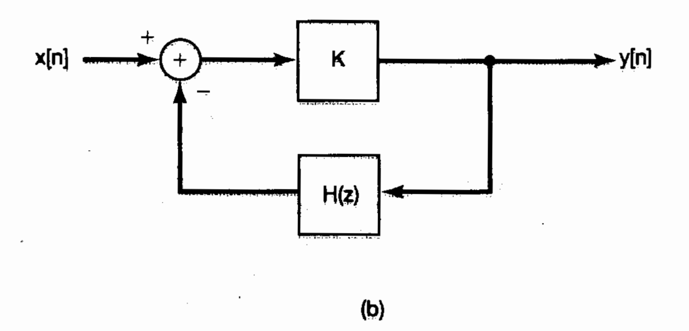
es una capacitancia. Use la condición deducida en (ii) para determinar la frecuencia (en términos de L y C) a la cual oscila el circuito.

11.55. (a) Considere el filtro LTI no recursivo discreto representado en la figura P11.55(a). Mediante el uso de la retroalimentación en este sistema no recursivo se puede construir un filtro recursivo. Para hacer esto, considere la configuración mostrada en la figura P11.55(b) donde $H(z)$ es la función del sistema LTI no recursivo de la figura P11.55(a). Determine la función del sistema completa de

este sistema retroalimentado y encuentre la ecuación de diferencias que relaciona la entrada y la salida del sistema total.



(a)



(b)

Figura P11.55

(b) Ahora suponga que $H(z)$ en la figura P11.55(b) es la función del sistema de un sistema LTI recursivo. En concreto, suponga que

$$H(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N} c_i z^{-i}}{\sum_{i=1}^{N} d_i z^{-i}}.$$

Demuestre que uno puede encontrar valores de los coeficientes $K, c_1, \ldots, c_N$ y $d_0, \ldots, d_N$ de manera que la función del sistema de lazo cerrado sea

$$Q(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}},$$

donde a_i y b_i son los coeficientes especificados.

En este problema hemos visto que el uso de la retroalimentación nos proporciona una alternativa para la construcción de sistemas LTI especificados por ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes. Poner en práctica la parte (a), la cual consiste en una retroalimentación alrededor de un sistema no recursivo, es en particular interesante, dado que algunas tecnologías están idealmente disponible para realizar estructuras de líneas de retraso con derivaciones de salida (es decir, sistemas que consisten de cadenas de retrasos con una derivación en cada retraso y cuyas salidas son ponderadas y después sumadas).

11.56. Considere un péndulo invertido montado en una base movible como la dibujada en la figura P11.56. Aquí hemos modelado el péndulo de tal manera que conste de una varilla sin masa con longitud L, con una masa m unida al extremo. La variable $\theta(t)$ indica la deflexión angular del péndulo con respecto a la vertical, g es la aceleración de la gravedad, $s(t)$ es la posición de la base con respecto a algún punto de referencia, $a(t)$ es la aceleración por la base y $x(t)$ representa la aceleración angular resultante de algún disturbio, como rachas de viento.

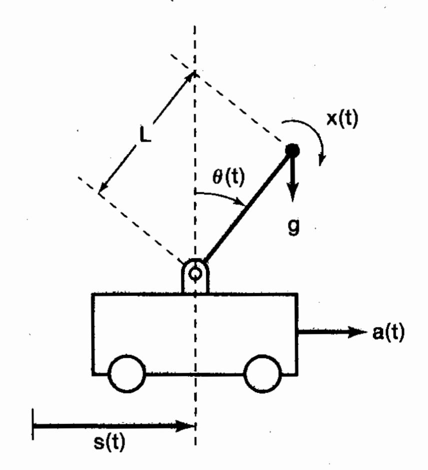


Figura P11.56

Nuestro objetivo en este problema es analizar la dinámica del péndulo invertido y, de manera más específica, investigar el problema del balance del péndulo mediante la selección adecuada de la aceleración de la base $a(t)$. La ecuación diferencial que relaciona a $\theta(t)$, $a(t)$ y $x(t)$ es

$$L\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = g\,\text{sen}[\theta(t)] - a(t)\cos[\theta(t)] + Lx(t). \qquad \text{(P11.56-1)}$$

Esta relación simplemente iguala la aceleración real de la masa a lo largo de una dirección perpendicular a la varilla con las aceleraciones aplicadas [gravedad, aceleraciones por disturbios debidas a $x(t)$ y aceleración de la base] a lo largo de esta dirección.

Observe que la ecuación (P11.56-1) es una ecuación diferencial no lineal. El análisis exacto y detallado del comportamiento del péndulo requiere por tanto que examinemos esta ecuación; sin embargo, podemos obtener una gran cantidad de información acerca de la dinámica del péndulo si realizamos un análisis linealizado. Específicamente, examinemos la dinámica del péndulo cuando está apro-

ximadamente vertical [es decir, $\theta(t)$ es pequeño]. En este caso, podemos hacer las siguientes aproximaciones

$$\text{sen}[\theta(t)] \approx \theta(t), \cos[\theta(t)] \approx 1. \qquad \text{(P11.56-2)}$$

(a) Suponga que la base está estacionaria [es decir, $a(t) = 0$], y considere un sistema LTI causal con entrada $x(t)$ y salida $\theta(t)$ descrito por la ecuación (P11.56-1) junto con las aproximaciones dadas en la ecuación (P11.56-2). Encuentre la función del sistema para este sistema y demuestre que tiene un polo en el semiplano derecho, lo cual implica que el sistema es inestable.

(b) El resultado de la parte (a) indica que si la base es estacionaria, cualquier disturbio angular mínimo causado por $x(t)$ conducirá el aumento de la desviación angular con respecto a la vertical. Resulta claro que, en algún punto, estas desviaciones llegarán a ser lo suficientemente grandes como para que las aproximaciones de la ecuación (P11.56-2) dejen de ser válidas. En este punto el análisis de linealización ya no sea exacto, pero el hecho de que es exacto para pequeños desplazamientos angulares nos permite concluir que la posición del equilibrio vertical es inestable, ya que los pequeños desplazamientos angulares crecerán en lugar de disminuir.

Ahora deseamos considerar el problema que consiste en estabilizar la posición vertical del péndulo moviendo la base de una manera apropiada. Suponga que aplicamos la retroalimentación proporcional, esto es,

$$a(t) = K\theta(t).$$

Suponga que $\theta(t)$ es pequeño, de manera que las aproximaciones en la ecuación (P11.56-2) sean válidas. Trace un diagrama de bloques del sistema linealizado con $\theta(t)$ como salida, $x(t)$ como la entrada externa y $a(t)$ como la señal que es retroalimentada. Demuestre que el sistema de lazo cerrado resultante es inestable. Encuentre el valor de K de manera que si $x(t) = \delta(t)$, el péndulo se moverá de atrás hacia adelante de una manera oscilatoria no amortiguada.

(c) Considere el uso de retroalimentación proporcional más derivativa (PD),

$$a(t) = K_1\theta(t) + K_2\frac{d\theta(t)}{dt}.$$

Demuestre que uno puede encontrar valores de K_1 y K_2 que estabilicen el péndulo. De hecho, usando

$$g = 9.8 \text{ m/seg}^2$$

y (P11.56-3)

$$L = 0.5 \text{ m},$$

seleccione los valores de K_1 y K_2 para que la relación de amortiguamiento del sistema de lazo cerrado sea 1 y la frecuencia natural sea de 3 rad/seg.

11.57. En este problema consideramos varios ejemplos del diseño de sistemas de rastreo. Considere el sistema dibujado en la figura P11.57. Aquí $H_p(s)$ es el sistema cuya salida será controlada, y $H_c(s)$ es el compensador que deberá ser diseñado. Nuestro objetivo en la selección de $H_c(s)$ consiste en que nos gustaría que la salida $y(t)$ siguiera a la entrada $x(t)$. En particular, además de estabilizar el sistema, también nos gustaría diseñar el sistema de manera que el error $e(t)$ disminuya a cero para ciertas entradas específicas.

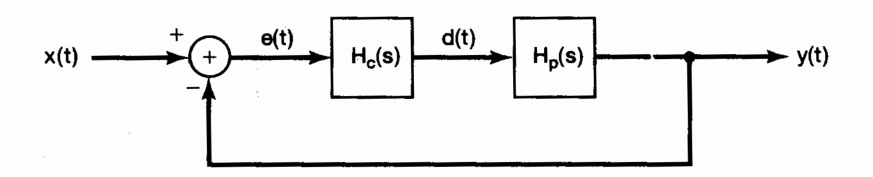


Figura P11.57

(a) Suponga que

$$H_p(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha}, \qquad \alpha \neq 0. \tag{P11.57-1}$$

Demuestre que si $H_c(s) = K$ (lo cual se conoce como *control proporcional* o *P*), podemos seleccionar K de manera que estabilice el sistema y que $e(t) \to 0$ si $x(t) = \delta(t)$. Demuestre que *no podemos* obtener $e(t) \to 0$ si $x(t) = u(t)$.

(b) De nuevo, sea $H_p(s)$ como en la ecuación (P11.57-1), y suponga que usamos *control proporcional más integral* (PI), esto es

$$H_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}.$$

Demuestre que podemos seleccionar K_1 y K_2 de manera que el sistema sea estable, y que podemos obtener $e(t) \to 0$ si $x(t) = u(t)$. Por lo tanto, este sistema puede rastrear un escalón. En realidad, esto ilustra un hecho básico e importante en el diseño de sistemas retroalimentados: para rastrear un escalón [$X(s) = 1/s$], necesitamos un integrador ($1/s$) en el sistema de retroalimentación. Una extensión de este principio se considera en el siguiente problema.

(c) Suponga que

$$H_p = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Demuestre que no podemos estabilizar este sistema con un controlador PI, pero que sí podemos estabilizarlo y hacerlo que siga a un escalón si usamos un control *proporcional más integral más diferencial* (PID); es decir,

$$H_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s.$$

11.58. En el problema 11.57 analizamos cómo la presencia de un integrador en un sistema retroalimentado hace posible que el sistema siga una entrada escalón con error cero en estado estable. En este problema extendemos esta idea. Considere el sistema retroalimentado representado en la figura P11.58, y suponga que el sistema de lazo cerrado completo es estable. Suponga también que

$$H(s) = \frac{K\prod_{k=1}^{m}(s-\beta_k)}{s^l\prod_{k=1}^{n-l}(s-\alpha_k)},$$

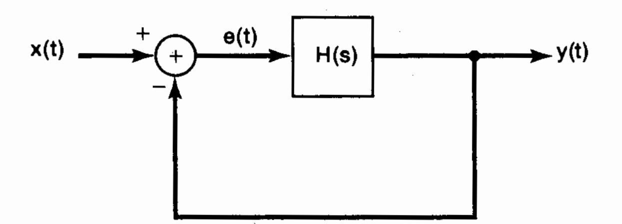


Figura P11.58

donde las α_k y β_k son números diferentes de cero y l es un entero positivo. El sistema retroalimentado de la figura P11.58 a menudo se conoce como un sistema retroalimentado *Tipo l*.

(a) Use el teorema del valor final (sección 9.5.10) para demostrar que un sistema retroalimentado Tipo 1 puede rastrear un escalón, es decir, que

$$e(t) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad x(t) = u(t).$$

(b) De manera similar, demuestre que un sistema Tipo 1 no puede rastrear una rampa pero en lugar de ello, que

$$e(t) \rightarrow \text{una constante infinita si } x(t) = u_{-2}(t).$$

(c) Demuestre que para un sistema Tipo 1 resultan errores ilimitados si

$$x(t) = u_{-k}(t)$$

con $k > 2$.

(d) De manera más general, demuestre que para un sistema Tipo l:
(i) $e(t) \rightarrow 0$ si $x(t) = u_{-k}(t)$ con $k \leq l$
(ii) $e(t) \rightarrow$ una constante finita si $x(t) = u_{(-l+1)}(t)$
(iii) $e(t) \rightarrow \infty$ si $x(t) = u_{-k}(t)$ con $k > l + 1$

11.59. **(a)** Considere el sistema retroalimentado discreto de la figura P11.59. Suponga que

$$H(z) = \frac{1}{(z-1)(z+\frac{1}{2})}.$$

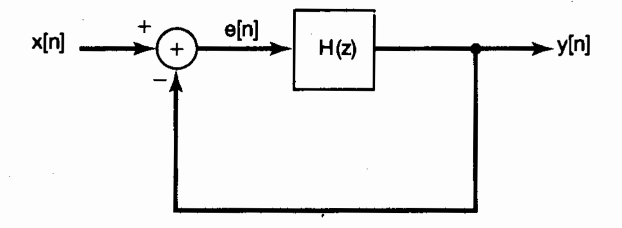


Figura P11.59

Demuestre que este sistema puede rastrear un escalón unitario en el sentido de que si $x[n] = u[n]$, entonces

$$\lim_{n\rightarrow\infty} e[n] = 0. \qquad \text{(P11.59-1)}$$

(b) De manera más general, considere el sistema retroalimentado de la figura P11.59 y suponga que el sistema de lazo cerrado es estable. Suponga que $H(z)$ tiene un polo en $z = 1$.

Demuestre que el sistema puede seguir un escalón unitario. [*Sugerencia:* Exprese la transformada $E(z)$ de $e[n]$ en términos de $H(z)$ y de la transformada de $u[n]$; explique por qué todos los polos de $E(z)$ están dentro del círculo unitario.]

(c) Los resultados de las partes (a) y (b) son las contrapartes discretas de los resultados para los sistemas continuos analizados en los problemas 11.57 y 11.58. En el caso discreto también podemos considerar el diseño de sistemas que siguen *perfectamente* entradas especificadas después de un número finito de pasos. Tales sistemas se conocen como *sistemas retroalimentados* aperiódicos.

Considere el sistema discreto de la figura P11.59 con

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

Demuestre que el sistema completo de lazo cerrado es un sistema retroalimentado aperiódico con la propiedad de que sigue a una entrada escalón exactamente después de un paso. Esto es, si $x[n] = u[n]$, entonces $e[n] = 0, n \geq 1$.

(d) Demuestre que el sistema retroalimentado de la figura P11.59 con

$$H(z) = \frac{\frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

es un sistema retroalimentado aperiódico súbito con la propiedad de que la salida sigue perfectamente un escalón unitario después de un número finito de pasos. ¿En qué paso de tiempo el error $e[n]$ se establece por primera vez en cero?

(e) De manera más general, considere el sistema retroalimentado de la figura P11.59, encuentre $H(z)$ de manera que $y[n]$ siga perfectamente un escalón unitario para $n \geq N$ y, de hecho, de manera que

$$e[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta[n-k], \qquad \text{(P11.59-2)}$$

donde a_i son constantes especificadas. [*Sugerencia:* Use la relación entre $H(z)$ y $E(z)$ cuando la entrada es un escalón unitario y $e[n]$ está dada por la ecuación (P11.59-2).]

(f) Considere el sistema de la figura P11.59 con

$$H(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2} - z^{-3}}{(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})^2}.$$

Demuestre que este sistema sigue una rampa $x[n] = (n + 1)u[n]$ exactamente después de dos pasos de tiempo.

11.60. En este problema, investigamos algunas de las propiedades de los sistemas retroalimentados para muestreo de datos e ilustramos el uso de ellos. Recordemos, de la sección 11.2.4, que en un sistema retroalimentado para muestreo de datos se muestrea la salida de un sistema continuo. La secuencia de muestras resultante se procesa con un sistema discreto, cuya salida se convierte a una señal continua que a su vez se retroalimenta y se resta de la entrada externa para producir la entrada real continua al sistema.

(a) Considere el sistema dentro de las líneas punteadas en la figura 11.6(b). Éste es un sistema discreto con entrada $e[n]$ y salida $p[n]$. Demuestre que es un sistema LTI. Como hemos indicado en la figura, señalaremos con $F(z)$ la función del sistema.

(b) Demuestre que en la figura 11.6(b) el sistema discreto con función del sistema $F(z)$ está relacionado con el sistema continuo cuya función del sistema es $H(s)$ por medio de una transformación de *paso invariante*. Esto es, si $s(t)$ es la respuesta al escalón del sistema continuo y $q[n]$ es la respuesta al escalón del sistema discreto, entonces

$$q[n] = s(nT) \qquad \text{para toda } n.$$

(c) Suponga que

$$H(s) = \frac{1}{s-1}, \quad \Re e\{s\} > 1.$$

Demuestre que

$$F(z) = \frac{(e^T - 1)z^{-1}}{1 - e^T z^{-1}}, \quad |z| > e^T.$$

(d) Suponga que $H(s)$ es como en la parte (c) y que $G(z) = K$. Encuentre el intervalo de valores de K para los cuales el sistema discreto de lazo cerrado de la figura 11.6(b) es estable.

(e) Suponga que

$$G(z) = \frac{K}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}.$$

¿Bajo qué condiciones en T podemos encontrar un valor de K que estabiliza el sistema completo? Encuentre un par particular de valores de K y T que produzcan un sistema de lazo cerrado estable. [*Sugerencia:* Examine el lugar geométrico de las raíces, y encuentre los valores para los cuales el polo entra o abandona el círculo unitario.]

APÉNDICE
EXPANSIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

A.1 INTRODUCCIÓN

El propósito de este apéndice es describir la técnica de la expansión en fracciones parciales. Esta herramienta es de gran valor para el estudio de señales y sistemas, y en particular es muy útil para la inversión de las transformadas de Fourier, de Laplace y z, así como en el análisis de los sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales o de diferencias, lineales con coeficientes constantes. El método de expansión en fracciones parciales consiste en tomar una función que es una razón de polinomios y expandirla como una combinación lineal de términos más simples del mismo tipo. Determinar los coeficientes de esta combinación lineal es el problema básico a resolver para obtener una expansión en fracciones parciales. Como veremos, éste es un problema de álgebra relativamente directo y con un poco de orden se puede resolver de manera muy eficiente.

Para ilustrar la idea básica y la función de la expansión en fracciones parciales, considere el análisis realizado en la sección 6.5.2 para un sistema LTI continuo de segundo orden especificado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t). \tag{A.1}$$

La respuesta en frecuencia de este sistema es

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}, \tag{A.2}$$

o, si factorizamos el denominador,

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)}, \tag{A.3}$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \\ c_2 &= -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Teniendo $H(j\omega)$, estamos en posición de responder una serie de preguntas relacionadas con este sistema. Por ejemplo, para determinar la respuesta del sistema al impulso, recuerde que para cualquier número α con $\Re e\{s\} < 0$, la transformada de Fourier de

$$x_1(t) = e^{\alpha t}u(t) \tag{A.5}$$

es

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega - \alpha}, \tag{A.6}$$

mientras que si

$$x_2(t) = te^{\alpha t}u(t), \tag{A.7}$$

entonces

$$X_2(j\omega) = \frac{1}{(j\omega - \alpha)^2}. \tag{A.8}$$

Por lo tanto, si expandimos $H(j\omega)$ en una suma de términos de la forma de la ecuación (A.6) o de la (A.8), podemos determinar por inspección la transformada inversa de $H(j\omega)$. Por ejemplo, en la sección 6.5.2 observamos que cuando $c_1 \neq c_2$, $H(j\omega)$ en la ecuación (A.3) puede escribirse en la forma

$$H(j\omega) = \left(\frac{\omega_n^2}{c_1 - c_2}\right)\frac{1}{j\omega - c_1} + \left(\frac{\omega_n^2}{c_2 - c_1}\right)\frac{1}{j\omega - c_2}. \tag{A.9}$$

En este caso, el par de la transformada de Fourier de la ecuación (A.5) y la (A.6) nos permite escribir inmediatamente la transformada inversa de $H(j\omega)$ como

$$h(t) = \left[\frac{\omega_n^2}{c_1 - c_2}e^{c_1 t} + \frac{\omega_n^2}{c_2 - c_1}e^{c_2 t}\right]u(t). \tag{A.10}$$

Si bien hemos expresado el análisis anterior en términos de las transformadas continuas de Fourier, conceptos similares también se aplican al análisis de Fourier de tiempo discreto, así como en el uso de las transformadas z y de Laplace. En todos estos casos encontramos la importante clase de las *transformadas racionales*, esto es, las transformadas que son razones de polinomios de alguna variable. Asimismo, en cada uno de estos contextos encontramos razones para expandir tales transformaciones como sumas de términos más simples como los de la ecuación (A.9). En esta sección, para desarrollar un procedimiento general para el cálculo de tales expansiones, consideraremos funciones racionales de una variable general v. Esto es, examinaremos funciones de la forma

$$H(v) = \frac{\beta_m v^m + \beta_{m-1}v^{m-1} + \ldots + \beta_1 v + \beta_0}{\alpha_n v^n + \alpha_{n-1}v^{n-1} + \ldots + \alpha_1 v + \alpha_0}. \tag{A.11}$$

Para el análisis de Fourier de tiempo continuo $(j\omega)$ juega el papel de v, mientras que para la transformada de Laplace ese papel lo juega la variable compleja s. En el análisis de Fourier de tiempo discreto, v se toma como $e^{-j\omega}$, mientras que para la transformada z podemos usar z^{-1} o z. Después de que hayamos desarrollado las técnicas básicas de la expansión en fracciones parciales, mostraremos su aplicación al análisis de sistemas LTI tanto continuos como discretos.

A.2 EXPANSIÓN EN FRACCIONES PARCIALES Y SEÑALES Y SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS

Para conseguir nuestro propósito, es conveniente considerar funciones racionales en una de dos formas estándar. La segunda de éstas, la cual es a menudo útil en el análisis de señales y sistemas discretos, será analizada brevemente. La primera de las formas estándar es

$$G(v) = \frac{b_{n-1}v^{n-1} + b_{n-2}v^{n-2} + \ldots + b_1 v + b_0}{v^n + a_{n-1}v^{n-1} + \ldots + a_1 v + a_0}. \tag{A.12}$$

En esta forma, el coeficiente del término de mayor orden en el denominador es 1, y el orden del numerador es como mínimo uno menos que el orden del denominador. (El orden del numerador será menor que $n - 1$ si $b_{n-1} = 0$.)

Si $H(v)$ está dada en la forma de la ecuación (A.11), podemos obtener una función racional en la forma de la ecuación (A.12) llevando a cabo dos cálculos directos. Como primer paso, dividimos tanto el numerador como el denominador de $H(v)$ entre α_n. Entonces obtenemos

$$H(v) = \frac{\gamma_m v^m + \gamma_{m-1}v^{m-1} + \ldots + \gamma_1 v + \gamma_0}{v^n + a_{n-1}v^{n-1} + \ldots + a_1 v + a_0}, \tag{A.13}$$

donde

$$\gamma_m = \frac{\beta_m}{\alpha_n}, \qquad \gamma_{m-1} = \frac{\beta_{m-1}}{\alpha_n}, \qquad \ldots,$$
$$a_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}, \qquad a_{n-2} = \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}, \qquad \ldots.$$

Si $m < n$, $H(v)$ se llama una *función estrictamente racional propia* y en este caso $H(v)$, dada en la ecuación (A.13), tiene ya la forma de la ecuación (A.12), considerando que $b_0 = \gamma_0, b_1 = \gamma_1, \ldots, b_m = \gamma_m$, y siendo el resto de las b igual a cero. En la mayoría de los análisis de este libro en los que hemos considerado funciones racionales, nuestro interés principal se ha dirigido a las funciones racionales propias. Sin embargo, si $H(v)$ no es propia (es decir, si $m \geq n$), podemos realizar un cálculo preliminar que nos permita escribir $H(v)$ como la suma de un polinomio en v y una función estrictamente racional propia. Esto es

$$\begin{aligned} H(v) = {} & c_{m-n}v^{m-n} + c_{m-n-1}v^{m-n-1} + \ldots + c_1 v + c_0 \\ & + \frac{b_{n-1}v^{n-1} + b_{n-2}v^{n-2} + \ldots + b_1 v + b_0}{v^n + a_{n-1}v^{n-1} + \ldots + a_1 v + a_0}. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_{m-n}$ y $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ se pueden obtener al igualar las ecuaciones (A.13) y (A.14), multiplicándolas después por el polinomio del denominador. Esto produce

$$\begin{aligned} \gamma_m v^m + \ldots + \gamma_1 v + \gamma_0 = {} & b_{n-1}v^{n-1} + \ldots + b_1 v + b_0 \\ & + (c_{m-n}v^{m-n} + \ldots + c_0)(v^n + a_{n-1}v^{n-1} + \ldots + a_0). \end{aligned} \tag{A.15}$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales de v en ambos miembros de la ecuación (A.15), podemos determinar las c y b en términos de las a y γ. Por ejemplo, si $m = 2$ y $n = 1$, de manera que

$$H(v) = \frac{\gamma_2 v^2 + \gamma_1 v + \gamma_0}{v + a_1} = c_1 v + c_0 + \frac{b_0}{v + a_1}, \tag{A.16}$$

entonces la ecuación (A.15) es ahora

$$\begin{aligned} \gamma_2 v^2 + \gamma_1 v + \gamma_0 &= b_0 + (c_1 v + c_0)(v + a_1) \\ &= b_0 + c_1 v^2 + (c_0 + a_1 c_1)v + a_1 c_0. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales en v, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= c_1, \\ \gamma_1 &= c_0 + a_1 c_1, \\ \gamma_0 &= b_0 + a_1 c_0. \end{aligned}$$

De la primera ecuación obtenemos el valor de c_1, el cual podemos usar entonces en la segunda para determinar el valor de c_0, la cual a su vez se utiliza en la tercera para determinar el de b_0. El resultado es

$$\begin{aligned} c_1 &= \gamma_2, \\ c_0 &= \gamma_1 - a_1\gamma_2, \\ b_0 &= \gamma_0 - a_1(\gamma_1 - a_1\gamma_2). \end{aligned}$$

El caso general de la ecuación (A.15) se puede resolver de una manera análoga.

Nuestro objetivo ahora es enfocarnos en la función racional propia $G(v)$ de la ecuación (A.12) y expandirla en una suma de funciones racionales propias más simples. Para ver cómo se puede hacer, considere el caso de $n = 3$, en donde la ecuación (A.12) se reduce a

$$G(v) = \frac{b_2v^2 + b_1v + b_0}{v^3 + a_2v^2 + a_1v + a_0}. \tag{A.17}$$

Como un primer paso factorizamos el denominador de $G(v)$ de manera que podamos escribirla en la forma

$$G(v) = \frac{b_2v^2 + b_1v + b_0}{(v - \rho_1)(v - \rho_2)(v - \rho_3)}. \tag{A.18}$$

Suponiendo por el momento que las raíces ρ_1, ρ_2 y ρ_3 del denominador son distintas, podemos expandir $G(v)$ en una suma de la forma

$$G(v) = \frac{A_1}{v - \rho_1} + \frac{A_2}{v - \rho_2} + \frac{A_3}{v - \rho_3}. \tag{A.19}$$

El problema entonces es determinar las constantes A_1, A_2 y A_3. Una forma de hacerlo es igualando las ecuaciones (A.18) y (A.19), multiplicándolas después por el denominador. En este caso obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} b_2v^2 + b_1v + b_0 = A_1&(v - \rho_2)(v - \rho_3) \\ &+ A_2(v - \rho_1)(v - \rho_3) \\ &+ A_3(v - \rho_1)(v - \rho_2). \end{aligned} \tag{A.20}$$

Expandiendo el lado derecho de la ecuación (A.20) e igualando los coeficientes de igual potencia de v, obtenemos un conjunto de ecuaciones lineales que podemos resolver para A_1, A_2 y A_3.

Aunque este procedimiento siempre funciona, hay un método mucho más sencillo. Considere la ecuación (A.19) y suponga que deseamos calcular A_1. Entonces, multiplicando todo por $v - \rho_1$, obtenemos

$$(v - \rho_1)G(v) = A_1 + \frac{A_2(v - \rho_1)}{v - \rho_2} + \frac{A_3(v - \rho_1)}{v - \rho_3}. \tag{A.21}$$

Ya que ρ_1, ρ_2 y ρ_3 son distintas, los dos últimos términos del miembro derecho de la ecuación (A.21) son cero para $v = \rho_1$. Por tanto,

$$A_1 = [(v - \rho_1)G(v)]\big|_{v=\rho_1}, \tag{A.22}$$

o, usando la ecuación (A.18),

$$A_1 = \frac{b_2\rho_1^2 + b_1\rho_1 + b_0}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)}. \tag{A.23}$$

De manera similar,

$$A_2 = [(v - \rho_2)G(v)]|_{v=\rho_2} = \frac{b_2\rho_2^2 + b_1\rho_2 + b_0}{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3)}, \quad \text{(A.24)}$$

$$A_3 = [(v - \rho_3)G(v)]|_{v=\rho_3} = \frac{b_2\rho_3^2 + b_1\rho_3 + b_0}{(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2)}. \quad \text{(A.25)}$$

Supongamos ahora que $\rho_1 = \rho_3 \neq \rho_2$; esto es,

$$G(v) = \frac{b_2v^2 + b_1v + b_0}{(v - \rho_1)^2(v - \rho_2)}. \quad \text{(A.26)}$$

En este caso hacemos una expansión de la forma

$$G(v) = \frac{A_{11}}{v - \rho_1} + \frac{A_{12}}{(v - \rho_1)^2} + \frac{A_{21}}{v - \rho_2}. \quad \text{(A.27)}$$

Aquí necesitamos el término $1/(v - \rho_1)^2$ para poder obtener el denominador correcto en la ecuación (A.26) cuando juntemos los términos en un mínimo denominador común. También necesitamos incluir el término $1/(v - \rho_1)$ en general. Para ver por qué esto es así, considere igualar las ecuaciones (A.26) y (A.27) y multiplicar todo por el denominador de la ecuación (A.26):

$$b_2v^2 + b_1v + b_0 = A_{11}(v - \rho_1)(v - \rho_2) + A_{12}(v - \rho_2) + A_{21}(v - \rho_1)^2. \quad \text{(A.28)}$$

Una vez más, si igualamos los coeficientes de potencias iguales de v, obtenemos tres ecuaciones (para los coeficientes de los términos v^0, v^1 y v^2). Si omitimos el término A_{11} en la ecuación (A.27), entonces tendremos tres ecuaciones con dos incógnitas, las cuales en general no tendrán una solución. Incluyendo este término podemos encontrar siempre una solución. Sin embargo, también en este caso hay un método mucho más simple. Considere la ecuación (A.27) y multiplique todo por $(v - \rho_1)^2$:

$$(v - \rho_1)^2G(v) = A_{11}(v - \rho_1) + A_{12} + \frac{A_{21}(v - \rho_1)^2}{v - \rho_2}. \quad \text{(A.29)}$$

Del ejemplo anterior, vemos inmediatamente cómo determinar A_{12}:

$$A_{12} = [(v - \rho_1)^2G(v)]|_{v=\rho_1} = \frac{b_2\rho_1^2 + b_1\rho_1 + b_0}{\rho_1 - \rho_2}. \quad \text{(A.30)}$$

Para A_{11}, supongamos que diferenciamos la ecuación (A.29) con respecto a v:

$$\frac{d}{dv}[(v - \rho_1)^2G(v)] = A_{11} + A_{21}\left[\frac{2(v - \rho_1)}{v - \rho_2} - \frac{(v - \rho_1)^2}{(v - \rho_2)^2}\right]. \quad \text{(A.31)}$$

Entonces, el término final en la ecuación (A.31) es cero para $v = \rho_1$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left[\frac{d}{dv}(v - \rho_1)^2G(v)\right]\Bigg|_{v=\rho_1} \\ &= \frac{2b_2\rho_1 + b_1}{\rho_1 - \rho_2} - \frac{b_2\rho_1^2 + b_1\rho_1 + b_0}{(\rho_1 - \rho_2)^2}. \end{aligned} \quad \text{(A.32)}$$

Por último, multiplicando la ecuación (A.27) por $v - \rho_2$, encontramos que

$$A_{21} = [(v - \rho_2)G(v)]\big|_{v=\rho_2} = \frac{b_2\rho_2^2 + b_1\rho_2 + b_0}{(\rho_2 - \rho_1)^2}. \tag{A.33}$$

Este ejemplo ilustra todas las ideas básicas acerca de la expansión en fracciones parciales para el caso general. En concreto, suponga que el denominador de $G(v)$ en la ecuación (A.12) tiene raíces diferentes $\rho_1, \ldots, \rho_r$ con *multiplicidades* $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$; esto es,

$$G(v) = \frac{b_{n-1}v^{n-1} + \ldots + b_1 v + b_0}{(v - \rho_1)^{\sigma_1}(v - \rho_2)^{\sigma_2}\ldots(v - \rho_r)^{\sigma_r}}. \tag{A.34}$$

En este caso $G(v)$ tiene una expansión en fracciones parciales de la forma

$$\begin{aligned} G(v) &= \frac{A_{11}}{v - \rho_1} + \frac{A_{12}}{(v - \rho_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1\sigma_1}}{(v - \rho_1)^{\sigma_1}} \\ &+ \frac{A_{21}}{v - \rho_2} + \ldots + \frac{A_{2\sigma_2}}{(v - \rho_2)^{\sigma_2}} \\ &+ \ldots + \frac{A_{r1}}{v - \rho_r} + \ldots + \ldots + \frac{A_{r\sigma_r}}{(v - \rho_r)^{\sigma_r}} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{A_{ik}}{(v - \rho_i)^k}, \end{aligned} \tag{A.35}$$

donde las A_{ik} son calculadas a partir de la ecuación[1]

$$A_{ik} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!}\left[\frac{d^{\sigma_i-k}}{dv^{\sigma_i-k}}[(v - \rho_i)^{\sigma_i}G(v)]\right]\Bigg|_{v=\rho_i}. \tag{A.36}$$

Este resultado se puede verificar de manera muy parecida a la del ejemplo: multiplique ambos miembros de la ecuación (A.35) por $(v - \rho_i)^{\sigma_i}$ y diferencie repetidamente hasta que A_{ik} ya no esté multiplicada por una potencia de $v - \rho_i$. Entonces se establece $v = \rho_i$.

Ejemplo A.1

En el ejemplo 4.25 examinamos un sistema LTI descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t). \tag{A.37}$$

La respuesta en frecuencia de este sistema es

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3}. \tag{A.38}$$

Para determinar la respuesta al impulso de este sistema, expandimos $H(j\omega)$ en una suma de términos más simples cuyas transformadas inversas se pueden obtener por inspección. Haciendo la sustitución de v por $j\omega$, obtenemos la función

[1]Aquí hemos utilizado la notacón factorial $r!$ para el producto $r(r-1)(r-2)\ldots 2 \cdot 1$. La cantidad $0!$ está definida como igual a 1.

$$G(v) = \frac{v+2}{v^2+4v+3} = \frac{v+2}{(v+1)(v+3)}. \quad \text{(A.39)}$$

La expansión en fracciones parciales de $G(v)$ es entonces

$$G(v) = \frac{A_{11}}{v+1} + \frac{A_{21}}{v+3}, \quad \text{(A.40)}$$

donde

$$A_{11} = [(v+1)G(v)]|_{v=-1} = \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2}, \quad \text{(A.41)}$$

$$A_{21} = [(v+3)G(v)]|_{v=-3} = \frac{-3+2}{-3+1} = \frac{1}{2}. \quad \text{(A.42)}$$

De este modo,

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega+1} + \frac{\frac{1}{2}}{j\omega+3}, \quad \text{(A.43)}$$

y la respuesta al impulso del sistema, obtenida al transformar inversamente la ecuación (A.43), es

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t). \quad \text{(A.44)}$$

El sistema descrito por la ecuación (A.37) también se puede analizar usando las técnicas del análisis de la transformada de Laplace como se desarrolló en el capítulo 9. La función del sistema es

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}, \quad \text{(A.45)}$$

y si sustituimos v por s, obtenemos la misma $G(v)$ dada en la ecuación (A.39). Por lo tanto, la expansión en fracciones parciales actúa en forma exacta a como lo hizo en las ecuaciones (A.40)-(A.42), de lo cual se desprende que

$$H(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3}. \quad \text{(A.46)}$$

Invirtiendo esta transformada, de nuevo obtenemos la respuesta al impulso dada en la ecuación (A.44).

Ejemplo A.2

Ahora ilustramos el método de la expansión en fracciones parciales cuando se repiten factores en el denominador. En el ejemplo 4.26 consideramos la respuesta del sistema descrita por la ecuación (A.37) cuando la entrada era

$$x(t) = e^{-t}u(t). \quad \text{(A.47)}$$

De la ecuación (4.81), la transformada de Fourier de la salida del sistema es

$$Y(j\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)}. \quad \text{(A.48)}$$

Sustituyendo v por $j\omega$ obtenemos la función racional

$$G(v) = \frac{v+2}{(v+1)^2(v+3)}. \quad \text{(A.49)}$$

La expansión en fracciones parciales para esta función es

$$G(v) = \frac{A_{11}}{v+1} + \frac{A_{12}}{(v+1)^2} + \frac{A_{21}}{v+3}, \tag{A.50}$$

donde, de la ecuación (A.36),

$$A_{11} = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dv}[(v+1)^2 G(v)]\Big|_{v=-1} = \frac{1}{4}, \tag{A.51}$$

$$A_{12} = [(v+1)^2 G(v)]\Big|_{v=-1} = \frac{1}{2}, \tag{A.52}$$

$$A_{12} = [(v+3)G(v)]\Big|_{v=-3} = -\frac{1}{4}. \tag{A.53}$$

Por lo tanto,

$$Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{4}}{j\omega+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega+1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{j\omega+3}, \tag{A.54}$$

y encontrando las transformadas inversas,

$$y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t). \tag{A.55}$$

De nueva cuenta, este análisis se pudo haber realizado usando las transformadas de Laplace, y el álgebra hubiera sido idéntica a la proporcionada en las ecuaciones (A.49)-(A.55).

A.3 EXPANSIÓN EN FRACCIONES PARCIALES Y SEÑALES Y SISTEMAS DISCRETOS

Como se mencionó anteriormente, al realizar la expansión en fracciones parciales para transformadas de Fourier de tiempo discreto o para transformadas z, a menudo es más conveniente tratar con una forma ligeramente diferente de las funciones racionales. Supongamos, entonces, que tenemos una función racional de la forma

$$G(v) = \frac{d_{n-1}v^{n-1} + \ldots + d_1 v + d_0}{f_n v^n + \ldots + f_1 v + 1}. \tag{A.56}$$

Esta forma para $G(v)$ puede obtenerse a partir de la $G(v)$ dada en la ecuación (A.12), dividiendo el numerador y el denominador entre a_0.

Con una $G(v)$ como la de la ecuación (A.56), la factorización correspondiente del denominador tiene de la forma

$$G(v) = \frac{d_{n-1}v^{n-1} + \ldots + d_1 v + d_0}{(1-\rho_1^{-1}v)^{\sigma_1}(1-\rho_2^{-1}v)^{\sigma_2}\ldots(1-\rho_r^{-1}v)^{\sigma_r}}, \tag{A.57}$$

y la forma de la expansión en fracciones parciales que obtenemos es

$$G(v) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{\sigma_i}\frac{B_{ik}}{(1-\rho^{-1}v)^k}. \tag{A.58}$$

Las B_{ik} pueden calcularse de una manera similar a la usada anteriormente:

$$B_{ik} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!}(-\rho_i)^{\sigma_i - k}\left[\frac{d^{\sigma_i - k}}{dv^{\sigma_i - k}}\left[(1 - \rho_i^{-1}v)^{\sigma_i}G(v)\right]\right]\Bigg|_{v=\rho_i}. \tag{A.59}$$

Como antes, la validez de la ecuación (A.59) se puede determinar multiplicando ambos miembros de la ecuación (A.58) por $(1 - \rho_i^{-1}v)^{\sigma_i}$, diferenciando posteriormente en forma repetida con respecto a v hasta que B_{ik} ya no esté multiplicada por una potencia de $1 - \rho_i^{-1}v$, y estableciendo finalmente $v = \rho_i$.

Ejemplo A.3

Considere el sistema LTI causal del ejemplo 5.19 caracterizado por la ecuación de diferencias

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]. \tag{A.60}$$

La respuesta en frecuencia del sistema es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-2j\omega}}. \tag{A.61}$$

Para transformadas discretas como ésta es más conveniente sustituir v por $e^{-j\omega}$. Haciendo esta sustitución obtenemos la función racional

$$G(v) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}v + \frac{1}{8}v^2} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}v)(1 - \frac{1}{4}v)}. \tag{A.62}$$

Usando la expansión en fracciones parciales especificada por las ecuaciones (A.57)-(A.59), obtenemos

$$G(v) = \frac{B_{11}}{1 - \frac{1}{2}v} + \frac{B_{21}}{1 - \frac{1}{4}v}, \tag{A.63}$$

$$B_{11} = \left[\left(1 - \frac{1}{2}v\right)G(v)\right]\Bigg|_{v=2} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4, \tag{A.64}$$

$$B_{21} = \left[\left(1 - \frac{1}{4}v\right)G(v)\right]\Bigg|_{v=4} = \frac{2}{1 - 2} = -2. \tag{A.65}$$

Por lo tanto,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}, \tag{A.66}$$

y encontrando la transformada inversa de la ecuación (A.66) obtenemos la respuesta al impulso unitario

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]. \tag{A.67}$$

En la sección 10.7 desarrollamos las herramientas del análisis de la transformada z para el examen de los sistemas LTI discretos especificados por ecuaciones de diferencias

lineales con coeficientes constantes. Aplicando dichas técnicas a este ejemplo, encontramos que la función del sistema se puede determinar por inspección a partir de la ecuación (A.60):

$$H(z) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}. \tag{A.68}$$

Entonces, sustituyendo v por z^{-1} obtenemos una $G(v)$ como en la ecuación (A.62). Por lo tanto, usando los cálculos de la expansión en fracciones parciales en las ecuaciones (A.63)-(A.65), encontramos que

$$H(z) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \tag{A.69}$$

la cual, cuando se invierte, de nuevo nos da la respuesta al impulso de la ecuación (A.67).

Ejemplo A.4

Suponga que la entrada al sistema considerado en el ejemplo A.3 es

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]. \tag{A.70}$$

Entonces, del ejemplo 5.20 tenemos que la transformada de Fourier de la salida es

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}. \tag{A.71}$$

Sustituyendo v por $e^{-j\omega}$, obtenemos

$$G(v) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}v)(1 - \frac{1}{4}v)^2}. \tag{A.72}$$

Por lo tanto, usando las ecuaciones (A.58) y (A.59), obtenemos la expansión en fracciones parciales

$$G(v) = \frac{B_{11}}{1 - \frac{1}{4}v} + \frac{B_{12}}{(1 - \frac{1}{4}v)^2} + \frac{B_{21}}{1 - \frac{1}{2}v} \tag{A.73}$$

y encontramos

$$B_{11} = (-4)\left[\frac{d}{dv}\left(1 - \frac{1}{4}v\right)^2 G(v)\right]\Bigg|_{v=4} = -4, \tag{A.74}$$

$$B_{12} = \left[\left(1 - \frac{1}{4}v\right)^2 G(v)\right]\Bigg|_{v=4} = -2, \tag{A.75}$$

$$B_{21} = \left[\left(1 - \frac{1}{2}v\right) G(v)\right]\Bigg|_{v=2} = 8. \tag{A.76}$$

Por lo tanto,

$$Y(j\omega) = -\frac{4}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{8}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}, \tag{A.77}$$

la cual puede invertirse por inspección como mostramos a continuación, usando los pares de transformadas de Fourier de la tabla 4.2:

$$y[n] = \left\{ -4\left(\frac{1}{4}\right)^n -2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} u[n]. \tag{A.78}$$

Ejemplo A.5

Las funciones racionales impropias a menudo se encuentran en el análisis de sistemas discretos. Para ilustrar esto y también para mostrar cómo pueden ser analizadas usando las técnicas desarrolladas en este apéndice, considere el sistema LTI causal caracterizado por la ecuación de diferencias

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] + 3x[n-1] + \frac{11}{6}x[n-2] + \frac{1}{3}x[n-3].$$

La respuesta en frecuencia de este sistema es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 3e^{-j\omega} + \frac{11}{6}e^{-j2\omega} + \frac{1}{3}e^{-j3\omega}}{1 + \frac{5}{6}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}. \tag{A.79}$$

Sustituyendo v por $e^{-j\omega}$, obtenemos

$$G(v) = \frac{1 + 3v + \frac{11}{6}v^2 + \frac{1}{3}v^3}{1 + \frac{5}{6}v + \frac{1}{6}v^2}. \tag{A.80}$$

Esta función racional puede escribirse como la suma de un polinomio y una función racional propia:

$$G(v) = c_0 + c_1 v + \frac{b_1 v + b_0}{1 + \frac{5}{6}v + \frac{1}{6}v^2}. \tag{A.81}$$

Igualando las ecuaciones (A.80) y (A.81) y multiplicando por $1 + \frac{5}{6}v + \frac{1}{6}v^2$ obtenemos

$$\begin{aligned} 1 + 3v + \frac{11}{6}v^2 + \frac{1}{3}v^3 = {} & (c_0 + b_0) + \left(\frac{5}{6}c_0 + c_1 + b_1\right)v \\ & + \left(\frac{1}{6}c_0 + \frac{5}{6}c_1\right)v^2 + \frac{1}{6}c_1 v^3. \end{aligned} \tag{A.82}$$

Igualando los coeficientes vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}c_1 = \frac{1}{3} &\rightarrow c_1 = 2, \\ \frac{1}{6}c_0 + \frac{5}{6}c_1 = \frac{11}{6} &\rightarrow c_0 = 1, \\ \frac{5}{6}c_0 + c_1 + b_1 = 3 &\rightarrow b_1 = \frac{1}{6}, \\ c_0 + b_0 = 1 &\rightarrow b_0 = 0. \end{aligned} \tag{A.83}$$

Por lo tanto,

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + \frac{\frac{1}{6}e^{-j\omega}}{1 + \frac{5}{6}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}. \tag{A.84}$$

También podemos usar el método desarrollado aquí para expandir la función racional propia en la ecuación (A.81):

$$\frac{\frac{1}{6}v}{1 + \frac{5}{6}v + \frac{1}{6}v^2} = \frac{\frac{1}{6}v}{(1 + \frac{1}{3}v)(1 + \frac{1}{2}v)} = \frac{B_{11}}{(1 + \frac{1}{3}v)} + \frac{B_{21}}{(1 + \frac{1}{2}v)}. \tag{A.85}$$

Los coeficientes son

$$B_{11} = \left(\frac{\frac{1}{6}v}{1 + \frac{1}{2}v}\right)\Bigg|_{v=-3} = 1,$$

$$B_{21} = \left(\frac{\frac{1}{6}v}{1 + \frac{1}{3}v}\right)\Bigg|_{v=-3} = -1.$$

Por lo tanto, encontramos que

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}, \tag{A.86}$$

y por inspección podemos determinar la respuesta al impulso de este sistema:

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]. \tag{A.87}$$

Bibliografía

El propósito de esta bibliografía es proporcionar al lector fuentes de consulta para tratamientos adicionales y más avanzados de los temas de análisis de señales y sistemas. Esto de ninguna manera es una lista exhaustiva, más bien su intención es guiar al lector en su búsqueda de información para estudios posteriores y varias referencias de cada uno.

Hemos dividido la bibliografía en 16 áreas diferentes. Las primeras tratan con las técnicas matemáticas usadas en el análisis de señales y sistemas incluyendo textos sobre antecedentes de matemáticas (cálculo, ecuaciones diferenciales y de diferencias y variables complejas), la teoría de la serie de Fourier y las transformadas de Fourier, Laplace y z y temas adicionales de matemáticas que a menudo se encuentran y usan en el análisis de sistemas y señales. Algunas de las siguientes secciones corresponden al tratamiento de temas más completos y especializados acerca de señales y sistemas que presentamos en este texto, incluyendo filtrado, muestreo y procesamiento de señales digitales, comunicaciones y retroalimentación y control. También hemos incluido una lista de otros libros básicos sobre señales y sistemas así como varios textos sobre la teoría de circuitos. Además, hemos proporcionado listas de referencia sobre tópicos muy importantes para estudios más avanzados para quienes estén interesados en expandir sus conocimientos sobre los métodos de señales y sistemas o en explorar aplicaciones que hacen uso de técnicas más avanzadas. En particular, incluimos secciones sobre modelos y métodos de espacio de estado, señales multidimensionales y procesamiento de imágenes, procesamiento de voz, análisis de señales de multirresolución, señales aleatorias y procesamiento estadístico de señales y sistemas no lineales. Por último, hemos incluido una lista de referencias que tratan sobre un muestreo de otras aplicaciones y temas avanzados. En conjunto, las referencias de esta bibliografía deben proporcionar al lector una apreciación significativa de la amplitud de temas y aplicaciones que comprende el campo de señales y sistemas.

B.1 ANTECEDENTES Y MATEMÁTICAS BÁSICAS

B.1.1 Cálculo, análisis y matemáticas avanzadas

Arfken, G. y Weber, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*. 4a ed. Boston, MA: Academic Press, 1995.

Hildebrand, F. B., *Advanced Calculus for Applications*. 2a ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1976.

Thomas, G. B., Jr. y Finney, R. L., *Calculus and Analytic Geometry*. 9a ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1996.

B.1.2 Ecuaciones diferenciales y de diferencias

Birkhoff, G. y Rota, G.-C., *Ordinary Differential Equations*. 3a ed. New York, NY: John Wiley, 1978.

Boyce, W. E. y DiPrima, R. C., *Elementary Differential Equations*. 3a ed. New York, NY: John Wiley, 1977.

HILDEBRAND, F. B., *Finite Difference Equations and Simulations.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1968.

LEVY, H. y LESSMAN, F., *Finite Difference Equations.* New York, NY: Macmillan, 1961.

SIMMONS, G. F., *Differential Equations: With Applications and Historical Notes.* New York, NY: McGraw-Hill, 1972.

B.1.3 Variables complejas

CARRIER, G. F., KROOK, M. y PEARSON, C. E., *Functions of a Complex Variable: Theory and Technique.* Ithaca, NY: Hod Books, 1983.

CHURCHILL, R. V., BROWN, J. W. y VERHEY, R. F., *Complex Variables and Applications.* 5a ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1990.

B.2 EXPANSIÓN EN SERIE Y TRANSFORMADAS

B.2.1 Series y transformadas de Fourier y sus aplicaciones

BRACEWELL, R. N., *The fourier Transform and Its Applications.* 2a ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1996.

CHURCHILL, R. V. y BROWN, J. W., *Fourier Series and Boundary Value Problems.* 3a ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1978.

DYM, H. y MCKEAN, H. P., *Fourier Series and Integrals.* New York, NY: Academic Press, 1972.

EDWARDS, R. E., *Fourier Series: A Modern Introduction.* 2a ed. New York, NY: Springer-Verlag, 1979.

GRAY, R. M. y GOODMAN, J. W., *Fourier Transforms: An Introduction for Engineers.* Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1995.

LIGHTHILL, M. J., *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions.* New York, NY: Cambridge University Press, 1962.

PAPOULIS, A., *The Fourier Integral and Its Applications.* New York, NY: McGraw-Hill, 1987.

WALKER, P. L., *The Theory of Fourier Series and Integrals.* New York, NY: John Wiley, 1986.

B.2.2 Transformada de Laplace

DOETSCH, G., *Introduction to the Theory and Applications of the Laplace Transformation with a Table of Laplace Transformations.* New York, NY: Springer Verlag, 1974.

LEPAGE, W. R., *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers.* New York, NY: McGraw-Hill, 1961.

RAINVILLE, E. D., *The Laplace Transform: An Introduction.* New York, NY: Macmillan, 1963.

B.2.3 Transformadas *z*

JURY, E. I., *Theory and Applications of the Z-Transform Method.* Malabar, FL: R. E. Krieger, 1982.

VICH, R., *Z Transform Theory and Applications.* Boston, MA: D. Reidel, 1987.

B.3 TEMAS ADICIONALES DE MATEMÁTICAS

B.3.1 Funciones generalizadas

ARSAC, J., *Fourier Transforms and the Theory Distributions*. Translated by A. Nussbaum and G. C. Heim. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1966.

GELFAND, I. M., et al., *Generalized Functions*. 5 vols. Translated by E. Saletan et al. New York, NY: Academic Press, 1964-68.

HOSKINS, R. F., *Generalised Functions*. New York, NY: Halsted Press, 1979.

ZEMANIAN, A. H., *Distribution Theory and Transform Analysis*. New York, NY: McGraw-Hill, 1965.

B.3.2 Álgebra lineal

GOLUB, G. H. y VAN LOAN, C. F., *Matrix Computations*. 2a ed. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1989.

HORN, R. A. y JOHNSON, C. R., *Matrix Analysis*. New York, NY: Cambridge University Press, 1985.

STRANG, G., *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 1993.

B.4 TEORÍA DE CIRCUITOS

BOBROW, L. S., *Elementary Linear Circuit Analysis*. New York, NY: Holt, Rinehart, y Winston, 1981.

CHUA, L. O., DESOER, C. A. y KUH, E. S., *Basic Circuit Theory*. New York: McGraw-Hill, 1987.

IRVINE, R. G., *Operational Amplifier Characteristics and Applications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994.

ROBERGE, J. K., *Operational Amplifiers: Theory and Practice*. New York, NY: John Wiley, 1975.

VAN VALKENBURG, M. E., *Network Analysis*. 3a ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1974.

B.5 SEÑALES Y SISTEMAS BÁSICOS

CADZOW, J. A. y VAN LANDINGHAM, H. F., *Signals And Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1985.

CRUZ, J. B. y VAN VALKENBURG, M. E., *Signals in Linear Circuits*. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1974.

GABEL, R. A. y ROBERTS, R. A., *Signals and Linear Systems*. 3a ed. New York, NY: John Wiley, 1987.

GLISSON, T. H., *Introduction to Systems Analysis*. New York, NY: McGraw-Hill, 1985.

HOUTS, R. C., *Signal Analysis in Linear Systems*. New York, NY: Saunders College, 1991.

JACKSON, L. B., *Signals, Systems, and Transforms*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1991.

KAMEN, E., *Introduction to Signals and Systems*. New York, NY: Macmillan, 1987.

LATHI, B. P., *Linear Systems and Signals*. Carmichael, CA: Berkeley-Cambridge Press, 1992.

LIU, C. L. y LIU, J. W., *Linear Systems Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1975.

MAYHAN, R. J., *Discrete-time and Continuous-time Linear Systems*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1984.

MCGILLEM, C. D. y COOPER, G. R., *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*. 3a ed. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston, 1991.

NEFF, H. P., *Continuous and Discrete Linear Systems*. New York, NY: Harper and Row, 1984.

PAPOULIS, A., *Signal Analysis*. New York, NY: McGraw-Hill, 1977.

SIEBERT, W. M., *Circuits, Signals, and Systems*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1986.

SOLIMAN, S., y SRINATH, M., *Continuous and Discrete Signals and Systems*. New York, NY: Prentice Hall, 1990.

TAYLOR, F. J., *Principles of Signals and Systems*. McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. New York, NY: McGraw-Hill, 1994.

ZIEMER, R. E., TRANTER, W. H. y FANNIN, D. R., *Signals and Systems: Continuous and Discrete*. 2a ed. New York, NY: Macmillan, 1989.

B.6 PROCESAMIENTO DE SEÑALES DISCRETAS

BRIGHAM, O. E., *The Fast Fourier Transform and its Applications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.

BURRUS, C. S., MCCLELLAN, J. H., OPPENHEIM, A. V., PARKS, T. W., SCHAFER, R. W. y SCHUESSLER, H. W., *Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1994.

GOLD, B. y RADER, C. M., *Digital Processing of Signals*. Lincoln Laboratory Publications. New York, NY: McGraw-Hill, 1969.

OPPENHEIM, A. V. y SCHAFER, R. W., *Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975.

OPPENHEIM, A. V. y SCHAFER, R. W., *Discrete-Time Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.

PELED, A. y LIU, B., *Digital Signal Processing: Theory Design and Implementation*. New York, NY: John Wiley, 1976.

PROAKIS, J. G. y MANOLAKIS, D. G., *Digital Signal Processing Principles, Algorithms, and Applications*. 3a ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996.

RABINER, L. R. y GOLD, B., *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975.

ROBERTS, R. A. y MULLIS, C. T., *Digital Signal Processing*. Reading, MA: Addison-Wsley, 1987.

STRUM, R. D. y KIRK, D. E., *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*. Addison-Wesley Series in Electrical Engineering. Reading, MA: Addison-Wesley, 1988.

TRETTER, S. A., *Introduction to Discrete-Time Signal Processing*. New York, NY: John Wiley, 1976.

B.7 DISEÑO DE FILTROS

ANTONIOU, A., *Digital Filters, Analysis, Design, and Applications*. 2a ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1993.

CHRISTIAN, E. y EISENMANN, E., *Filter Design Tables and Graphs*. Knightdale, NC: Transmission Networks International, 1977.

HAMMING, R. W., *Digital Filters*. 3a ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.

HUELSMAN, L. P. y ALLEN, P. E., *Introduction to the Theory and Design of Active Filters*. New York, NY: McGraw-Hill, 1980.

PARKS, T. W. y BURRUS, C. S., *Digital Filter Design*. New York, NY: John Wiley, 1987.

VAN VALKENBURG, M. E., *Analog Filter Design*. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston, 1982.

WEINBERG, L., *Network Analysis and Synthesis*. New York, NY: McGraw-Hill, 1962.

ZVEREV, A. I., *Handbook of Filter Synthesis*. New York, NY: John Wiley, 1967.

B.8 MODELOS Y MÉTODOS DE ESPACIO DE ESTADO

BROCKETT, R., *Finite Dimensional Linear Systems*. New York, NY: John Wiley, 1970.

CHEN, C. T., *Linear System Theory and Design*. New York, NY: Holt, Rinehart, and Winston, 1984.

CLOSE, C. M. y FREDERICK, D. K., *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1978.

GUPTA, S. C., *Transform and State Variable Methods in Linear Systems*. New York, NY: John Wiley, 1966.

KAILATH, T., *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980.

LJUNG, L., *System Identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.

LUENBERGER, D. G., *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*. New York, NY: John Wiley, 1979.

ZADEH, L. A. y DESOER, C. A., *Linear System Theory: The State Space Approach*. New York, NY: McGraw-Hill, 1963.

B.9 RETROALIMENTACIÓN Y CONTROL

ANDERSON, B. D. O. y MOORE, J. B., *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990.

D'AZZO, J. J. y HOUPIS, C. H., *Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern*. 4a ed. NY: McGraw-Hill, 1995.

DORF, R. C. y BISHOP, R. H., *Modern Control Systems*. 7a ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

DOYLE, J. C., FRANCIS, B. A. y TANNENBAUM, A. R., *Feedback Control Theory*. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 1992.

HOSTETTER, G. H., SAVANT, JR., C. J. y STEFANI, R. T., *Design of Feedback Control Systems*. 2a ed. Saunders College Publishing, a Division of Holt, Reinhart and Winston, Inc., 1989.

KUO, B. C., *Automatic Control Systems*. 7a ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.

OGATA, K., *Modern Control Engineering*. 2a ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990.

OGATA, K., *Discrete-Time Control Systems*. 2a ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994.

RAGAZZINI, J. R. y FRANKLIN, G. F., *Sampled-Data Control Systems*. New York, NY: McGraw-Hill, 1958.

ROHRS, C. E., MELSA, J. L. y SCHULTZ, D. G., *Linear Control Systems*. New York, NY: McGraw-Hill, 1993.

VACCARO, R. J., *Digital Control: A State-Space Approach*. New York, NY: McGraw-Hill, 1995.

B.10 COMUNICACIONES

BENNETT, W. R., *Introduction to Signal Transmission*. New York, NY: McGraw-Hill, 1970.

BLAHUT, R. E., *Digital Transmission of Information*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

BLAHUT, R. E., *Algebraic Methods for Signal Processing and Communications Coding*. New York, NY: Springer-Verlag, 1992.

CARLSON, A. B., *Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication*. 3a ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1986.

COUCH, II. L. W., *Modern Communication Systems Principles and Applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 1995.

COVER, T. M. y THOMAS, J. B., *Elements of Information Theory*. New York, NY: John Wiley and Sons, Inc., 1991.

GALLAGER, R. M., *Information Theory and Reliable Communication*. New York, NY: John Wiley and Sons, Inc., 1968.

HAYKIN, S., *Digital Communications*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1988.

JAYANT, N. S. y NOLL, P., *Digital Coding of Waveforms: Principles and Applications to Speech and Video*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1984.

LATHI, B. P., *Modern Digital and Analog Communication Systems*. 2a ed. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1989.

LEE, E. A. y MESSERSCHMITT, D. G., *Digital Communication*. 2a ed. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1994.

PEEBLES, JR., P. Z., *Communication System Principles*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1976.

PROAKIS, J. G., *Digital Communications*. 3a ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1995.

PROAKIS, J. G. y SALEHI, M., *Communication Systems Engineering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994.

RODEN, M. S., *Analog and Digital Communication Systems*. 4a ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 1996.

SCHWARTZ, M., *Information Transmission, Modulation, and Noise*. 4a ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1990.

SIMON, M. K., et al., eds., *Spread Spectrum Communication Handbook*. Ed. rev., New York, NY: McGraw-Hill, 1994.

STREMLER, F. G., *Introduction to Communication Systems*. 3a ed. Addison-Wesley Series in Electrical Engineering, Reading, MA: Addison-Wesley, 1990.

TAUB, H. y SCHILLING, D. L., *Principles of Communication Systems*. 2a ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1986.

VITERBI, A. J. y OMURA, J. K., *Principles of Digital Communication and Coding*. New York, NY: McGraw-Hill, 1979.

ZIEMER, R. E. y TRANTER, W. H., *Principles of Communications Systems, Modulation, and Noise*. 4a ed. Boston, MA: Houghton Mifflin Co., 1995.

B.11 PROCESAMIENTO DE SEÑALES MULTIDIMENSIONALES, DE IMÁGENES Y DE VIDEO

BRACEWELL, R. N., *Two-Dimensional Imaging*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1995.

CASTLEMAN, K. R., *Digital Image Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1996.

DUDGEON, D. E., MERSEREAU, R. M., *Multidimensional Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1984.

GONZALEZ, R. C. y WOODS, R. E. *Digital Image Processing*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1993.

JAIN, A. K., *Fundamentals of Digital Image Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.

LIM, J. S., *Two-Dimensional Signal and Image Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1990.

NETRAVALI, A. N. y HASKELL, B. G., *Digital Pictures: Representation, Compression, and Standards*. 2a ed. New York, NY: Plenum Press, 1995.

PRATT, W. K., *Digital Image Processing*. 2a ed. New York, NY: John Wiley and Sons, 1991.

TEKALP, A. M., *Digital Video Processing*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 1995.

B.12 PROCESAMIENTO DE VOZ

DELLER, J. R., PROAKIS, J. G. y HANSEN, J. H. L., *Discrete-Time Processing of Speech Signals*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1987.

KLEIJN, W. B. y P., K. K., *Speech Coding and Synthesis*. Amsterdam: Elsevier, 1995.

LIM, J. S., ed., *Speech Enhancement*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1983.

MARKEL, J. D. y GRAY, A. H., *Linear Prediction of Speech*. New York, NY: Springer-Verlag, 1976.

RABINER, L. R. y JUANG, B.-H., *Fundamentals of Speech Recognition*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.

RABINER, L. R. y SCHAFER, R. W., *Digital Processing of Speech Signals*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1978.

B.13 ANÁLISIS DE SEÑALES MULTIVELOCIDAD Y MULTIRRESOLUCIÓN

AKANSU, A. N. y HADDAD, R. A., *Multiresolution Signal Descomposition: Transforms, Subbands and Wavelets*. San Diego, CA: Academic Press, Inc., 1992.

CHUI, C. K., *An Introduction to Wavelets*. San Diego, CA: Academics Press Inc., 1992.

CROCHIERE, R. E. y RABINER, L. R., *Multirate Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1983.

DAUBECHIES, I., *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Series on Applied Mathematics, Philadelphia: SIAM, 1992.

MALVAR, H. S., *Signal Processing with Lapped Transforms*. Norwood, MA: Artech House, 1992.

VAIDYANATHAN, P. P., *Multirate Systems and Filter Banks*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1993.

VETTERLI, M. y KOVACEVIC, J., *Wavelets and Subband Coding*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1995.

WORNELL, G. W., *Signal Processing with Fractals: A Wavelet-Based Approach*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 1996.

B.14 SEÑALES ALEATORIAS Y PROCESAMIENTO ESTADÍSTICO DE SEÑALES

B.14.1 Probabilidad básica

DRAKE, A. W., *Fundamentals of Applied Probability Theory*. New York, NY: McGraw-Hill, 1967.

ROSS, S., *Introduction to Probability Models*. 5a ed. Boston, MA: Academic Press, 1993.

B.14.2 Detección y estimación de procesos estocásticos

KAY, S. M., *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1993.

LEON-GARCIA, A., *Probability and Random Proces for Electrical Engineering*. 2a ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Co., 1994.

PAPOULIS, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. 3a ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1991.

PEEBLES, JR., P. Z., *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. 3a ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1993.

PORAT, B., *Digital Processing of Random Signals: Theory and Methods*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1994.

THERRIEN, C. W., *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1992.

VAN TREES, H. L., *Detection, Estimation, and Modulation Theory: Part I*. New York, NY: John Wiley and Sons, Inc., 1968.

B.15 SISTEMAS NO LINEALES Y VARIANTES EN EL TIEMPO

CHUA, L. O., *Introduction to Nonlinear Network Theory*. New York, NY: McGraw-Hill, 1969.

D'ANGELO, H., *Linear Time-Varying Systems: Analysis and Synthesis*. Boston, MA: Allyn and Bacon, 1970.

GRAHAM, D. y MCRUER, D., *Analysis of Nonlinear Control Systems*. New York, NY: Dover, 1971.

HILLBORN, R. C., *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. New York, NY: Oxford University Press, 1994.

KHALIL, H. K., *Nonlinear Systems*. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 1992.

LEFSCHETZ, S., *Stability of Nonlinear Control Systems*. Mathematics in Science and Engineering, no. 13, New York, NY: Academic Press, 1965.

RICHARDS, J. A., *Analysis of Periodically Time-Varying Systems*. New York, NY: Springer-Verlag, 1983.

STROGATZ, S. S., *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

VIDYASAGER, M., *Nonlinear Systems Analysis*. 2a ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.

B.16 OTRAS APLICACIONES Y TEMAS AVANZADOS

BOX, G. E. P. y JENKINS, G. M., *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Ed. rev. San Francisco, CA: Holden-Day, 1976.

HAMILTON, J. D., *Time Series Analysis*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.

HAYKIN, S., *Adaptive Filter Theory*. 2a ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.

HERMAN, G. T., *Image Reconstruction from Projections*. New York, NY: Academic Press, 1980.

JOHNSON, D. H. y DUDGEON, D. E., *Array Signal Processing: Concepts and Techniques*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1993.

KAK, A. C. y SLANEY, M., *Principles of Computerized Tomography*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.

Kay, S. M., *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.

Macovski, A., *Medical Imaging Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1983.

Marple, Jr., S. L., *Digital Spectral Analysis with Applications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.

Oppenheim, A. V., ed., *Applications of Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1978.

Robinson, E. A., et al., *Geophysical Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1986.

Van Trees, H. L., *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part III: Radar-Sonar Signal Processing and Gaussian Signals in Noise*. New York, NY: John Wiley, 1971.

Widrow, B. y Stearns, S. D., *Adaptive Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1985.

RESPUESTAS

Capítulo 1 Respuestas

1.1. $-0.5,\ -0.5, j,\ -j, j, 1+j, 1+j, 1-j, 1-j$

1.2. $5e^{j0}, 2e^{j\pi}, 3e^{-j\pi/2}, e^{-j\pi/3}, \sqrt{2}e^{j\pi/4}, 2e^{-j\pi/2}, \sqrt{2}e^{j\pi/4}, e^{j\pi/2}, e^{-j\pi/12}$

1.3. **(a)** $P_\infty = 0, E_\infty = \frac{1}{4}$ **(b)** $P_\infty = 1, E_\infty = \infty$ **(c)** $P_\infty = \frac{1}{2}, E_\infty = \infty$
(d) $P_\infty = 0, E_\infty = \frac{4}{3}$ **(e)** $P_\infty = 1, E_\infty = \infty$ **(f)** $P_\infty = \frac{1}{2}, E_\infty = \infty$

1.4. **(a)** $n < 1$ y $n > 7$ **(b)** $n < -6$ y $n > 0$ **(c)** $n < -4$ y $n > 2$
(d) $n < -2$ y $n > 4$ **(e)** $n < -6$ y $n > 0$

1.5. **(a)** $t > -2$ **(b)** $t > -1$ **(c)** $t > -2$ **(d)** $t < 1$ **(e)** $t < 9$

1.6. **(a)** No **(b)** No **(c)** Sí

1.7. **(a)** $|n| > 3$ **(b)** para toda t **(c)** $|n| < 3, |n| \to \infty$ **(d)** $|t| \to \infty$

1.8. **(a)** $A = 2, a = 0, \omega = 0, \phi = \pi$ **(b)** $A = 1, a = 0, \omega = 3, \phi = 0$
(c) $A = 1, a = 1, \omega = 3, \phi = \frac{\pi}{2}$ **(d)** $A = 1, a = 2, \omega = 100, \phi = \frac{\pi}{2}$

1.9. **(a)** $T = \frac{\pi}{5}$ **(b)** No periódica **(c)** $N = 2$
(d) $N = 10$ **(e)** No periódica

1.10. π

1.11. 35

1.12. $M = -1, n_0 = -3$

1.13. 4

1.14. $A_1 = 3, t_1 = 0, A_2 = -3, t_2 = 1$

1.15. **(a)** $y[n] = 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$ **(b)** No

1.16. **(a)** No **(b)** 0 **(c)** No

1.17. **(a)** No; por ejemplo, $y(-\pi) = x(0)$ **(b)** Sí

1.18. **(a)** Sí **(b)** Sí **(c)** $C \leq (2n_0 + 1)B$

1.19. **(a)** Lineal, no invariante en el tiempo **(b)** No lineal, invariante en el tiempo
(c) Lineal, invariante en el tiempo **(d)** Lineal, no invariante en el tiempo

1.20. **(a)** $\cos(3t)$ **(b)** $\cos(3t - 1)$

Capítulo 2 Respuestas

2.1. **(a)** $y_1[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4]$
(b) $y_2[n] = y_1[n+2]$ **(c)** $y_3[n] = y_2[n]$

2.2. $A = n - 9,\ B = n + 3$

2.3. $2[1 - \frac{1}{2}^{n+1}]u[n]$

2.4. $$y[n] = \begin{cases} n-6, & 7 \leq n \leq 11 \\ 6, & 12 \leq n \leq 18 \\ 24-n, & 19 \leq n \leq 23 \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$$

2.5. $N = 4$

2.6. $y[n] = \begin{cases} \frac{3^n}{2}, & n < 0 \\ \frac{1}{2}, & n \geq 0 \end{cases}$

2.7. **(a)** $u[n-2] - u[n-6]$ **(b)** $u[n-4] - u[n-8]$ **(c)** No
(d) $y[n] = 2u[n] - \delta[n] - \delta[n-1]$

2.8. $y(t) = \begin{cases} t+3, & -2 < t \leq -1 \\ t+4, & -1 < t \leq 0 \\ 2-2t, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$

2.9. $A = t - 5, B = t - 4$

2.10. **(a)** $y(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \alpha \\ \alpha, & \alpha \leq t \leq 1 \\ 1 + \alpha - t, & 1 \leq t \leq 1 + \alpha \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$ **(b)** $\alpha = 1$

2.11. **(a)** $y(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq 3 \\ \frac{1 - e^{-3(t-3)}}{3}, & 3 < t \leq 5 \\ \frac{(1 - e^{-6})e^{-3(t-5)}}{3}, & 5 < t \leq \infty \end{cases}$

(b) $g(t) = e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5)$ **(c)** $g(t) = \frac{dy(t)}{dt}$.

2.12. $A = \frac{1}{1 - e^{-3}}$

2.13. **(a)** $A = \frac{1}{5}$ **(b)** $g[n] = \delta[n] - \frac{1}{5}\delta[n-1]$

2.14. $h_1(t), h_2(t)$

2.15. $h_2[n]$

2.16. **(a)** Verdadero **(b)** Falso **(c)** Verdadero **(d)** Verdadero

2.17. **(a)** $y(t) = \frac{1-j}{6}[e^{(-1+3j)t} - e^{-4t}]u(t)$

(b) $y(t) = \frac{1}{6}[e^{-t}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t) - e^{-4t}]u(t)$

2.18. $(1/4)^{n-1}u[n-1]$

2.19. **(a)** $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = 1$ **(b)** $[2(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{4})^n]u[n]$

2.20. **(a)** 1 **(b)** 0 **(c)** 0

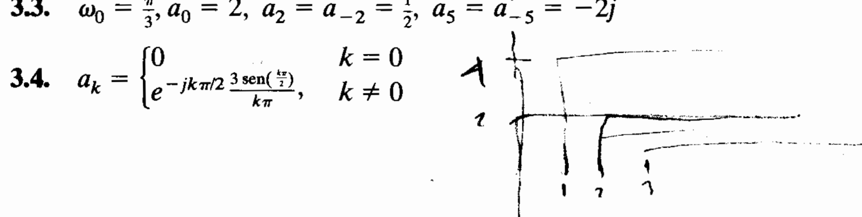
Capítulo 3 Respuestas

3.1. $x(t) = 4\cos(\frac{\pi}{4}t) + 8\cos(\frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi}{2})$

3.2. $x[n] = 1 + 2\operatorname{sen}(\frac{4\pi}{5}n + \frac{3\pi}{4}) + 4\operatorname{sen}(\frac{8\pi}{5}n + \frac{5\pi}{6})$

3.3. $\omega_0 = \frac{\pi}{3}, a_0 = 2,\ a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2},\ a_5 = a_{-5}^* = -2j$

3.4. $a_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ e^{-jk\pi/2}\frac{3\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{2})}{k\pi}, & k \neq 0 \end{cases}$



3.5. $\omega_2 = \omega_1,\ b_k = e^{-jk\omega_1}[a_{-k} + a_k]$

3.6. **(a)** $x_2(t), x_3(t)$ **(b)** $x_2(t)$

3.7. $a_k = \begin{cases} \frac{2}{T}, & k = 0 \\ \frac{b_k}{j\frac{2\pi}{T}k}, & k \neq 0 \end{cases}$

3.8. $x_1(t) = \sqrt{2}\,\text{sen}(\pi t), x_2(t) = -\sqrt{2}\,\text{sen}(\pi t)$

3.9. $a_0 = 3,\ a_1 = 1 - 2j,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1 + 2j$

3.10. $a_0 = 0,\ a_{-1} = -j,\ a_{-2} = -2j,\ a_{-3} = -3j$

3.11. $A = 10,\ B = \frac{\pi}{5},\ C = 0$

3.12. $c_k = 6$ para toda k

3.13. $y(t) = 0$

3.14. $H(e^{j\pi/2}) = H^*(e^{j3\pi/2}) = 2e^{j\pi/4},\ H(e^{j0}) = H(e^{j\pi}) = 0$

3.15. $|k| > 8$

3.16. **(a)** 0 **(b)** $\text{sen}(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4})$ **(c)** 0

3.17. S_1 y S_3 no son LTI

3.18. S_1 y S_2 no son LTI

3.19. **(a)** $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$ **(b)** $H(j\omega) = (\frac{1}{1 + j\omega})$ **(c)** $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t - \frac{\pi}{4})$

3.20. **(a)** $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$ **(b)** $H(j\omega) = (\frac{1}{1 + j\omega - \omega^2})$ **(c)** $-\cos t$

Capítulo 4 Respuestas

4.1. **(a)** $\frac{e^{-j\omega}}{2 + j\omega}$ **(b)** $\frac{4e^{-j\omega}}{4 + \omega^2}$

4.2. **(a)** $2\cos\omega$ **(b)** $-2j\,\text{sen}\,2\omega$

4.3. **(a)** $\frac{\pi}{j}[e^{j\pi/4}\delta(\omega - 2\pi) - e^{-j\pi/4}\delta(\omega + 2\pi)]$
(b) $2\pi\delta(\omega) + \pi[e^{j\pi/8}\delta(\omega - 6\pi) + e^{-j\pi/8}\delta(\omega + 6\pi)]$

4.4. **(a)** $1 + \cos 4\pi t$ **(b)** $-\frac{4j\,\text{sen}^2 t}{\pi t}$

4.5. $x(t) = -\frac{2\,\text{sen}(3(t - 3/2))}{\pi(t - 3/2)},\ t = \frac{k\pi}{3} + \frac{3}{2}$ para k enteros diferentes de cero

4.6. **(a)** $X_1(j\omega) = 2X(-j\omega)\cos\omega$ **(b)** $X_2(j\omega) = \frac{1}{3}e^{-j2\omega}X(j\frac{\omega}{3})$
(c) $X_3(j\omega) = -\omega^2 e^{-j\omega}X(j\omega)$

4.7. **(a)** ninguno, ninguno **(b)** imaginario, impar **(c)** imaginario, ninguno
(d) real, par

4.8. **(a)** $\frac{2\,\text{sen}(\omega/2)}{j\omega^2} + \pi\delta(\omega)$ **(b)** $\frac{2\,\text{sen}(\omega/2)}{j\omega^2}$

4.9. **(a)** $\frac{\text{sen}\,\omega}{j\omega^2} - \frac{e^{-j\omega}}{j\omega}$ **(b)** $\frac{\text{sen}\,\omega}{\omega}$ **(c)** $\frac{\text{sen}\,\omega}{j\omega^2} - \frac{\cos\omega}{j\omega}$

4.10. **(a)** $X(j\omega) = \begin{cases} j/2\pi, & -2 \leq \omega < 0 \\ -j/2\pi, & 0 \leq \omega < 2 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$ **(b)** $A = \frac{1}{2\pi^3}$

4.11. $A = \frac{1}{3}, B = 3$

4.12. **(a)** $-\frac{4j\omega}{(1+\omega^2)^2}$ **(b)** $j2\pi\omega e^{-|\omega|}$

4.13. **(a)** No **(b)** Sí **(c)** Sí

4.14. $x(t) = \sqrt{12}\,[e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$

4.15. $x(t) = 2te^{-|t|}u(t)$

4.16. **(a)** $g(t) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{k\pi}{4})$ **(b)** $X(j\omega) = \begin{cases} 4, & |\omega| \le 1 \\ 0, & 1 < |\omega| \le 4 \end{cases}$

4.17. **(a)** Falso **(b)** Verdadero

4.18. $h(t) = \begin{cases} \frac{5}{4}, & |t| < 1 \\ -\frac{|t|}{4} + \frac{3}{2}, & 1 \le |t| \le 5 \\ -\frac{|t|}{8} + \frac{7}{8}, & 5 < |t| < 7 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$

4.19. $x(t) = e^{-4t}u(t)$

4.20. $h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t)u(t)$

Capítulo 5 Respuestas

5.1. **(a)** $\frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$ **(b)** $\frac{0.75e^{-j\omega}}{1.25 - \cos\omega}$

5.2. **(a)** $2\cos\omega$ **(b)** $2j\operatorname{sen}(2\omega)$

5.3. **(a)** $\frac{\pi}{j}\{e^{j\pi/4}\delta(\omega - \frac{\pi}{3}) - e^{-j\pi/4}\delta(\omega + \frac{\pi}{3})\}$

(b) $4\pi\delta(\omega) + \pi\{e^{j\pi/8}\delta(\omega - \frac{\pi}{6}) + e^{-j\pi/8}\delta(\omega + \frac{\pi}{6})\}$

5.4. **(a)** $x_1[n] = 1 + \cos(\frac{\pi}{2}n)$ **(b)** $-4\frac{\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{2}n)}{\pi n}$

5.5. $x[n] = \frac{\operatorname{sen}[\frac{\pi}{4}(n - \frac{3}{2})]}{\pi(n - \frac{3}{2})}$, y $x[n] = 0$ para $n = \pm\infty$

5.6. **(a)** $X_1(e^{j\omega}) = (2\cos\omega)X(e^{-j\omega})$ **(b)** $X_2(e^{j\omega}) = \Re e\{X(e^{j\omega})\}$

(c) $X_3(e^{j\omega}) = -\frac{d^2}{d\omega^2}X(e^{j\omega}) - 2j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})$

5.7. **(a)** imaginario, ninguno **(b)** real, impar **(c)** real, ninguno

5.8. $x[n] = \begin{cases} 1, & n \le -2 \\ n + 3, & -1 \le n \le 1 \\ 4, & n \ge 2 \end{cases}$

5.9. $x[n] = -\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n]$

5.10. $A = 2$

5.11. $\alpha = \pi$

5.12. $\frac{\pi}{2} \le |\omega_c| \le \pi$

5.13. $h_2[n] = -2(\frac{1}{4})^n u[n]$

5.14. $h[n] = \frac{16}{17}\delta[n] - \frac{1}{17}\delta[n-2]$

5.15. $\omega_c = 3\pi/4$

5.16. **(a)** $\alpha = \frac{1}{4}$ **(b)** $N = 4$ **(c)** No

5.17. $b_k = \frac{1}{2}(-1)^k$

5.18. $a_k = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{|k|}$

5.19. **(a)** $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega})}$

(b) $h[n] = \frac{3}{5}(\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{2}{5}(-\frac{1}{3})^n u[n]$

5.20. **(a)** $H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{4}{5}e^{-j\omega}}{1 - \frac{4}{5}e^{-j\omega}}$

(b) $y[n] - \frac{4}{5}y[n-1] = \frac{4}{5}x[n-1]$

Capítulo 6 Respuestas

6.1. **(a)** $A = |H(j\omega_0)|$ **(b)** $t_0 = -\frac{\sphericalangle H(j\omega_0)}{\omega_0}$

6.2. $\sphericalangle H(e^{j\omega_0}) = -n_0(\omega_0) + 2\pi k$ para algún entero k

6.3. **(a)** $A = 1$ **(b)** $\tau(\omega) > 0$ para $\omega > 0$

6.4. **(a)** $2\cos(\frac{\pi}{2}n - \pi)$ **(b)** $2\,\mathrm{sen}(\frac{7\pi}{2}n - \frac{3\pi}{4})$

6.5. **(a)** $g(t) = 2\cos(2\omega_c t)$ **(b)** más concentrado

6.6. **(a)** $g[n] = (-1)^n$ **(b)** más concentrado

6.7. **(a)** 1,000 Hz y 3,000 Hz **(b)** 800 Hz y 3,200 Hz

6.8. $\pi - \omega_p \leq \omega \leq \pi$

6.9. Valor final = 2/5, t_0 = 2/5 seg

6.10. **(a)** $20\log_{10}|H(j\omega)| \approx \begin{cases} -20, & \omega \ll 0.1 \\ 20\log_{10}(\omega), & 0.1 < \omega < 40 \\ 32, & \omega \gg 40 \end{cases}$

(b) $20\log_{10}|H(j\omega)| \approx \begin{cases} 20, & \omega \ll 0.2 \\ -20\log_{10}(\omega) + 6, & 0.2 < \omega < 50 \\ -28, & \omega \gg 50 \end{cases}$

6.11. **(a)** $20\log_{10}|H(j\omega)| \approx \begin{cases} 20, & \omega \ll 0.5 \\ -20\log_{10}(\omega) + 14, & 0.5 < \omega < 50 \\ -40\log_{10}(\omega) + 48, & \omega \gg 50 \end{cases}$

(b) $20\log_{10}|H(j\omega)| \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1 \\ -40\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 50 \\ -20\log_{10}\omega - 34, & \omega \gg 50 \end{cases}$

6.12. $H_2(j\omega) = \frac{0.01(j\omega + 40)}{(j\omega + 1)(j\omega + 8)}$

6.13. **(a)** no único **(b)** único

6.14. $H_I(j\omega) = 0.2 \times 10^{-4}\frac{(j\omega + 50)(j\omega + 10)}{(j\omega + 0.2)^2}$

6.15. **(a)** críticamente amortiguado **(b)** subamortiguado
(c) sobreamortiguado **(d)** subamortiguado

6.16. $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \frac{3}{2}x[n]$

6.17. **(a)** oscilatorio **(b)** no oscilatorio

6.18. No

6.19. $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

6.20. $\tau(\omega) = 2$

Capítulo 7 Respuestas

7.1. $|\omega| > 5{,}000\pi$

7.2. (a) y (c)

7.3. **(a)** $8{,}000\pi$ **(b)** $8{,}000\pi$ **(c)** $16{,}000\pi$

7.4. **(a)** ω_0 **(b)** ω_0 **(c)** $2\omega_0$ **(d)** $3\omega_0$

7.5. $|H(j\omega)| = \begin{cases} T, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$, donde $\frac{\omega_0}{2} < \omega_c < \frac{2\pi}{T} - \frac{\omega_0}{2}$, $\sphericalangle H(j\omega) = 0$

7.6. $T_{\text{máx}} = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}$

7.7. $H(j\omega) = \frac{2\,\text{sen}(\omega T/2)}{\omega T} \times e^{j(\omega T/2)}$

7.8. **(a)** Sí

(b) $g(t) = \sum_{k=-4}^{4} a_k e^{jk\pi t}$, donde $a_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ -j(\frac{1}{2})^{k+1}, & 1 \leq k \leq 4 \\ j(\frac{1}{2})^{-k+1}, & -4 \leq k \leq -1 \end{cases}$

7.9. $\omega_0 = 50\pi$

7.10. **(a)** Falso **(b)** Verdadero **(c)** Verdadero

7.11. **(a)** $X_c(j\omega)$ es real
(b) $\text{Máx}\{X_c(j\omega)\} = 0.5 \times 10^{-3}$
(c) $X_c(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq 1{,}500\pi$
(d) $X_c(j\omega) = X_c(j(\omega - 2{,}000\pi))$ para $0 \leq \omega \leq 2{,}000\pi$.

7.12. $|\omega| \geq 750\pi$

7.13. $h[n] = \delta[n-2]$

7.14. $h[n] = -\frac{\text{sen}[\pi(n-\frac{1}{2})]}{T\pi(n-\frac{1}{2})^2}$

7.15. $N = 2$

7.16. $x[n] = 4\left(\frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n}\right)^2$

7.17. Filtro ideal paso bajas con frecuencia de corte $\pi/2$ y ganancia unitaria en la banda de paso

7.18. Filtro ideal paso bajas con frecuencia de corte $\pi/4$ y ganancia de 2 en la banda de paso

7.19. **(a)** $y[n] = \frac{\text{sen}(5\omega_1 n/3)}{5\pi n}$ **(b)** $y[n] = \frac{1}{5}\delta[n]$

7.20. **(a)** Sí **(b)** No

Capítulo 8 Respuestas

8.1. $m(t) = \frac{1}{2}e^{-j\omega_c t}$

8.2. **(a)** No requiere restricción **(b)** $|\omega_c| > 1{,}000\pi$

8.3. $y(t) = 0$

8.4. $y(t) = \text{sen } 200\pi t$

8.5. $m = \frac{3}{2\pi}$

8.6. $A = 4$

8.7. $\omega_0 = 2\omega_c,\ A = 2$

8.8. **(a)** Sí **(b)** Sí, $x(t) = \{y(t) \text{ sen } \omega_c t\} * \frac{2 \text{ sen } \omega_c t}{\pi t}$

8.9. **(a)** $|\omega| > 2\omega_c$ **(b)** $\omega_0 = \omega_c,\ A = 2$

8.10. **(a)** $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq 1{,}000\pi$ **(b)** $\omega_c = 1{,}000\pi,\ A = 4$

8.11. **(a)** $\frac{\omega_c}{2} \leq |\omega| \leq \frac{3\omega_c}{2}$, Ganancia = 1 **(b)** $A = 2|a_1|,\ \phi = \measuredangle a_1$

8.12. $\Delta = 0.5 \times 10^{-4}$

8.13. **(a)** $p(0) = \frac{1}{T_1}$ **(b)** $p(kT_1) = 0$

8.14. $Y(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_c) - \frac{m\pi}{2j}\delta(\omega - \omega_c - \omega_m) - \frac{m\pi}{2j}\delta(\omega - \omega_c + \omega_m)$

8.15. $\omega_0 = 0$ y $\omega_0 = \pi$

8.16. $0 \leq \omega \leq \frac{3\pi}{8}$ y $\frac{5\pi}{8} \leq \omega \leq \pi$

8.17. $0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{2}$

8.18. $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} j, & 0 < \omega \leq \frac{\pi}{4} \\ -j, & -\frac{\pi}{4} \leq \omega < 0 \end{cases}$

8.19. $N = 20$

8.20. $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 2k]$

Capítulo 9 Respuestas

9.1. **(a)** $\sigma > -5$ **(b)** $\sigma < -5$ **(c)** $-\infty \leq \sigma \leq \infty$
(d) ningún valor de σ **(e)** $|\sigma| < 5$ **(f)** $\sigma < 5$

9.2. **(a)** $\frac{e^{-(s+5)}}{s+5}, \mathcal{R}e\{s\} > -5$ **(b)** $A = -1,\ t_0 = -1,\ \mathcal{R}e\{s\} < -5$

9.3. $\mathcal{R}e\{\beta\} = 3$, $\mathcal{I}m\{\beta\}$ arbitrario

9.4. $1 + 2j, 1 - 2j, \mathcal{R}e\{s\} < 1$

9.5. **(a)** 1,1 **(b)** 0,1 **(c)** 1,0

9.6. **(a)** no **(b)** sí **(c)** no **(d)** sí

9.7. 4

9.8. bilateral

9.9. $x(t) = 4e^{-4t}u(t) - 2e^{-3t}u(t)$

9.10. **(a)** paso bajas **(b)** paso banda **(c)** paso altas

9.11. $|X(j\omega)| = 1$

9.12. **(a)** no es consistente **(b)** consistente **(c)** consistente

9.13. $\alpha = -1, \beta = \frac{1}{2}$

9.14. $X(s) = 1/[4(s^2 - \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4})(s^2 + \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4})], -\frac{\sqrt{2}}{4} < \Re e\{s\} < \frac{\sqrt{2}}{4}$

9.15. $X(s) = \frac{s}{s^2+4}; \Re e\{s\} > 0, \qquad Y(s) = \frac{2}{s^2+4}; \Re e\{s\} > 0$

9.16. **(a)** 2 **(b)** $\alpha > 0$

9.17. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 10\frac{dy(t)}{dt} + 16y(t) = 12x(t) + 3\frac{dx(t)}{dt}$

9.18. **(a)** $H(s) = \frac{1}{s^2+s+1}, \Re e\{s\} > -\frac{1}{2}$
(b) paso bajas
(c) $H(s) = \frac{1}{s^2+10^{-3}s+1}, \Re e\{s\} > -0.0005$
(d) paso banda

9.19. **(a)** $\frac{1}{s+2}, \Re e\{s\} > -2$
(b) $1 + \frac{e^{-6}}{s+2}, \Re e\{s\} > -2$
(c) $\frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+2}, \Re e\{s\} > -2$

9.20. **(a)** $e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$
(b) $e^{-t}u(t)$
(c) $2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$

Capítulo 10 Respuestas

10.1. **(a)** $|z| > \frac{1}{2}$ **(b)** $|z| < \frac{1}{2}$ **(c)** $|z| > 1$ **(d)** $\frac{1}{2} < |z| < 2$

10.2. $X(z) = \frac{1}{125}\frac{z^{-3}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}; |z| > \frac{1}{5}$

10.3. $|\alpha| = 2, n_0$ arbitrario

10.4. polos en $z = \frac{1}{3}e^{\pm j\pi/4}$, ROC: $|z| < \frac{1}{3}$

10.5. **(a)** 1,1 **(b)** 2,0 **(c)** 1,2

10.6. **(a)** No **(b)** No **(c)** Sí **(d)** Sí

10.7. 3

10.8. bilateral

10.9. $x[n] = \frac{2}{9}u[n] + \frac{7}{9}(-2)^n u[n]$

10.10. **(a)** $x[0] = 1, x[1] = \frac{2}{3}, x[2] = -\frac{2}{9}$ **(b)** $x[0] = 3, x[-1] = -6, x[-2] = 18$

10.11. $x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$

10.12. **(a)** paso altas **(b)** paso bajas **(c)** paso banda

10.13. **(a)** $G(z) = 1 - z^{-6}; |z| > 0$ **(b)** $X(z) = \frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}; |z| > 0$

10.14. **(a)** $n_0 = 2$ **(b)** $G(z) = (\frac{z^{-1}-z^{-7}}{1-z^{-1}})^2$

10.15. $(\frac{1}{3})^n u[n]$ y $(-\frac{1}{3})^n u[n]$

10.16. **(a)** No causal **(b)** Causal **(c)** No causal

10.17. **(a)** Sí **(b)** Sí

10.18. **(a)** $y[n] - \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = x[n] - 6x[n-1] + 8x[n-2]$
(b) Sí

10.19. **(a)** $\chi_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{4}$
(b) $\chi_2(z) = 2$, Toda z
(c) $\chi_3(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{2}$

10.20. **(a)** $-(-\frac{1}{2})^n u[n]$
(b) $\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{1}{6}(\frac{1}{4})^n u[n]$
(c) $-\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{1}{6}(\frac{1}{4})^n u[n]$

Capítulo 11 Respuestas

11.1. $H_0(z) + \frac{H_1(z)}{1 + G(z)H_1(z)}$

11.2. $\frac{H_1(s)H_2(s)}{1 + H_1(s)G_1(s) + H_1(s)H_2(s)G_2(s)}$

11.3. $b < -1$

11.4. $G(s) = \frac{1}{s}$

11.5. $-\frac{5}{2} < b < \frac{3}{2}$

11.6. FIR

11.7. $K > -6$

11.8. $-3 < k < 0$

11.9. No, el lugar geométrico de las raíces está sobre el eje real

11.10. Doble polo en $s = -1$, doble cero en $s = 1$

11.11. $0 < k < \frac{5}{4}$

11.12. Las posiciones del polo y del cero se alternan sobre el eje real

11.13. Inestable para toda K

11.14. **(a)** 0 **(b)** 1

11.15. $K > -1$

11.16. $K > -1$

11.17. $-1 < K < 4$

11.18. $-1 < K < 1$

11.19. Inestable

11.20. El margen de ganancia es infinito, el margen de fase es $2 \tan^{-1} \sqrt{2}$

ÍNDICE

Acumulación, propiedad
de serie discreta de Fourier, 221
transformada de Fourier de tiempo discreto, 375-376
transformada z unilateral, 793
Acumulador, 44
Adelanto de fase, 491-492
Aditividad, propiedad de, 53
AM. *Véase* Modulación de amplitud
Ángulo de (fase de) un número complejo, 71
Amortiguamiento, razón de, 452-453
Amplificador(es)
muestreador(es), 652
operacional(es), 821, 896
Amplitud senoidal, modulación de, 583-587
banda lateral única, 597-601
con portadora senoidal, 585-587
demodulación para, 587-594
asíncrona, 590-594
síncrona, 587-590
discreta, 619-623
multiplexión por división de frecuencia (FDM) usando, 594-597
portadora exponencial compleja, 583-585
Análisis, ecuación de. *Véase* Ecuación de análisis
Analizador armónico, 19
Analógico a digital (A a D), convertidor, 535
Ancho de banda de un sistema LTI, 352-353
Ángulo
criterio del, 836-840
fase, de número complejo, 71
modulación de, 611-613
Anticausalidad, 695
Autocorrelación, funciones de, 65, 168, 170-172, 738
Avance en el tiempo de la transformada z unilateral, propiedad de, 793

Banda limitada
interpolación de, 523-524
señales, de entrada de, 541
Banda supresora
frecuencia de la, 237
rizo en la, 445
Bartlett (triangular), ventana de, 421
Bernoulli, D., 178
Bit, 610
Bloques, diagrama(s) de, 42
de forma cascada, 712, 713, 787-789
de forma directa, 712, 713, 787-789
de forma paralela, 712, 713, 787-789
para sistemas LTI causales, 708-713
sistemas de primer orden descritos por ecuaciones diferenciales y de diferencias, 124-127
Bode, diagramas de, 436-439
respuestas racionales en frecuencia, 456-460
sistema de suspensión de un automóvil, 475

Calidad del circuito, 456
Calor
propagación y difusión de, 180
Capacitor, 44
Caracterización en el dominio del tiempo y de la frecuencia, 423-513

ejemplos de, 472-482
filtro no recursivo discreto, 476-482
filtros no ideales, 444-447
representación de magnitud-fase
respuesta en frecuencia de sistemas LTI, 427-439
transformada de Fourier, 423-427
sistema de suspensión de un automóvil, 473-476
sistemas continuos, 448-460
de primer orden, 448-451
de segundo orden, 451-456
diagramas de Bode para las respuestas en frecuencia racional y la, 456-460
sistemas discretos, 461-472
de primer orden, 461-465
de segundo orden, 465-472
Ceros de la transformada de Laplace, 660
Circuito, calidad del, 456
Circuitos ecualizadores, 232, 233
Círculo unitario, 743
Circunvalación, propiedad de, 847-850
Codificación sin pérdida, 46
Codificador de voz, 633-634
Coeficiente espectral. *Véase* Fourier, Coeficientes de la serie de
Coeficiente multiplicador, 125, 126
Coeficientes de la serie de Fourier
continua, 191-286
discreta, 212, 213
partes real e imaginaria de, 216, 217
propiedad de convolución de, 222
Compensación de elementos no ideales, 821-822
Componente(s)
armónica(s), 200
de la primera armónica, 187
de la segunda armónica, 187
fundamental(es), 187
Comunicaciones, sistemas de, 582-653
modulación de amplitud con portadora de tren de pulsos, 601-604, 605
modulación de amplitud de pulso, 604-610
digital, 610
interferencia de intersímbolo en, 607-610
modulación de amplitud senoidal, 583-587
banda lateral única, 597-601
con portadora exponencial compleja, 583-585
demodulación para, 587-594
discretos, 619-623
multiplexión por división de frecuencia (FDM) en, 594-597
portadora senoidal, 585-587
modulación de frecuencia senoidal, 583, 611-619
banda ancha, 615-617
banda angosta, 613-615
señal moduladora de onda cuadrada periódica, 617-619
modulación discreta, 619-623
Condiciones de Dirichlet, 197-200, 290, 316
Conjugación, propiedad de
serie continua de Fourier, 204-205, 206
serie discreta de Fourier, 221
transformada continua de Fourier, 303-306
transformada de Fourier de tiempo discreto, 375
transformada de Laplace, 687
unilateral, 717
transformada *z*, 770
unilateral, 793
Conjugado complejo, 72
Conmutativa de los sistemas LTI, propiedad, 104
Constantes, de tiempo, 448
dominante, 500-501
Control proporcional (P), 905
Control proporcional más integral (PI), 905
Control proporcional más integral más diferencial (PID), 905
Convergencia. *Véase también* Región de convergencia
serie continua de Fourier, 195-201
serie discreta de Fourier, 219-221
transformada continua de Fourier, 289-290
transformada de Fourier de tiempo discreto, 366-367
Conversión de tiempo continuo a discreto, 535
Conversión discreta a continua, 535
Convertidor digital a analógico (D/A), 535

Convolución
aperiódica, 222
definición de la función continua de impulso unitario mediante la, 131-132
operación de, 79-85
periódica, 222, 389-390
propiedad asociativa de la, 107-108
propiedad conmutativa de la, 104
propiedad distributiva de la, 104-106
Convolución periódica, 222, 389-390
de la serie continua de Fourier, 206
de la serie discreta de Fourier, 221
Convolución, propiedad de
serie continua de Fourier, 206
serie discreta de Fourier, 221, 222
transformada continua de Fourier, 314-322
transformada de Fourier de tiempo discreto, 382-388
transformada de Laplace, 687-688
unilateral, 717-718
transformada *z*, 687-688
unilateral, 793-794
Convolución, suma de, 75-90, 384-386
evaluación, 81-84
Correlación cruzada, funciones de, 65, 168, 170
Correlación, función de, 65
Corte, frecuencias de, 237
Criterio de estabilidad de Nyquist, 846-858
continuo, 850-855
discreto, 850-855
propiedad de circunvalación del, 847-850

Decibeles (dB), 232, 233, 437
Decimación, 549-555
Demodulación, 585
asíncrona, 590-594
definida, 583
discreta, 622
modulación de amplitud senoidal, 587-594
síncrona, 587-590
Deslizamiento, 85
Desplazamiento de fase, 428, 636
Desplazamiento en el tiempo, propiedad de, 8-9, 10
de la serie continua de Fourier, 202-203, 206
de la serie discreta de Fourier, 221
de la transformada continua de Fourier, 301-303
de la transformada de Fourier de tiempo discreto, 373-375
de la transformada de Laplace, 684
de la transformada *z*, 767-768
Desvío de *cd*, 207
Detector de envolventes, 591-592
Diagrama de bloques de forma cascada, 712-713, 787-789
Diagrama de bloques en forma directa, 712, 713, 787-789
Diagrama de bloques en forma paralela, 712, 713, 787-789
Diagrama de polos y ceros
sistemas de primer orden, 676-677, 763-765
sistemas de segundo orden, 678-680, 765-767
sistemas pasa todo, 682
transformada *z*, 763-767
transformadas de Laplace, 660-662, 674-682
Diagrama log magnitud-fase, 861-862, 864-866
Diagramas a bloques, sumadores en, 125, 126
Diagramas de Nyquist, 853-858
Diagramas log magnitud, 436-439
Diferenciación
en el dominio de *s*, 688-690, 717
en el dominio de *z*, 772, 793
en el dominio del tiempo, 688, 717
Diferenciación, propiedad de
serie continua de Fourier, 206
serie discreta de Fourier, 222-223
transformada *z*, 775
transformada continua de Fourier, 306-308
transformada discreta de Fourier, 375-376, 380
unilateral, 793
Dinámica de población, modelo de, 824-826
Dirichlet, P. L., 180
Discontinuidades, 198-200
Diseño de sistema inverso, 820-821

Dispersión, 433
Dispositivos imperfectos de medición, 355-356
Distorsión
de cuadratura, 636
magnitud y fase, 428
Distribución, teoría de, 36, 136
Dobletes unitarios, 132-136, 172
Dualidad
eco, 737
entre transformada discreta de Fourier y serie continua de Fourier, 395-396
transformada continua de Fourier, 295, 309-311, 322
transformada de Fourier de tiempo discreto, 390-396

Ecuación de análisis
series continuas de Fourier, 191
series discretas de Fourier, 213
transformada continua de Fourier, 288
transformada de Fourier de tiempo discreto, 361, 390
Ecuación de síntesis
serie continua de Fourier, 191
serie discreta de Fourier, 213
transformada continua de Fourier, 288, 300, 314
transformada de Fourier de tiempo discreto, 361, 390
Ecuaciones de diferencias
filtros discretos descritos mediante, 244-249
Ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes, 116, 117-121, 124, 330-333, 396-399, 698-700, 779-781
condición de reposo inicial, 119-120
no recursivas, 122
recursivas, 122-123
recursivas de primer orden, 244-245
representación en diagrama de bloques de, 124-127
respuestas naturales como soluciones de, 119-121, 122
sistema con respuesta finita al impulso (FIR), 122
sistema con respuesta infinita al impulso (IIR), 123
soluciones particular y homogénea, 118-119
transformada de Laplace unilateral para resolver, 719-720
transformada z unilateral para resolver, 795-796
Ecuaciones diferenciales
filtros continuos descritos mediante, 239-244
filtros paso altas RC, 241-244
filtros paso bajas RC, 239-241
lineales con coeficientes constantes. *Véase* Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes
Ecualización, 649
canal, 609-610
Ecualizador de fuerza cero, 649
Efecto estroboscópico, 533-534
Energía de señales, 5-7
Entrada cero, respuesta a, 55-56, 720
Escalamiento (homogeneidad), propiedad de, 53
Escalamiento de amplitud, factor de, 483
Escalamiento en el dominio de z, 768-769, 793
Escalamiento en el tiempo, propiedad de, 8, 9, 10
de la serie continua de Fourier, 204, 206
de la serie discreta de Fourier, 221
de la transformada continua de Fourier, 308-309
de la transformada de Fourier de tiempo discreto, 377-380
de la transformada de Laplace, 685-687
unilateral, 717
transformada z, 769-770
unilateral, 793
Escalamiento en frecuencia de la transformada continua de Fourier, 308-309
Escalón unitario de sistemas LTI, respuesta al, 115-116
Espectro. *Véase también* Fourier, transformada de
densidad de energía, 312, 349, 381
Espectro de densidad de energía, 312, 349, 381
Estabilidad, 48-50

sistemas LTI, 113-115, 695-698, 777-779
sistemas retroalimentados, 858-866
Estabilización con retroalimentación, 823-826
Estado cero, respuesta de, 720
Euler, L., 178
Expansión en el tiempo, propiedad de
serie discreta de Fourier, 221
transformada de Fourier de tiempo discreto, 377-380
transformada z, 769-770
unilateral, 793
Expansión en fracciones parciales, 909-920
señales y sistemas continuos y, 910-916
señales y sistemas discretos y, 916-920
Exponencial(es) compleja(s)
armónicamente relacionadas, 19
combinaciones lineales de exponenciales complejas armónicamente relacionadas. *Véase* Fourier, serie(s) de
generales, 20-21, 24-25
modulación de amplitud senoidal y, 583-585
periódicas, 16-20, 186
propiedades de periodicidad discretas, 25-30
Exponenciales. *Véase* Exponenciales complejas

Factor de escalamiento de amplitud, 483
Fase adelantada, 491-492
Fase en atraso, 491-492
Fase extendida, 433-434
Fenómeno de Gibbs, 200-201, 219, 294
Filtrado, definición de, 231
Filtro(s), 231-250
acoplado(s), 170-172, 275
Butterworth, 446-447, 505, 703-706
característica de la banda supresora ideal, 387
conformador(es) de frecuencia, 231, 232-236
diferenciadores, 232-234, 235
LTI de tiempo discreto, 234-236
continuos, 232-234, 235
de banda de paso, 237-238, 326
de fase lineal, causales, simétricos, 579-580
de frecuencia central variable, 325-327
de promedio móvil, 245-247, 476-482
de respuesta finita al impulso (FIR), 122
de respuesta infinita al impulso (IIR), 123, 476
diferenciador(es), 232-234, 235
discretos, 245-249, 476-482, 541-543
discretos descritos por ecuaciones de diferencias, 244-249
no recursivos, 245-249
recursivos de primer orden, 244-245
discretos recursivos de primer orden, 244-247
elípticos, 446-447
ideal, 237-239
continuos, 440, 442, 443
discretos, 384, 442, 443
respuesta al escalón de, 443
respuesta al impulso de, 321-322, 384, 442
respuesta en frecuencia de, 318
ideal selectivo en frecuencia, 237-239
LTI discreto(s), 234-236
no ideales, 444-447
caracterización en el dominio del tiempo y de la frecuencia, 444-447
no recursivos. *Véase* Filtros de respuesta finita al impulso (FIR)
no recursivos discretos, 476-482
diferenciadores continuos, 232-234, 235, 541
paso altas, 237-238, 241-244, 374-375, 387
RC, 239-244
paso bajas, 237
RC, 239-241, 241-244
paso banda, 237-238, 326
propiedades en el dominio del tiempo, 439-444
recursivo (respuesta infinita al impulso), 123, 476
respuesta en frecuencia de, 374-375
respuesta finita al impulso (FIR), 122
de fase lineal, causales, simétricos, 579-580
discretos, 476-482
respuesta infinita al impulso (IIR), 123, 476
selectivo(s) en frecuencia, 231, 236-239, 318, 423

con frecuencia central variable, 325-327
ideales, 237-239, 439-444
paso altas, 237-238, 241-244, 374-375, 387
paso bajas, 237, 318, 321-322, 374-375, 384, 440, 442, 443
paso banda, 237-238, 326
propiedades en el dominio del tiempo, 439-444
transformaciones paso bajas a paso altas, 498
Flanco
de la banda de paso, 445
de la banda supresora, 445
Forma cartesiana (rectangular) para números complejos, 71
Forma polar para números complejos, 71
Forma rectangular (cartesiana) para el número complejo, 71
Fórmula de suma finita, 73
Fourier, Jean Baptiste Joseph, 179-180,
Fourier, transformada rápida de (FFT), 182, 418. *Véase* Transformada rápida de frecuencia(s)
banda supresora, 237
de banda ancha, 615-617
de banda angosta, 613-615
de corte, 237, 436-439
de la banda de paso, 237
de Nyquist, 519
diferenciación en, 380
fundamental, 17-18
instantánea, 613
intermedia (IF), etapa de, 596
muestreo, 516
natural no amortiguada, 452-453
portadora, 584
senoidal, modulación de, 583, 611-619
señal moduladora de onda cuadrada periódica, 617-619
Función(es)
continuas, 32-38
de fase principal, 433, 434
del sistema de la trayectoria de retroalimentación, 820
discretas, 30-32
envolvente, 285
escalón unitario, 30-38
generalizadas, 36, 136
normalizadas, 273
ortogonales, 273-275
ortonormales, 273-275
propias, 183-184, 272
rampa unitaria, 135
sinc, 295
singulares. *Véase también* Impulso unitario
Walsh, 170, 726

Ganancia, 428
sistema de rastreo, 829-830
sistemas lineales retroalimentados, 835, 858-866

Homogeneidad (escalamiento), propiedad de, 53

Idealización, 67
Impulso, respuesta al
absolutamente integrable, 114
absolutamente sumable, 113
Impulso unitario, 30-38
cascada de dos sistema LTI e, 107
continuo, 32-38, 127-136, 292
definición del, a través de la convolución, 131-132
como pulso corto idealizado, 128-131
propiedad de selección, 90-92
discreto, 30-32, 367
propiedad de selección, 77
representación de sistemas LTI continuos en términos del, 90-94
representación de sistemas LTI discretos en términos del, 75-77
Índice de modulación, 591, 614
Integración en el dominio del tiempo, 690, 717
Integrador, 126-127
Integral de, convolución, 90-102
evaluación de la, 97-102
Interconexión
de retroalimentación, 43
en cascada (serie), 42
en serie (cascada), 42
paralela, 42-43
propiedad de convolución y análisis de la, 386-387
propiedad distributiva de la convolución y la, 105

retroalimentación, 43
sistemas LTI
función del sistema para la, 707-708
transformada de Laplace para la, 707-708
transformada z para la, 784
Interferencia de intersímbolo (ISI), 607-610
Interpolación, 549-555
de banda limitada, 523-524
lineal, 522-523, 526
usando la reconstrucción, 522-527
Inversión de fase, 532
Inversión en el tiempo, propiedad de, 8
de la serie continua de Fourier, 203-208
de la serie discreta de Fourier, 221
de la transformada continua de Fourier, 309
de la transformada de Fourier de tiempo discreto, 376-377
de la transformada de Laplace, 687
de la transformada z, 769
Invertibilidad de sistemas LTI, 109-111

Lacroix, S. F., 180
Lagrange, J. L., 178-179, 180
Laplace, P. S. de, 180
Laplace, transformada de, 654-740
análisis de sistema LTI y caracterización usando la, 693-706
causalidad, 693-695, 697
estabilidad, 695-698
linealidad de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, 698-700
bilateral, 655, 714
ceros de la, 660
como función del sistema, 693, 701-13
filtros Butterworth, 703-706
interconexiones de sistemas LTI, 707-708
representación en diagrama de bloques, 708-713,
diagrama de polos y ceros de la, 660-662, 674-682
evaluación geométrica de la, 674-682
sistemas de primer orden, 676-677
sistemas de segundo orden, 677-681
sistemas pasa todo, 681-682
inversa, 670-673
pares de transformadas, 692-693
polos de la, 660
propiedades de la, 682-692
conjugación, 687
convolución, 687-88
desplazamiento en el dominio de s, 685
desplazamiento en el tiempo, 684
diferenciación en el dominio de s, 688-690
diferenciación en el dominio del tiempo, 688
escalamiento en el tiempo, 685-687
integración en el dominio del tiempo, 690
linealidad, 683-684
tabla de, 691-692
teoremas del valor inicial y final, 690-691
región de convergencia para la, 657-658, 662-670
señal bilateral, 666-668
señal derecha, 665-666, 669
señal izquierda, 666, 669
transformada racional, 669
representación en el plano s de la, 660, 663-664
unilateral, 714-720
ejemplos de, 714-716
propiedades de la, 716-719
solución de ecuaciones diferenciales usando, 719-720
Lazo cerrado, sistema de, 818
función del sistema de, 820
polos de, 834-836
Linealidad, 53-56
Linealidad, propiedad de
de la serie continua de Fourier, 202, 206
de la serie discreta de Fourier, 221
de la transformada continua de Fourier, 301
de la transformada discreta de Fourier, 373
transformada de Laplace, 683-684
unilateral, 717
transformada z, 767
unilateral, 793
Longitudes de onda, 181

LTI. *Véase* Sistemas LTI lineal e invariante en el tiempo (LTI)
Lugar geométrico de las raíces, análisis del, 832-846
criterio del ángulo, 836-840
ecuación para polos de lazo cerrado, 834-836
propiedades de, 841-846
puntos extremos, 836

Magnitud de números complejos, 71
Margen de fase de sistemas lineal, 858-866
Método de expansión en series de potencias, 761-763
Michelson, Albert, 200
Modulación de amplitud (AM), 236-237, 322, 324, 583
portadora de tren pulsos, 601-604, 605
senoidal, 583-587
banda lateral única, 597-601
demodulación para, 587-594
discreta, 619-623
multiplexión por división de frecuencia (FDM) que usa, 594-597
portadora exponencial compleja, 583-585
portadora senoidal, 585-587
Modulación de amplitud de pulso, 604-610
digital, 610
interferencia de intersímbolo en, 607-610
Modulación de amplitud senoidal de banda lateral única, 597-601
Modulación de doble banda lateral (DSB), 598
Modulación de fase, 611-613
Modulación de frecuencia
de banda ancha, 615-617
de banda angosta, 613-615
Modulación. *Véase también* Modulación de amplitud senoidal
codificación de pulso, 610
de amplitud de pulso, 604-610
digital, 610
interferencia de intersímbolo en la, 607-610
de ángulo, 611-613
de banda angosta, 613-615
señal moduladora de onda cuadrada periódica, 617-619
de doble banda lateral (DSB), 598
de fase, 611-613
definición de, 582
discreta, 619-623
frecuencia senoidal, 583, 611-619
de banda ancha, 615-617
por desplazamiento de frecuencia (FSK), 646
por pulsos codificados, 610
porcentaje de, 591
Monge, G., 180
Muestreo, 29, 39, 514-581
con retenedor de orden cero, 520-522, 523-526
frecuencia de, 516
función de, 516
osciloscopio de, 534
periodo de, 516
procesamiento discreto de señales continuas, 534-545
diferenciador digital, 541-543
retardo de media muestra, 543-545
reconstrucción usando la interpolación, 522-527
señal paso banda, 564-565
señales continuas, 4
señales discretas, 545-555
decimación e interpolación, 549-555
tren de impulsos, 516-520, 545-549
teorema del, 514-515, 518
traslape (*aliasing*), 527-534
Muestreo del impulso continuo, propiedad de, 35
Multiplexión
de cuadratura, 646
definición de, 583
por división de frecuencia (FDM), 594-597
por división de tiempo (TDM), 604-605
Multiplicación, propiedad
de la serie continua de Fourier, 204-206
de la serie discreta de Fourier, 221, 222
de la transformada continua de Fourier, 322-327
de la transformada de Fourier de tiempo discreto, 388-390
Multiplicidades, 155

Números complejos, 71

Onda cuadrada. *Véase* Onda periódica cuadrada
Onda periódica cuadrada
continua, 193-195, 200-201, 209, 218-219, 285-286, 297-298
discreta, 219-220, 224
Orden cero, retenedor de, 520-522, 523-526
Oscilación amortiguada secundaria, 443, 454
Osciloscopio de muestreo, 534

Par de serie discreto de Fourier, 213
Par de transformadas de Fourier, 288
continuo, 329
discreto, 361, 392
Parte imaginaria
bidimensional, 356-357
coeficientes de la serie de Fourier, 216-217
del impulso unitario, 292
ecuación de síntesis para, 288, 300, 314
funciones sinc, 295
número complejo, 71
onda cuadrada periódica simétrica, 297-298
parte real de, 304
señal de pulso rectangular, 293-294
Parte real
coeficientes de la serie de Fourier, 216, 217
número complejo, 71
Pasatodo, sistemas, 430, 498, 681-682
Paso altas a paso bajas
transformaciones, 498
Paso invariante, transformación de, 828-908
Péndulo invertido, 818-819
Periodo de muestreo, 516
Periodo fundamental, 12
señal periódica continua, 186
señal periódica discreta, 211
Planta, 828
Polinomios de Laguerre, 738
Polos
de lazo cerrado, 834-836
transformada de Laplace, 660
Porcentaje de modulación, 591
Portadora de tren de pulsos, 601, 604, 605
Posición angular del telescopio, 816-818
Potencia de señales, 5-7, 312
Primera diferencia 111. *Véase también* Diferenciación, propiedad de
Problemas de extensión, 137
Procesamiento de imagen
filtros diferenciadores para, 232-234, 235
representación de fase y, 425-427
Promedio ponderado, 245
de promedio, no causal, 47
Propiedad de desplazamiento,
dominio de s, 717
transformada z unilateral, 794-795
serie continua de Fourier, 206
transformada continua de Fourier, 306-308
Propiedad de desplazamiento en frecuencia
serie continua de Fourier, 206
serie discreta de Fourier, 221
transformada continua de Fourier, 311, 328
transformada de Fourier de tiempo discreto, 373-375
Propiedad de modulación 323. *Véase también* Multiplicación, propiedad de
Propiedad de periodicidad de la transformada de Fourier de tiempo discreto, 373
Propiedad de superposición, 53
Propiedad distributiva de los sistemas LTI, 104-106
Pulso rectangular
continuo, 293-294
discreto, 365-366

Rastreo, sistemas de, 828-830
Realimentación. *Véase* Retroalimentación
Realización en forma directa I, 161-163
Realización en forma directa II, 161-163
Red de adelanto, 890
Red de atraso, 890
Región de convergencia
de la transformada de Laplace, 657-658, 662-670
señal bilateral, 666-668
señal derecha, 665, 666, 669
señal izquierda, 666, 669
transformada racional, 669
transformada z, 743-744, 748-757

centrada cerca del origen, 748-749
limitada por polos o infinito, 756
secuencia bilateral, 751-753
secuencia de duración finita, 749-750
secuencia derecha, 750-751, 752
secuencia izquierda, 751, 752
Relación de Euler, 71
Relación de Parseval
de la serie continua de Fourier, 205-206
de la serie discreta de Fourier, 223
de la transformada continua de Fourier, 312-314
de la transformada de Fourier de tiempo discreto, 380-382
Representación de magnitud-fase digital, 541-543
representación en diagrama de bloques de, 126
respuesta en frecuencia de sistemas LTI, 427-439
transformada de Fourier, 423-427
fase lineal y no lineal, 428-430
magnitud log y diagramas de Bode, 436-439
retraso de grupo, 430-436
Respuesta al escalón, 115-116
filtro paso bajas ideal continuo, 443
filtro paso bajas ideal discreto, 443
sistema de primer orden discreto, 461, 463
sistema de segundo orden discreto, 466, 468
sistema de suspensión de un automóvil, 476
Respuesta al impulso
absolutamente integrable, 114
absolutamente sumable, 113
asociada con el retardo de grupo, 435-436
filtro paso bajas ideal, 321-322, 384
filtro paso bajas ideal continuo, 442
filtro paso bajas ideal discreto, 442
sistema de primer orden discreto, 461-462
sistema LTI causal, 112
sistemas de segundo orden, 677-678
sistemas discretos, 466-468
Respuesta en frecuencia, 227-228
análisis de sistemas LTI y, 316
coseno elevado, 629
del coseno elevado, 629
del sistema de lazo abierto, 821
diagrama de Bode para racionales, 456-460
diferenciador ideal de banda limitada de tiempo continuo, 541
filtro discreto, 677
filtro paso altas, 374-375
ideal, 318
filtro paso bajas, 374-375
ideal discreto, 384
forzada, 118
lazo abierto, 821
racional, diagramas de Bode para la, 456-460
retraso continuo, 543
retraso discreto, 542
sistemas de primer orden, 677
sistemas de segundo orden, 677-678, 680
sistemas LTI, 427-439
Respuestas naturales, 119, 121k 122
Retardo, 44
de grupo, 430-436
media muestra, 543-545
unitario, 125
Retenedor(es)
de orden cero, 520-522, 523-526
de orden superior, 526-527
Retenedores de orden superior, 526-527
Retraso de fase, 491-492
Retraso en el tiempo de la transformada z unilateral, propiedad de, 793
Retraso unitario, 125
Retroalimentación. *Véase también* Sistemas retroalimentados lineales
acústica, 830-832, 855
aperiódica, 907
aplicaciones de, 820-832
audio, 830-832, 855
compensación de elementos no ideales, 821-822
dinámica de la población, 824-826
diseño de sistema inverso, 820-821
estabilización de sistemas inestables, 823-826
péndulo invertido, 818-819
posición angular del telescopio, 816-818
sistema para datos muestreados, 826-828

sistemas de rastreo, 828-830
de lazo cerrado, 818
degenerativa (negativa), 822, 831-832
desestabilización causada por la, 831-832
negativa (degenerativa), 822, 831-832
para estabilizar los sistemas inestables, 823-826
polos de lazo cerrado, 836-838
positiva (regenerativa), 823, 831-832
proporcional, 823
proporcional más derivativa, 824
proporcional, sistema de, 823-824
regenerativa (positiva), 831-832
Tipo *l*, 906
Rizo de la banda de paso, 445

Secuencia de *cd*, 224
Selección, propiedad de,
impulso continuo, 90-92
impulso discreto, 77
Selección de ventana, 420-422
Semiplano derecho, 666
Semiplano izquierdo, 666
Senoidales amortiguadas, 21
Señal(es)
aperiódica, 12, 80
bilateral, 666-668
complejas continuas, 15-21
complejas discretas, 21-30
continuas, 12
continuas y discretas, 1-7
ejemplos y representación matemática de las, 5-7
energía y potencia de las, 5-7
muestreo de, 4, 545-555
de banda de paso, 564-565
de duración finita, para transformada discreta de Fourier, 417-418
de entrada de banda limitada, 541
de la serie continua de Fourier, 206
de la serie discreta de Fourier, 221
derecha, 665-666
discretas, 12, 24, 211
ejemplos y representación matemática de, 1-5
energía y potencia de, 5-7
exponencial(es), 14-30
exponencial y senoidal, 14-30, 186
complejas continuas, 15-21
complejas discretas, 21-30
reales, 22, 23
exponenciales complejas generales, 24-25
exponenciales reales, 15, 22, 23
impares, 13-14
impulso unitario y funciones escalón unitario, 30-38
continuas, 32-38
discretas, 30-32
izquierda, 666
moduladora, 583
muestreo de, 4, 545-555
decimación e interpolación, 549-555
tren de impulsos, 545-549
ortogonales, 280-281
ortonormales, 280-281
par, 13-14
para serie continua de Fourier, 206
para serie discreta de Fourier, 221
periódica armónica impar, 262
periódica armónica impar continua, 262
periódicas 11-13. *Véase también* Fourier, transformada de; Fourier, serie(s) de; exponenciales complejas periódicas; señales senoidales
portadora, 583
potencia de las, 312
reales, 22, 23
senoidales, 14-30, 186
transformación de la variable independiente, 7-14
ejemplos de, 8-11
transformada continua de Fourier para, 359-362
transformada de Fourier de tiempo discreto para, 417-418
Senoidales amortiguadas, 21
Serie infinita de Taylor, 277
Serie(s) de Fourier, 177-283. *Véase también* Filtro(s)
continuos, 186-211
combinaciones lineales de exponenciales complejas armónicamente relacionadas, 186-190
condiciones de Dirichlet, 197-200

conjugación y simetría conjugada de, 204-205
convergencia de, 195-201
determinación de, 190-195
dualidad entre transformada de Fourier de tiempo discreto y, 395-396
ecuación de síntesis de, 191
ejemplos, 205-211
fenómeno de Gibbs, 200-201, 219
onda cuadrada, 193-195, 200, 201, 209, 218-219
propiedad de desplazamiento en el tiempo de, 202-203
propiedad de escalamiento en el tiempo de, 204
propiedad de inversión en el tiempo de, 203
propiedad de linealidad de, 202
propiedad de multiplicación de, 204
relación de Parseval para, 205, 206
tabla de propiedades, 206
discretas, 211-226
combinaciones lineales de exponenciales complejas armónicamente relacionadas, 211-212
convergencia de, 219-221
determinación de, 212-221
ecuación de análisis de, 213
ecuación de síntesis de, 213
onda cuadrada, 219-220, 224
perspectiva histórica, 178-182
propiedad de multiplicación de, 222
propiedad de primera diferencia de, 222-223
relación de Parseval para, 223
sistemas LTI y, 226-231
tabla de propiedades, 221
Simetría conjugada, 204-205, 206, 221, 303-306, 375
Sistema(s), 38-56
análisis del lugar geométrico de los, 832-846
criterio del ángulo, 836-840
ecuación para polos de lazo cerrado, 834-836
propiedades de, 841-846
puntos extremos, 836
ancho de banda de los, 352-353
causales, 46-48, 112-113, 116-127
descritos mediante ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes, 116, 121-124, 396-399
descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, 116, 117-121
propiedad de suficiencia de la parte real, 417
representación en diagrama de bloques para los, 124-127, 708-713, 784-789
con y sin memoria, 108-109
continuos, 448-460, 90-102
continuos de primer orden, 448-451
continuos y discretos, 38-43
de primer orden, 448-451, 461-465
de segundo orden, 451-456, 465-472
ejemplos de, 39-41
interconexión de, 41, 43
representación de la integral de convolución, 94-102
criterio de estabilidad de Nyquist para, 846-858
continuos, 850-855
discretos, 856-858
propiedad de circunvalación de, 847-850
críticamente amortiguados, 453, 467
de audio, 830-832, 855
de datos muestreados, 826-828
de la trayectoria directa, función del, 820
de lazo abierto, 818
de lazo cerrado, 820
de primer orden, 465-465
de segundo orden, 465-472
de segundo orden continuos, 451-456
de segundo orden discretos, 465-472
de suspensión, análisis del, 473-476
de suspensión de un automóvil análisis del, 473-476
de trayectoria de retroalimentación, 820
de trayectoria directa, 820
descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, 330-333

diagramas de Bode para respuestas racionales en frecuencia y, 456-460
discreta, 75-90
representación de la suma de convolución, 77-90
representación en términos de impulsos, 75-77
discretos, 461-472
discretos de primer orden, 461-465
ejemplos de, 39-41
estabilidad para, 113-115
estables condicionalmente, 892
filtrado con, 231, 234-236
filtros Butterworth, 703-706
filtros conformadores de frecuencia en, 65, 168, 170-172, 738
sistemas en, 232
función del LTI para interconexiones de, 707-708
funciones de, 227
identidad, 44
incrementalmente lineales, 56
interconexión de
transformada de Laplace para, 707-708
transformada z para, 784
interconexión de sistemas LTI, 707-708, 784
interconexiones de, 41-43
inversa, 109-111, 734
inversos, 45-46
invertibles, 45-46
LTI causales, 46-48, 112-113, 116-127
LTI con y sin memoria, 108-109
LTI inverso, 734
LTI lineal e invariante en el tiempo. *Véase también* Ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes; ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes
LTI, propiedad asociativa de, 107-108
margen de ganancia y fase, 835, 858-866
mecánico masa-resorte-amortiguador, 824
no amortiguado, 454
no anticipativos, 46-47
no causales promediadores, 47
pasa-todo, 430, 498, 681-682
primer orden, 448-451
propiedad de convolución y, 319-321
propiedades de los, 44-56, 103-108
asociativa, 107-108
causalidad, 46-48
con memoria y sin memoria, 44-45
conmutativa, 104
distributiva, 104-106
estabilidad, 48-50
invariancia en el tiempo, 50-53
invertible e inversa, 45-46
linealidad, 53-56
propiedades y usos de los, 819-820
representación en diagrama de bloques para, 708-713, 784-789
de primer orden, 124-127
representación en términos de impulsos, 90-94
respuesta a exponenciales complejas, 182-186, 226-231
respuesta al escalón unitario de, 115-116
respuesta al impulso unitario de la conexión en cascada de dos, 107
respuesta en frecuencia de, 316
representación de magnitud-fase de, 427-39
retroalimentados lineales, 816-908
Véase también Sistema de lazo cerrado, 818
retroalimentados. *Véase* Sistemas retroalimentados lineales
segundo orden, 451-456
selección de ventana en el diseño de, 420-421
serie de Fourier y, 226-231
sin memoria, 44
sobreamortiguado, 453
subamortiguados, 467
tipo l, 906
transformada de Laplace como, 693, 701-703
transformada de Laplace para, 693-695, 697
transformada de Laplace para analizar y caracterizar, 693-706
causalidad, 693-695, 697
estabilidad, 695-698
linealidad de ecuaciones

diferenciales lineales con coeficientes constantes, 698-700
transformada z como, 781-789
transformada z para analizar y caracterizar, 774-783
causalidad, 776-779
estabilidad, 777-779
transformada z para, 776-777
Sobremuestreo, 529, 552-553
Sobrepaso, 454
Submuestreo, 527-534, 551
Suficiencia de la parte real, 350, 417
Suma consecutiva de la serie discreta de Fourier, 221
Suma infinita, fórmula de la, 73-89
Sumador, 44
Sumadores en diagramas a bloques, 125, 126
Superposición, integral de. *Véase* Convolución, integral de
Superposición. *Véase* Convolución, suma de

TDM. *Véase* Multiplexión por división de tiempo
Técnicas
de muestreo en banda de paso, 564-565
Teorema del valor inicial
transformada de Laplace, 690-691
transformada z, 773-774
Tiempo, 3-4
constantes de, 448
de retraso, 406
de subida, 352-353, 444
dominantes, 500-501
invariancia en el, 50-53, 77
ventana de, 420
Transformación, 814-815
bilineal, 498, 814-815
de Hilbert, 351
de la variable independiente, 498
de paso invariante, 828, 908
logaritmo de, 651
paso altas a paso bajas, 7-14
paso bajas a paso altas, 828, 908
Transformada
de Fourier, 180
de Laplace bilateral. *Véase* Laplace, transformada de
discreta de Fourier (DFT) para señales de duración finita, 417-418
inversa de Fourier, 284, 288
inversa de Laplace, 670-673
Transformada continua de Fourier. *Véase también* Laplace, transformada de
condiciones de Dirichlet, 290-316
convergencia de, 289-290
ecuación de análisis, 300
ejemplos de, 290-296
fenómeno de Gibbs, 294
inversa, 284, 288
para señal aperiódica, 285-289
parte imaginaria de, 304
propiedades de, 300-330
conjugación y simetría conjugada, 303-306
convolución, 314-322
desplazamiento de tiempo, 301-303
diferenciación e integración, 306-308
dualidad, 295, 309-311, 322
escalamiento de tiempo y frecuencia, 308-309
linealidad, 301
multiplicación, 322-327
relación de Parseval, 312-314
tablas de, 328-330
señales impar, 304
señales par, 304
señales periódicas, 296-300
tren de impulsos, 299-300
Transformada de Fourier (FFT), 180
evaluación geométrica del diagrama de polos y ceros, 674-682, 763-767
inverso, 284, 288
rápida de Fourier (fft), 182, 418
representación de magnitud-fase de, 423-427
sistema de primer orden, 676-677, 763, 765
sistemas de segundo orden, 677-681, 765, 767
sistemas pasa todo, 681-682
Transformada de Fourier de tiempo discreto, 358-422
desarrollo de la, 359-362
ecuación de análisis, 361-390
ecuación de síntesis, 361-390
ejemplos de, 362-366
impulso unitario, 367
problemas de convergencia asociados

con la, 366-367
propiedades de, 372-390
conjugación y simetría conjugada, 375
convolución, 382-388
desplazamiento de tiempo y de frecuencia, 373-375
diferenciación en frecuencia, 380
diferenciación y acumulación, 375-376
dualidad, 390-396
expansión de tiempo, 377-380
inversión de tiempo, 376-377
linealidad, 373
multiplicación, 388-390
periodicidad, 373
relación de Parseval, 380-382
tabla de, 390-391
pulso rectangular, 365-366
señales de duración finita, 417-418
señales periódicas, 367-372
transformada z y, 743
tren de impulsos, 371-372, 376
Transformada de Laplace unilateral, 714-720
ejemplos de, 714-716
propiedades de la, 716-719
solución de ecuaciones diferenciales usando la, 719-720
Transformada z, 741-815
bilateral, 742-789
con coeficientes constantes, 779-781
estabilidad, 777-779
definición, 742
diagrama de polos y ceros, 763-767
ejemplos de, 79-92
análisis de sistemas LTI y caracterización usando la, 774-783
causalidad, 776-777
ecuaciones de diferencias lineales
evaluación geométrica de, 763-767
funciones del sistema, 781-789
para interconexión de sistemas LTI, 784
representación en diagrama de bloques, 784-789
inversa, 757-763
sistemas de primer orden, 763-765
sistemas de segundo orden, 765-767
pares de transformada z, 774-776
propiedades de la, 767-774
conjugación, 770
convolución, 770-772
desplazamiento en tiempo, 767-768
diferenciación en el dominio de z, 772
escalamiento en el dominio de z, 768-769
expansión en tiempo, 769-770
inversión en tiempo, 769
linealidad, 767
tabla de, 775
teorema del valor inicial, 773-774
región de convergencia para, 743-744, 748-757
centrada alrededor del origen, 748-749
limitada por polos o infinito, 756
secuencia bilateral, 751-753
secuencia de duración finita, 749-750
secuencia derecha, 750-751, 752
secuencia izquierda, 751-752
transformada de Fourier de tiempo discreto y, 743
unilateral, 742, 789-796
ejemplos de, 79-92
propiedades de, 792-795
solución de ecuaciones de diferencias usando, 795-796
Transformada z inversa, 757-763
ejemplos de, 79-92
Transformada z unilateral, 742, 789-796
ejemplos de, 79-92
propiedades de la, 792-795
solución de ecuaciones en diferencias usando la, 795-796
Transición, banda de, 445
Transmodulación (transmultiplexión) discreta, 623, 624
Traslape (*aliasing*), 527-534
Tren de impulsos
serie continua de Fourier de, 208-210
transformada de Fourier continua de, 299-300
transformada de Fourier discreta de, 371-372, 376
Tren de impulsos, muestreo por, 516-520, 545-549
Tren periódico de impulsos
serie continua de Fourier del, 208-210

transformada continua de Fourier del, 299-300
transformada de Fourier de tiempo discreto del, 371-372, 376
Triangular (Bartlett), ventana, 421
Trigonométrica, serie, 178-179

Valor final, teorema del, 690-691
Valor propio, 183, 272
Variable independiente, 3-4
transformación de la, 7-14
Velocidad de Nyquist, 519, 556
Ventana de Hanning, 422
Ventana rectangular, 420
Verificación de paridad, 610
Voz, codificación de, 633-634